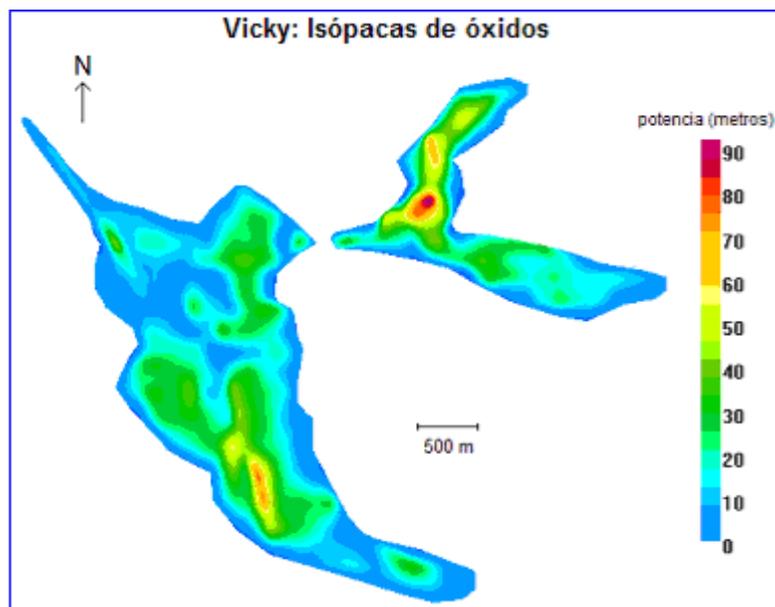


Estimación de Recursos Mineros

por

Marco Antonio Alfaro Sironvalle

Doctor en Geoestadística, Escuela de Minas de París
Profesor de Evaluación de Recursos Mineros, USACH
Profesor de Probabilidades y Procesos Estocásticos, U. de Chile
Profesor de Estadística Aplicada y Teoría de Probabilidades, U. de Los Andes
Profesor de Evaluación de Recursos Mineros, U. de Concepción.
Profesor Recursos Mineros, U. Católica de Valparaíso



Julio, 2007

Algunas citas:

Se sabe que bajo la influencia de masas en la superficie de la tierra, de los que no se está todavía bien informado, el polo de la tierra sufre pequeñas variaciones. Ocupémonos, por ejemplo de la coordenada x , su variación en el curso del tiempo está representada, para las últimas decenas de años por la curva de la figura:



Que tiene irregularidades suficientes para pensar en un fenómeno de fluctuaciones. Sin embargo, a primera vista, toda cuestión de probabilidad está excluída de este problema pues $x(t)$ es conocida a medida que las observaciones se verifican en el curso del tiempo; y, naturalmente, no conocemos el futuro de $x(t)$, pero esta función es única, puesto que no hay más que una Tierra en el universo. No obstante, nada nos impide imaginar una infinidad de sistemas macroscópicamente idénticos a la Tierra y que no difieren unos de otros más que por las modificaciones de masas superficiales, las cuales supondremos están sometidas a ciertos mecanismos aleatorios. Esto nos lleva a considerar que la función observada $x(t)$ no es más que una realización posible de una función aleatoria $X(t)$ definida con base en una categoría de experimentos que no tienen otra existencia que la que podríamos llamar intelectual. Esta manera de operar no es lícita más que en el caso de que tengamos razones para pensar que, partiendo de las propiedades estadísticas de la función aleatoria $X(t)$, definida en base de la clase de experimentos que hemos imaginado, podemos deducir resultados válidos para la evolución de una determinación particular de $X(t)$, y especialmente para $x(t)$. Podremos ver entonces que si nuestras hipótesis conducen a resultados comprobados por la experiencia y, en los casos favorables, podremos prever, dentro de ciertos límites, el valor futuro de $x(t)$. Fundándose en consideraciones análogas a las que acabamos de estudiar, podrá decirse que la velocidad del viento o la temperatura en un punto del Globo son funciones aleatorias del tiempo.

A. Blanc-Lapierre, 1940

“Cum deus calculat fit mundus”

Según dios calcula se va creando el mundo

G. Leibnitz, 1700

“Entre dos modelos geoestadísticos, elegir el más simple”

G. Matheron, 1975

Prefacio

Estimado lector: Este texto contiene mi experiencia como profesor de evaluación de recursos mineros, desde 1972 a la fecha, realizado con didáctica y con dialéctica, entendiendo por didáctica el arte de enseñar y por dialéctica el arte de razonar correctamente.

Quedaré muy agradecido si me hace llegar sus consultas o sugerencias a marco.alfaro@vtr.net , de manera de mejorar futuras ediciones.

Todo lo malo que encuentre en este texto se debe a mi persona y todo lo bueno se debe a mis dos maestros, profesores de la Escuela Nacional Superior de Minas de París: Georges Matheron, creador de la geoestadística, quién me enseñó esta apasionante disciplina y Phillippe Formery quien me inculcó el “gusto” por las probabilidades.



Georges Matheron 1930-2000



Phillipe Formery 1928-2005

Tabla de Materias

<u>Prefacio</u>	2
<u>Tabla de materias</u>	3
<u>Capítulo I: Los métodos tradicionales de estimación de recursos</u>	4
La media aritmética	5
Los polígonos	7
El método del inverso de la distancia	8
Crítica general de los métodos tradicionales de estimación de leyes	11
<u>Capítulo II: Geoestadística y Teoría de las Variables Regionalizadas</u>	17
Notación condensada	17
Ejemplos de variables regionalizadas	18
Campo y soporte	24
Variables aditivas	28
Objetivos de la teoría	30
El modelo matemático de la geoestadística: Las funciones aleatorias	32
<u>Capítulo III. El variograma</u>	35
Cálculo del variograma para una línea muestreada regularmente	36
Comportamiento del variograma para distancias pequeñas	38
Comportamiento del variograma para grandes distancias	45
Cálculo del variograma para una malla regular bidimensional	52
Cálculo del variograma para mallas irregulares	68
Ajuste de un variograma a un modelo teórico	73
Los modelos de variograma	77
Ajuste en el espacio de dos o tres dimensiones	85
Caso isótropo	85
Caso anisótropo	86
Anisotropía geométrica	87
Anisotropía zonal	89
<u>Capítulo IV. El error de estimación</u>	91
Cálculo de σ^2_E	96
Significado de los términos de la expresión de σ^2_E	98
<u>Capítulo V. El kriging</u>	105
Interés del kriging	105
Las ecuaciones del kriging	109
Varianza del error	112
Kriging puntual	114
Propiedades del kriging	116
Vecindad de estimación	118
Estrategia de búsqueda	120
<u>VI. Bibliografía</u>	124

Capítulo I

Los Métodos Tradicionales de Estimación de Recursos Mineros

La estimación de recursos mineros se puede dividir en dos partes:

- a) Estimación global: interesa estimar la ley media y el tonelaje de todo el yacimiento (o de una zona grande S dentro del depósito o yacimiento)

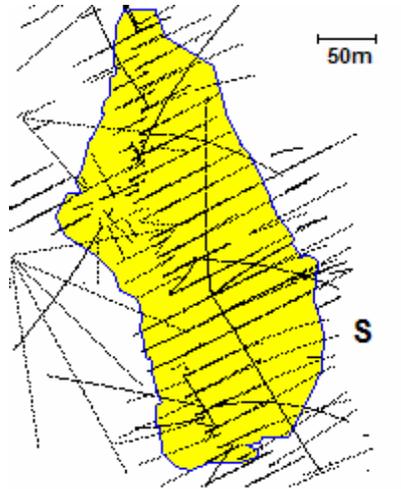


Figura I.1: Zona 3D a estimar e información disponible. ¿Cuál es la ley media y el tonelaje de S?

Se tiene un conjunto de leyes z_1, z_2, \dots, z_N de mineral localizadas en los puntos x_1, x_2, \dots, x_N

- b) Estimación local: Interesa estimar la ley media de unidades o bloques dentro de S, con el fin de localizar las zonas ricas y pobres dentro de esta zona S.

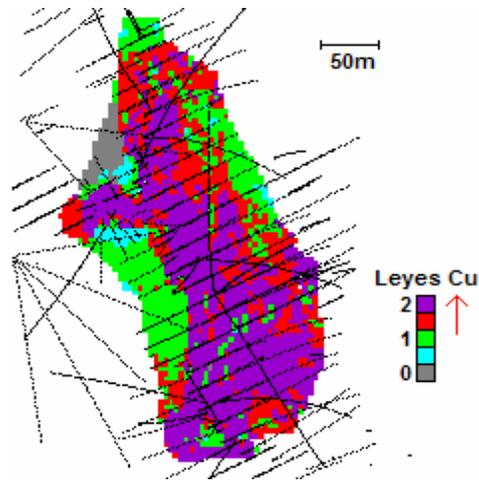


Figura I.2: Estimación local con bloque unitario o unidad básica de cálculo. Modelo de bloques de 15m x 15m x 15m.

La estimación global y local están relacionadas porque se pueden obtener valores globales al componer los valores locales de los bloques v_i .

A continuación estudiaremos los métodos tradicionales más importantes, desde un punto de vista crítico.

I.1 La media aritmética

El método de la media aritmética se basa en lo siguiente: Para estimar la ley media de un conjunto S se promedian las leyes de los datos que están dentro de S.

Ejemplo: Consideremos el caso de un cuadrado con 7 muestras interiores:

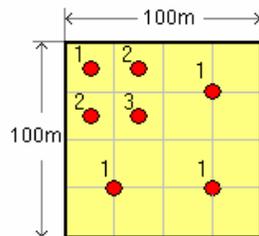


Figura I.3: Ejemplo bidimensional. Existe una agrupación de datos.

$$\hat{z}_s = \frac{1+1+1+3+2+2+1}{7} = \frac{11}{7} = 1.57$$

La fórmula general es:

$$\hat{z}_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$$

Comentarios acerca del método:

- Todos los datos tienen el mismo peso $1/N$
- Muy simple. Fácil de calcular
- Produce malos resultados cuando hay agrupaciones de datos. En el ejemplo de la figura anterior existe una agrupación de datos en la zona de alta ley: El valor 1.57 aparece como demasiado alto.
- No funciona bien en estimaciones locales porque quedan bloques sin información, tal como muestra la figura I.4:

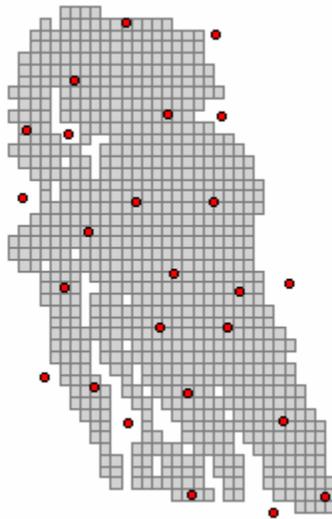


Figura I.4: Un banco en el depósito de MMH. Bloques de 10mx10mx10m. En gris, zona mineralizada, en rojo la intersección de los sondajes con el banco.

I.2 Los polígonos.

El método de los polígonos se basa en lo siguiente: Asignar a cada punto del espacio la ley del dato más próximo. Para estimar una zona S se ponderan las leyes de los datos por el área (o volumen) de influencia S_i .

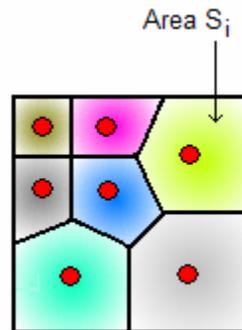


Figura I.5: Método de los polígonos. Hay que calcular el área de 7 polígonos.

Ejemplo: En el mismo caso anterior se tiene:

$$\hat{z}_S = 1.36$$

La fórmula general es:

$$\hat{z}_S = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N S_i z_i \quad (S = S_1 + S_2 + \dots + S_N)$$

Comentarios:

- Complicado, requiere compás, regla, planímetro.
- El peso del dato Z_i es S_i / S .
- Funciona mejor con agrupaciones de datos que la media aritmética.
- Difícil de implementar en tres dimensiones.

- En general no es adecuado en estimaciones locales porque asigna la misma ley a todos los bloques que están dentro de un mismo polígono. Produce problemas con datos anómalos.

La figura 1.6 muestra la dificultad de aplicar el método de los polígonos. En el espacio de 3 dimensiones el método (poliedros) es aún más complicado:

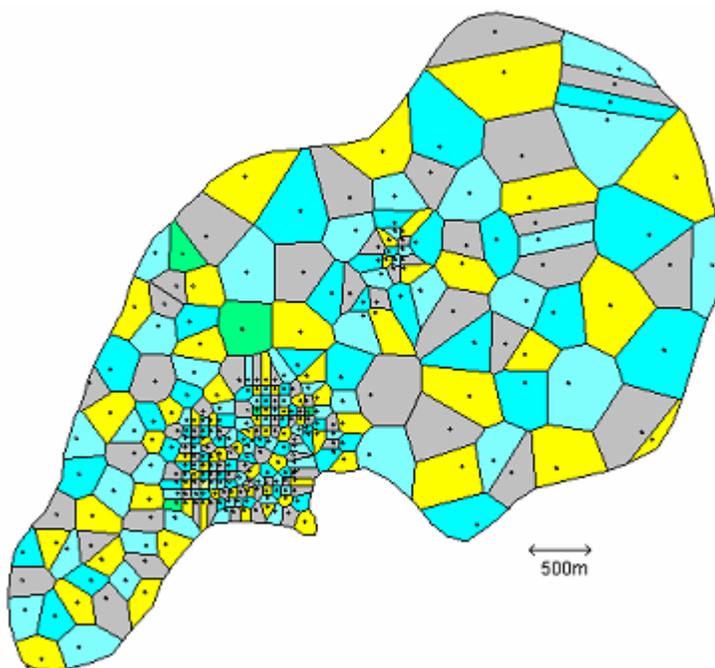


Figura 1.6: Salar de Atacama (se trata de salmueras con contenidos de litio, boro, potasio, sulfatos). Puntos de muestreo y de bombeo. Observar la agrupación (cluster) de los puntos en la zona central.

I.3 El método del inverso de la distancia

El método del inverso de la distancia se basa en lo siguiente: Asignar mayor peso a las muestras cercanas y menor peso a las muestras alejadas a S. Esto se consigue al

ponderar las leyes por $1/d_i^\alpha$, ($\alpha = 1, 2, \dots$; d_i = distancia entre la muestra i y el centro de gravedad de S).

Si $\alpha = 1$ se tiene el inverso de la distancia (ID).

Si $\alpha = 2$ se tiene el inverso del cuadrado de la distancia (ID2).

Ejemplo: En el caso anterior se obtienen las estimaciones siguientes:

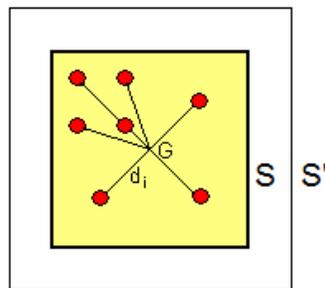


Figura I.7: Método del inverso de la distancia a la potencia alfa. Hay que calcular las distancias entre los datos y el centro del bloque

$$z_1 = 1.78 \text{ (inverso de la distancia)}$$

$$z_2 = 2.06 \text{ (inverso del cuadrado de la distancia)}$$

La fórmula general es:

$$\hat{z}_S = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{d_i^\alpha}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i^\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

Comentarios:

- Simple, fácil de calcular.
- Se adapta mejor en estimaciones locales que globales.
- No funciona bien con agrupaciones de datos.
- Atribuye demasiado peso a las muestras cercanas al centro de gravedad. En particular no está definido si $d_i = 0$ (muestra en el centroide de S)
- No toma en cuenta la forma ni el tamaño de S (en el ejemplo S' tiene la misma ley que S porque su centroide coincide con el de S).

A veces, para evitar el problema de las agrupaciones de datos, se utiliza una búsqueda octogonal: Dentro de cada octante (a veces cuadrante) sólo se considera la muestra más cercana al centroide, tal como muestra la figura siguiente:

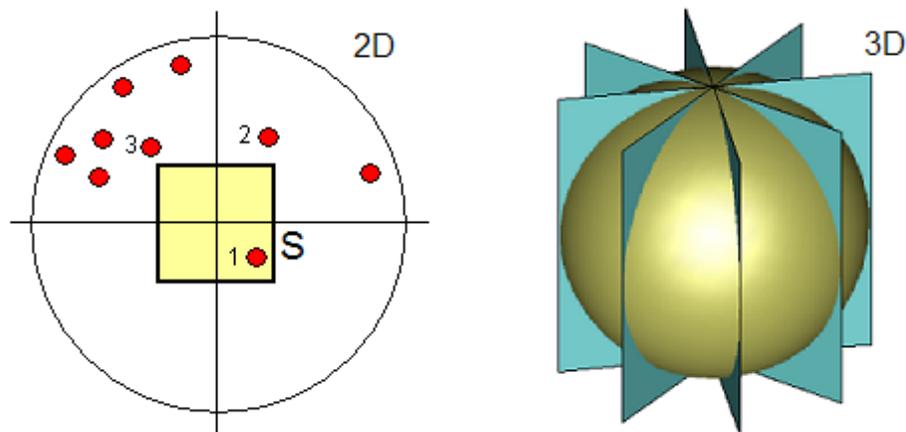


Figura I.8: Búsqueda octogonal. Se podrían utilizar las k (¿cómo definir k ?) muestras más cercanas al centro del bloque, dentro de cada octante.

En este ejemplo solo las muestras 1, 2, 3 intervienen en la estimación del bloque S.

I.4 Crítica general de los métodos tradicionales de estimación de leyes

De la presentación anterior podemos hacer los comentarios siguientes sobre los métodos estudiados:

- Son empíricos...
- Demasiado geométricos.
- No consideran la estructura del fenómeno mineralizado.

Por estructura entenderemos lo siguiente:

- i) La continuidad de las leyes: Existen casos desfavorables en los cuales las leyes son erráticas y otros más favorables en los cuales las leyes son regulares.

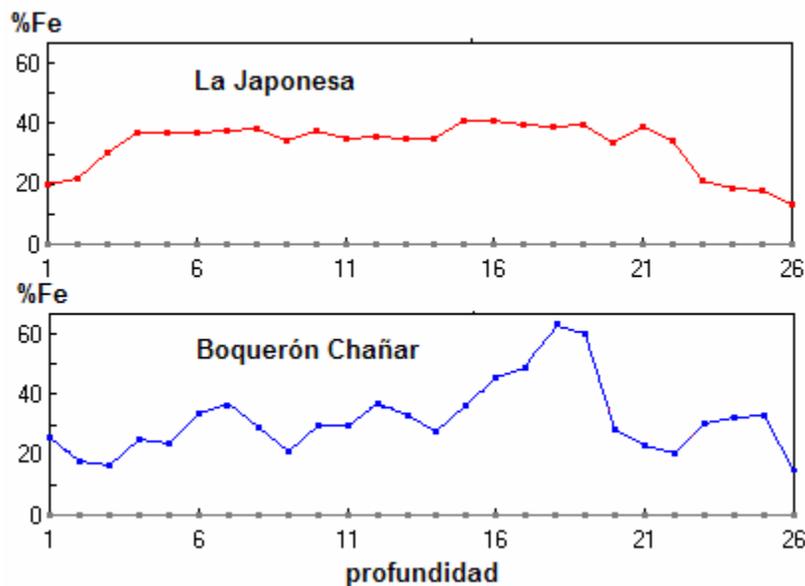


Figura I.9: Leyes de Fe. Arriba, sondaje vertical en mina de hierro La Japonesa. Abajo, sondaje vertical en mina de hierro Boquerón Chañar. Ambos tienen la misma ley media, 32% Fe. ¿Cuál es más continuo?

- ii) la posible presencia de anisotropías, es decir direcciones en las cuales la variación de leyes es privilegiada (ver la figura I.10).

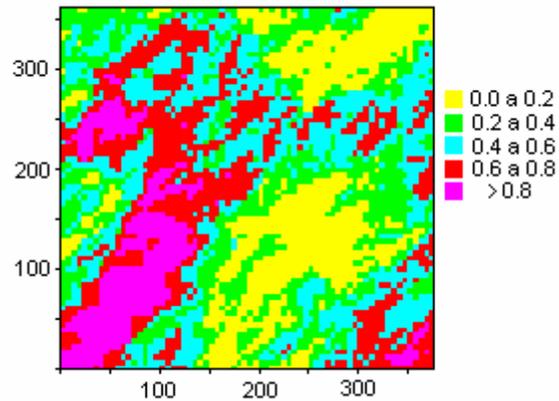


Figura I.10: Anisotropías de las leyes de cobre en una planta del depósito RT. dimensiones en metros. Valores interpolados.

Ejemplo: En el caso de la figura I.11, las leyes $z_1 = 1.25$ y $z_2 = 1.75$ son simétricas con respecto al bloque (se observan cuatro isoleyes):

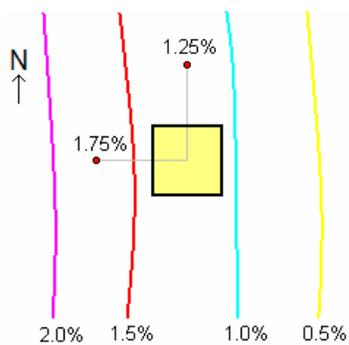


Figura I.11: Bloque a estimar e isoleyes anisotrópicas en una planta. En la mina Chuquicamata la situación es similar, las leyes decrecen sistemáticamente de oeste a este, ver figura I.12.

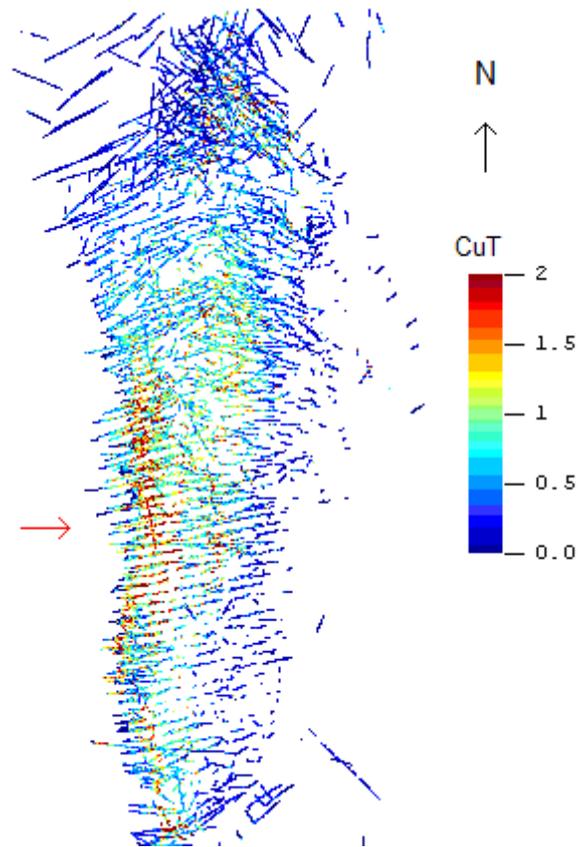


Figura I.12: Proyección horizontal de todos los sondajes de la mina Chuquicamata. Se observa la degradación de leyes en la zona central, de oeste a este.

Los polígonos y el inverso de la distancia asignan la misma ley al bloque S:

$$\hat{z}_S = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1.25 + 1.75}{2} = 1.5$$

¡Sin embargo, la ley media de S es inferior a 1.5%!

- Los métodos tradicionales de estimación no proporcionan el error asociado a la estimación; entregan un único valor, por ejemplo $\hat{z}_S = 1.22\% Cu$.

Sea z_s la ley verdadera desconocida de S. Sería interesante poder escribir una ecuación del tipo:

$$z_s = \hat{z}_s \pm error$$

La magnitud del error nos cuantificaría la calidad de la estimación y nos indicaría la necesidad eventual de hacer más sondajes.

- En general estos métodos presentan un fenómeno conocido como sesgo condicional, el cual se traduce en la práctica por una sobre-estimación de las leyes altas y una sub-estimación de las leyes bajas.

Describiremos este fenómeno con un ejemplo extremo tomado de un caso real: Un yacimiento todo o nada: O bien hay mineral con ley 1.0 o bien hay estéril con ley 0.0. El mineral se representa de color gris en la figura siguiente (el valor numérico corresponde a la proporción de mineral dentro de cada bloque; existen sondajes positivos en rojo, con ley 1.0 y negativos en blanco, con ley 0.0):

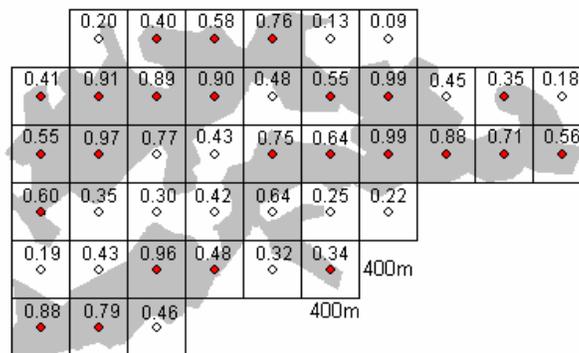


Figura I.13: Oficina Ossa. Depósito de nitratos-yodo. Malla inicial de reconocimiento de 400mx400m.

Debido a que los sondajes caen en el centro del bloque, no se puede aplicar inverso de la distancia. El método de los polígonos se puede aplicar y estima la ley de un bloque

por la ley del sondaje central. En este caso se puede calcular el porcentaje mineralizado real del bloque, obtenido a partir de una malla de 25mx25m (correspondiente al valor superior en cada bloque) que se realizó posteriormente.

Observamos que el promedio de las leyes verdaderas es 0.55 y que el promedio de las leyes estimadas es $24 / 42 = 0.57$. Se dice que no hay sesgo global.

Sin embargo, existe el sesgo condicional: Para leyes altas ocurre que siempre la ley estimada es superior a la ley real, y para leyes bajas, la ley estimada es siempre inferior a la ley real.

Al aplicar una ley de corte sobre las estimaciones, ocurre entonces que la ley mina es siempre superior a la ley de la planta.

El sesgo condicional se puede comprobar en una mina a cielo abierto, al comparar las leyes estimadas de los bloques (modelo de largo plazo) con el promedio de los pozos de tronadura de los bloques (información de corto plazo). En algunas minas este proceso de comparación se llama reconciliación de leyes.

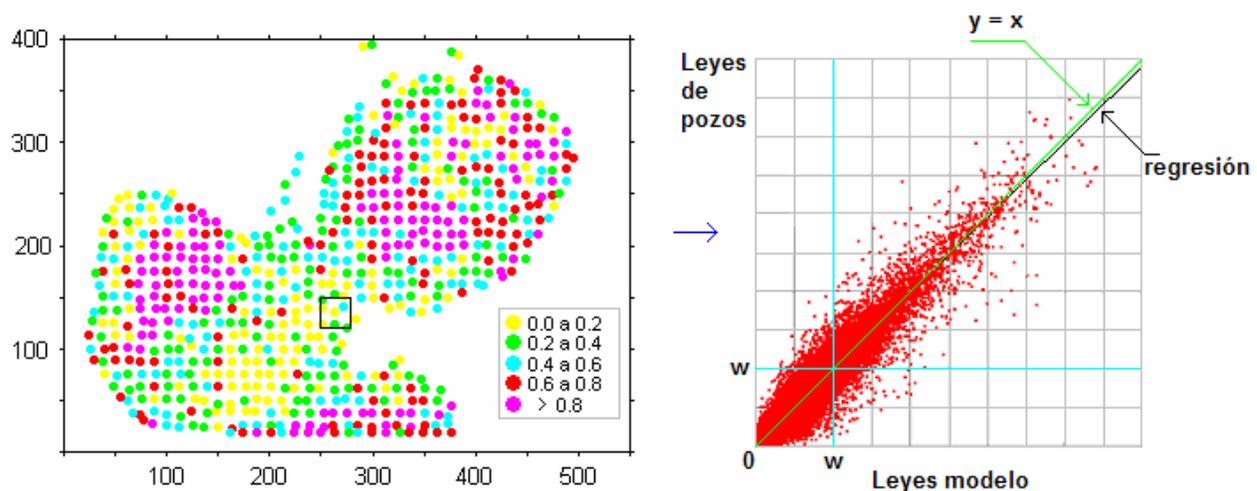


Figura 1.14: Pozos de tronadura en mina Lomas Bayas. Leyes de cobre. Dimensiones en metros. Se observa un bloque de 25mx25mx15m. A la derecha, el diagrama de dispersión. Si se aplica una ley de corte w , es decir se decide abandonar los bloques cuya ley es menor que w , entonces existen bloques de mineral que van a botadero y bloques de estéril que van a planta.

La figura I.15 muestra la información de largo plazo y de corto plazo en la mina Los Bronces. Se observa la presencia de datos agrupados en las zonas de alta ley.

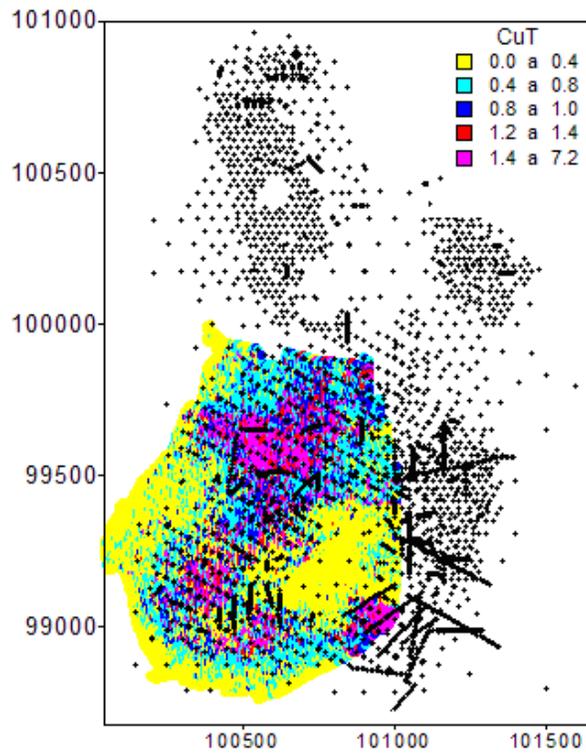


Figura I.15: Información de largo plazo (sondajes, en negro) y de corto plazo (pozos de tronadura, en colores). Los sondajes están agrupados en las zonas de alta ley.

Capítulo II

Geoestadística y Teoría de las Variables Regionalizadas

En términos mineros se define la geoestadística como la aplicación de la teoría de las variables regionalizadas a la estimación de los recursos mineros.

Una variable regionalizada es una función que representa la variación en el espacio de una cierta magnitud asociada a un fenómeno natural.

Sea x un punto del espacio. Se designa la variable regionalizada por la notación $z(x)$.

II.1 Notación condensada

Antes de estudiar ejemplos de variables regionalizadas, mencionemos que en geoestadística se utiliza la notación condensada: Un punto del espacio se representa por la letra x . Por ejemplo la ley en el punto x se representa por $z(x)$. Por consiguiente, $z(x)$ puede significar:

- $z(x)$ si el problema es unidimensional (1-D)
- $z(x_1, x_2)$ si el problema es bidimensional (2-D)
- $z(x_1, x_2, x_3)$ si el problema es tridimensional (3-D)

Se observa que existen problemas de notación: Se acostumbra a designar una variable regionalizada con la letra z , lo cual coincide con la notación utilizada para la cota o elevación.

II.2 Ejemplos de variables regionalizadas

Ejemplo 1: En el espacio de una dimensión, sea $z(x)$ = Ley de Cu a lo largo de una galería:

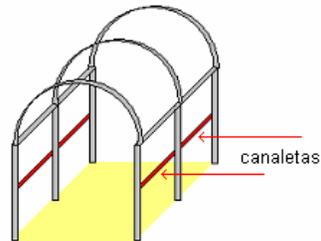


Figura II.1: Canaletas en una galería.

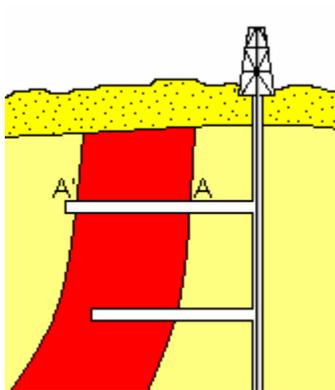


Figura II.2: Galería reconocida entre los puntos A y A'

Las leyes de las canaletas se pueden graficar:

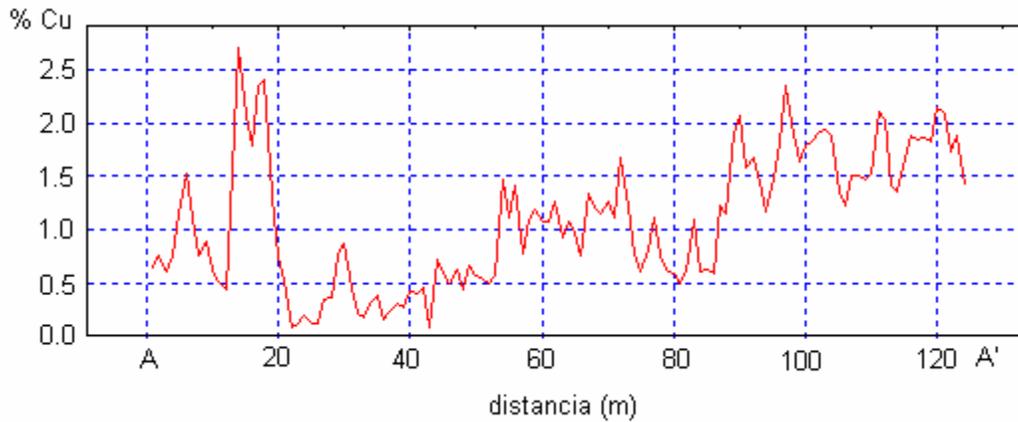


Figura II.3: Leyes de canaletas entre A y A'. Mina Carola.

Ejemplo 2: En la dimensión tiempo (una dimensión t), el precio de un metal $p(t)$.

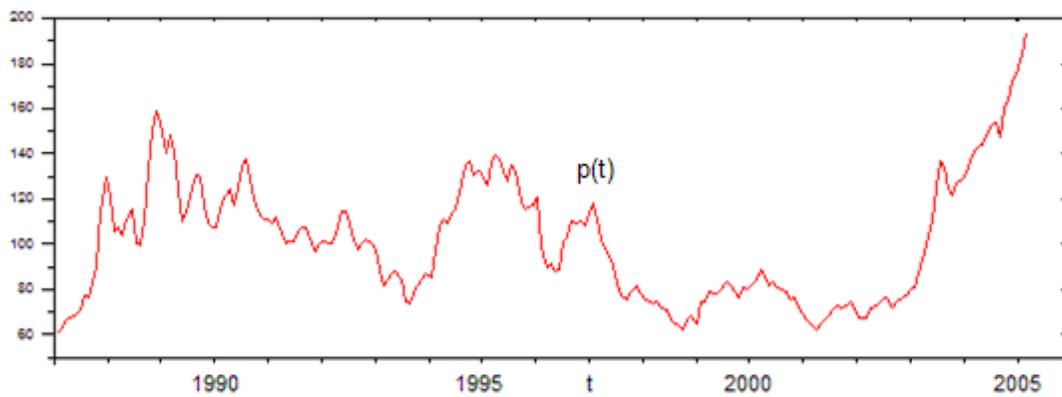


Fig. II.4: Precio del cobre (promedio mensual 1987-2005) en centavos de dólar / libra.

Ejemplo 3: En el espacio de dos dimensiones, sea $z(x_1, x_2) = z(x)$ = potencia mineralizada en un yacimiento de nitratos:

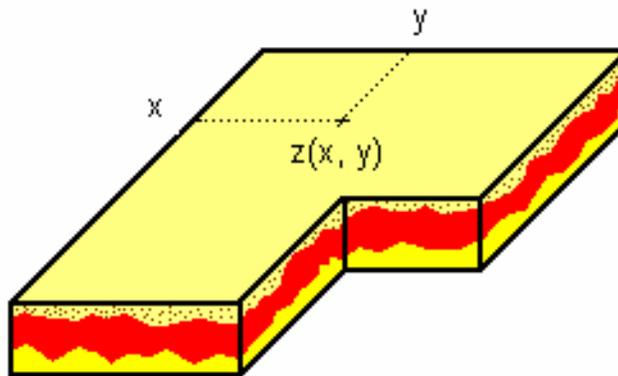


Figura II.5 (a): Depósito de nitratos-yodo: La zona mineralizada, de color rojo en la figura, se llama caliche.

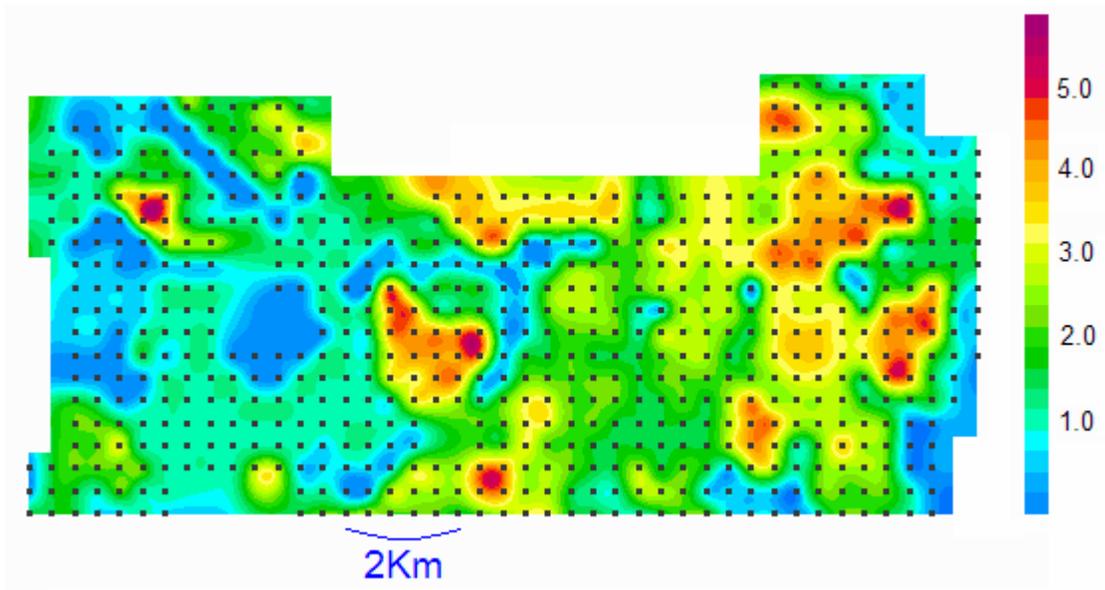


Figura II.5 (b): Isópacas en Oficina Sur Lagunas (depósito de yodo). Las potencias están en metros. Los límites corresponden a propiedad minera. Valores interpolados.

Ejemplo 4: En el espacio de tres dimensiones, sea $z(x_1, x_2, x_3) = z(x) =$ Ley de Cu en el punto x dentro de un depósito masivo:

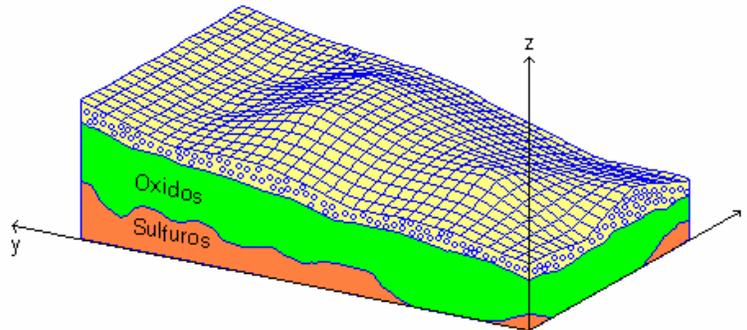


Figura II.6: Caso típico de depósito de óxidos-sulfuros. La capa superior corresponde a grava o coluvio.

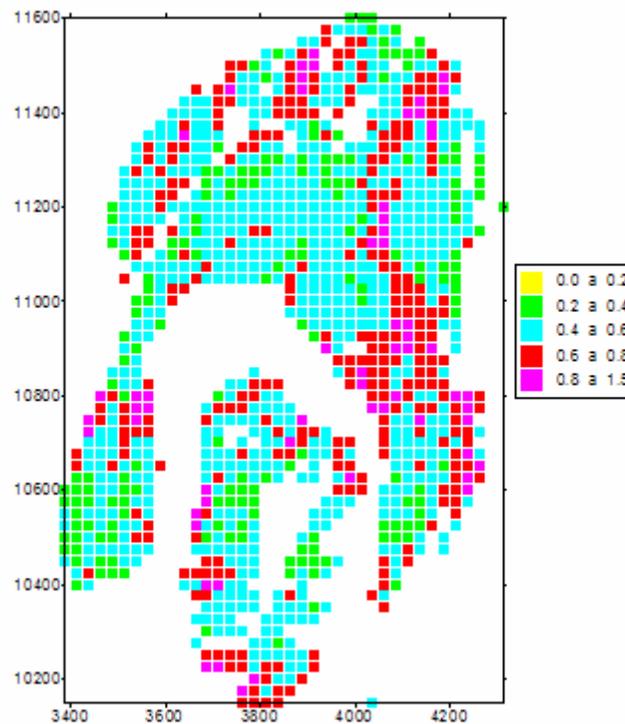


Figura II.7. Planta en mina RT. Leyes de bloques de 25mx25mx15m. Zona de óxidos.

En un depósito de este tipo se puede comprobar que la ley de cobre se comporta de manera diferente en la zona de óxidos y en la zona de sulfuros. Esto nos conduce a considerar para la ley de cobre, dos variables regionalizadas diferentes.

Ejemplo 5: En el espacio de dos dimensiones, sea $z(x_1, x_2) = z(x) =$ número de árboles por hectárea en la parcela localizada en el punto x .

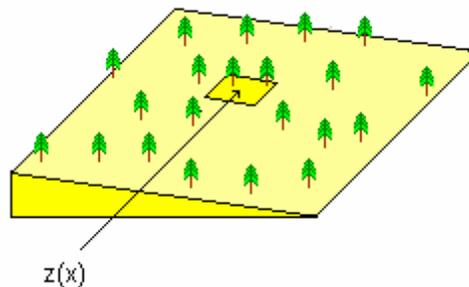


Figura II.8: Reconocimiento forestal. La muestra corresponde a una parcela.

Se trata, en este caso, de una variable regionalizada no minera.

Ejemplo 6: En el espacio de tres dimensiones, sea $z(x_1, x_2, x_3) = z(x) =$ densidad de la roca en un punto x dentro de un depósito minero:

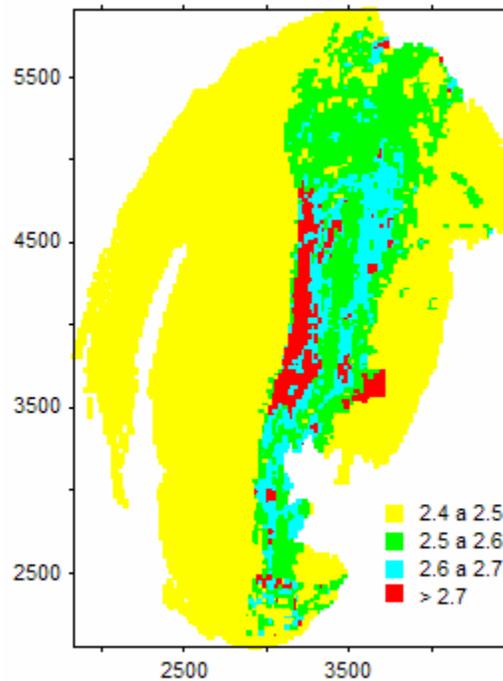


Figura II.9: Densidades superficiales en ton/m^3 en la mina Chuquicamata. La falla (llamada falla oeste) la cual delimita mineral de estéril queda representada por el cambio de densidades. Valores interpolados.

La densidad in situ, medida en toneladas / m^3 es una variable importante para cubicar los recursos de un depósito minero.

Ejemplo 7: En el espacio de tres dimensiones sea $z(x_1, x_2, x_3) = z(x) =$ ley de arsénico en un depósito de cobre. Esta variable regionalizada corresponde a una impureza (figura II.10)

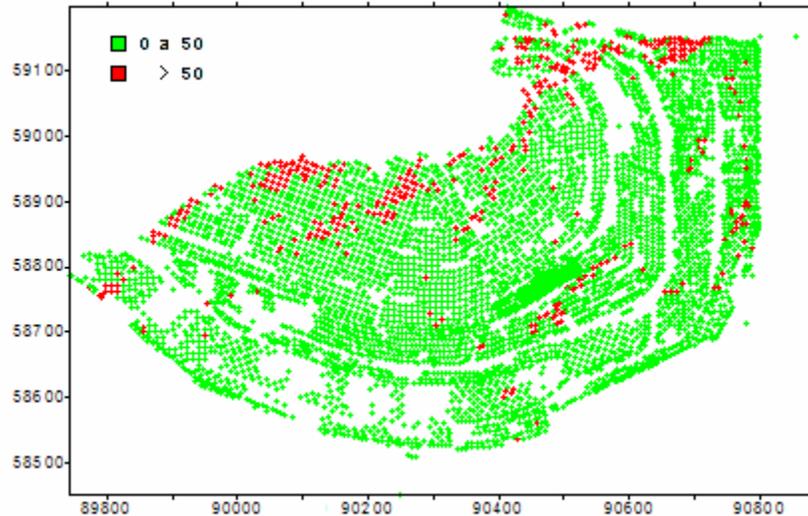


Figura II.10: Leyes de arsénico en un banco de mina Los Pelambres. Los datos corresponden a pozos de tronadura en bancos de 15 metros. Se trata de una variable muy irregular, concentrada en vetas.

Observación:

Los ejemplos anteriores nos muestran que una variable regionalizada es simplemente una función $z(x)$ del punto x . Sin embargo, esta función no se comporta como las funciones que se estudian en Matemáticas: En general $z(x)$ es muy desordenada en su variación espacial y no se podrá expresar, en particular, $z(x)$ como un polinomio (ver figuras II.3, II.4, II.5, II.7, II.9 y II.10).

II.3 Campo y soporte

Se llama campo a la zona en la cual se estudia la variable regionalizada. Para definir bien el campo (por ejemplo los límites) es necesario utilizar un modelo geológico adecuado, por ejemplo, en la figura II.6 se podrían distinguir dos campos disjuntos, los cuales se pueden tratar de manera independiente y corresponden a unidades geológicas: Unidad óxidos y unidad sulfuros.

Entonces en un mismo depósito mineral D pueden haber varios campos o unidades D_1 , D_2 , ..., D_k , en general disjuntos, cuya reunión es el conjunto D.

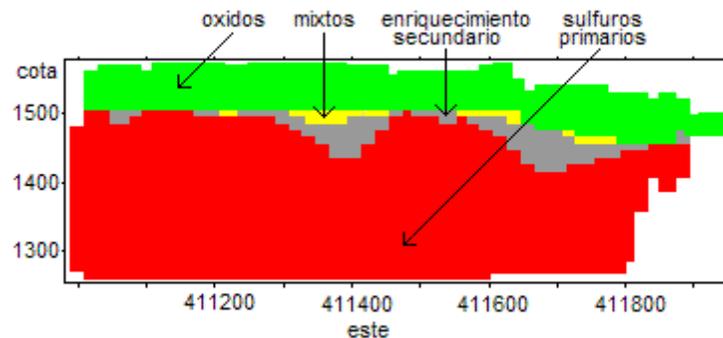


Figura II.11: Unidades D_1 , D_2 , D_3 , D_4 en una sección del depósito de cobre porfídico de Inca de Oro. Las unidades corresponden a una interpretación geológica a partir de los sondeos.

En algunas situaciones, cada campo debería tener un tratamiento geoestadístico diferente: Para estimar una zona V contenida en una cierta unidad, sólo se utilizan datos de la misma unidad: Se dice que se tienen fronteras duras.

Las fronteras duras entre las unidades D_r y D_s se justifican cuando existe independencia entre las leyes de D_r y D_s (es decir existe una discontinuidad geológica). La independencia debe ser comprobada mediante un análisis de las leyes en las fronteras de las unidades D_r y D_s .

El soporte es el volumen de la muestra que define la variable regionalizada. A menudo el soporte es un cilindro (figura II.12) llamado testigo:

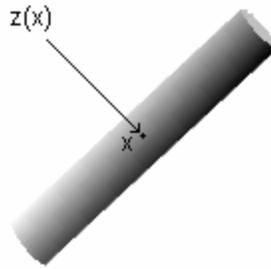


Figura II.12: Un testigo. Tiene un cierto largo l y un cierto diámetro d .

$z(x)$ será entonces la ley del volumen de muestra localizado en el punto x . En el ejemplo 5 (forestal), el soporte de la variable regionalizada es un cuadrado de lado 100 metros, en el ejemplo 6, el soporte es una colpa (un bolón) de 5 kilos tomada en la superficie del pit, en el ejemplo 7 el soporte es un cilindro vertical de 15 metros de largo.

En general, en el estudio de una variable regionalizada no es conveniente mezclar soportes de tamaños diferentes.

En el caso en que los testigos que constituyen el sondaje son de tamaño irregular, es necesario hacer una operación la cual consiste en regularizar o compositar el sondaje, es decir disponer de datos (compósitos) de longitud constante (figura II.13).

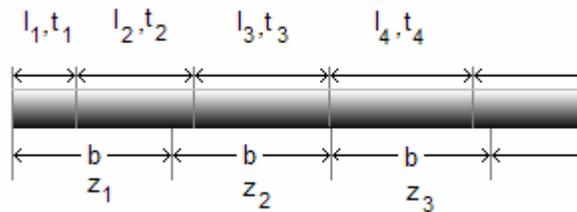


Figura II.13: Regularización de un sondaje a un largo constante b . Esta operación produce errores.

La figura II.14 muestra una sección transversal en un depósito de óxidos de cobre. Las líneas representan los sondajes de exploración. El punto rojo se denomina collar del sondaje. El collar está caracterizado por las coordenadas x_0 , y_0 , z_0 y por dos ángulos: (θ, φ) Azimuth e inclinación.

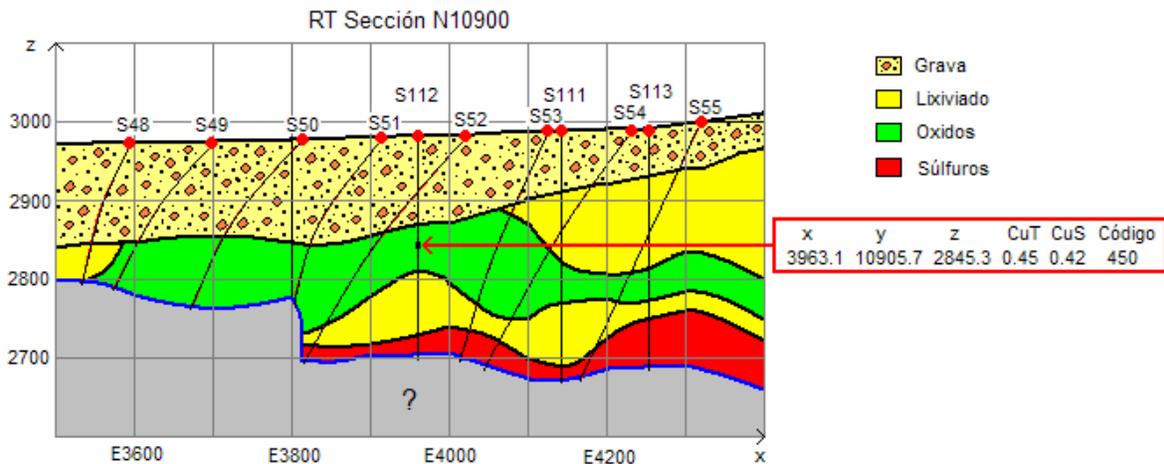


Figura II.14: Sección en el depósito de cobre de RT. Se observan las unidades grava (estéril), lixiviado, óxidos y sulfuros. Un compósito está caracterizado por sus coordenadas x , y , z , las leyes de cobre total, de cobre soluble, un código que indica la unidad, además del nombre del sondaje que contiene al compósito.

Cada compósito está caracterizado por sus coordenadas x , y , z , sus leyes, un código que indica el dominio o unidad geológica y la identificación del sondaje, eventualmente otra información. Se tiene así la base de datos de sondajes del depósito, la cual, en formato de texto, puede ser incorporada en cualquier paquete computacional.

Para tratar las desviaciones de los sondajes, se divide el sondaje en tramos rectilíneos L_1, L_2, \dots, L_r .

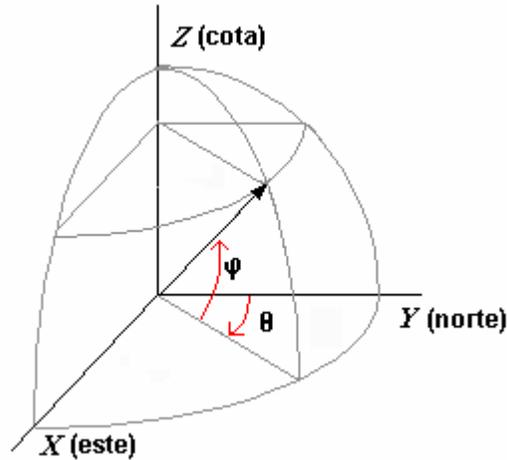


Figura II.15: Azimuth θ (se mide en grados desde el norte) e inclinación φ (se mide en grados desde la horizontal) de un sondaje.

II.4. Variables aditivas.

En general, en la estimación de recursos mineros conviene utilizar variables aditivas.

Una variable regionalizada es aditiva cuando se cumple la condición siguiente: Se conoce la variable z en dos soportes V_1 y V_2 , con valores medios respectivos z_1 y z_2 , entonces el valor medio de la variable z en el soporte homogeneizado $V_1 \cup V_2$ es igual al promedio ponderado de z_1 y z_2 , en particular si $V_1 = V_2$, entonces el valor medio de la variable es $(z_1 + z_2) / 2$.

Por ejemplo, la variable índice de trabajo $WI(x)$ (parámetro de conminución que expresa la resistencia de la roca a ser molida, en Kwh/ton) no es aditivo. Sin embargo es muy importante disponer de un modelo del WI en una mina.

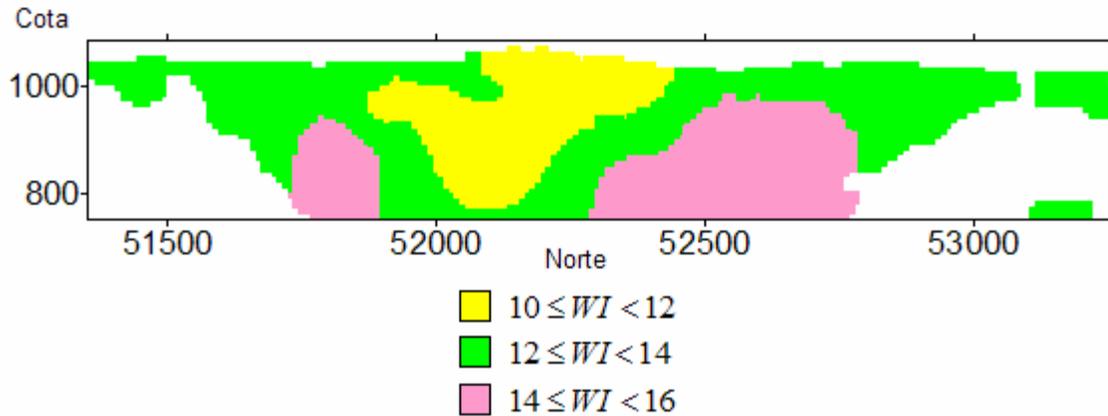


Figura II.16: Modelo del WI en una sección de la Mina Carmen de Andacollo. Este modelo constituye una parte del llamado “modelo geometalúrgico”.

Otros casos de variables no aditivas son, la recuperación metalúrgica, y, en una mina de óxidos de cobre, la razón (llamada solubilidad) (ley de CuS) / (ley de CuT).

En el caso de una veta (figura II.17) el sondaje S determina una potencia aparente p (y una potencia real p_0) y una ley z . La ley z no es aditiva. En este caso hay que estudiar dos variables aditivas: La potencia p_0 y la acumulación en un punto x , definida como el producto de la ley por la potencia.

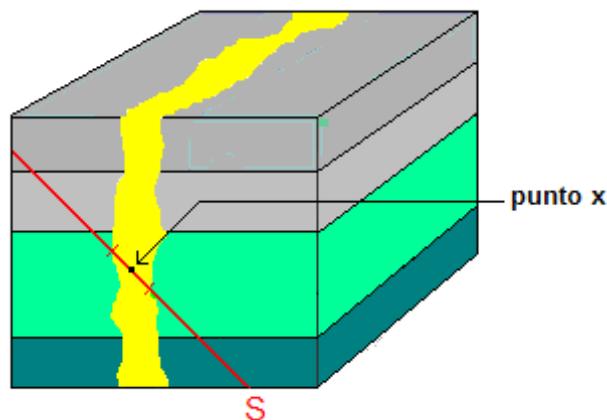


Figura II.17: Veta y variables aditivas.

II.5 Objetivos de la teoría.

La teoría de las variables regionalizadas se propone dos objetivos principales:

- Expresar las características estructurales de una variable regionalizada mediante una forma matemática adecuada.
- Resolver, de manera satisfactoria, el problema de la estimación de una variable regionalizada a partir de un conjunto de muestras, asignando errores a las estimaciones.

Estos dos objetivos están relacionados: El error de estimación depende de las características estructurales (continuidad, anisotropías) y se tendrá un error mayor si la variable regionalizada es más irregular y discontinua en su variación espacial.

Ejemplo: La figura II.18 siguiente representa el caso de una variable regionalizada $z(x)$ = ley de cobre definida en un soporte cuadrado de lado axa :

La ley de corte es $w = 0.5$.

Se definen otros soportes (tamaño del bloque): $(a) \times (2a)$, $(2a) \times (a)$, $(2a) \times (2a)$, $(3a) \times (3a)$ y $(6a) \times (6a)$.

T es el tonelaje sobre la ley de corte medido en número de bloques de tamaño axa .

m es la ley media de los bloques cuya ley es superior a la ley de corte.

B es el beneficio convencional, definido por:

$$B = T (m - c)$$

La importancia económica de la anisotropía y del soporte es evidente.

Efecto de soporte y anisotropía

0.40	0.80	0.50	0.40	0.30	0.20
0.40	0.30	0.30	0.20	0.20	0.60
0.50	0.60	0.50	0.30	0.40	0.60
0.60	0.70	0.80	0.60	0.50	0.30
0.40	0.40	0.70	0.60	0.40	0.20
0.30	0.30	0.20	0.20	0.30	0.20

T = 14 m = 0.614
B = 1.596 Var = 0.031

0.60	0.45	0.25
0.35	0.25	0.40
0.55	0.40	0.50
0.65	0.70	0.40
0.40	0.65	0.30
0.30	0.20	0.25

T = 12 m = 0.608
B = 1.296 Var = 0.023

0.40	0.55	0.40	0.30	0.25	0.40
0.55	0.65	0.65	0.45	0.45	0.45
0.35	0.35	0.45	0.40	0.35	0.20

T = 8 m = 0.600
B = 0.800 Var = 0.014

0.47	0.35	0.32
0.60	0.55	0.45
0.35	0.43	0.28

T = 8 m = 0.575
B = 0.600 Var = 0.010

0.48	0.36
0.49	0.37

T = 0

0.42

T = 0

Figura II.18: Importancia económica del soporte y la anisotropía. A medida que aumenta el soporte, se diluyen las leyes. Observar que la ley de corte es mayor que la ley media. Repetir los cálculos para una ley de corte de 0.40

II.5 El modelo matemático de la geoestadística: Las funciones aleatorias.

Para alcanzar los objetivos propuestos es necesario disponer de un modelo matemático. La geoestadística utiliza una cierta interpretación probabilística de la variable regionalizada, mediante el modelo de las funciones aleatorias.

Una función aleatoria es una función $Z(x)$ que asigna a cada punto x del espacio un valor que depende del azar (es decir un valor aleatorio).

Al hacer un experimento sobre la función aleatoria se obtiene una función ordinaria (no aleatoria) $z(x)$ llamada realización de la función aleatoria $Z(x)$.

La hipótesis constitutiva de la geoestadística consiste en afirmar que la variable regionalizada en estudio es la realización de una cierta función aleatoria. Lo anterior equivale a decir que las leyes de nuestro yacimiento se generaron a partir de un proceso o experimento muy complejo.

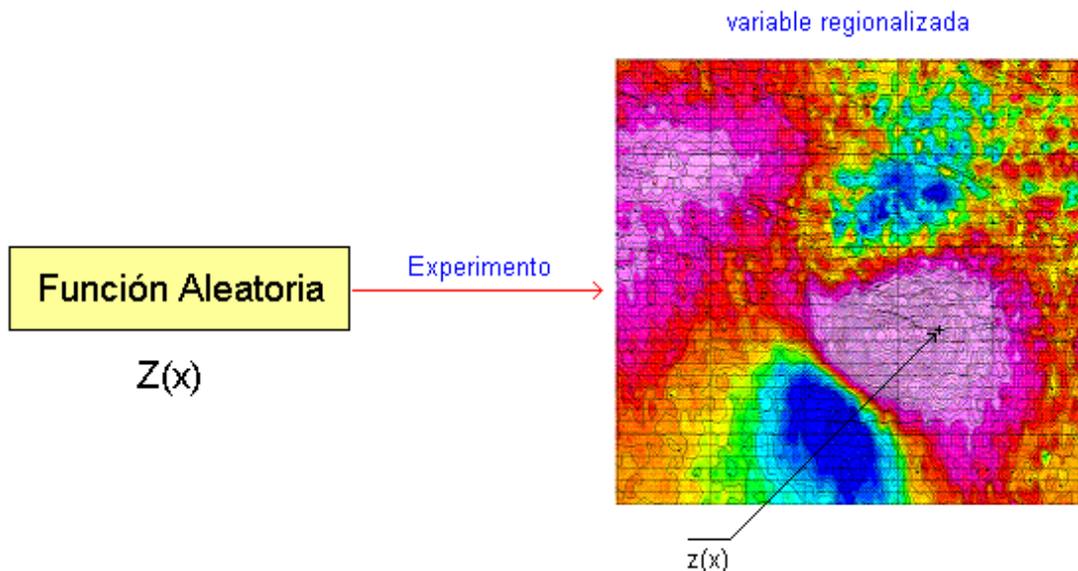


Figura II.19: Función aleatoria y variable regionalizada. Los colores indican rangos de la variable.

Un ejemplo de función aleatoria es la siguiente:

$Z(x) = Z(x,y)$ = ley de litio en el Salar de Atacama.

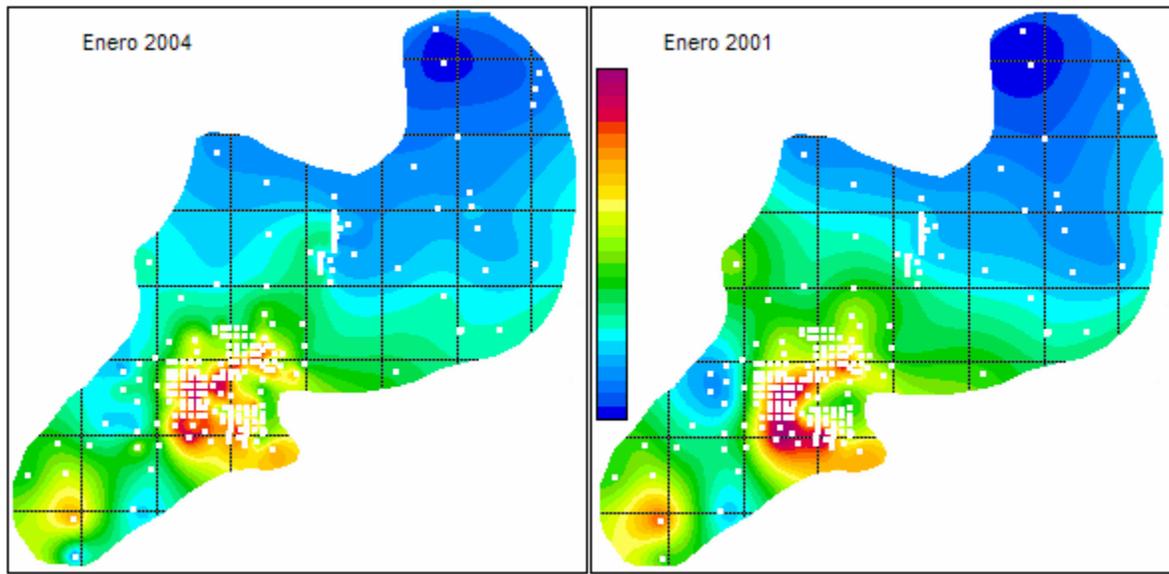


Figura II.20: Leyes de litio en el Salar de Atacama para dos campañas de reconocimiento en el tiempo. Se observan los puntos de bombeo y el decrecimiento de las leyes en el tiempo. No se indican las escalas de las leyes.

Como se trata de salmueras las cuales están en movimiento debido a corrientes subterráneas y a la explotación, el valor de $Z(x)$ en un punto x es aleatorio y es variable en el tiempo. Una realización de esta función aleatoria corresponde a la variable regionalizada $z(x)$ = ley de Li en un mes dado.

Observaciones:

- a) No se puede afirmar que una variable regionalizada es una función aleatoria. Esto tendría el mismo sentido que decir “el número 6 es una variable aleatoria”.

El enunciado correcto de la hipótesis probabilística de la geoestadística es: “ $Z(x)$ es la realización de una función aleatoria $Z(x)$ ”.

- b) Para que esta hipótesis probabilística tenga un sentido real, es necesario poder reconstituir, al menos en parte, la ley de probabilidad de la función aleatoria, lo cual supone que la inferencia estadística (es decir el cálculo de parámetros que caracterizan la función aleatoria) es posible. Es necesario introducir una hipótesis suplementaria a la función aleatoria $Z(x)$. Esta hipótesis es conocida como hipótesis de estacionaridad y expresa que la variación espacial de las realizaciones de $Z(x)$ deben ser homogéneas. Esta hipótesis se puede debilitar al suponer que las diferencias $Z(x) - Z(y)$ son estacionarias localmente (lo cual se conoce como hipótesis intrínseca).

La estacionaridad es una propiedad del modelo (función aleatoria) y quedará más clara cuando se estudie el cálculo de variogramas.

- c) Para entender mejor estos conceptos, es recomendable, ver M. Alfaro, “Introducción a la Teoría de las Funciones Aleatorias”, USACH, 2005.

Capítulo III

El variograma

El variograma es una función que constituye la herramienta fundamental de la geoestadística.

Sean x y $x + h$ dos puntos en el espacio:

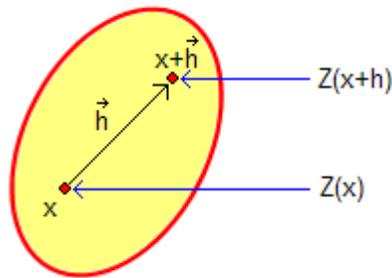


Figura III.1: Dos puntos a la distancia vectorial h .

La definición teórica de la función variograma $\gamma(h)$ es la esperanza matemática siguiente:

$$\gamma(\vec{h}) = \frac{1}{2} E \left[\left(Z(x + \vec{h}) - Z(\vec{x}) \right)^2 \right]$$

Sin embargo, en la práctica siempre se utiliza el algoritmo siguiente:

$$\gamma(\vec{h}) = \frac{1}{2} \text{Promedio} \left\{ \begin{array}{l} (\text{diferencias})^2 \text{ de leyes en puntos} \\ \text{que estan a la distancia } \vec{h} \end{array} \right\}$$

Esta ecuación es la que hay que adaptar en cada situación práctica (mallas regulares e irregulares en el espacio de n dimensiones, $n = 1, 2, 3$).

Las propiedades de $\gamma(h)$, que se deducen fácilmente de la definición son:

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(h) \geq 0$$

$$\gamma(-\vec{h}) = \gamma(\vec{h})$$

La última relación proviene del hecho que si dos leyes z_1 y z_2 están a la distancia h , entonces $(z_1 - z_2)^2 = (z_2 - z_1)^2$

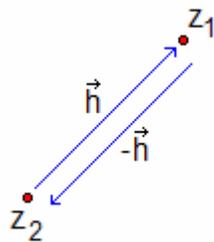


Figura III.2: La función gama de h es par.

a) Cálculo del variograma para una línea muestreada regularmente

Sean N datos z_1, z_2, \dots, z_N y sea b la equidistancia entre ellos:

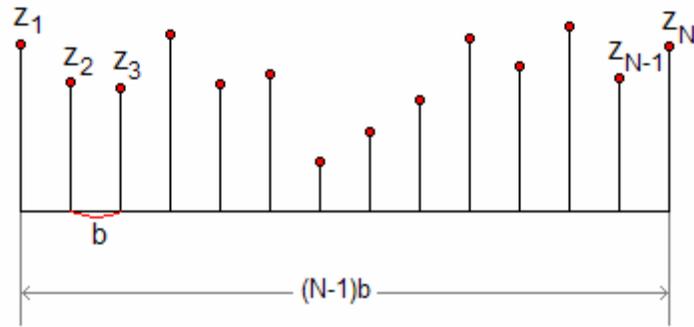


Figura III.3: Línea recta con muestras regulares.

- i) Sea $h = b$: Según el algoritmo de cálculo se tiene:

$$\gamma(b) = \frac{(z_2 - z_1)^2 + (z_3 - z_2)^2 + \dots + (z_N - z_{N-1})^2}{2(N-1)}$$

- ii) Sea $h = 2b$:

$$\gamma(2b) = \frac{(z_3 - z_1)^2 + (z_4 - z_2)^2 + \dots + (z_N - z_{N-2})^2}{2(N-2)}$$

- iii) Sea $h = 3b$:

$$\gamma(3b) = \frac{(z_4 - z_1)^2 + (z_5 - z_2)^2 + \dots + (z_N - z_{N-3})^2}{2(N-3)}$$

- iv) Sea en general $h = kb$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$):

$$\gamma(kb) = \frac{1}{2(N-k)} \sum_{i=1}^{N-k} (z_{i+k} - z_i)^2$$

Posteriormente los valores $\gamma(0)$, $\gamma(b)$, $\gamma(2b)$, $\gamma(3b)$, ... se llevan a un gráfico:

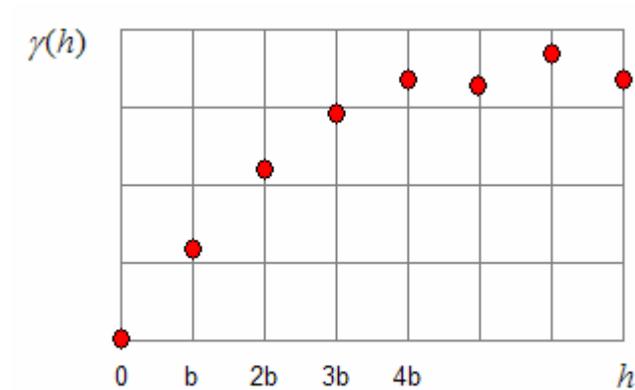


Figura III.4: Un variograma experimental.

La distancia b se llama paso del variograma.

Para interpretar el gráfico del variograma distinguiremos el comportamiento para las distancias $|h|$ pequeñas y las distancias $|h|$ grandes.

III.1 Comportamiento del variograma para distancias pequeñas

Estudiaremos el comportamiento de la función $\gamma(h)$ para $|\vec{h}|$ pequeño, para lo cual analizaremos cuatro casos hipotéticos.

Caso 1: Leyes muy regulares y continuas.

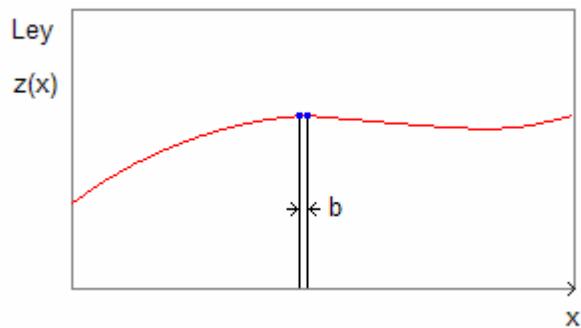


Figura III.5: Leyes muy regulares (la variable es derivable).

Para una distancia b pequeña, las dos leyes de la figura son casi iguales, lo que implica que para $|h|$ pequeño, $\gamma(h)$ es próximo a cero; luego el gráfico de $\gamma(h)$ en una vecindad del origen será como en la figura:

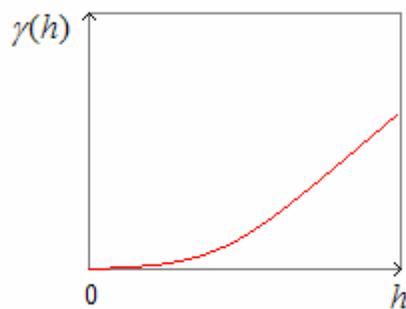


Figura III.6: Variograma parabólico en el origen.

Se dice que $\gamma(h)$ tiene un comportamiento parabólico en el origen.

Caso 2: Continuidad y regularidad promedio

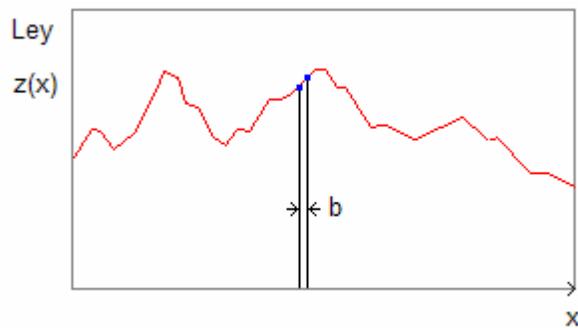


Figura III.7: Leyes con continuidad promedio. La variable es continua pero no es derivable.

En este caso, para una distancia pequeña, la diferencia de leyes es significativa; luego el gráfico de $\gamma(h)$ en una vecindad del origen será:

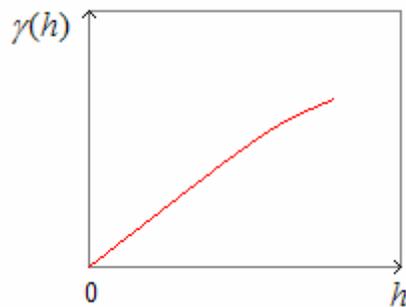


Figura III.8: Variograma lineal en el origen.

Se dice que $\gamma(h)$ tiene un comportamiento lineal en el origen.

Caso 3: Existencia de micro variaciones:

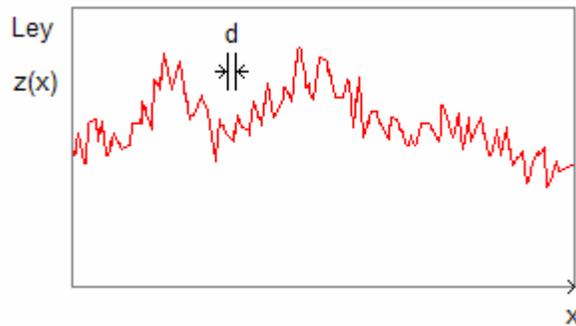


Figura III.9: Presencia de una estructura a menor escala. La variable es más discontinua.

Si la equidistancia entre datos b es menor que la escala de variación d de las microestructuras, el variograma en una vecindad del origen será:

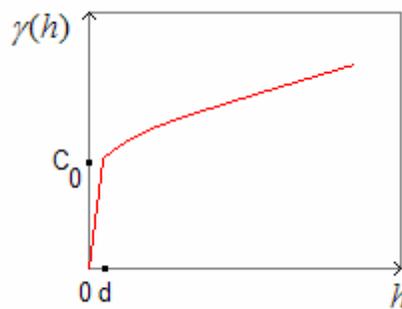


Figura III.10: Efecto de pepita en el origen.

Existe un crecimiento rápido hasta $|h| = d$ (debido a la micro regionalización) y luego un crecimiento más moderado (debido a la variación a gran escala): se dice que existe efecto de pepita. C_0 se llama constante de pepita.

En la práctica la equidistancia o paso b es mayor que d y se tendrá un gráfico del tipo:

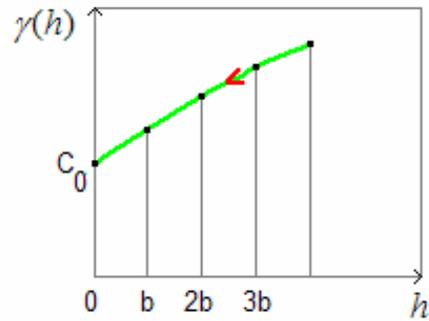


Figura III.11: Extrapolación al origen del variograma experimental.

Es decir existe una discontinuidad aparente en el origen.

El nombre efecto de pepita proviene del estudio de los depósitos de oro. Consideremos por ejemplo un testigo en un depósito de oro:

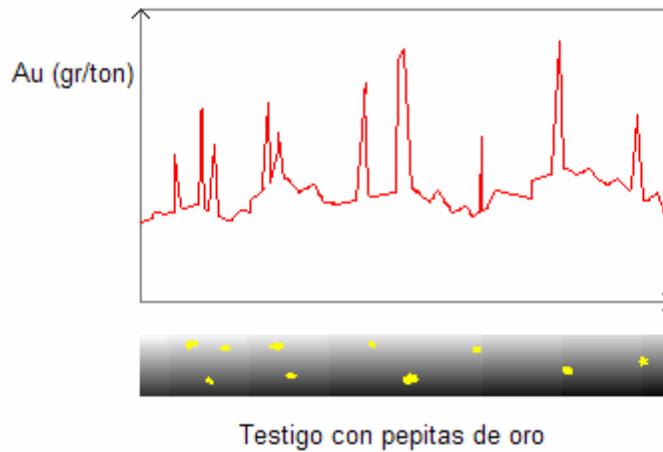


Figura III.12: Efecto de pepita en un testigo de una mina de oro.

En general, el efecto de pepita se produce debido a microvariaciones y/o a errores en el muestreo, la manipulación, preparación o análisis químico.

Caso 4: Caso límite en el cual la irregularidad de las leyes es total:

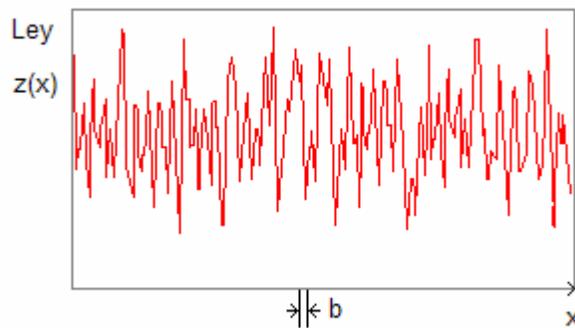


Figura III.13. Irregularidad máxima. La variable es caótica.

Por muy pequeña que sea la distancia b , las leyes de dos puntos a esta distancia son prácticamente independientes. El gráfico de $\gamma(h)$ será:

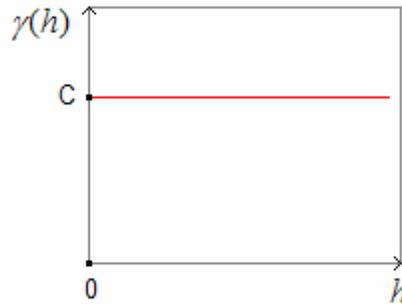


Figura III.14. Efecto de pepita puro: El variograma no depende de la distancia h .

Se dice que $\gamma(h)$ presenta un efecto de pepita puro:

$$\gamma(0) = 0, \gamma(h) = C \text{ si } h \neq 0.$$

Este caso se presenta si en un campo S , se ponen pepitas al azar, como en la figura III.15:

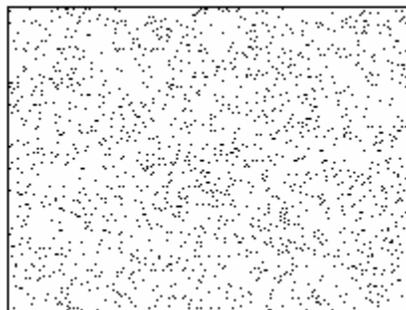


Figura III.15: Pepitas al azar.

III.2 Comportamiento del variograma para grandes distancias.

Estudiaremos ahora el comportamiento de la función $\gamma(h)$ para $|h|$ grande, para lo cual analizaremos tres casos hipotéticos:

Caso 1: Leyes con crecimiento (decrecimiento) progresivo:

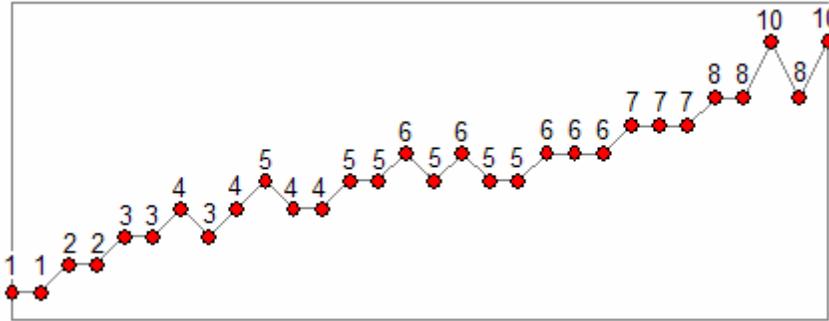


Figura III.16: Leyes con tendencia o deriva.

Se dice que existe una deriva o tendencia. Al hacer el cálculo se observará que $\gamma(h)$ siempre crece:

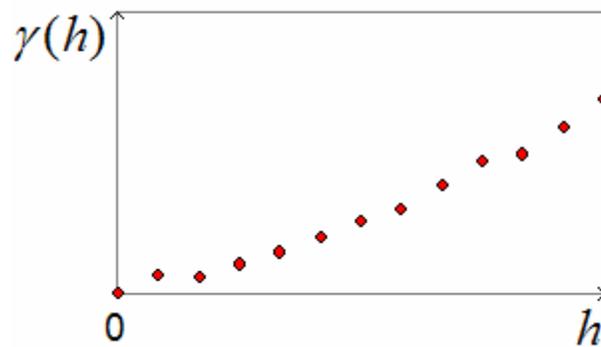


Figura III.17: Variograma con crecimiento sistemático.

Caso 2: Leyes con pseudo-periodicidades:

El fenómeno tiende a repetirse de manera estacionaria (es decir, varía de manera homogénea y sin deriva):

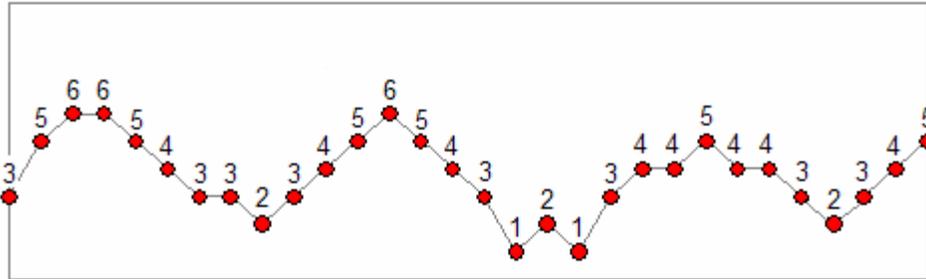


Figura III.18: Fenómeno estacionario con periodicidades.

Si se calcula la función $\gamma(h)$ se observará la presencia de máximos y mínimos:

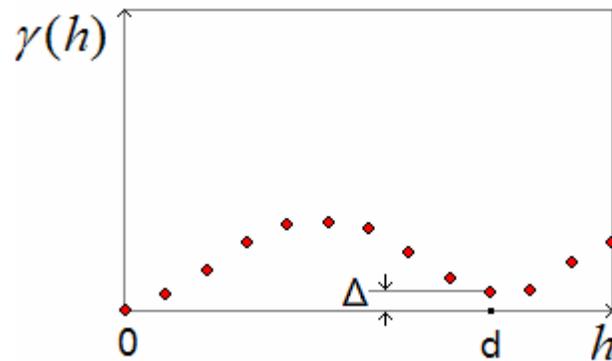


Figura III.19: Variograma con efecto de hoyo.

Se dice que el variograma presenta efecto de hoyo o de agujero. En la figura, $d = 9$ unidades proporciona una medida del pseudo-período ; Δ es una medida de la intensidad del efecto (si el fenómeno es perfectamente periódico, entonces $\Delta = 0$).

Caso 3: Fenómeno estacionario sin pseudo-periodicidades (o fenómeno de transición):

El fenómeno es homogéneo en su variación espacial, con cambios bruscos.

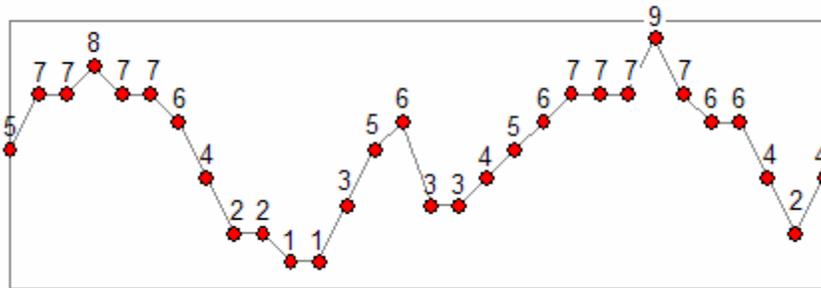


Figura III.20: Fenómeno estacionario sin periodicidades.

Este caso debería corresponder al anterior, en el cual la magnitud Δ crece. Si se calcula la función $\gamma(h)$, se tiene:

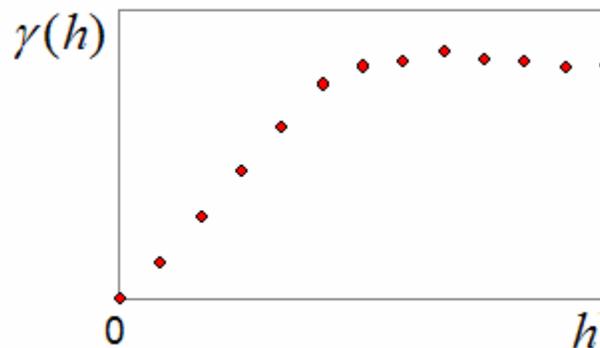


Figura III.21: Variograma de un fenómeno estacionario sin periodicidades, con alcance y meseta.

Se observa que a partir de una cierta distancia, del orden $a = 6$ unidades, la función $\gamma(h)$ permanece aproximadamente constante:

$$\gamma(6) = \gamma(7) = \gamma(8) = \dots = \text{constante} = C$$

Esto quiere decir que da lo mismo que la distancia que separa los puntos sea 6, 7, 8 o más unidades; en otras palabras, dos puntos cuya distancia sea superior a $a = 6$ unidades son prácticamente independientes en ley.

La magnitud a se llama alcance y la constante C se llama meseta.

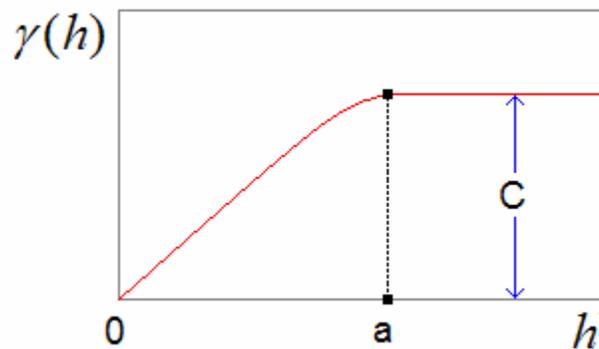


Figura III.22: Variograma con alcance a y meseta C .

El alcance proporciona una medida de la zona de influencia de una muestra porque dos muestras cuya distancia es mayor que el alcance son prácticamente independientes:

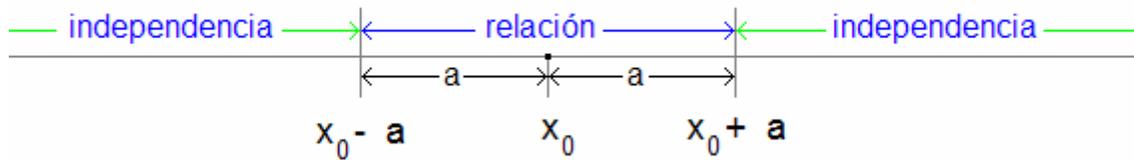


Figura III.23: Zona de influencia de una muestra localizada en el punto x_0 .

Dos muestras cuya distancia sea inferior al alcance a están correlacionadas entre sí.

En el caso de un fenómeno de transición, la meseta C tiene una significación estadística si consideramos el resultado siguiente, el cual se puede demostrar utilizando el modelo matemático de las funciones aleatorias:

$$C = \sigma^2$$

en que σ^2 es la varianza estadística de los datos utilizados en el cálculo de $\gamma(h)$. En la práctica, esta relación teórica es sólo aproximada.

Ejemplo: La figura III.24 muestra un sondaje en el depósito de carbón de Puentes de García Rodríguez (España). Se trata de un sondaje vertical con $N = 80$ muestras. La equidistancia entre las muestras es $b = 5$ metros. El carbón se representa en rojo y el estéril (la tosca) se representa en amarillo:

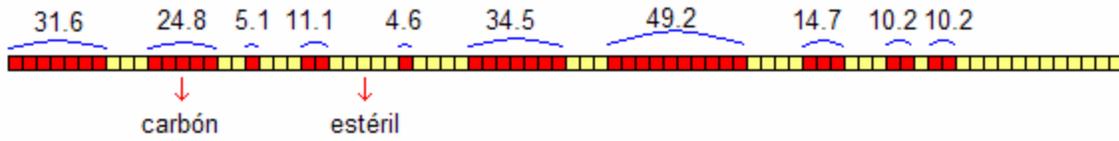


Figura III.24: Sondaje vertical en una mina de carbón. Los números superiores representan la potencia real de los mantos.

Se define la variable regionalizada siguiente (llamada indicador):

$$z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{carbón} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{carbón} \end{cases}$$

i) Cálculo de la media:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i = \frac{40}{80} = 0.5$$

Este resultado nos indica que la mitad del sondaje es carbón y la otra mitad estéril.

ii) Cálculo de la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - m)^2 = \frac{40(1-0.5)^2 + 40(0-0.5)^2}{80} = 0.25$$

iii) Cálculo de $\gamma(h)$:

Se obtiene fácilmente:

$$\gamma(5) = 0.12$$

$$\gamma(10) = 0.20$$

$$\gamma(15) = 0.24$$

$$\gamma(20) = 0.25$$

$$\gamma(25) = 0.25$$

iv) Gráfico de $\gamma(h)$:

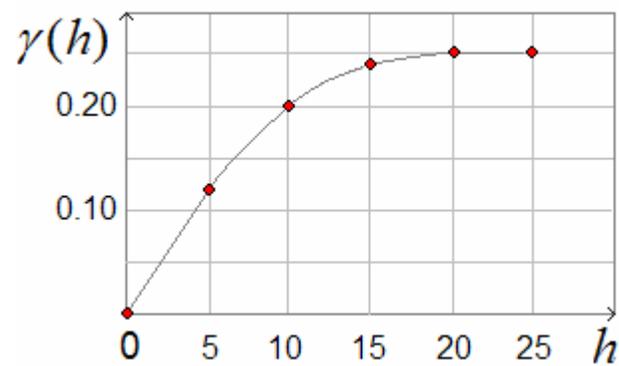


Figura III.25: Variograma sondaje de carbón.

Se observa un alcance a del orden de 20 m. y una meseta $C = 0.25$, la cual coincide con la varianza estadística de las muestras.

El alcance tiene una significación geológica en este caso: corresponde al espesor promedio de los mantos de carbón (ver figura III.24):

$$\rho = (31.6 + 24.8 + \dots + 10.2) / 10 = 19.8 \text{ m.}$$

b) Cálculo del variograma para una malla regular bidimensional

Supongamos la situación de la figura III.26 (correspondiente a leyes de cobre):

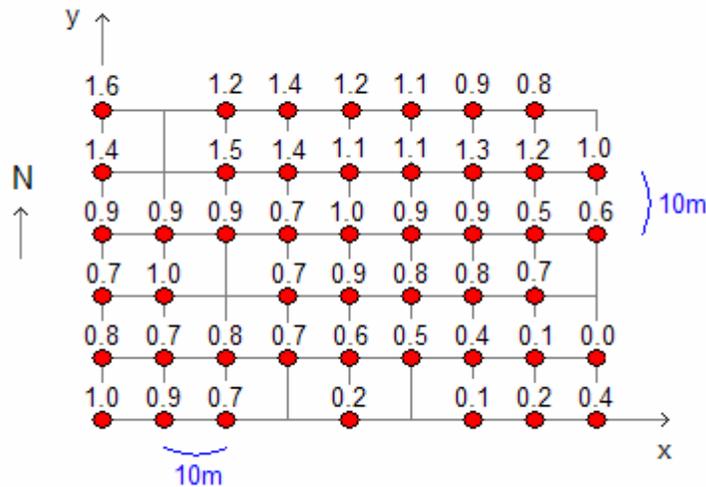


Figura III.26: Leyes de cobre en un banco de una mina a cielo abierto.

En este caso h es un vector (con coordenadas cartesianas o polares):

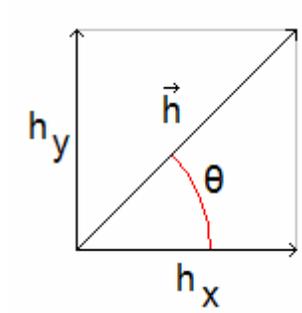


Figura III.27: componentes del vector h. En este dibujo θ no es el azimuth sino el ángulo de coordenadas polares

$h = (h_x, h_y)$ ← coord. cartesianas

$h = (|h|, \theta)$ ← coord. polares

i) Fijemos la dirección θ del vector h; que sea por ejemplo $\theta = 90^\circ$, es decir, la dirección NS. El vector h sólo puede ser:

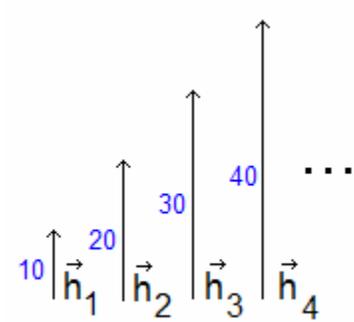


Figura III.28: Vectores orientados según dirección NS

Calculemos $\gamma(h_1) = \gamma_{NS}(10)$. Al aplicar el algoritmo hay que considerar las (diferencias)² posibles: $(z_i - z_j)^2$ cuando ambos datos z_i y z_j están definidos. La figura muestra las diferencias que hay que calcular:

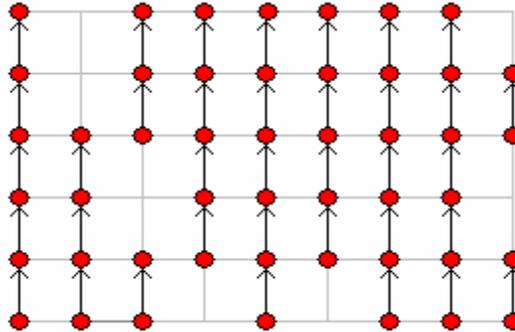


Figura III.29: Parejas posibles para calcular gama de 10 metros en la dirección NS (hay 36 vectores).

Luego:

$$\begin{aligned} \gamma(h_1) = & [(1.6 - 1.4)^2 + (1.4 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.8)^2 \\ & + (0.8 - 1.0)^2 + (0.9 - 1.0)^2 + (1.0 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.9)^2 \\ & + (1.2 - 1.5)^2 + (1.5 - 0.9)^2 + (0.8 - 0.7)^2 + (1.4 - 1.4)^2 \\ & + (1.4 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.7)^2 + (1.2 - 1.1)^2 \\ & + (1.1 - 1.0)^2 + (1.0 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.6)^2 + (0.6 - 0.2)^2 \\ & + (1.1 - 1.1)^2 + (1.1 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.8)^2 + (0.8 - 0.5)^2 \\ & + (0.9 - 1.3)^2 + (1.3 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.8)^2 + (0.8 - 0.4)^2 \\ & + (0.4 - 0.1)^2 + (0.8 - 1.2)^2 + (1.2 - 0.5)^2 + (0.5 - 0.7)^2 \\ & + (0.7 - 0.1)^2 + (0.1 - 0.2)^2 + (1.0 - 0.6)^2 \\ & + (0.0 - 0.4)^2] / (2 * 36) = 0.0535 \quad (36 \text{ parejas}) \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene:

$$\gamma(h_2) = 0.0987 \quad (27 \text{ parejas})$$

$$\gamma(h_3) = 0.1888 \quad (21 \text{ parejas})$$

ii) Sea ahora la dirección $\theta = 0^\circ$, es decir la dirección EW. El vector h sólo puede ser:

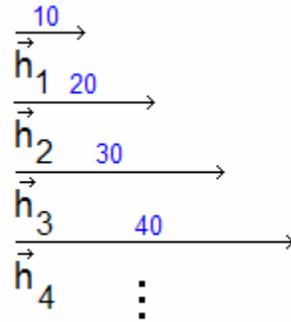


Figura III.30: Vectores orientados según dirección EW.

Las diferencias que hay que calcular son:

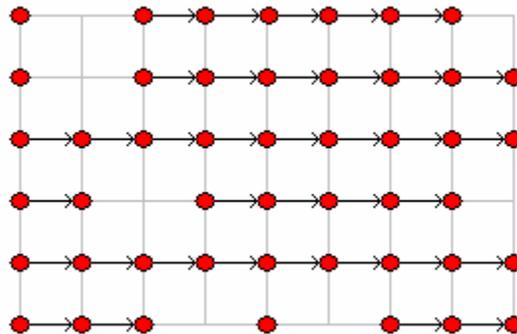


Figura III.31: Parejas posibles para calcular gama de 10 metros en la dirección EW (hay 36 vectores).

Se obtiene entonces:

$$\gamma(h_1) = 0.0146 \quad (36 \text{ parejas})$$

$$\gamma(h_2) = 0.0330 \quad (33 \text{ parejas})$$

$$\gamma(h_3) = 0.0431 \quad (27 \text{ parejas})$$

iii) La práctica demuestra que, para estudiar las estructuras basta con calcular $\gamma(h)$ en dos direcciones adicionales: $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 135^\circ$

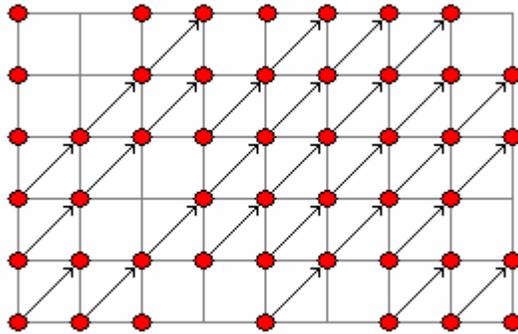


Figura III.32: Cálculo de gama de h en la dirección de 45° . La distancia entre parejas es ahora 14.41 metros.

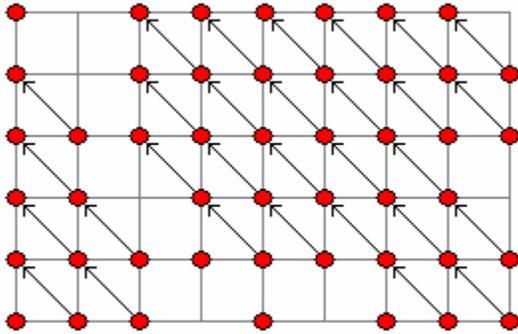


Figura III.33: Cálculo de gama de h en la dirección de 135° . La distancia entre parejas contiguas (el paso) es 14.41 metros.

En estas direcciones hay que tener presente que el módulo de h es un múltiplo de $10\sqrt{2}$.

Gráfico de $\gamma(h)$:

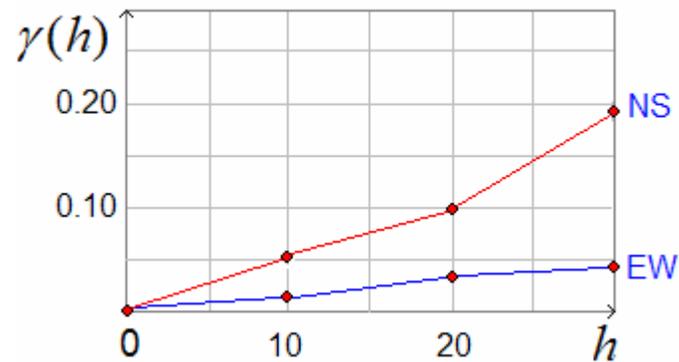


Figura III.34: Variograma anisotrópico. La variación de las leyes es más regular en la dirección EW que en la NS.

Se observa una clara anisotropía que nos indica que el fenómeno es más regular en la dirección EW que en la NS. (Esto se puede comprobar al mirar como varían las leyes en esas direcciones: ver la figura III.26)

Ejemplo: Los datos que se proporcionan a continuación provienen de un banco en una mina de hierro:

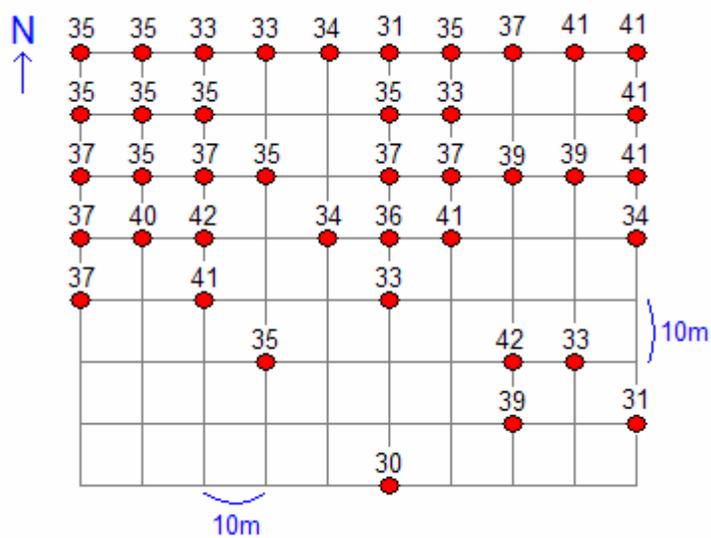


Figura III. 35: Datos de leyes de fierro.

Al aplicar el algoritmo general se obtienen los gráficos siguientes:

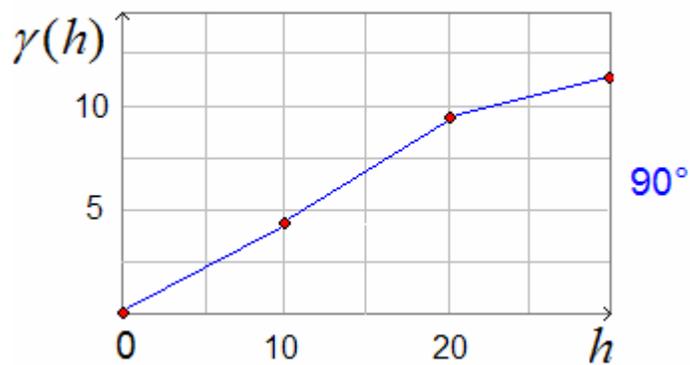


Figura III.36: Variograma NS

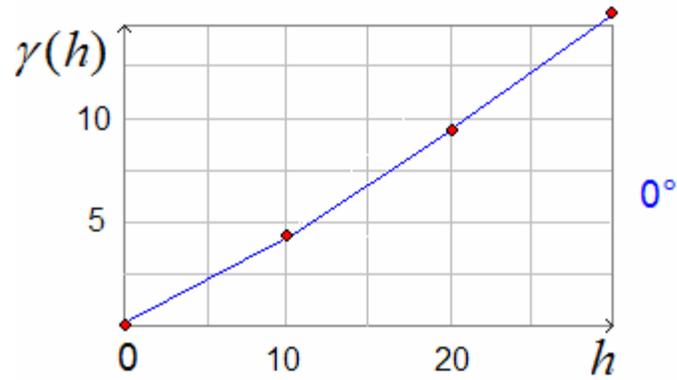


Figura III.37: Variograma EW

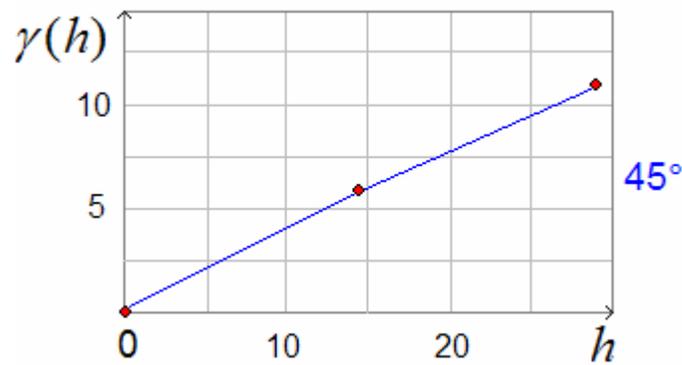


Figura III.38: Variograma dirección 45° (paso = 14.41 metros)

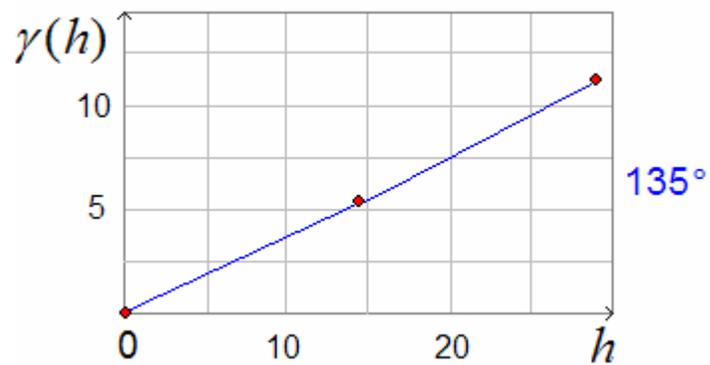


Figura III.39: Variograma dirección 135° (paso = 14.41 metros)

Observamos que $\gamma(h)$ es casi el mismo según las direcciones: podemos concluir que el fenómeno es isótropo.

En este caso se justifica calcular el variograma promedio, llamado variograma omnidireccional, el cual se puede obtener, en este caso, mediante un promedio ponderado de los valores del variograma (ponderación por el número de parejas N'):

$ h $	$\gamma(h)$
10.00	4.17
14.41	5.73
20.00	8.31
28.28	11.60
30.00	11.94

Gráfico del variograma:

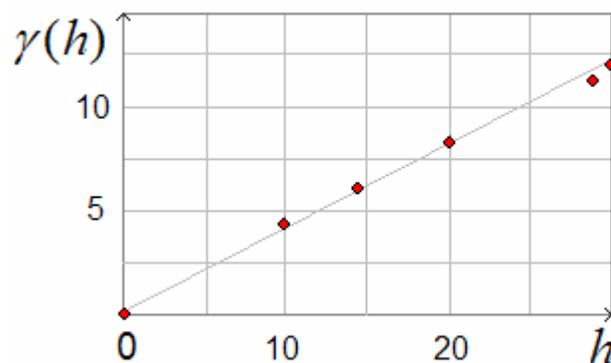


Figura III.40: Variograma omnidireccional. Su cálculo se justifica en el caso isótropo.

Ejemplo: La figura III.41 muestra la fotografía aérea de un bosque de coníferas. La variable regionalizada es $z(x)$ = número de árboles / hectárea. La malla de reconocimiento es de 300 x 100 m²:

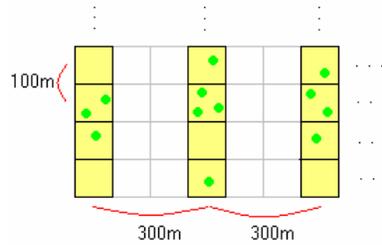


Figura III.41: Malla de reconocimiento forestal (300m x 100m)

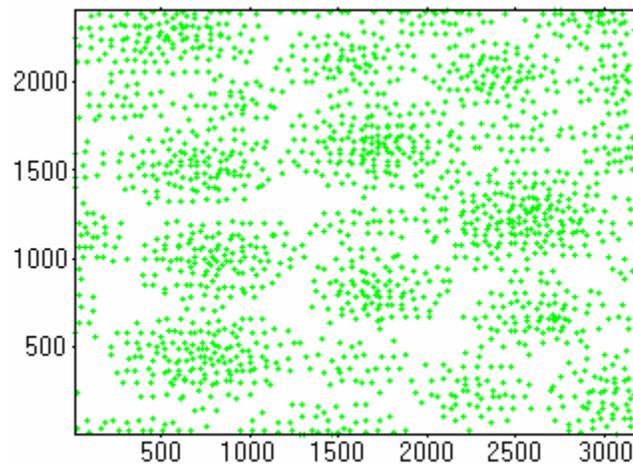


Figura III.42: Foto aérea de un bosque. Cada punto representa un árbol.

El variograma correspondiente es:

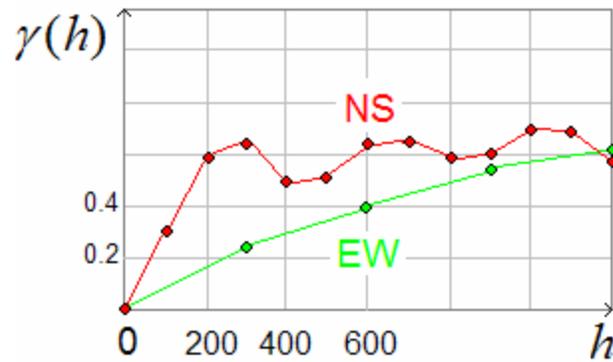


Figura III.43: Variogramas bosque de coníferas.

Se puede observar la presencia de anisotropías y efecto de hoyo (debido a periodicidades).

Ejemplo: Variogramas en cortes pulidos de minerales. La variable regionalizada $z(x)$ (indicador) se define como:

$$z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{granos (negro)} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{granos (blanco)} \end{cases}$$

En los gráficos, el variograma EW es de color rojo y el NS de color azul. ¡Interpretar los variogramas!

En este caso de dos estados (negro y blanco), si se considera que $z(x)$ es la realización de una función aleatoria $Z(x)$, entonces se dice que $Z(x)$ es un conjunto aleatorio.

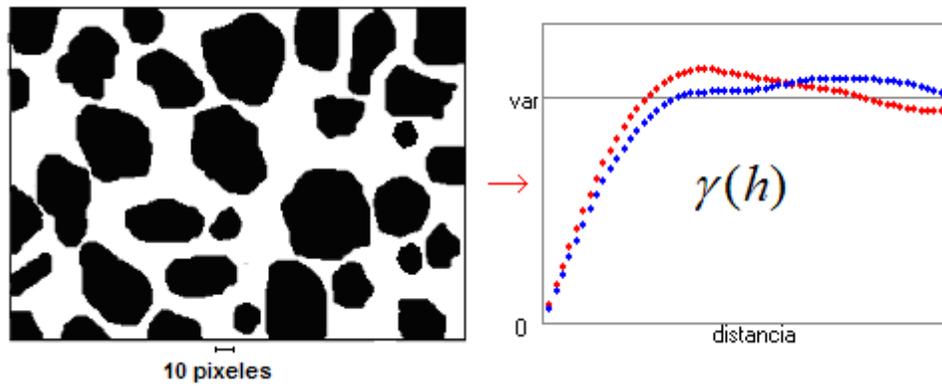


Figura III.44: Aproximadamente isótropo. En el variograma, la distancia está en pixeles.

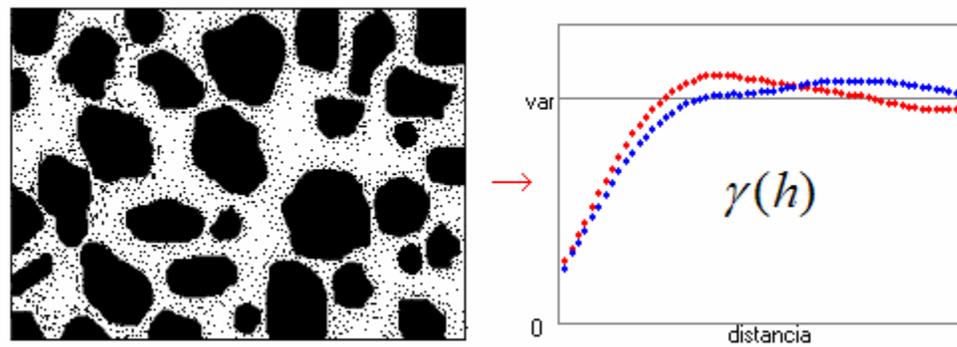


Figura III.45: Aproximadamente isótropo, con fronteras difusas. Presencia de efecto de pepita

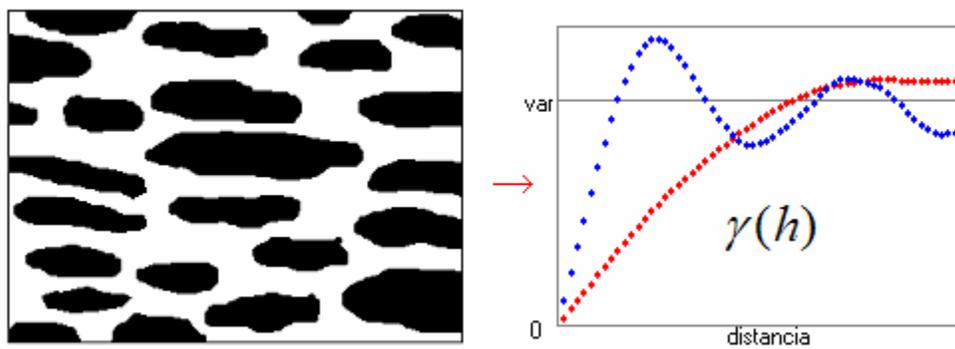


Figura III.46: Anisótropo con periodicidades.

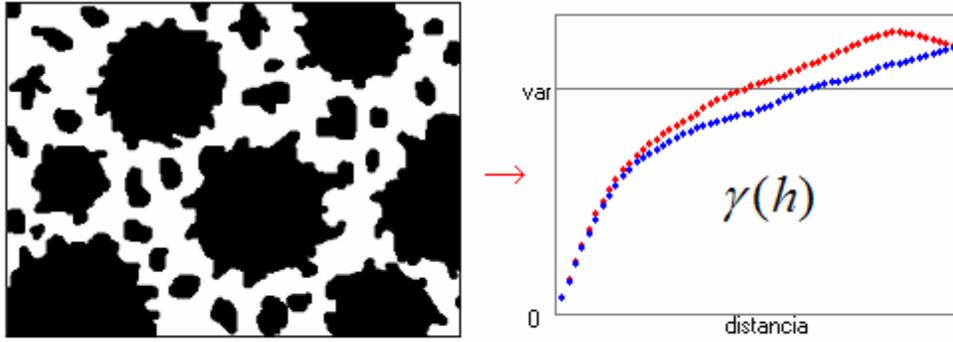


Figura III.47: Presencia de dos estructuras, a pequeña escala y a gran escala.

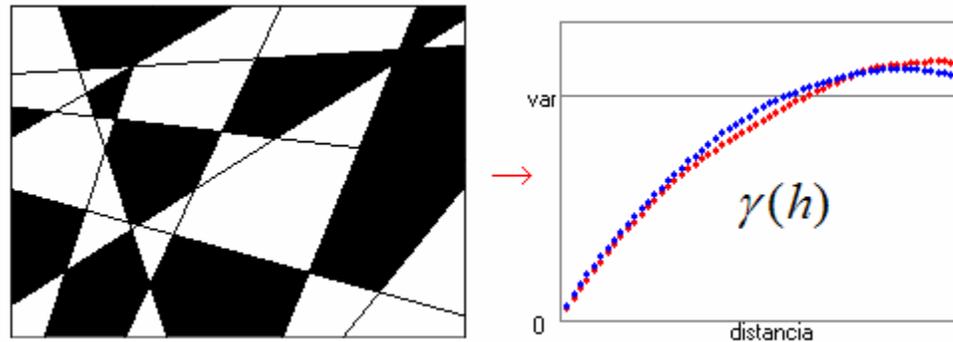


Figura III.48: Fallas. La figura se obtuvo dibujando rectas al azar, se obtienen así polígonos. Cada polígono se pinta de negro si al tirar una moneda sale cara, en caso contrario se deja igual..

En vez de utilizar una variable regionalizada con valores 0 o 1 (realización de un conjunto aleatorio), se puede tomar una imagen y asignar a cada pixel el código computacional de su color (normalizado). La figura III.49 ilustra esta situación:

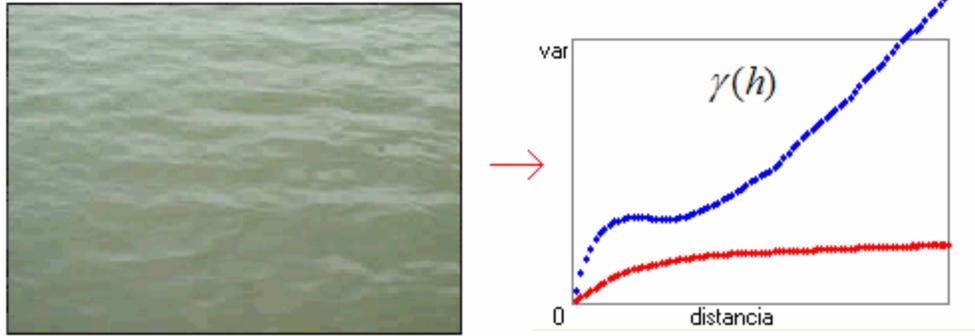


Figura III.49: Variograma de una imagen (agua). Observar que la variable regionalizada es estacionaria en la dirección este-oeste, mientras que en la norte-sur tiene una deriva, la cual se manifiesta solo para grandes distancias: Se dice que la realización es "localmente estacionaria" en la dirección NS.

Observación importante acerca del cálculo de variogramas: El variograma $\gamma(h)$ es un promedio; este promedio es bueno cuando el número N' de parejas es grande. Sin embargo, a medida que $|h|$ crece, N' decrece; la práctica justifica entonces la regla siguiente:

"Un variograma $\gamma(h)$ es significativo hasta una distancia d_M igual a la mitad de la dimensión del campo en la dirección de h ".

Ejemplo: En el caso de la figura, el variograma en la dirección EW debe calcularse en esta dirección hasta una distancia máxima del orden de 200 metros:

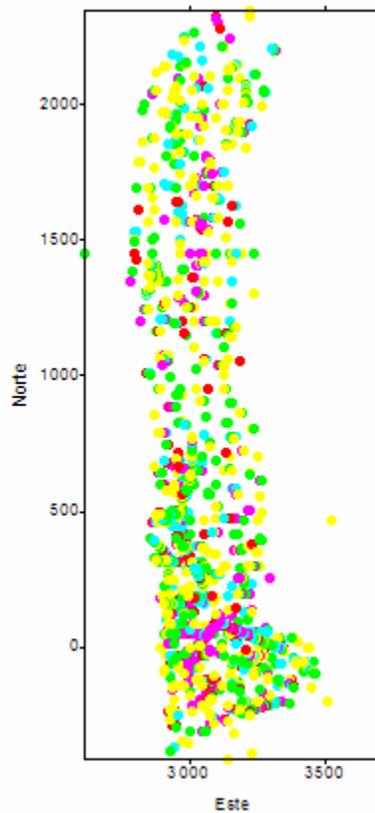


Figura III.50: Compósitos proyectados en una planta de la Extensión Norte de Mina Sur. El ancho del cuerpo es del orden de 400 metros en la dirección EW.

Ejercicio:

Los datos de la figura corresponden a una zona dentro del yacimiento de nitratos-yodo de Lagunas. Encontrar la función $\gamma(h)$ hasta $|h| = 250$ m. según las direcciones: $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90, 135^\circ$.

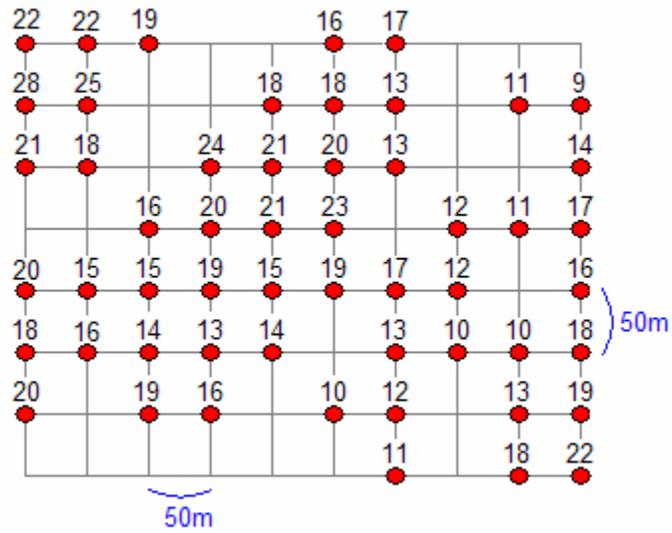


Figura III.51: Leyes de NaNO₃ Oficina Lagunas. Profundidad del sondaje = 2 metros.

En el caso de existir un alcance, determinar su orden de magnitud.

Si la regionalización es isótropa, encontrar el variograma omnidireccional, es decir el variograma promedio para cada dirección.

c) Cálculo del variograma para mallas irregulares.

En el caso bidimensional, la situación es la siguiente:

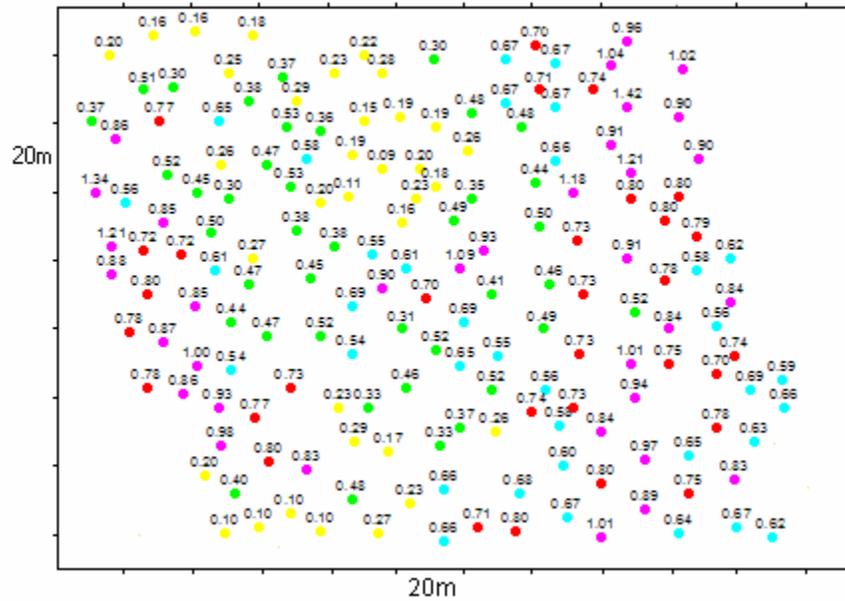


Figura III.52: Leyes de alcalinos en un banco de la mina de hierro de Marquesado (España).

En la figura III.52 se observa la localización de pozos de tiro en un banco de la mina de hierro de Marquesado, España. Supongamos que queremos calcular $\gamma(h_1)$ utilizando el algoritmo general, siendo h_1 el vector siguiente:

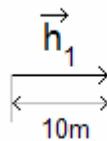


Figura III.53: Vector para cálculo del variograma.

Lo más probable es que no encontremos ningún o muy pocos pares de datos que estén exactamente a la distancia h_1 . Es necesario entonces introducir aproximaciones para el cálculo de $\gamma(h)$.

Aproximación: Método de los sectores. Se basa en la aproximación siguiente:

“Dos puntos están aproximadamente a la distancia h si una vez fijado el primero, el segundo cae en la zona de la figura”:

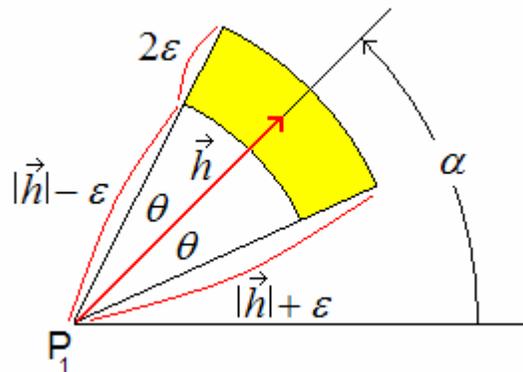


Figura III.54: Método de los sectores.

Si el punto P_2 cae en la zona amarilla, entonces se dice que P_1 y P_2 están aproximadamente a la distancia h .

θ se llama tolerancia angular, ϵ se llama tolerancia en distancia.

La elección de θ y ϵ depende de la distribución espacial de los datos y de la práctica. En algunos casos la práctica recomienda utilizar $\theta = 22.5^\circ$ y $\epsilon = 0.5b$, en que b es la distancia mínima, llamada paso, para el cálculo de $\gamma(h)$.

El paso en una dirección dada se puede determinar como la distancia entre datos aproximadamente contiguos en esa dirección.

El método de aproximación presenta problemas:

- Puede caer más de un punto en la zona. En este caso se consideran las diferencias en el cálculo.
- si $|h|$ es grande, como el ángulo se abre, la aproximación tiende a ser grosera:

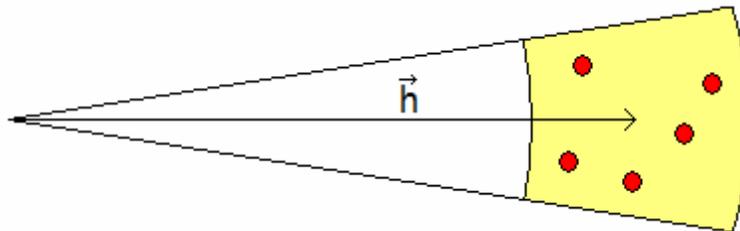


Figura III.55: La aproximación no es buena para h grande.

Algunos paquetes computacionales definen otro tipo de zona para evitar este problema (método del lápiz):

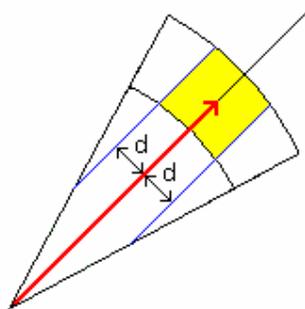


Figura III.56: Aproximación para h grande.

En este caso hay que definir tres parámetros: θ , ε y d (d se llama a veces ancho de banda).

Hay que tener presente que es necesario conocer bien el variograma en una vecindad de $h=0$ (los puntos más cercanos al origen), luego, en algunas situaciones no se justifica este método del lápiz.

El método de los sectores se puede generalizar al espacio de tres dimensiones:

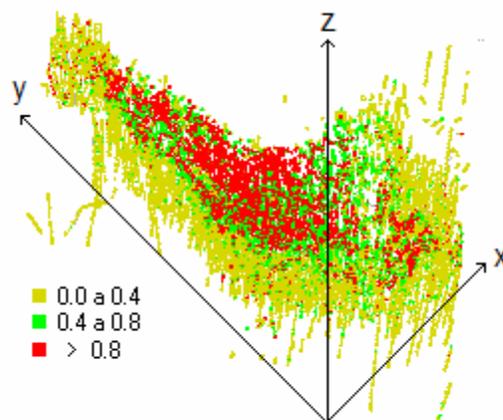


Figura III.57: Compósitos en el espacio de tres dimensiones, con leyes de cobre en mina Chuquicamata. Comparar con la figuras I.11 y II.9.

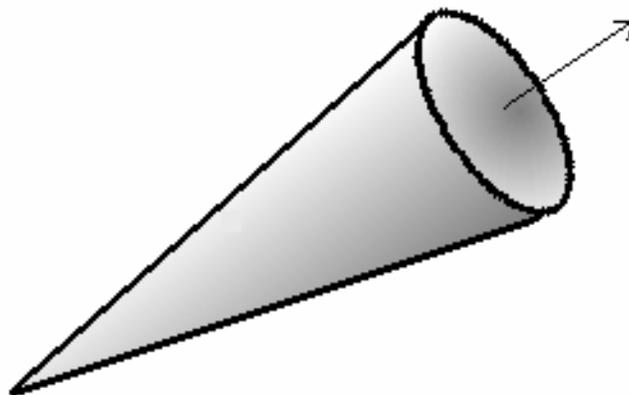


Figura III.58a: Aproximación en el espacio de 3 dimensiones: Una especie de cono.

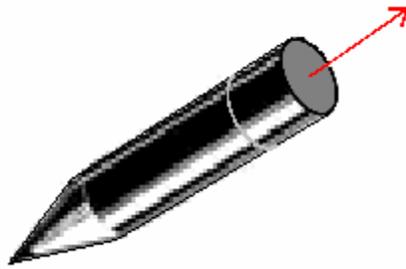


Figura III.58b: Aproximación en el espacio de 3 dimensiones: Método del lápiz.

La nube variográfica.

Dada una cierta dirección, la nube variográfica consiste en graficar, para una dirección dada, el valor de todas las diferencias $\frac{1}{2}[z(x_i) - z(x_j)]^2$ en función de la distancia entre los puntos x_i y x_j .

En la figura III.59 se ha representado la nube variográfica correspondiente a leyes de alcalinos en una mina de hierro, en la dirección de azimuth 45° , con tolerancia angular de 22.5° . Se ha representado también el variograma experimental para un paso de 10 metros, con una tolerancia en distancia de ± 10 metros.

Esta herramienta permite detectar la influencia de algunos datos anómalos en el cálculo del variograma. Estos datos podrían ser filtrados en la variografía.

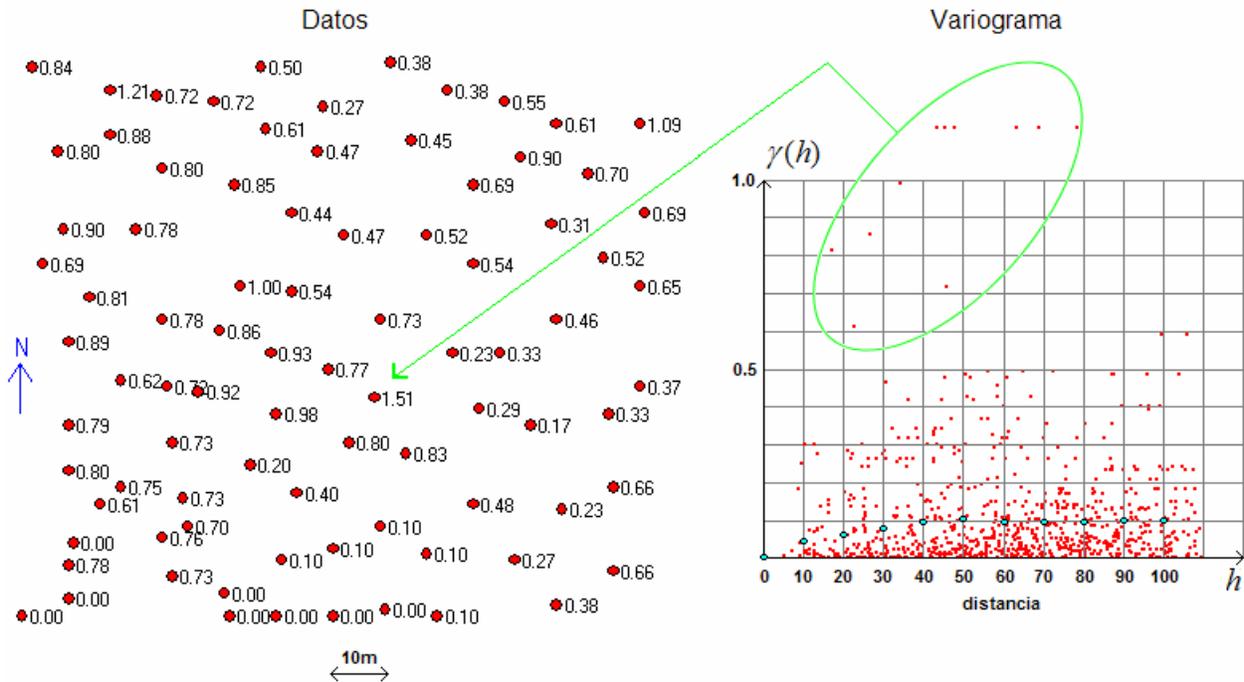


Figura III.59: Nube variográfica. El dato anómalo 1.51 es el responsable de las diferencias que están en la elipse de la derecha.

III.1 Ajuste de un variograma a un modelo teórico

El objetivo de ajustar un modelo teórico es disponer de una ecuación, la cual se utilizará en los cálculos posteriores. En general, los paquetes computacionales trabajan exclusivamente con el modelo teórico.

Distinguiremos dos variogramas.

- i) El variograma experimental, calculado a partir de los datos.
- ii) el variograma teórico, que corresponde a una ecuación que se ajusta al variograma experimental:

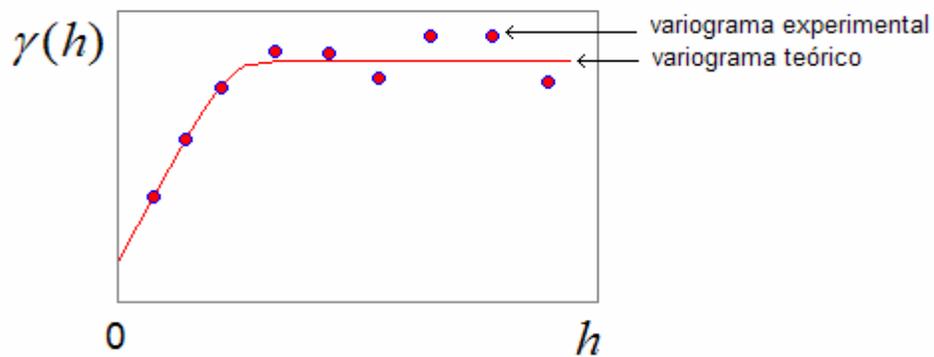


Figura III.60: Variograma experimental y variograma teórico.

Es evidente que el variograma teórico debe respetar al variograma experimental, sobre todo en los primeros puntos, que son más confiables.

El ajuste de variogramas constituye un punto crucial en un estudio geoestadístico porque todos los cálculos posteriores se harán utilizando exclusivamente el modelo teórico.

Para tener un buen ajuste, hay que considerar que uno de los objetivos finales es la estimación de leyes de bloques (modelo de bloques), dentro de una cierta vecindad restringida de manera de no considerar demasiadas muestras para estimar la ley de cada bloque:

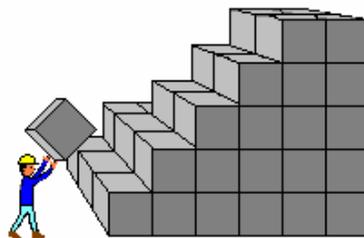


Figura II.61a: El modelo de bloques es fundamental para la planificación minera.

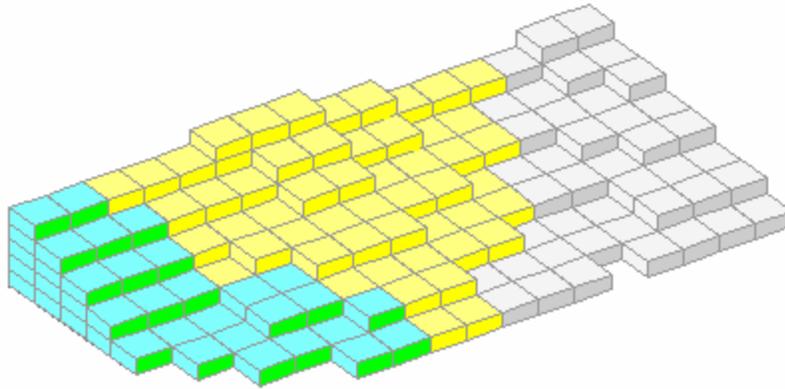


Figura III.61b: Modelo tridimensional de bloques. Existen tres unidades geológicas (a bloque completo)

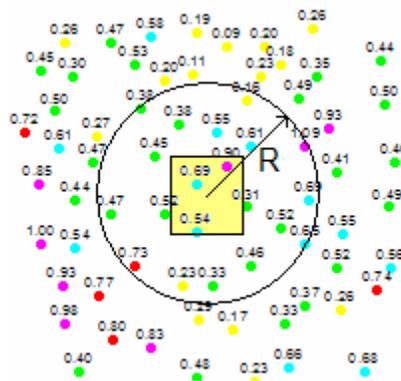


Figura III.62: Vecindad de estimación. Para estimar el bloque de la figura solo se utilizan los compósitos que están dentro del círculo de radio R.

Si la vecindad de búsqueda es circular o esférica, sólo se utilizará la función $\gamma(h)$ hasta una distancia máxima de $|h| = 2R$; luego conviene ajustar $\gamma(h)$ hasta $|h| = 2R$.

En el caso de la figura siguiente, si se usa una vecindad restringida, ambos modelos darán los mismos resultados; pero el modelo 2 es más simple y más fácil de ajustar:

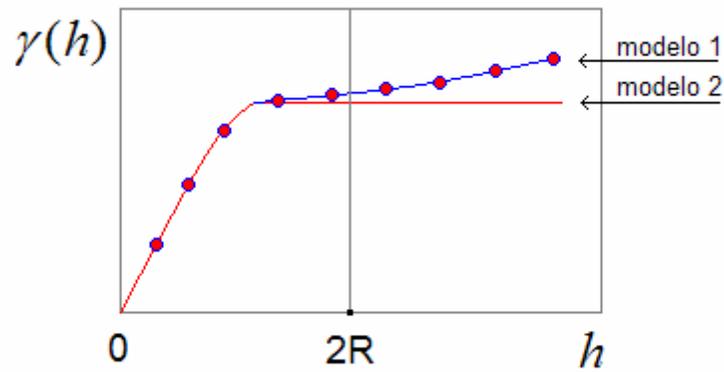


Figura III.63: Modelos de variograma.

La utilización de modelos es común en otras áreas; por ejemplo en Estadística se ajusta un modelo a un histograma de datos (existen tests de “bondad del ajuste” que son chi-cuadrado, Kolmogorov-Smirnov). La figura III.64 muestra un ejemplo de un histograma de leyes de cobre en la mina Chuquicamata, junto al modelo lognormal ajustado.

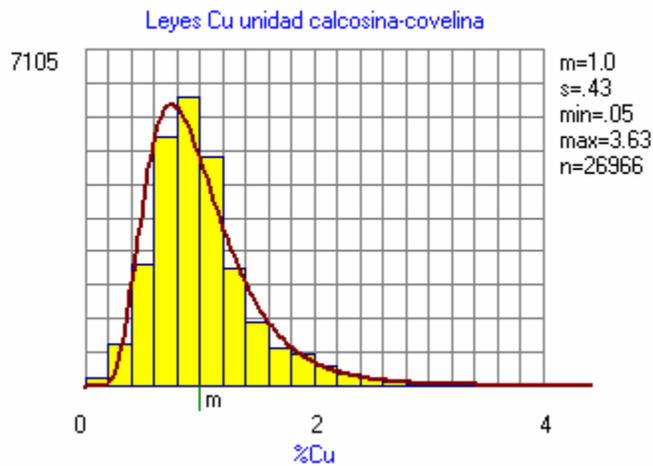


Figura III.64: Histograma experimental y modelo lognormal ajustado.

III.1.1 Los modelos de variograma

Así como en estadística existen modelos (ley de Gauss, Lognormal, ...) en Geoestadística también existen modelos de variograma.

El modelo debe cumplir con las propiedades siguientes:

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(h) \geq 0$$

$$\gamma(-\vec{h}) = \gamma(\vec{h})$$

Sin embargo, la teoría demuestra que estas condiciones no son suficientes: En efecto, se puede probar que $\gamma(h)$ pertenece a una familia Ω de funciones (llamadas funciones de tipo negativo condicional) y la elección del modelo debe quedar restringida a esta familia Ω . Elegir un modelo en la familia garantiza la coherencia de los cálculos (no se obtienen, por ejemplo, varianzas negativas).

Por consiguiente, sólo hay que utilizar los modelos que describiremos a continuación (o bien combinaciones de ellos, las cuales consisten en sumar dos o más modelos). No es conveniente crear nuevos modelos, salvo el caso en que se demuestre matemáticamente que el modelo pertenece a Ω . La condición para que una función $g(h)$ pertenezca a la familia Ω requiere conceptos avanzados de Matemáticas y queda fuera del alcance de este curso.

a) El modelo potencia

La ecuación de $\gamma(h)$ es:

$$\gamma(h) = \omega |h|^\alpha$$

en que $\omega > 0$, $0 < \alpha < 2$. Un gráfico sería:

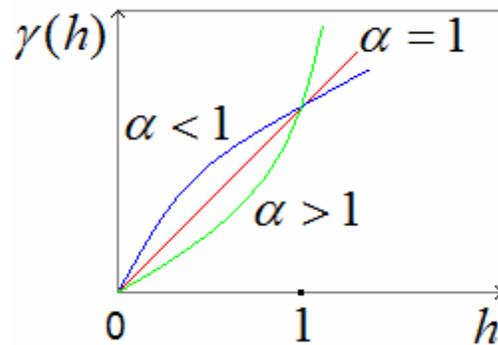


Figura III.65: Modelo potencia.

Esta familia de variogramas no presenta meseta. Un caso particular importante es cuando $\alpha = 1$: $\gamma(h)$ es una recta, se llama variograma lineal.

b) El modelo esférico: Es uno de los modelos más importantes. A menudo, el variograma de las leyes de cobre en un depósito de cobre porfídico corresponde a este modelo. Su ecuación es:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(1.5 h/a - 0.5 (h/a)^3) & \text{si } h \leq a \\ C & \text{si } h > a \end{cases}$$

$$(h = |h|)$$

El alcance es \underline{a} y la meseta es C .

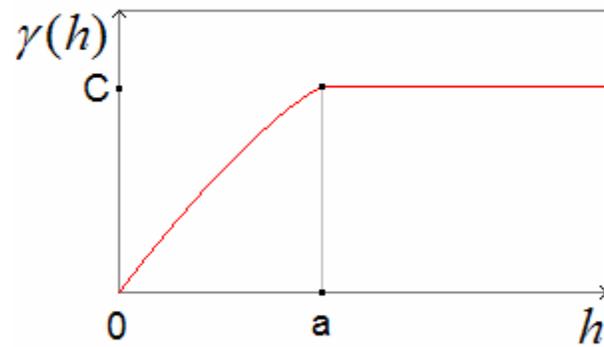


Figura III.66: Modelo esférico o modelo de Matheron.

La figura III.67 muestra el variograma en la dirección NS calculado con pozos de tronadura en la mina Lomas Bayas (cobre porfídico):

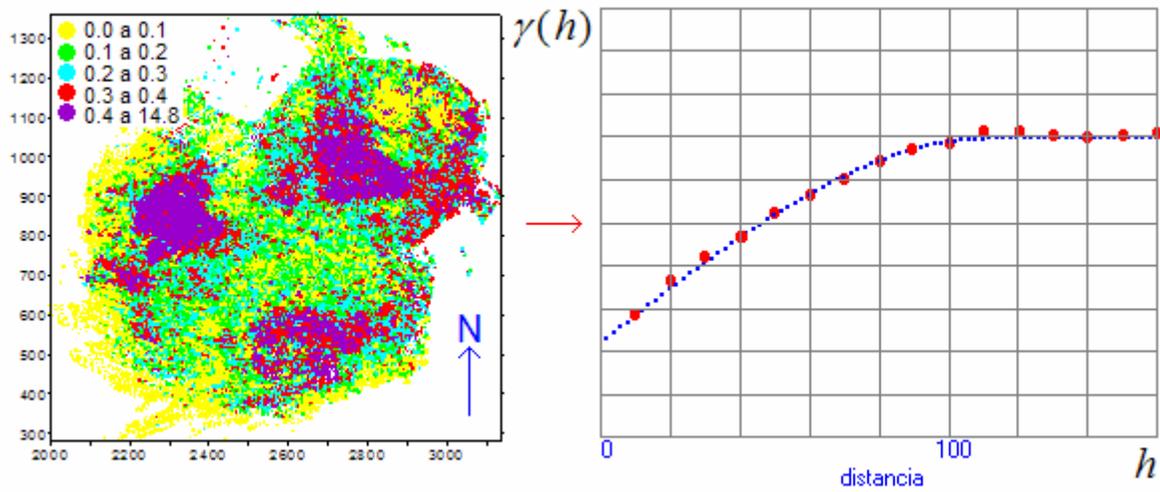


Figura III.67: A la izquierda la base de datos en una planta (75000 pozos de tronadura), a la derecha el variograma esférico (en azul) y el experimental (puntos rojos). El alcance es del orden de 100 metros.

c) El modelo cuadrático: Similar al esférico pero más simple:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(2(h/a) - (h/a)^2) & \text{si } h \leq a \\ C & \text{si } h > a \end{cases}$$

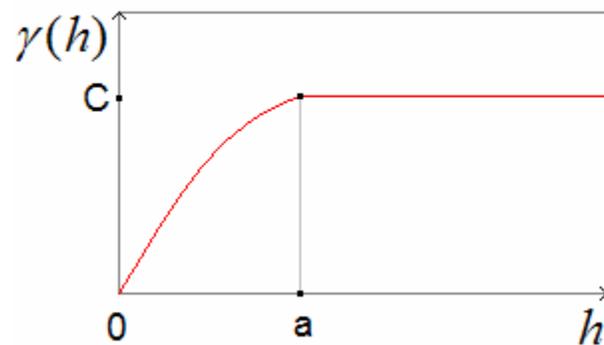


Figura III.68: Modelo cuadrático.

- d) El modelo exponencial: Crece más lentamente que el esférico o cuadrático y tiene por ecuación:

$$\gamma(h) = C (1 - \exp(- h / \omega))$$

La meseta es C; el alcance en teoría es infinito pero en la práctica: si $h > 3\omega$, entonces

$\gamma(h) \cong C$: el alcance práctico es 3ω .

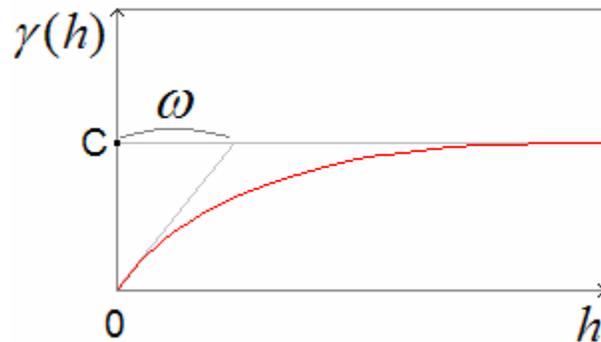


Figura III.69: Modelo exponencial o modelo de Formery. Este modelo se presenta a veces en leyes que están asociadas a fallas (ver la figura III.48, ver también la figura III.25). El alcance práctico es aproximadamente iguala 3ω .

La figura III.70 muestra el variograma en la dirección NS calculado con sondajes realizados en material quebrado en la mina Salvador (cobre porfídico):

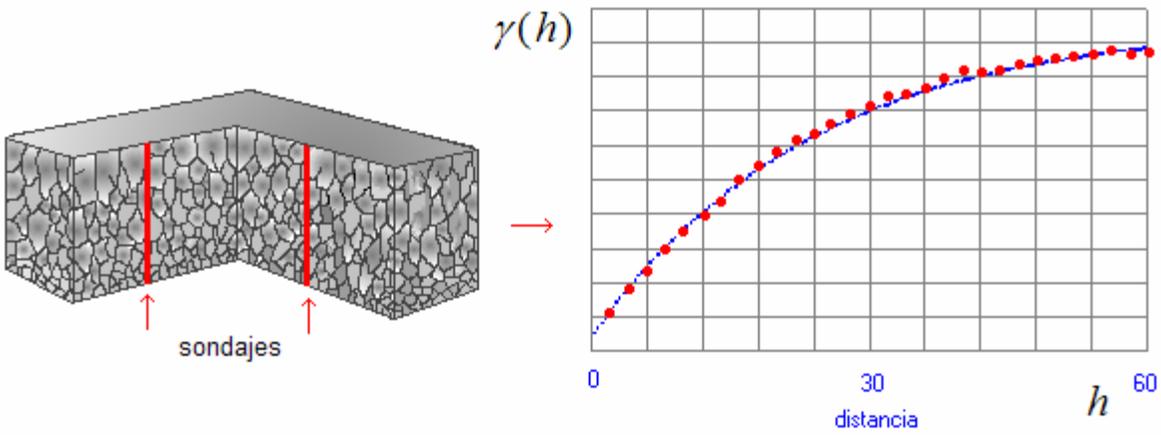


Figura III.70: Variograma vertical para el cobre, material quebrado remanente de la explotación por block-caving en mina Salvador. En azul el modelo exponencial, en rojo, los puntos experimentales.

e) El modelo sinusoidal: Sirve para representar el efecto de hoyo; su ecuación es:

$$\gamma(h) = C(1 - \text{sen}(\beta h) / (\beta h))$$

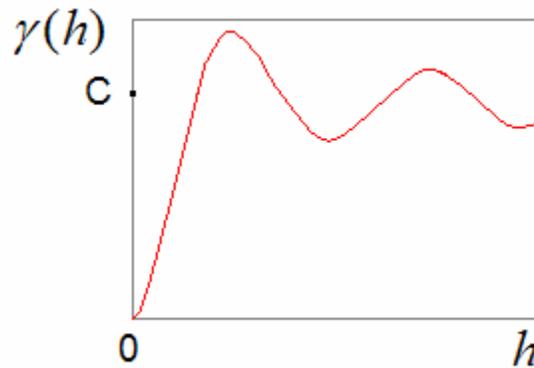


Figura III.71: Modelo sinusoidal (ver figura III.46).

f) El modelo gaussiano: Tiene un comportamiento parabólico en el origen; su ecuación es:

$$\gamma(h) = C(1 - \exp(- (h / \omega)^2))$$

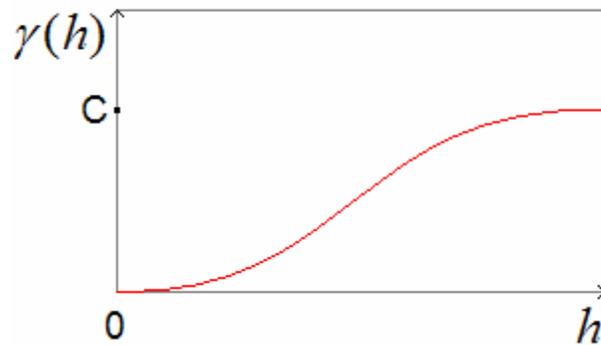


Figura III.72: Modelo gaussiano. Es derivable en el origen.

g) El modelo cúbico: Tiene un comportamiento parabólico en el origen pero su alcance es finito e igual a a ; su ecuación es:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(7(h/a)^2 - 8.75(h/a)^3 + 3.5(h/a)^5 - 0.75(h/a)^7) & \text{si } h \leq a \\ C & \text{si } h > a \end{cases}$$

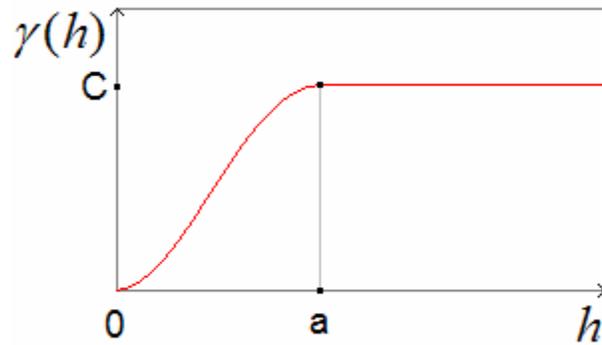


Figura III.73: Modelo cúbico. Es derivable en el origen.

En algunas ocasiones se puede ajustar un modelo correspondiente a la suma de dos (o más) modelos, llamados modelos anidados. La suma de dos modelos de variograma constituye un modelo autorizado. En la figura III.74 se ha representado el modelo:

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h)$$

En que γ_1 y γ_2 son modelos esféricos, de alcances respectivos de 10m y de 40m y de mesetas respectivas de 0.5 y 0.5. Se dice que se tienen dos estructuras:

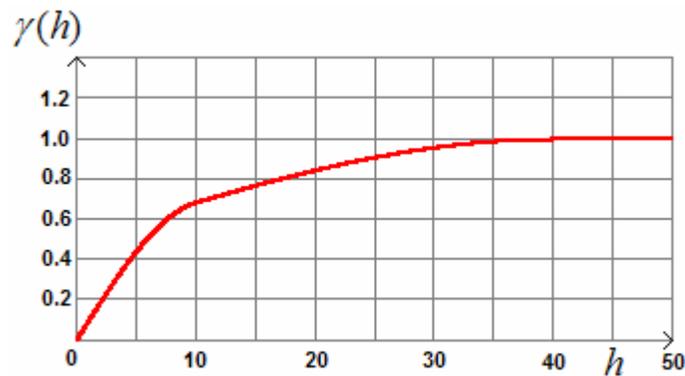


Figura III.74: Variogramas anidados.

III.2 Ajuste en el espacio de dos o tres dimensiones

Acabamos de estudiar el ajuste de variogramas en el espacio de una dimensión. Sin embargo, en la práctica se dispone de un conjunto de variogramas $\gamma_1(h)$, $\gamma_2(h)$, . . . , $\gamma_k(h)$ correspondientes a las direcciones α_1 , α_2 , . . . , α_k .

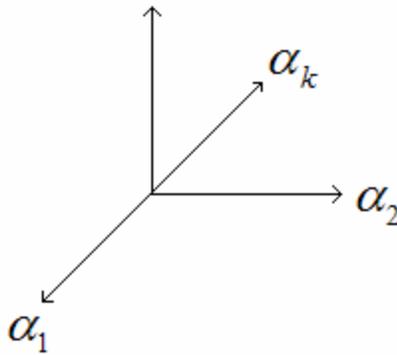


Figura III.75: Direcciones en las cuales se ha calculado el variograma.

a) Caso isótropo:

Es el caso más simple. Se cumple que:

$$\gamma_1(h) \cong \gamma_2(h) \cong \dots \cong \gamma_k(h)$$

Se utiliza entonces como modelo general el variograma ajustado al variograma omnidireccional:

$$\gamma(h) = \gamma_{\text{omni}}(|h|)$$

En esta notación:

$$h = (h_x, h_y)$$

$$|h| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

$$h = (h_x, h_y, h_z)$$

$$|h| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$$

Ejemplo: En el caso estudiado en las figura III.34, el modelo isótropo ajustado es:

$$\gamma(h) = 0.417 |h|$$

o bien, con otra notación:

$$\gamma(h_x, h_y) = 0.417 \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

b) Caso anisótropo:

En este caso los variogramas direccionales son en general diferentes:

$$\gamma_1(h) \neq \gamma_2(h) \neq \dots \neq \gamma_k(h)$$

En la práctica se distinguen dos tipos de comportamiento anisótropos del variograma:

Anisotropía geométrica:

Se produce cuando los diversos variogramas pueden reducirse a un variograma isótropo mediante una transformación lineal de las coordenadas. El caso más común en la práctica es cuando los variogramas presentan un mismo valor de meseta pero diferentes alcances:

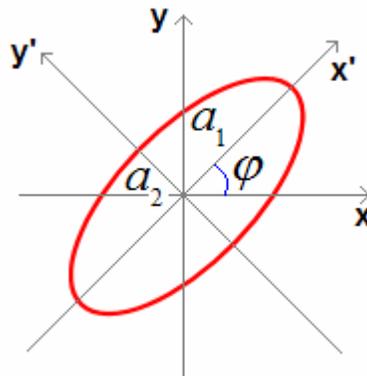


Figura III.76: Elipse de anisotropía geométrica (rosa de alcances)

En la figura se ha representado una anisotropía geométrica (en el caso isótropo lo anterior sería un círculo).

Sea $k = a_1/a_2 > 1$ la razón entre el alcance mayor y menor. Las fórmulas de transformación de coordenadas nos muestran que:

$$\gamma(h) = \gamma_1(|h'|)$$

en que $|h'| = \sqrt{(h_x \cos \varphi + h_y \operatorname{sen} \varphi)^2 + k^2 (h_y \cos \varphi - h_x \operatorname{sen} \varphi)^2}$

φ es el ángulo formado entre el eje x y el eje x' de la elipse. γ_1 es el variograma de la dirección 1. $k = a_1/a_2$.

En el caso de un variograma lineal con diferentes pendientes:

$$\gamma(h) = \omega(\theta) |h|$$

se procede de manera análoga, utilizando la elipse de pendientes o de inversos de pendientes.

Ejemplo: En el caso de la figura III.26, se puede suponer, en primera aproximación, que el eje de la elipse coincide con los ejes de coordenadas:

$$\text{EW:} \quad \gamma_1(h) = 0.0015|h| = |h| / 666.67$$

$$\text{NS:} \quad \gamma_2(h) = 0.0054|h| = |h| / 185.19$$

Aplicando la fórmula anterior, con $\varphi = 0$,

$$\gamma(h) = \gamma_1(h') = \gamma_1(\sqrt{h_x^2 + k^2 h_y^2})$$

$$\gamma(h) = 0.0015\sqrt{h_x^2 + 12.96h_y^2}$$

Anisotropía zonal

En este caso la anisotropía no puede ser reducida por una transformación lineal simple de las coordenadas.

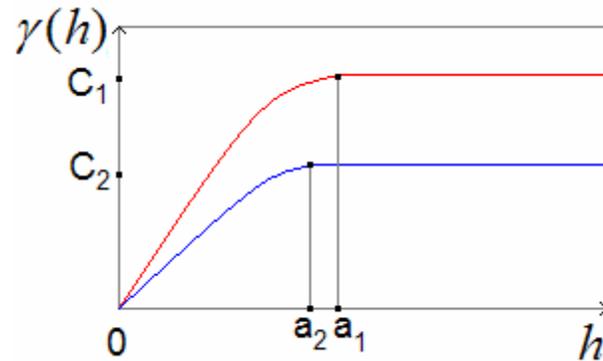


Figura III.77: Anisotropía zonal.

Se define entonces el modelo de anisotropía zonal como un modelo anidado (o imbricado), es decir:

$$\gamma(h) = \gamma_1(h_1) + \gamma_2(h_2) + \dots$$

En que cada constituyente puede representar su propia anisotropía.

Por ejemplo, en un yacimiento sedimentario el variograma vertical puede ser muy diferente al variograma horizontal:

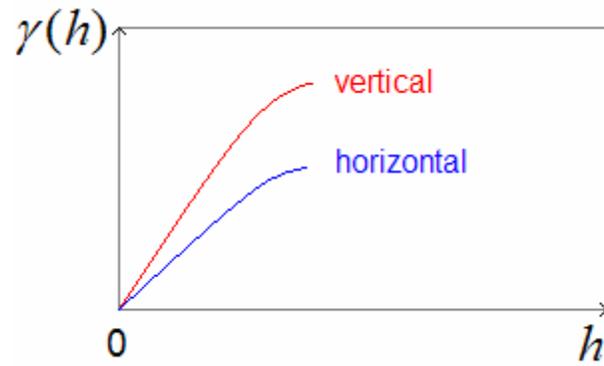


Figura III.78: Un ejemplo de anisotropía zonal.

Se puede utilizar en este caso un modelo del tipo:

$$\gamma(h_x, h_y, h_z) = \gamma_1(|\vec{h}|) + \gamma_2(|\vec{h}_z|)$$

En que:

$$|\vec{h}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$$

y h_z corresponde a la dirección vertical.

Capítulo IV

El error de estimación

Enunciado del problema:

Sea un bloque o zona V y un conjunto de datos $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_N)$, en que:

x_i = coordenada del dato $z(x_i)$

$z(x_i)$ = ley en el punto x_i

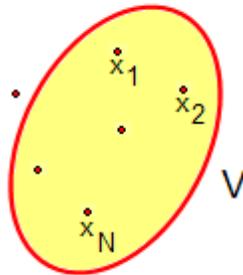


Figura IV.1: Volumen a estimar. Localización de las muestras.

N = N° de datos

No se conoce la ley media de V : z_V

En la práctica, se estima la ley media desconocida por una fórmula lineal del tipo:

$$\hat{z}_V = \alpha_1 z(x_1) + \alpha_2 z(x_2) + \dots + \alpha_N z(x_N)$$

En que los α_i verifican la condición de insesgado:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1$$

Los pesos α_i dependen del método de estimación utilizado:

$$\alpha_i = \frac{1}{N} \quad \leftarrow \text{media aritmética}$$

$$\alpha_i = \frac{S_i}{S} \quad \leftarrow \text{polígonos}$$

$$\alpha_i = \frac{\frac{1}{d_i^k}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i^k}} \quad \leftarrow \text{inverso distancia}$$

Se supone, entonces, que los α_i son conocidos.

El error de estimación es:

$$\mathcal{E} = \hat{z}_V - z_V$$

en que \hat{z}_V es la ley estimada (conocida) y z_V es la ley real (desconocida).

Mencionemos que es equivalente definir el error como:

$$\varepsilon = z_V - \hat{z}_V$$

Debido a que z_V es desconocido, entonces ε es desconocido. Renunciamos entonces a conocer el error en signo y magnitud. Sin embargo, se puede caracterizar probabilísticamente el error ε , al utilizar el modelo matemático.

Asumimos entonces que ε es una magnitud aleatoria; es decir, una variable aleatoria. Esta magnitud aleatoria tiene una cierta ley de probabilidad caracterizada por una esperanza matemática m_E y una varianza σ_E^2 . Respecto de la ley de probabilidad del error, asumimos que:

La ley de probabilidad del error es la ley normal o de Gauss. En Geoestadística esta aproximación es razonable, pero se pueden utilizar otras aproximaciones tales como la desigualdad de Chebichev.

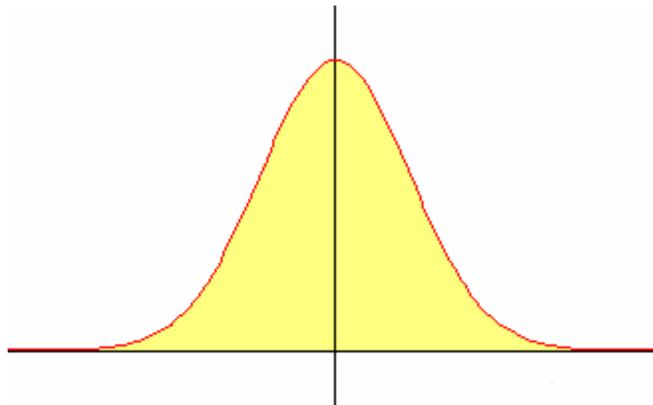


Figura IV.2: Densidad de probabilidad de la ley normal o de Gauss.

Conviene recordar las siguientes áreas de la ley de Gauss:

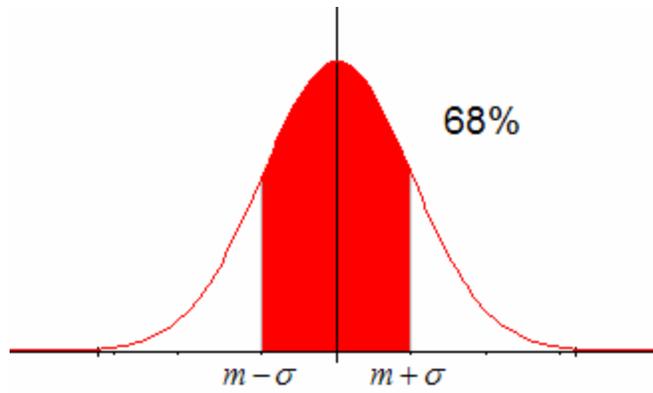


Figura IV.3: Ley normal. σ es la desviación estándar.

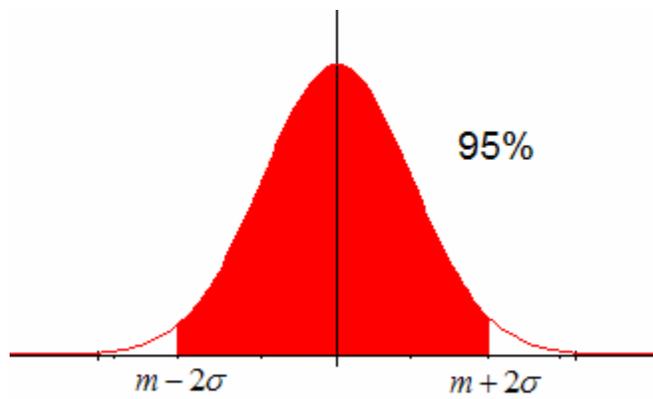


Figura IV.4: Ley normal, regla de los dos sigma. Es el caso más utilizado en la práctica.

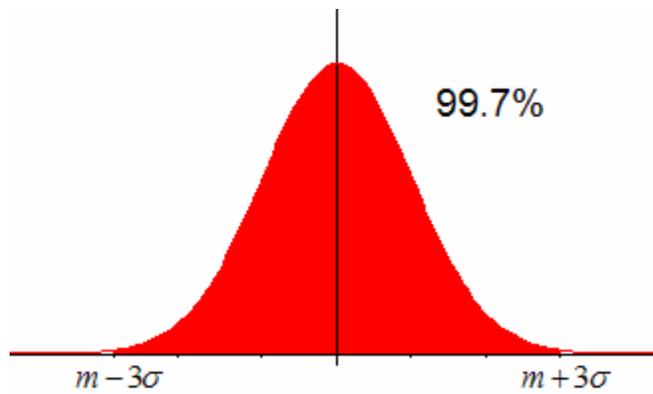


Figura IV.5: Ley normal, regla de los tres sigma.

En otras palabras, utilizando probabilidades:

$$P(m - \sigma \leq \varepsilon \leq m + \sigma) = 0.68$$

$$P(m - 2\sigma \leq \varepsilon \leq m + 2\sigma) = 0.95$$

$$P(m - 3\sigma \leq \varepsilon \leq m + \sigma) = 0.997$$

Estudio de m_E :

En términos teóricos:

$$m_E = E(\varepsilon)$$

Este valor es nulo porque los errores se compensan (siempre que el método de estimación verifique la condición de insesgado $\sum \alpha = 1$).

Luego:

$$m_E = 0$$

Estudio de σ_E^2

En términos teóricos:

$$\sigma_E^2 = E[(\varepsilon - m_E)^2] = E[\varepsilon^2]$$

$$\sigma_E^2 = E[\varepsilon^2]$$

La Geoestadística demuestra que se puede calcular numéricamente el valor de σ_E^2 . Luego, el problema está resuelto. Según las propiedades de la Ley de Gauss, podemos afirmar que:

$$P[-\sigma_E \leq \varepsilon \leq \sigma_E] = 0.68 \quad (i)$$

$$P[-2\sigma_E \leq \varepsilon \leq 2\sigma_E] = 0.95 \quad (\text{ii})$$

$$P[-3\sigma_E \leq \varepsilon \leq 3\sigma_E] = 0.997 \quad (\text{iii})$$

En la práctica se utiliza frecuentemente la ecuación (ii); es decir, se admite un riesgo de equivocación del 5%. En otras palabras:

$$-2\sigma_E \leq \varepsilon \leq 2\sigma_E \text{ con } 95\% \text{ de confianza}$$

o bien, se puede afirmar, con 95% de confianza que la ley verdadera es igual a la ley estimada \pm dos sigma (regla de las dos sigmas):

$$z_V = \hat{z}_V \pm 2\sigma_E \quad (\text{con } 95\% \text{ de confianza})$$

Si usted no cree en esta aproximación gaussiana utilice la desigualdad de Chebychev, la cual establece que, cualquiera que sea la variable aleatoria ε :

$$P[-k\sigma \leq \varepsilon \leq k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow P[-2\sigma \leq \varepsilon \leq 2\sigma] \geq 0.75$$

Existe una desigualdad aún mejor, llamada desigualdad de Gauss, la cual establece, en nuestras condiciones que (ver Cramer, 1955):

$$P[-k\sigma \leq \varepsilon \leq k\sigma] \geq 1 - \frac{4}{9k^2} \Rightarrow P[-2\sigma \leq \varepsilon \leq 2\sigma] \geq 0.89$$

En resumen el problema radica en el cálculo numérico de σ_E^2 o de la desviación estándar $\sigma_E = \sqrt{\sigma_E^2}$.

Cálculo de σ_E^2 :

Sabemos que:

$$\sigma_E^2 = E(\varepsilon^2) = E\left[(\hat{z}_V - z_V)^2\right]$$

Por otra parte:

$$\hat{z}_V = \sum_{i=1}^N \alpha_i z(x_i)$$
$$z_V = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx$$

(La ley real desconocida se calcula, en el caso de ser posible, por el promedio de las leyes de todos los puntos x dentro de V). La integral anterior puede ser simple, doble o triple. Luego el error es la diferencia entre una sumatoria y una integral:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \alpha_i z(x_i) - \frac{1}{V} \int_V z(x) dx$$

Al desarrollar ε^2 y tomar luego la esperanza matemática, se demuestra la fórmula siguiente:

$$\sigma_E^2 = 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i, x) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x, y) dx dy - \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \alpha_j \gamma(x_i, x_j)$$

Que constituye la fórmula fundamental para el cálculo de σ_E^2 .

Por ejemplo, si se calculan con esta fórmula las varianzas del error para los tres casos de la figura IV.6, se tendrán las desigualdades:

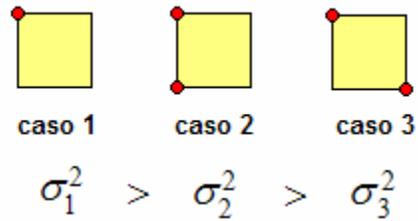


Figura IV.6. Varianza del error en tres casos.

En la expresión de σ_E^2 (en notación condensada) $\gamma(p, q)$ significa el valor numérico de $\gamma(h)$ (modelo o ecuación), siendo h el vector que une los puntos p y q :

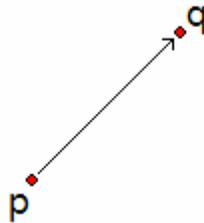


Figura IV.7: Vector que une los puntos p y q .

Antes de explicar cómo se calculan los términos en forma numérica, observamos que σ_E^2 depende de:

- N es decir, el número de datos
- x_i es decir, las coordenadas de los datos
- V es decir, la geometría y el tamaño del bloque o zona V
- $\gamma(h)$ es decir, de la regularidad o irregularidad de las leyes
- α_i es decir, del método de estimación

Significado de los términos en la expresión de σ_E^2 :

En la expresión anterior x_i representa las coordenadas de los datos; x (ó y) representa un punto variable dentro del bloque (o zona) V . En el cálculo de la fórmula fundamental se supone que se conoce el modelo de variograma.

- i) Término $\gamma(x_i, x_j)$: Representa el valor de $\gamma(h)$ siendo h el vector que une los puntos x_i y x_j :

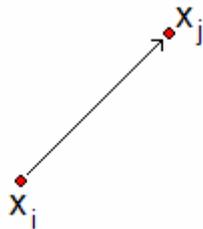


Figura IV.8: Vector que une el dato en x_i con el dato en x_j .

- i) Término $\frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i, x) dx$: Representa el valor medio de la función $\gamma(h)$ (h es el vector que une x_i con x), siendo x un punto variable dentro de V :

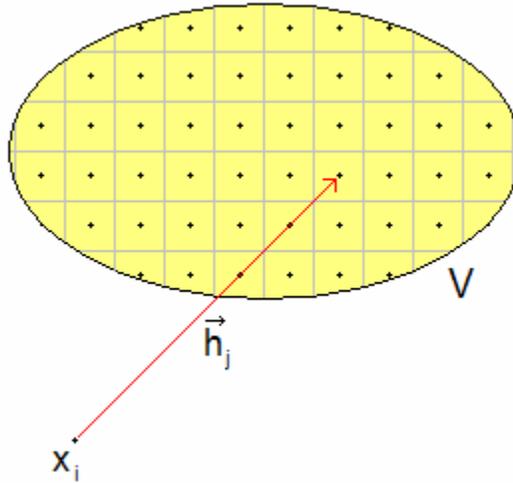


Figura IV.9: El punto x_i es fijo, el otro punto es variable dentro de V .

En la práctica la integral anterior se calcula por discretización de V en k puntos.

Entonces, la aproximación es:

$$\frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i, x) dx \approx \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \gamma(\vec{h}_j)$$

Esta aproximación es mejor cuando el número k de puntos dentro de V es más grande.

La práctica recomienda un número mínimo de puntos dentro de V de manera de obtener una precisión aceptable:

i) Si V es bidimensional: $k \geq 36$ ptos.

ii) Si V es tridimensional: $k \geq 64$ ptos.

Se puede tomar un valor de k superior a los recomendados, pero los procesos computacionales serán más lentos.

iii) Término $\frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(x, y) dx dy$: Representa el valor medio de la función $\gamma(h)$

(h es el vector que une x con y) siendo x e y dos puntos variables dentro de V:

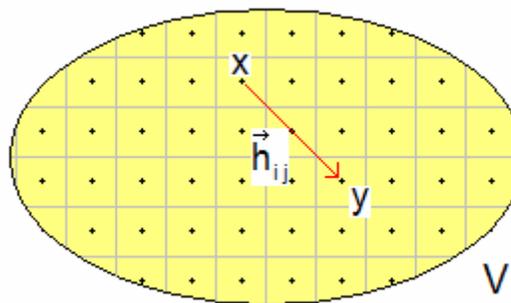


Figura IV.10: El punto x y el punto y describen independientemente el conjunto V.

Esta integral también se calcula por discretización de V en k puntos.

Entonces, la aproximación es:

$$\frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(x, y) dx dy \approx \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \gamma(\vec{h}_{ij})$$

El cálculo numérico de σ_E^2 es entonces posible. Se puede utilizar un programa computacional para calcular σ_E^2 o bien $2\sigma_E$.

Ejemplo: En el yacimiento isótropo de la figura III.35 , se tiene que:

$$\gamma(h_x, h_y) = 0.417\sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

Individualizamos el bloque siguiente:

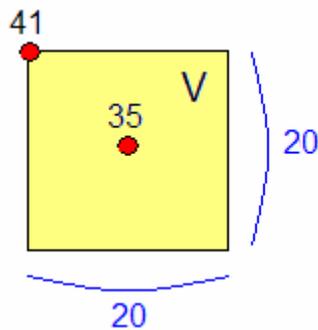


Figura IV.11: Bloque con N=2 muestras.

a) Si se estima z_V por $z_V = 0.5 Z(x_1) + 0.5 Z(x_2) = 38$, un cálculo computacional proporciona: $2 \sigma_E = 3.02$

Luego:

$$z_V = 38 \pm 3.02$$

(con 95% de confianza)

b) Si se estima z_V por $z_V = 1 \cdot z(x_1) = 35$, se obtiene: $2 \sigma_E = 2.84$

Luego:

$$z_V = 35 \pm 2.84$$

En este caso se utilizó un solo dato (contra 2 del caso anterior) y sin embargo se obtuvo un error menor. La razón de esta aparente paradoja es que en el caso a) se utilizó mal la información de los sondeos, atribuyéndoles a ambos el mismo peso 0.5. Es evidente que el dato $z(x_1)$ debe tener mayor peso que el dato $z(x_2)$.

c) Si se estima z_V por $z_V = 0.75 z(x_1) + 0.25z(x_2) = 36.5$, se obtiene $2\sigma_E = 2.38$.

Luego:

$$z_V = 36.5 \pm 2.38$$

Como este error (con confianza del 95%) es menor que los dos anteriores, se elimina la paradoja. Este ejemplo nos lleva a la conclusión que no basta con tener datos sino que hay que utilizarlos bien (es decir, ponderarlos en forma adecuada). Sin embargo, nos queda una inquietud (que responderemos en el capítulo siguiente): ¿Existe otra ponderación de los datos que nos proporcione un error menor?....

Observaciones:

1. La fórmula para el cálculo de la varianza de estimación o varianza del error σ_E^2 :

$$\sigma_E^2 = 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i, x) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x, y) dx dy - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \gamma(x_i, x_j)$$

No depende de las leyes $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_N)$ utilizadas en el estimador $Z_V = \sum \alpha_i z(x_i)$ (en estricto rigor sí depende porque estas leyes se utilizaron en el cálculo de $\gamma(h)$). Por consiguiente, se puede calcular la varianza del error en el caso de agregar uno o más sondajes adicionales. Se puede entonces cuantificar la ganancia de precisión que aportaría un reconocimiento suplementario.

2. Nos podríamos plantear el problema inverso: Suponer que en el estimador $Z_V = \sum \alpha_i z(x_i)$ los pesos α_i son desconocidos y definir un criterio para calcularlos. Intuitivamente vemos que el criterio debería ser: "encontrar los pesos α_i de manera de minimizar σ_E^2 ". Esta es la idea del método del krigeado.

Capítulo V

El Krigado

V.1. Introducción

En términos mineros, el krigado consiste en encontrar la mejor estimación lineal insesgada de un bloque o zona V considerando la información disponible; es decir, las muestras interiores y exteriores a V .

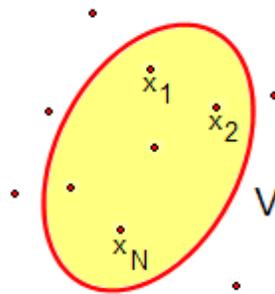


Figura V.1: Volumen a estimar.

El krigado atribuye un peso λ_i a la muestra $z(x_i)$. Estos pesos λ_i se calculan de manera de minimizar la varianza del error cometido.

Interés del Krigado

El interés del krigado proviene de su misma definición: al minimizar σ_E^2 estamos seguros de obtener la estimación más precisa posible de V o equivalentemente, de sacar el mejor provecho posible de la información disponible.

El nombre krigeado proviene de los trabajos de Daniel Krige en las minas de oro sudafricanas de Rand, en los años 50. La teoría fue formalizada una década más tarde por el geomatemático francés Georges Matheron.

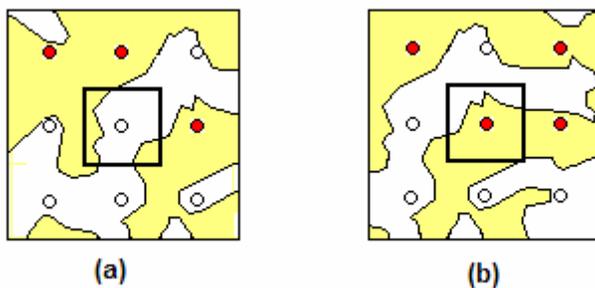


Figura V.2: Dos bloques contiguos en la oficina Ossa (ver figura I.13). El color amarillo representa mineral (con ley 1) y el blanco estéril (con ley 0). Los círculos representan los datos. Se observa que, en general, es necesario utilizar datos externos al bloque.

El interés práctico más importante del krigeado, proviene, no del hecho que asegura la mejor precisión posible, sino más bien porque permite evitar un error sistemático. En la mayoría de los depósitos mineros, se deben seleccionar, para la explotación, un cierto número de bloques, considerados como rentables y se deben abandonar otros bloques considerados no-explotables. Daniel Krige demostró que, si esta selección se realizara considerando exclusivamente las muestras interiores a cada bloque, resultaría necesariamente (en promedio) una sobre-estimación de los bloques seleccionados. La razón de este problema es que el histograma de las leyes reales de los bloques tiene menos leyes extremas, ricas o pobres, luego tiene más leyes intermedias que el histograma calculado con las muestras interiores, y, si se calcula el efecto de una selección sobre este último histograma, los paneles eliminados serán en realidad menos pobres que lo que se había previsto, y los paneles conservados menos ricos (figura V.2).

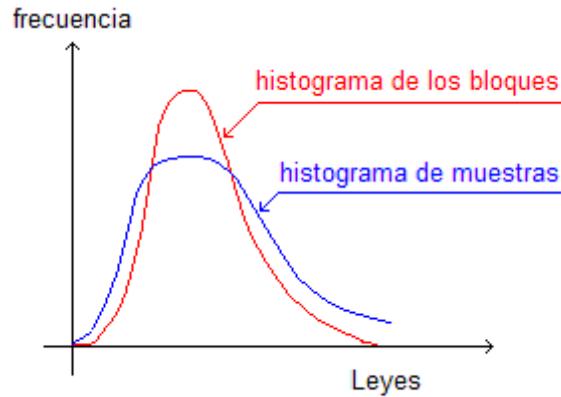


Figura V.3: Histograma de bloques y de muestras.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, el krigado define el estimador lineal:

$$\hat{z}_K = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \dots + \lambda_N z(x_N)$$

con la condición de insesgado (llamada también condición de universalidad):

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$$

Los pesos λ_i se calculan de manera de minimizar la varianza σ_E^2 del error $\varepsilon = Z_K - Z_V$, en que Z_V es la ley media desconocida de V .

Como es natural, el krigado atribuye pesos altos a las muestras cercanas a V y pesos débiles a las alejadas. Sin embargo, esta regla intuitiva puede fallar en ciertas

situaciones en las cuales se habla de efecto de pantalla o de transferencia de influencia.

Estudiaremos estos conceptos con un ejemplo: La figura siguiente muestra un bloque que debe ser estimado a partir de 8 muestras S_1, S_2, \dots, S_8 .

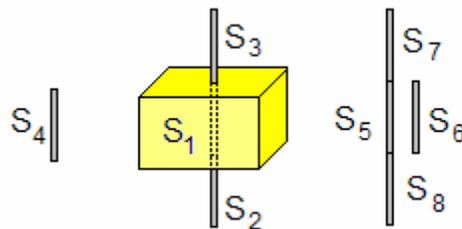


Figura V.4: Transferencia de influencia y efecto de pantalla.

El krigeado encontrará en este caso, suponiendo isotropía espacial:

$$\text{i) } \lambda_1 \geq \lambda_i \quad (i = 2, 3, \dots, 8)$$

La muestra S_1 es la de mayor peso.

$$\text{ii) } \lambda_2, \lambda_3 \geq \lambda_i \quad (i = 4, 5, \dots, 8)$$

Las muestras S_2 y S_3 tienen mayor peso que las muestras S_4, S_5, \dots, S_8

$$\text{iii) } \lambda_6 \cong 0$$

Se dice que la muestra S_5 hace pantalla a la muestra S_6 .

$$\text{iv) } \lambda_4 \cong \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8$$

Se dice que hay una transferencia de influencia; es decir, la influencia de la muestra S_4 se reparte entre las muestras S_5, S_6, S_7 y S_8 . Se puede afirmar que el krigado “desagrupa” la información.

La menor o mayor intensidad de los efectos anteriores depende, evidentemente, del variograma (efecto de pepita, meseta, alcance).

Por ejemplo, si se tiene un variograma lineal isótropo, $\gamma(h)=\omega|h|$, se tienen los pesos siguientes para estimar el bloque B:

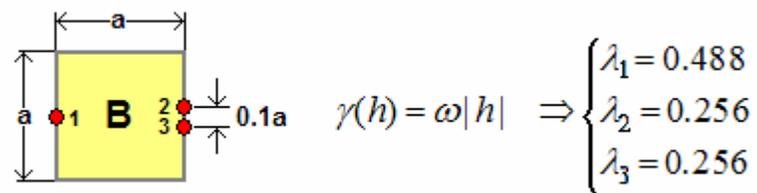


Figura V.5: Variograma lineal y pesos del krigado. Se tienen 3 muestras. Se produce un “desagrupamiento”

V.2. Las ecuaciones del krigado

Para obtener las ecuaciones de krigado hay que minimizar la expresión de σ_E^2

$$\sigma_E^2 = 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i, x) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x, y) dx dy - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j)$$

pero los λ_i deben verificar la condición:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

El método clásico para minimizar la expresión de σ_E^2 (igualar a cero las derivadas parciales de σ_E^2 respecto de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$) no asegura que la suma de los λ_i sea 1. En este caso hay que utilizar el método de Lagrange, el cual explicaremos con un ejemplo matemático:

Ejemplo:

Minimizar la función $A = x^2 + y^2$ si $x + y = 1$. El método de Lagrange define la función A' siguiente:

$$A' = x^2 + y^2 - 2\mu(x + y - 1)$$

μ es una incógnita auxiliar llamada parámetro de Lagrange. Observamos que A' es una función de tres variables: x, y, μ . Por otra parte, si se verifica la condición $x + y = 1$, entonces $A' = A$.

El método de Lagrange consiste en igualar a cero las derivadas parciales de A' :

$$\partial A' / \partial x = 2x - 2\mu = 0$$

$$\partial A' / \partial y = 2y - 2\mu = 0$$

$$\partial A' / \partial \mu = -2(x + y - 1) = 0$$

Es fácil de ver que la solución de este sistema es:

$$x = 0.5$$

$$y = 0.5$$

$$\mu = 0.5$$

Luego el mínimo de A' ó de A es:

$$A_0 = (0.5)^2 + (0.5)^2 = 0.5$$

Por lo general el parámetro μ carece de significación física.

En el caso del kriging hay que considerar la expresión:

$$A' = \sigma_E^2 + 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N - 1)$$

Se demuestra que al realizar N + 1 derivaciones se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1\gamma(x_1, x_1) + \lambda_2\gamma(x_1, x_2) + \dots + \lambda_N\gamma(x_1, x_N) + \mu & = & (1/V)\int_V\gamma(x_1, x)dx \\ \lambda_1\gamma(x_2, x_1) + \lambda_2\gamma(x_2, x_2) + \dots + \lambda_N\gamma(x_2, x_N) + \mu & = & (1/V)\int_V\gamma(x_2, x)dx \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \lambda_1\gamma(x_N, x_1) + \lambda_2\gamma(x_N, x_2) + \dots + \lambda_N\gamma(x_N, x_N) + \mu & = & (1/V)\int_V\gamma(x_N, x)dx \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \dots & + & \lambda_N & = & 1 \end{array}$$

que es un sistema lineal de N+1 ecuaciones con N+1 incógnitas ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \mu$)

Se demuestra que el sistema siempre tiene solución (se supone que el modelo de $\gamma(h)$ es autorizado), salvo el caso en el cual existen dos (o más) muestras diferentes con las

mismas coordenadas: Este caso no debería presentarse en la práctica pero a veces ocurre, lo cual hace necesario una revisión previa de la base de datos.

El método que hemos presentado se conoce como krigeado ordinario y se puede aplicar siempre que la variable regionalizada no presente una deriva en la vecindad de estimación.

Varianza del error.

Se demuestra que la expresión de σ_E^2 se simplifica, obteniéndose:

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i, x) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x, y) dx dy + \mu$$

Ejemplo 1:

En el caso del yacimiento isótropo de la figura IV.10, estudiado anteriormente:

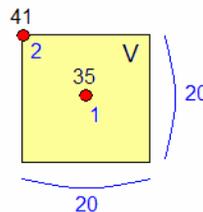


Figura: V.6: Bloque a krigear, en negro la ley de la muestra, en azul el número de la muestra.

$$\hat{z}_V = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2)$$

se obtiene, con la ayuda de un programa computacional:

$$\lambda_1 = 0.77$$

$$\lambda_2 = 0.23$$

$$\Rightarrow Z_V = 0.77 \times 35 + 0.23 \times 41 = 36.38$$

$$2 \sigma_E = 2.37$$

$$\Rightarrow Z_V = 36.38 \pm 2.37 \text{ (con 95\% de confianza)}$$

Ejemplo 2:

En el caso del yacimiento anisótropo estudiado anteriormente en la figura III.26, se tiene el bloque siguiente :

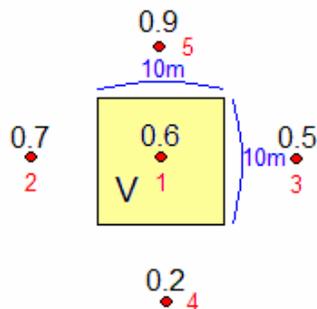


Figura V.7: En negro leyes de cobre, en rojo número de la muestra.

$$\hat{z}_V = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \lambda_3 z(x_3) + \lambda_4 z(x_4) + \lambda_5 z(x_5)$$

Al usar un programa computacional, se obtienen los ponderadores siguientes:

$$\lambda_1 = 0.47$$

$$\lambda_2 = 0.20$$

$$\lambda_3 = 0.20$$

$$\lambda_5 = 0.08$$

$$\lambda_4 = 0.08$$

$$2\sigma_E = 0.12$$

$$\Rightarrow \hat{z}_V = 0.61 \quad \Rightarrow z_V = 0.61 \pm 0.12$$

Vemos que el krigado ha considerado la anisotropía, asignando mayor peso a los datos 2 y 3 que a 4 y 5.

Krigado Puntual

En algunas ocasiones, en vez de estimar la ley media de un bloque V , interesa estimar la ley en un punto x_0 (problema de interpolación).

Corresponde al caso particular en que el volumen V tiende a cero. Se obtiene el sistema siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1\gamma(x_1, x_1) + \lambda_2\gamma(x_1, x_2) + \dots + \lambda_N\gamma(x_1, x_N) + \mu & = & \gamma(x_1, x_0) \\
\lambda_1\gamma(x_2, x_1) + \lambda_2\gamma(x_2, x_2) + \dots + \lambda_N\gamma(x_2, x_N) + \mu & = & \gamma(x_2, x_0) \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_1\gamma(x_N, x_1) + \lambda_2\gamma(x_N, x_2) + \dots + \lambda_N\gamma(x_N, x_N) + \mu & = & \gamma(x_N, x_0) \\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \dots & + & \lambda_N & = & 1
\end{array}$$

con la varianza:

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + \mu$$

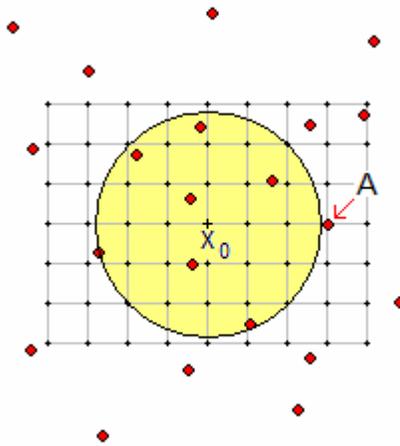


Figura V.8: Kriging del punto x_0 . Se puede generar una grilla de valores interpolados al hacer variar x_0 . Esta técnica tiene aplicación en la cartografía automática y en la simulación de leyes.

El krigado puntual tiene la propiedad de ser un interpolador exacto en el sentido de que si se desea estimar la ley en un punto conocido (por ejemplo el punto A de la figura V.7), el krigado proporciona la ley del dato con una varianza $\sigma_E^2 = 0$. Se dice que el krigado puntual "pasa por los puntos":

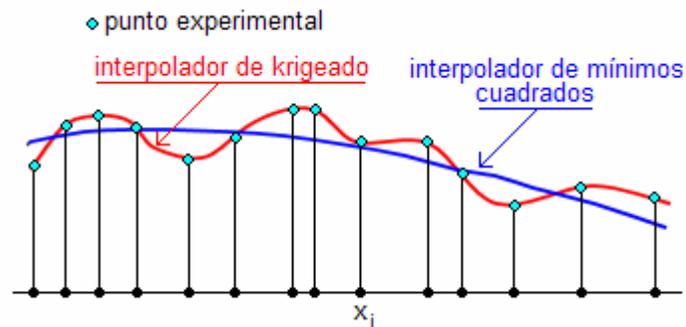


Figura V.9: Krigado puntual en una dimensión versus interpolador de mínimos cuadrados.

Esta propiedad no la tienen otros interpoladores tales como los mínimos cuadrados.

V.3. Propiedades del Krigado

Las propiedades más importantes del método de krigado son:

a. Propiedad de simetría

Si $\gamma(h)$ es isótropo, entonces datos que son simétricos respecto de V y con respecto a los otros datos tienen pesos iguales.

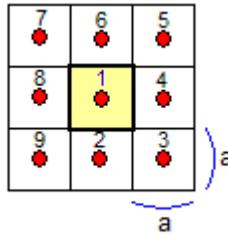


Figura V.10: Propiedad de simetría del krigado.

En el ejemplo de la figura V.10:

$$\lambda_1 = \lambda_1$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_8$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_9$$

Esta propiedad era útil cuando se resolvían los sistemas de krigado “a mano”

b. Composición de krigados

Sean dos volúmenes disjuntos V_1 y V_2 ; sean z_1 y z_2 los estimadores de krigado respectivos:

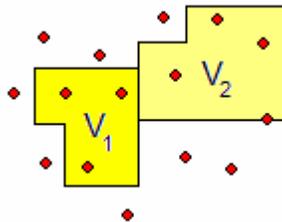


Figura V.11. Composición de krigados.

Entonces el krigeado z de $V_1 \cup V_2$ es:

$$\hat{z} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2}$$

Es decir una ponderación por volúmenes o por tonelajes.

Esta relación no es válida para las varianzas: si se desea conocer la varianza es necesario krigear el bloque $V_1 \cup V_2$ o bien utilizar una aproximación.

V.4. Vecindad de Estimación.

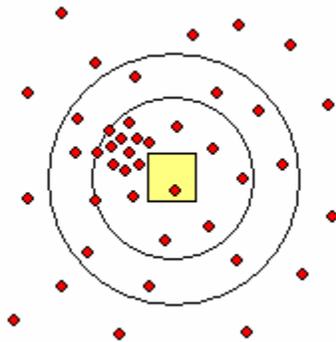


Figura V.12: Vecindad de estimación. Para el krigeado no importa la agrupación de datos al lado izquierdo del bloque (el krigeado desagrupa la información). ¿Cuál radio tomar?

En estricto rigor, el kriging de un bloque V debería realizarse considerando todos los datos disponibles (kriging completo). Sin embargo, esta situación implica cálculos muy largos; por otra parte, las muestras alejadas tendrían un peso casi nulo. Por esta razón la práctica recomienda restringirse a una vecindad de estimación que puede ser una esfera o círculo, o bien un elipsoide o elipse (3D y 2D). Como recomendación práctica, el radio de búsqueda en una cierta dirección no debe ser inferior al alcance en esa dirección.

La práctica ha demostrado que, en el espacio de dos dimensiones, con una vecindad que contenga un promedio del orden de 8 muestras, los resultados son buenos. En el espacio de tres dimensiones la situación es más compleja y debe ser analizada en cada caso particular.

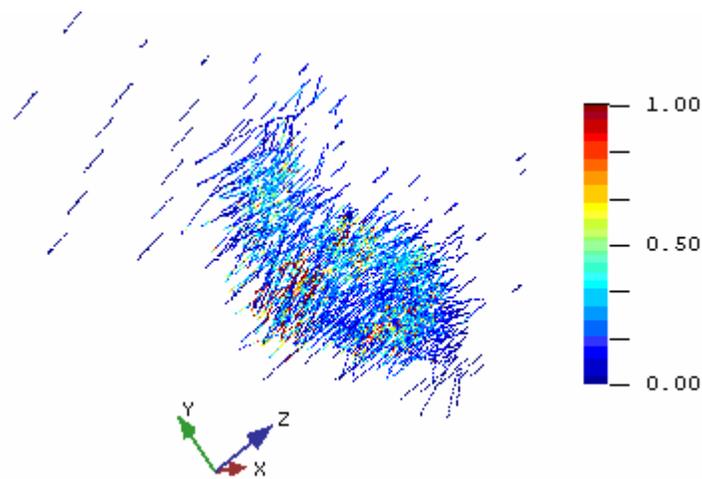


Figura V.13: En el espacio 3D hay que elegir los parámetros de búsqueda de manera de que se produzca "interpolación" entre los sondajes. En esta mina se observa que quedarán bloques mejor estimados que otros y habrá que categorizarlos en medidos, indicados e inferidos.

V.5. Estrategia de búsqueda.

Esta estrategia establece los parámetros que hay que utilizar para la búsqueda de compósitos a utilizar en la estimación del bloque. Dependiendo del software utilizado, estos parámetros son:

- Radios de búsqueda (R_x , R_y , R_z). En primera aproximación se pueden utilizar los alcances del variograma en las direcciones (x, y, z), en una vecindad con forma de elipsoide.

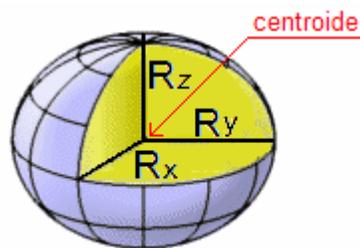


Figura V.14: Elipsoide de búsqueda. En algunas situaciones este elipsoide puede estar inclinado. El centroide es el centro de gravedad del bloque.

- Mínimo k de muestras para krigear. Sirve para controlar el caso en que solo una muestra cae en la vecindad. Si, por ejemplo, se pone $k = 2$, solo se krigearán los bloques que tengan dos o más datos en la vecindad.
- Máximo r de muestras para krigear. Si se pone, por ejemplo $r = 32$, entonces cuando en la vecindad de un cierto bloques existan más de 32 compósitos, solo se utilizarán en la estimación los 32 compósitos más cercanos al centro del bloque. Este parámetro se usa para mayor velocidad de los cálculos.
- Máximo l de muestras por octante. Si se pone, por ejemplo $l = 2$, en cada octante se utilizarán las 2 muestras más cercanas al centro del bloque:

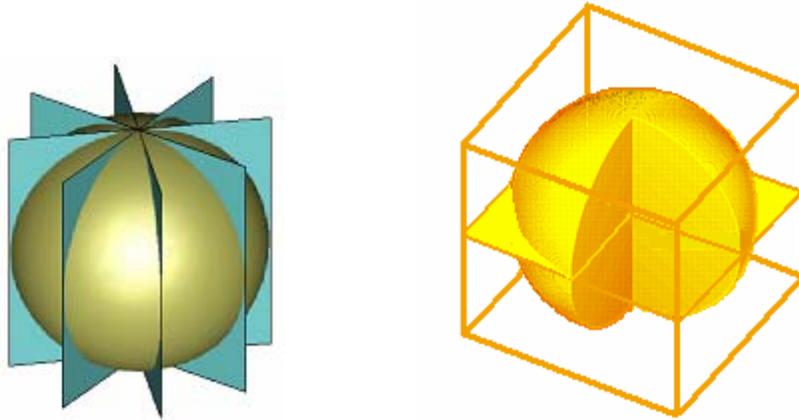


Figura V.15: Octantes. ¿Qué pasa si existen sondajes aproximadamente horizontales en el caso de la izquierda?. Algunos paquetes computacionales utilizan el hemisferio superior e inferior caso de la derecha.

El objetivo de este parámetro es “desagrupar” (pero, dadas las propiedades del kriging ¿se justifica su uso?)

- Máximo s de compósitos por sondaje. Si se pone, por ejemplo $s = 2$, en cada sondaje se utilizará un máximo de 2 compósitos, los más cercanos al centro del bloque. El objetivo de este parámetro es forzar la interpolación entre sondajes.

Los parámetros l y s deben ser utilizados con precaución. Para no introducir artefactos, es recomendable que estos valores sean altos, lo que hace que su uso no sea interesante (ver figuras V.16, V.17 y V.18).

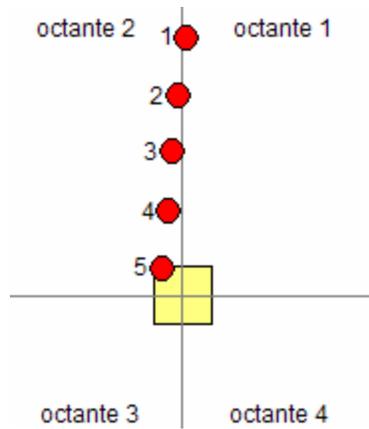


Figura V.16: Existencia de sondaje inclinado: Al usar octantes con $l = 1$, se utilizan exclusivamente los compósitos 1 y 5. Luego, hay que usar un l mayor.

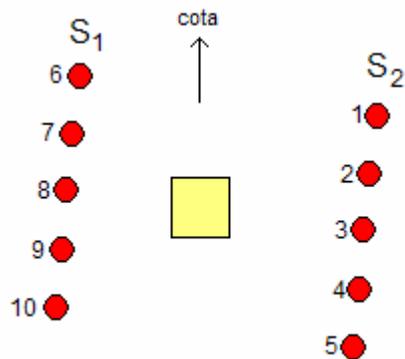


Figura V.17: Al usar un máximo $s = 1$ de compósitos por sondaje, sólo se usan los compósitos 8 y 3 (casi a la misma cota que el bloque), sin tomar en cuenta la variación en la vertical. Luego, hay que usar un s mayor.

La figura V.18 ilustra un perfil de una mina estimado con octantes (máximo 2 compósitos) y con máximo de compósitos por sondaje (máximo 2 compósitos) y el mismo perfil estimado con un máximo de 32 compósitos en la vecindad (sin octantes y sin máximo de compósitos por sondaje)

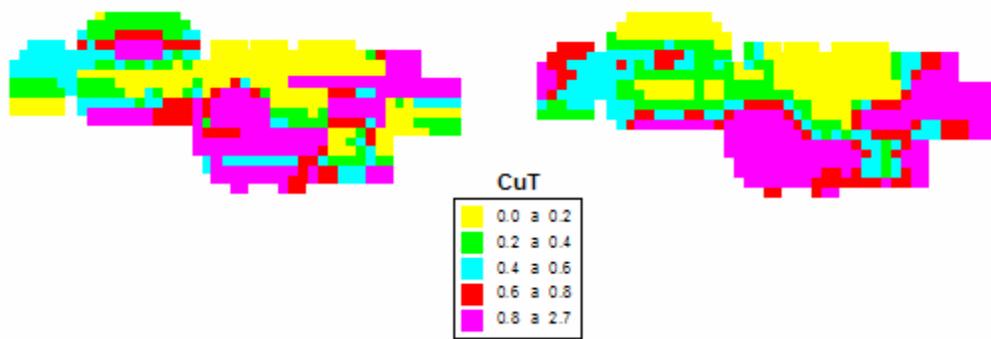


Figura V.18: A la izquierda estimación con octantes y máximo por sondaje (se produce el efecto “panqueque”). A la derecha, sin restricciones. Todos los sondajes (no dibujados) son verticales. Los compósitos tienen un largo igual a la altura del banco.

VI. Bibliografía.

- M. Alfaro Introducción a la Teoría de las Funciones Aleatorias. Depto. De Ingeniería en Minas, USACH, 2005.
- M. Alfaro Curso de Probabilidades. Departamento de Ingeniería Matemática, U. de Chile, 2007.
- M. Alfaro Estadística. Departamento de Ingeniería Matemática, U. de Chile, 1996.
- M. Alfaro Introducción al Muestreo Minero. Instituto de Ingenieros de Minas de Chile, 2003.
- H. Cramer Métodos Matemáticos de Estadística. Aguilar, Madrid, 1955.
- G. Matheron Curso de Geoestadística. Ecole Nationale Supérieure des Mines de París. Traducción al español por Marco Alfaro, 2005.
- G. Matheron La Teoría de las Variables Regionalizadas y sus Aplicaciones. ENS. de Minas de París. Traducción al español por Marco Alfaro, 2005.
- A. Journel y
Ch. Huijbregts Mining Geostatistics. Academic Press, 1978.
- J. P Chilés y
P. Delfiner Geostatistics, Modeling Spatial Uncertainty. Wiley, 2000.

Biblioteca en línea del Centro de Geoestadística de la Escuela de Minas de París:

www.cg.ensmp.fr/bibliotheque