

T H È S E

(version revue et corrigée - Avril 2001)

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité "Géostatistique"

présentée et soutenue publiquement
par

Bertrand IOOSS

le 15 Décembre 1998

**TOMOGRAPHIE STATISTIQUE EN
SISMIQUE RÉFLEXION : ESTIMATION D'UN
MODÈLE DE VITESSE STOCHASTIQUE**

Directeur de Thèse : Alain GALLI

Jury

M. M. Schmitt	Président
M. D. Gibert	Rapporteur
M. J. Virieux	Rapporteur
M. M. Campillo	Examineur
M. A. Galli	Examineur
M. P. Ruffo	Examineur
M. P. Thore	Examineur

*Aujourd'hui, je sais que je peux me réjouir
de n'être qu'un homme ordinaire, essayant d'accepter
ses propres contradictions en utilisant du mieux possible
ses modestes moyens ..."*

Herbert Stone, *alias* Livingstone, Oct. 1908.

Remerciements

A ♠♥♦♣

Pour le courage dont il a dû faire preuve pour accepter d'être l'un de mes rapporteurs et surtout pour s'engager dans la lecture de ce mémoire, bravo à Dominique Gibert. Je suis également très reconnaissant envers Jean Virieux pour son rôle de rapporteur, pour ses conseils géophysiques et pour son aide à ma recherche d'un post-doc. Merci à Michel Schmitt, de m'avoir accepté dans un premier temps au sein du Centre de Géostatistique, et d'avoir accepté dans un second temps de faire partie du jury, dont il a été dans un troisième temps le président.

Le thème de recherche de cette thèse a vu le jour grâce à Georges Matheron, il y a huit ans au Centre de Géostatistique. C'est surtout grâce à la persévérance d'Alain Galli que l'on a pu aller aussi loin dans ses développements. Merci à Alain Galli donc, de m'avoir embarqué avec lui dans cette galère. Merci chaleureusement à Pierre Thore pour son aide très appréciable dans les pires moments de ma besogne (les initiés auront compris qu'il s'agit là des différences finies). Grâce à toi, je pense avoir évité les pires écueils de ce sujet. I thought it was impossible to read so meticulously my thesis. Ernesto Della Rossa has done it. Great thanks for all his corrections and Paulo Ruffo's remarks. Merci enfin à Michel Campillo qui a accepté de jeter un oeil critique et sûrement intrigué sur ce travail.

Il n'existe pas de mot pour quantifier l'apport de Mustafa Touati à l'originalité de cette étude. Toujours est-il que ce document est le fruit de longues conversations avec le précurseur de la sismique réflexion stochastique. Comme la cavalerie, Yann Samuelides est arrivé à mon chevet à temps. Je pense que notre collaboration a porté, porte, et portera bien des fruits. Merci à tous les membres du Centre de Géostatistique, et notamment Dominique et Estelle que j'ai supportées plus de deux ans mais qui m'ont nourri et abreuvé si souvent. Merci à Pierre pour ses enCOURAGEments, Bezouille pour avoir relu mes remerciements, Lantu pour sa disponibilité de chaque (dixième de) seconde, Cachou pour nos discussions sans fin, Françoise, Nathalie et Isabelle pour tout un tas de raisons, and Jane for her beautiful english corrections.

Merci à tous les membres du Centre de Géophysique, et notamment Pascal pour son code et pour m'avoir écouté soutenu et conseillé, Mark pour ses conseils et ses qualités à finir les bouteilles dans les soirées, Gilles pour m'avoir écouté relu et vaillamment critiqué, Philippe pour ses données vraiment pourr... , Reda pour sa merveilleuse analyse des qualités de Monsieur Rytov, Fred pour m'avoir enfin appris à garder plus de 2s le ballon,

Manu et Hervé pour leur soutien devant le but, et leur bibliothèque pour m'avoir enduit de géophysique durant ses trois années.

Tous les affreux(ses) bellifontains et les adeptes de la secte BGs (prononcez bijies) sont les bienvenues sur cette page. Citons en vrac (et dans le désordre de la préférence) : BGs, Yannick, Véro, Hélène, Brigtoine, Stéphane, Nicolas, Valérie, Valéry, Léna, Nicolas, Pascal, Philippe, Antoine, Luc, Etienne, Beatriz, Delphine, . . . Je n'oublierai jamais Laurent le positiviste bluesy, le skieur de l'extrême, et surtout le magicien fléchettiste.

A l'honneur aussi les fils et choupettes de Nice : Housse, Stephanie, Pierre, Delphine, Steph, Dominique, Titou, Agnès (pièce rapportée berrichone), Alain, Captain Hugy, Jean-Marc, . . . Spéciale dédicace aux camarades de DEA et à leur fidèle (??) compagne : Manu, Cécile, Uge, Fofie, Nano, Caco, Steph, Kaurine, . . . Tonnerre d'applaudissements à tous les ex et actuels membres de FATAL ERROR et de Banal Orgasm : Zur, Laurent, Bobo, JB, Housse, Chris, Petit Box, . . .

Ce tour d'horizon se termine. Mais auparavant, je remercie la pissaladière, la socca, l'OGCNice, Nirvana et Suicidal Tendencies. Plus sincèrement ma famille niçoise, Djédjé 10055, Momo Br1-10055, Armelle la vahiné, Gene et Hervé et leurs descendants, et mes familles auvergnate, parisienne, seine-et-marnaise, normande, . . .

Table des matières

Nomenclature	xi
Introduction générale	1
1 Le champ de vitesse en sismique	7
1.1 Principes de la sismique réflexion	7
1.1.1 L'analyse de vitesse	8
1.1.2 La migration	10
1.2 Les problèmes liés aux hétérogénéités de vitesse	13
1.2.1 Influence de l'offset sur la continuité des sections sismiques	14
1.2.2 Principe géométrique de la diffraction	16
1.2.3 Incertitudes de la migration	19
1.3 La séparation des échelles des hétérogénéités	20
1.3.1 Le macro-modèle	21
1.3.2 L'échelle hectométrique	22
1.3.3 L'échelle décamétrique	22
1.3.4 L'échelle métrique	23
1.3.5 Diagramme récapitulatif	23
1.4 La modélisation stochastique	25
1.4.1 Champ de vitesse aléatoire	25
1.4.2 Les portées et l'anisotropie statistique	27
1.4.3 Quelques modèles géostatistiques	29
1.5 Conclusions	30

2	Propagation d'onde en milieu aléatoire	33
2.1	L'équation d'onde acoustique	34
2.1.1	Méthode de faibles perturbations de Born	36
2.1.2	Approche perturbative de Rytov	36
2.2	L'approximation parabolique	38
2.2.1	L'approximation Rytov parabolique	40
2.2.2	Régime asymptotique de l'optique géométrique	41
2.3	Moments d'ordre un et " <i>velocity shift</i> "	43
2.4	Moments d'ordre deux des temps d'arrivée	44
2.4.1	Approximation Rytov parabolique	45
2.4.2	Régimes asymptotiques	48
2.4.3	Inversion des paramètres statistiques	49
2.4.4	Inversion directe de la covariance	50
2.4.5	Extensions et remarques	51
2.5	Expériences numériques	51
2.5.1	Différences finies sur l'équation des ondes	52
2.5.2	Les temps d'arrivée et leur pointé	58
2.5.3	Visualisation du <i>velocity shift</i>	61
2.5.4	La variance des temps de trajet	63
2.5.5	Inversion de la covariance des temps	65
2.6	Conclusions	68
3	Application à la sismique réflexion	70
3.1	Milieu avec un réflecteur horizontal	70
3.1.1	Utilisation des temps à offset faible	71
3.1.2	Utilisation des temps à grand offset	76
3.2	Milieu avec un réflecteur irrégulier	80
3.2.1	Fluctuations lentes	80
3.2.2	Petites fluctuations aléatoires	83
3.3	Champs de vitesse non stationnaires	90
3.3.1	Dérives latérales de la vitesse	91
3.3.2	Dépendance en profondeur	91
3.3.3	Modèle multicouche	93

3.4	Essai sur données réelles	95
3.4.1	Le pointé des temps d'arrivée	96
3.4.2	Premier réflecteur	97
3.4.3	Second réflecteur	100
3.5	Conclusions	102
	Conclusion générale	104
A	L'approximation markovienne	109
B	Représentation spectrale	111
C	Velocity shift en milieu anisotrope	113
D	Une transformée d'Abel	114
E	Covariance d'accroissements	115
F	Covariance et variogramme des temps de deux ondes	117
G	Inversion de la portée horizontale	119
H	Probabilisation des réflecteurs	139

Table des figures

1	Représentation graphique en 2D des portées	xiii
2	Expérience 2D. L'offset x est la distance entre source O et récepteur R . . .	1
1.1	(a) Rangement par point milieu commun. (b) Hyperbole des temps d'arrivée.	8
1.2	Données réelles fournies par AGIP	9
1.3	Exemple d'analyse de vitesse	10
1.4	Erreurs de positionnement des interfaces pentées dans la section temps . .	11
1.5	Principe élémentaire de la migration.	11
1.6	Diagraphie des vitesses des ondes P dans les puits KTB	14
1.7	80 premières traces entre 2s et 2.2s de trois sections à offset commun des données fournies par AGIP	15
1.8	Trois sections à offset commun issues de sismogrammes synthétiques	16
1.9	Principe géométrique de la diffraction, construction des zones de Fresnel, principe de Huygens.	17
1.10	Classification des domaines de propagation dans le diagramme $(L/\lambda, l_e/\lambda)$.	24
1.11	Trois modèles de covariance standardisée (portée un et variance un).	29
1.12	Réalisations de champs de vitesse aléatoires	31
2.1	(a) Filtre pour une onde plane. (b) Rayons droits d'une onde sphérique. . .	47
2.2	Sismogrammes et pointés pour différents pas de calcul en milieu homogène	54
2.3	Sismogrammes et pointés pour différents pas de calcul en milieu aléatoire .	55
2.4	(a) Champ de vitesse aléatoire de dimension $2500m \times 8000m$. (b) et (c) : sismogrammes après propagation d'ondes planes horizontale et verticale . .	56
2.5	Enregistrement d'un champ d'onde	57
2.6	Ondelettes en milieu perturbé (Rytov valide, PA pas valide).	58
2.7	Ondelettes en milieu perturbé (Rytov parabolique valide).	59
2.8	Ondelettes en milieu perturbé (Rytov et PA pas valides).	59
2.9	Ondelettes en milieu très perturbé ($\sigma_\epsilon^2 = 0.01$, PA valide, Rytov pas valide).	60

2.10	Ondelettes en milieu perturbé ($\sigma_\epsilon^2 = 0.005$, PA valide, Rytov pas valide).	60
2.11	Velocity shifts après simulations numériques dans des milieux gaussiens	63
2.12	Variances des temps de trajet après simulations dans des milieux gaussiens	65
2.13	(a) Covariances normalisées des temps (en différentes profondeurs) et (b) leur inversion, pour un milieu gaussien $a = b = 100m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$.	66
2.14	(a) Covariances normalisées des temps (en différentes profondeurs) et (b) leur inversion, pour un milieu gaussien $a = b = 200m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$.	67
3.1	Enregistrements de tirs synthétiques dans des milieux gaussien et exponentiel	74
3.2	(a) Variances des temps. (b) Inversion des covariances normalisées	75
3.3	(a) Représentation en 3D de la sismique à faible offset et de la sismique à grand offset. (b) Séparation transverse des deux rayons.	77
3.4	Rapports d'anisotropie expérimentaux en fonction de l'offset	79
3.5	Réflecteurs irréguliers 2D utilisés dans nos tests (champs de $40km$ en surface).	81
3.6	Exemples de régression pour différents degrés des polynômes.	82
3.7	Variances normalisées en fonction du degré de la dérive	82
3.8	Réflecteurs aléatoires 2D	84
3.9	Géométrie des rayons pour un réflecteur irrégulier, symétrisation du problème.	87
3.10	(a) Réalisation d'un réflecteur aléatoire. (b) Variances des temps d'arrivée.	89
3.11	(a) Variances normalisées des temps. (b) Inversion des covariances	90
3.12	Régression sur la courbe des temps à offset zéro.	92
3.13	Rayons dans un milieu à gradient de vitesse positif et linéaire en profondeur.	93
3.14	Notations pour le modèle multicouche.	94
3.15	Visualisation sur la section après sommation (de longueur totale $20km$) des réflecteurs pointés et de la zone hétérogène dont on inverse la covariance.	96
3.16	(a) Pointé des temps et courbe de régression. (b) Résidus entre la courbe de pointé et la courbe de régression	98
3.17	Variances des temps à offset constant, avec une régression sur les temps pointés de degré 2 (a) et de degré 3 (b).	98
3.18	Trois sections à offset commun du premier réflecteur	99
3.19	(a) Pointé des temps et courbe de régression. (b) Variance des temps à offset constant et courbe de régression.	100
3.20	(a) Variances en fonction du degré de régression sur les temps. (b) Régression sur une variance plus robuste	101
3.21	(a) Variances normalisées des temps. (b) Inversion de la covariance avec la variance normalisée robuste, ajustement avec une covariance sphérique.	101

F.1	Deux rayons SH et S'H' de sources différentes, représentation des rayons dans un milieu fictif.	117
G.1	(a) Reflection at M of a spherical wave radiated from source S and recorded at receiver R . (b) Transmission of a spherical wave from M to the surface.	124
G.2	Random velocity fluctuations $\epsilon(x, z)$ (distance x and depth z in meters); (a) exponential covariance, (b) gaussian covariance; both with horizontal range $a = 400m$, vertical range $b = 100m$, standard deviation $\sigma_\epsilon = 3.5\%$	125
G.3	Normalized variances of traveltimes in the PA (parabolic approximation) and the GO (geometrical optics approximation)	127
G.4	Geometry of the seismic reflection numerical experiments.	128
G.5	Simulated seismic reflection seismograms for one shot and two random gaussian velocity media	128
G.6	Visualisation of the convergence of the experimental variance when the number n of realizations increases from $n = 2$ to $n = 8$	129
G.7	Experimental and theoretical variance functions of offset x , normalized experimental and theoretical variances for $a = 100m$, $b = 100m$	130
G.8	Experimental and theoretical variance functions of offset x , normalized experimental and theoretical variances for $a = 200m$, $b = 100m$	130
G.9	Experimental and theoretical variance functions of offset x , normalized experimental and theoretical variances for $a = 300m$, $b = 100m$	131
G.10	Normalized experimental and theoretical variances for $a = 2000m$, $b = 100m$	131
H.1	Géométrie des rayons avec un réflecteur plan.	140
H.2	Géométrie des rayons en milieu homogène avec un réflecteur perturbé.	141
H.3	Géométrie des rayons en 3D.	142
H.4	Exemple d'un modèle multicouche 2D.	144
H.5	2 courbes des temps (2 tirs).	146
H.6	Variances des temps (800 temps/offset).	146
H.7	Moyenne des temps d'arrivée.	147
H.8	Var. expérimentales/Var. théoriques à l'offset 0 en fonction du rapport σ_ζ/l_ζ (en abscisse).	147
H.9	Variogrammes normalisées des temps d'arrivée $T(m - m')$, $l_\zeta = 100m$	147
H.10	Variogrammes normalisées des temps d'arrivée $T(m - m')$, $l_\zeta = 200m$	147
H.11	Une réalisation du modèle.	148
H.12	Variogrammes des temps (réfl. 4 et 5).	148

Nomenclature

<i>i.e.</i>	c'est-à-dire,
<i>e.g.</i>	par exemple,
cf	voir,
§	paragraphe,
Fig.	figure,
eq.	équation.

Coordonnées :

t	temps,
$\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$	coordonnées spatiales 3D (abscisses \times profondeur),
$\boldsymbol{\rho} = (x, y)$	coordonnées latérales dans l'espace 3D (abscisse \times azimuth),
$\rho = \rho = x$	coordonnée horizontale dans l'espace 2D,
$r = \ \mathbf{r}\ $	module d'un vecteur,
e_z	axe dirigé dans la direction principale de la propagation de l'onde,
$(e_{\boldsymbol{\rho}}, e_z)$	base de la propagation de l'onde,
$(\boldsymbol{\kappa}, \kappa_z)$	coordonnées dans le domaine fréquentiel,
ν	dimension de l'espace (1D, 2D ou 3D).

Opérateurs :

\ll, \gg	très petit devant, très grand devant,
\sim, \lesssim	du même ordre que, inférieur ou du même ordre que,
\int	$\int_{-\infty}^{\infty}$,
$\nabla, \nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}$	gradient et gradient transverse,
$\Delta, \Delta_{\perp} = \nabla_{\perp}^2$	laplacien et laplacien transverse,
$\mathbb{E}(\cdot) = \langle \cdot \rangle$	opérateurs de moyenne (espérance),
Var, Cov	opérateurs de variance et de covariance,
$\delta(\mathbf{r})$	fonction de Dirac,
$G(\mathbf{r})$	fonction de Green (eq. (2.9)),
$H_0^{(1)}(r)$	fonction de Hankel de première sorte et d'ordre zéro (eq. (2.10)),
$f_i(\mathbf{r})$	terme d'ordre i dans le développement asymptotique de f ,
$C(\mathbf{h})$	covariance dans la base $(\boldsymbol{\rho}, z)$ (eq. (1.9)),
$C^e(\mathbf{h})$	covariance dans la base $(e_{\boldsymbol{\rho}}, e_z)$ (eq. (1.19)),
$C_0(h)$	covariance standardisée (eq. (1.15)),
$C_{\perp}(h)$	covariance latéralement standardisée (eq. (1.21)).

Sismique :

\mathbf{r}	rayon sismique,
$\mathbf{x} = (x, y)$	offset, $\mathbf{x} = x$ en 2D,
$x = \ \mathbf{x}\ $	module de l'offset, $x = \sqrt{x^2 + y^2}$ en 3D, $x = x$ en 2D,
$x_{\perp} = x/l_{\perp}$	offset standardisé,
$O(\mathbf{o}, 0)$	source de l'onde,
$X(\mathbf{x}, 0)$	récepteur,
$M(\mathbf{m})$	point milieu de OX ,
$T_M(\mathbf{x})$	temps d'arrivée de point milieu M à l'offset \mathbf{x} ,
R	un réflecteur sismique,
σ_p^2	variance de l'erreur de pointé des temps.

Réflecteur :

$L(x, y)$	fonction décrivant la profondeur d'un réflecteur,
$L_0(x, y)$	composante déterministe de $L(x, y)$,
$\zeta(x, y)$	fluctuation aléatoire de la profondeur du réflecteur,
$C_{\zeta}, \gamma_{\zeta}$	covariance et variogramme des fluctuations du réflecteur,
σ_{ζ}	écart-type des fluctuations du réflecteur,
l_{ζ}	portée des fluctuations du réflecteur.

Ondes :

z	distance de propagation,
λ	longueur d'onde dominante du signal qui se propage,
$f = v_0/\lambda$	fréquence dominante,
$k = 2\pi/\lambda$	nombre d'onde,
$\omega = kv_0$	pulsation de l'onde monochromatique,
α	angle de la direction de propagation en 2D,
β, α	angles azimuthal et polaire de la propagation en 3D,
$u(\mathbf{r})$	champ d'onde scalaire en \mathbf{r} ,
$U(\mathbf{r})$	champ d'onde perturbé,
$\Psi(\mathbf{r})$	amplitude complexe de l'onde (eq (2.15)),
$S(\mathbf{r}) = \text{Im}[\Psi(\mathbf{r})]$	phase de l'onde,
$S'(\mathbf{r})$	déviation de la phase de l'onde,
$T(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r})}{kv_0}$	temps d'arrivée de l'onde,
$A(\mathbf{r})$	amplitude de l'onde,
$\chi(\mathbf{r}) = \log\left[\frac{A(\mathbf{r})}{A(0)}\right]$	niveau de l'onde,
$C_T(\boldsymbol{\rho}, z)$	covariance des temps en $\boldsymbol{\rho}$ (à la distance de propagation z),
$\gamma_T(\boldsymbol{\rho}, z)$	variogramme des temps en $\boldsymbol{\rho}$ (à la distance de propagation z),
PA	approximation parabolique,
GO	optique géométrique,
FA	approximation de Fraunhofer,
AS	régimes asymptotiques (GO ou FA),
Υ	1 dans GO et 2 dans FA.

Vitesses :

$v(\mathbf{r})$	champ de vitesse en \mathbf{r} ,
v_0	vitesse moyenne,
v_{eff}	vitesse effective (eq (2.45)),
$v_{eff} - v_0$	"velocity shift",
$\epsilon(\mathbf{r})$	perturbation aléatoire du carré de la lenteur ($\frac{1}{v^2(\mathbf{r})}$),
\mathbf{a}, b	portées latérale et verticale de ϵ dans $(\boldsymbol{\rho}, z)$,
$\mathbf{a} = (a_x, a_y)$	portées horizontale et azimuthale en 3D,
$l_\epsilon = \min(a_x, a_y, b)$	taille caractéristique des hétérogénéités de vitesse,
$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{a_x^2} + \frac{1}{a_y^2}}$	taille caractéristique latérale des hétérogénéités en 3D,
	en 2D, $a_y = \infty$ et la portée latérale se note $a = a_x$,
$\Lambda = \frac{a}{b}$	rapport d'anisotropie,
l_\perp, l_\parallel	portées transverse et longitudinale de ϵ dans la base $(e_\boldsymbol{\rho}, e_z)$,
$l_\perp = (l_{\perp x}, l_{\perp y})$	portées transverses en 3D, $l_\perp = l_{\perp x}$ en 2D,
σ_ϵ	écart-type de ϵ ,
σ_v	écart-type de la vitesse $v(\mathbf{r})$,
$C_\epsilon(\mathbf{h})$	covariance de ϵ dans la base $(\boldsymbol{\rho}, z)$,
A_0	portée intégrale de la covariance standardisée C_0 (eq (1.20)),
$\gamma_\epsilon(\mathbf{h})$	variogramme de ϵ dans la base $(\boldsymbol{\rho}, z)$ (eq (1.13)),
$\Phi_\epsilon(\mathbf{k})$	densité spectrale de ϵ dans la base $(\boldsymbol{\rho}, z)$ (eq (B.1)),
$F_\epsilon(\boldsymbol{\kappa}, z)$	densité spectrale transverse de ϵ dans la base $(\boldsymbol{\rho}, z)$ (eq (B.1)).

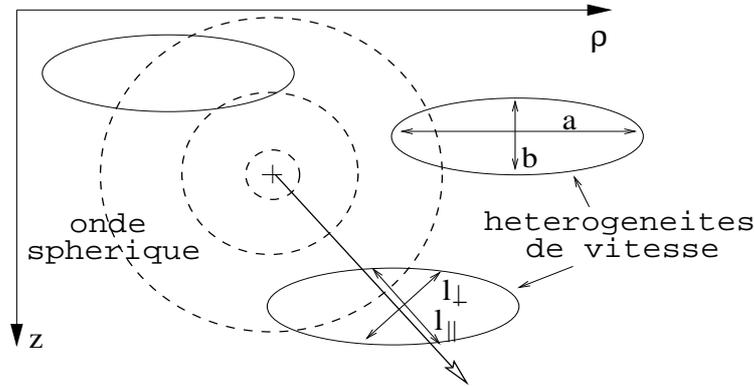


FIG. 1 – Représentation graphique en 2D des portées horizontale a , verticale b , transverse à la propagation l_\perp et parallèle à la propagation l_\parallel .

Dans cette thèse, on appelle **échelle** des hétérogénéités leur dimension spatiale (portée ou longueur de corrélation). Petites ou larges hétérogénéités se rapportent à cette taille. On dit aussi que les fluctuations sont rapides ou lentes.

L'**ampleur** des hétérogénéités concerne l'intensité de leurs fluctuations (écart-type). Faibles ou fortes hétérogénéités se rapportent à cette amplitude.

Introduction générale

Le problème industriel

La sismologie permet d'explorer la structure interne de la Terre à l'aide des ondes sismiques qui la traversent. Ces ondes, générées par les séismes et enregistrées aux quatre coins (!!) du globe, apportent des informations sur les milieux qu'elles ont traversés (dans une gamme de fréquences de l'ordre du Hertz). Dans un autre domaine de fréquences (plusieurs dizaines de Hertz), la sismique réflexion est employée en prospection pétrolière depuis plusieurs décennies pour donner une image de la structure d'un bassin sédimentaire. Elle consiste à créer artificiellement dans le sous-sol un ébranlement et à enregistrer les réponses du milieu en différents récepteurs situés en surface (Fig. 2). On obtient une bonne couverture du sous-sol en répétant et déplaçant le dispositif le long du terrain examiné.

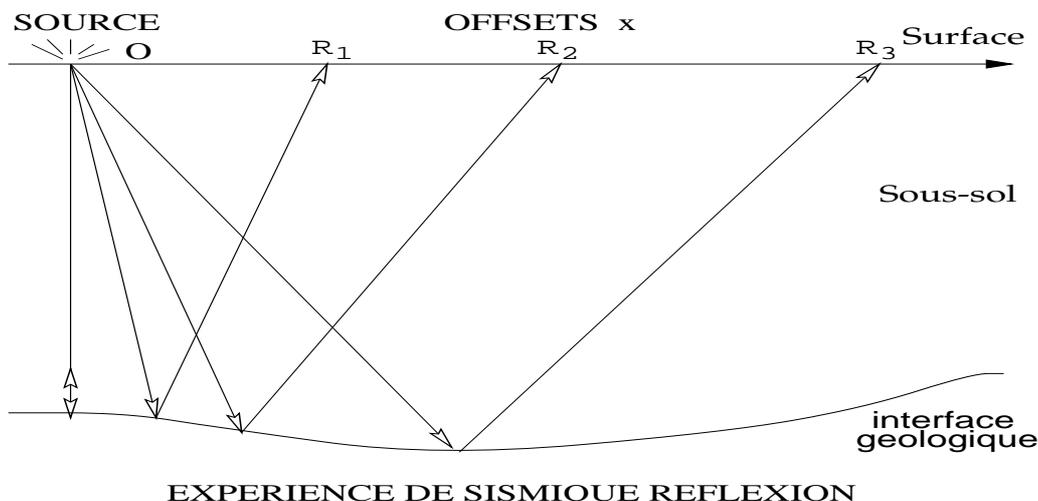


FIG. 2 – Expérience 2D. L'offset x est la distance entre source O et récepteur R .

L'imagerie structurale est un outil tout à fait primordial pour la localisation et la délimitation (*i.e.* le tracé du contour) des réservoirs naturels d'hydrocarbures. Dans le cas de systèmes géologiques complexes, cette imagerie nécessite l'utilisation d'une coûteuse (en temps donc en argent) migration profondeur (avant sommation). Cette procédure consiste à repositionner chaque événement des sismogrammes enregistrés en temps à une position correcte en profondeur. La principale difficulté pour son utilisation tient au fait qu'elle nécessite un modèle précis des vitesses de propagation des ondes sismiques. L'accès à un tel modèle est encore un problème difficile en géophysique. Aujourd'hui, bien que des progrès importants aient été réalisés, l'imagerie 3D des systèmes géologiques complexes demeure encore un objectif à atteindre pour la prospection sismique.

Le problème physique

Que ce soit en sismologie ou en sismique pétrolière, le problème est donc la recherche d'informations sur le milieu géologique à partir des sismogrammes enregistrés. Ceux-ci traduisent les déformations des signaux sismiques dus à la présence d'hétérogénéités de toutes sortes. Les hétérogénéités de la croûte terrestre et du manteau peuvent résulter de variations de pression, de température, de porosité, de perméabilité, de changements lithologiques, de fractures, du contenu en fluides, de déformations tectoniques, . . . Les informations cherchées peuvent donc être de nature géophysique (vitesses des ondes dans les milieux, impédances, . . .) ou géologique (formes des interfaces entre couches, fractures des roches, failles, . . .). L'équation de l'élastodynamique régit les phénomènes physiques de la propagation des ondes : transmission, réflexion, diffraction, réfraction, absorption, conversion, . . . En imagerie géophysique, on se limite parfois à une propagation acoustique qui suppose que la Terre réagit comme un fluide en négligeant les comportements élastiques.

Le problème inverse sismique a pour but de retrouver les paramètres acoustiques (vitesses, densités ou impédances) en chaque point du milieu à partir du champ d'onde enregistré après propagation. La résolution de problèmes inverses est un enjeu majeur dans de nombreux domaines scientifiques utilisant la propagation des ondes : en radiophysique, en astrophysique, en acoustique sous-marine, dans les télécommunications, en imagerie médicale, . . . En sismique, deux types d'approche sont utilisés. A l'aide d'approximations sur le modèle ou sur la propagation des ondes, il est possible de formuler des relations simples entre données et paramètres du milieu. L'inversion directe consiste à inverser ces relations. Par contre, l'inversion indirecte consiste globalement à inférer les paramètres du système physique qui ajustent les données. Elle utilise des techniques spécifiques de la théorie des problèmes inverses [Tarantola [85]], pour minimiser l'écart entre données observées et données calculées (issues du modèle que l'on fait varier).

En sismique réflexion, il est possible de retrouver les grandes longueurs d'onde des vitesses (*i.e.* les fluctuations d'échelle nettement plus grande que la longueur d'onde) à partir des temps de trajet, et les courtes longueurs d'onde des impédances (synonymes de discontinuités) à l'aide des amplitudes [Claerbout [20] p 21, Jannane et al. [44]]. Il en résulte deux problèmes de nature très différentes. L'inversion linéarisée consiste à chercher les perturbations de petites tailles et de faibles amplitudes autour d'un milieu de référence [Lambaré [55]]. Par contre, l'inversion des grandes longueur d'onde du milieu est fortement non linéaire. La tomographie simplifie ce problème en se restreignant à l'inversion des temps de trajet [Farra [27]].

Dans la résolution du champ de vitesse, les méthodes sismiques ont cependant des limites [Thore & Juliard [88], Williamson & Worthington [98]]. Tout d'abord, celles qui sont basées sur la théorie des rais (*e.g.* analyse de vitesse classique, tomographie) interprètent mal les événements provoqués par de trop petites hétérogénéités de vitesse (de taille inférieure à la zone de Fresnel). Or, de telles hétérogénéités peuvent avoir un impact sur les temps d'arrivée. D'autre part, pour être efficace, ces techniques déterministes nécessitent un recouvrement spatial important, pour tirer profit de la redondance des informations. Les variations de vitesse que ne résolvent pas les méthodes déterministes relèveraient plutôt d'une interprétation probabiliste. Il est plus facile de représenter un champ de vitesse complexe par sa structure statistique que de le caractériser de manière déterministe.

La modélisation géostatistique

Initiée par Matheron [59], la géostatistique permet d'interpréter et de modéliser en termes probabilistes les phénomènes spatiaux uniques, et plus particulièrement les diverses propriétés d'un sous-sol. Se fondant sur les probabilités et la notion d'inférence statistique, elle offre toute une gamme de méthodes d'estimation de variables géologiques d'intérêt dans les contextes miniers. La géostatistique a été introduite par Haas & Jousset [34] et Haas & Viallix [35] dans le traitement des données sismiques. Le krigeage (méthode d'interpolation) a ainsi permis de résoudre des problèmes de cartographie des contours de réservoirs et de miroirs sismiques.

Un intérêt très important se porte actuellement sur la simulation géostatistique de réservoirs dans le domaine pétrolier, mais aussi en hydrogéologie et pour les études de stockage souterrain. Usuellement, ces méthodes géostatistiques utilisent les corrélations entre données de puits pour en déduire les corrélations du milieu [Matheron et al. [63]]. La connaissance de ces corrélations permet de simuler différentes réalisations du milieu. Par exemple, on peut obtenir une estimation des écoulements dans un réservoir à partir de ses paramètres statistiques de porosité et de perméabilité : on calcule les écoulements dans un grand nombre de réalisations du milieu, et on moyenne les résultats.

Très denses verticalement, les informations de puits ont, hélas, une mauvaise résolution latérale, surtout en phase d'exploration pétrolière où le nombre de puits est restreint. C'est pourquoi, l'utilisation de données sismiques très denses latéralement s'impose. Il est par exemple possible de simuler des champs d'impédance (puis des lithofaciès) à l'aide des données de puits et des amplitudes sismiques [Moulière [64]]. Une approche analogue et complémentaire utiliserait les données de puits et les temps d'arrivée, et devrait permettre d'estimer les propriétés statistiques de la vitesse. Notre travail porte sur ce point : obtenir les paramètres statistiques de la vitesse à partir des temps d'arrivée sismiques. Si cela est possible, cette nouvelle information, consistante latéralement, pourra être également utilisée dans les processus de simulation de réservoirs.

En géostatistique linéaire, un champ spatial repose sur ses deux premiers moments, c'est-à-dire sa moyenne et sa covariance (ou son variogramme). Matheron [62] a introduit une modélisation aléatoire de la vitesse en sismique réflexion pour étudier de manière probabiliste les incertitudes liées au processus d'imagerie sismique (la migration). Il a formulé les erreurs d'une migration géométrique très simple en fonction des paramètres statistiques d'un champ de vitesse stationnaire. Touati [89] (chap 3) a étendu cette approche à des champs de vitesse non stationnaires.

Pour ces deux motivations géostatistiques (simulation de réservoirs et erreurs de migration), le problème principal consiste à inverser les moments statistiques de la vitesse à partir des données sismiques. Cette inversion est connue en sismologie sous l'appellation de tomographie statistique.

Méthodes sismiques en milieu aléatoire

Depuis maintenant vingt-cinq ans, les sismologues sont particulièrement intéressés par une caractérisation statistique de l'hétérogénéité de la vitesse. Des méthodes existent dans la littérature pour l'extraction des propriétés statistiques du champ de vitesse d'un milieu faiblement hétérogène, à partir des propriétés statistiques des ondes qui s'y sont propagées. Ces outils ont été abondamment développés par les géophysiciens pour caractériser

statistiquement les structures à petite échelle de la Terre [Aki & Richards [4] vol 2 chap 11, Sato & Fehler [82]]. Ils sont aussi d'un grand intérêt en acoustique sous-marine et atmosphérique. Suivant l'échelle des hétérogénéités de vitesse et la bande de fréquence des ondes, trois approches sont principalement utilisées :

1. Les codas qui sont la partie finale des sismogrammes sont souvent interprétés comme du bruit. Si on admet qu'ils sont le résultat de la diffraction des ondes par les hétérogénéités de vitesse, leur spectre peut être lié aux deux premiers moments statistiques de la vitesse [Aki & Chouet [3], Sato & Fehler [82] (chap 3 et 4), Wu & Aki [101], Jannaud et al. [48], [49]].
2. L'atténuation du front direct d'une onde peut être mesurée grâce au facteur de qualité, qui est un coefficient de diffraction de l'onde sur les hétérogénéités. Sous des approximations adéquates, il est fonction des deux premiers moments statistiques de la vitesse [Wu [100], Jannaud et al. [47]]. En pratique néanmoins, Jannaud [45] (chap 3) conclut que cette méthode est inutilisable pour inverser les moments statistiques de la vitesse.
3. La théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire exprime les moments d'ordre un et deux des amplitudes et des temps de trajet des ondes en fonction des moments d'ordre un et deux du champ de vitesse [Chernov [17], Tatarskii [86], Ishimaru [43], Rytov et al. [76], Boyse & Keller [14]]. Aki [2] a été le premier à appliquer cette théorie aux données sismologiques pour estimer un modèle de vitesse stochastique. Wu & Xie [103] ont ensuite baptisé cette inversion tomographie stochastique et Müller et al. [66] tomographie statistique.

La tomographie statistique en sismique réflexion

Efficace pour les données télésismiques, la première méthode pourrait être utilisée en sismique réflexion pour analyser les codas présents en queue des sismogrammes. Or nous sommes intéressés par les fluctuations de vitesse qui ont un impact sur les temps d'arrivée. La troisième méthode est parfaitement adaptée à ce problème.

En sismologie, les ondes se transmettent d'un épïcêtre à des récepteurs situés à la surface terrestre et peuvent donc être souvent supposées planes vu les distances de propagation et la fréquence des signaux. L'hypothèse de milieux statistiquement isotropes y est aussi plus ou moins réaliste car dans le manteau, les hétérogénéités n'ont pas de direction privilégiée. Par contre, dans le cadre de la sismique réflexion, les milieux sédimentaires sont souvent fortement stratifiés. Touati [89] a alors posé les bases d'une procédure qu'il a appelée Inversion Sismique Faible et que nous appelons tomographie statistique, et qui permet de retrouver la covariance de la vitesse à partir des temps d'arrivée des ondes réfléchies. Il montre qu'il est possible d'inverser la longueur de corrélation horizontale et la structure de la covariance. Le milieu peut être statistiquement anisotrope, et pour prendre en compte les positions relatives des sources et des récepteurs, la source considérée est une onde sphérique.

Cependant, quelques problèmes se posent dans les hypothèses de travail de Touati [89]. Tout d'abord, le cadre théorique pour la propagation des ondes est celui de l'optique géométrique qui offre une définition rigoureuse des temps de trajet, mais qui limite la taille latérale des hétérogénéités de vitesse. Des hétérogénéités de vitesse plus petites

que la zone de Fresnel ont un impact sur les temps, et il est important de pouvoir les prendre en compte dans une approche stochastique. De plus, les tests numériques sont effectués avec une méthode basée sur une équation de l'optique géométrique (méthode de Huygens de Podvin & Lecomte [71]). Leurs interprétations sont donc limitées à cette approximation. D'autre part, les perturbations de vitesse sont supposées stationnaires, et il est peu probable que cette hypothèse soit respectée dans des champs de vitesse réels. Son inversion permet de retrouver les informations statistiques horizontales, mais *quid* des informations verticales ? Enfin, les milieux sont 2D et les réflecteurs sont plans, ce qui est assez limitatif.

Problématique

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier en profondeur les rapports entre les fluctuations des temps d'arrivée et celles du champ de vitesse, et de rendre applicable la tomographie statistique des temps d'arrivée en sismique réflexion. Dans le chapitre un, après de brefs rappels sismiques, quelques problèmes liés à l'hétérogénéité de la vitesse en sismique réflexion sont exposés. Il est important de bien séparer les hétérogénéités suivant leur taille relative par rapport à la longueur d'onde du signal. La modélisation stochastique du champ de vitesse est ensuite présentée.

Le deuxième chapitre concerne la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire sous l'approximation de Rytov et l'approximation parabolique, plus générales que l'optique géométrique. Reprenant les idées de Rytov et al. [76], les domaines de validité sont pris en considération tout particulièrement. De nouveaux résultats théoriques (milieux 3D anisotropes, inversion directe) et les tous derniers résultats théoriques et numériques (sur le velocity shift) obtenus par Samuelides & Mukerji [80] et Iooss & Samuelides [42] sont également exposés. Ils sont illustrés sur des expériences synthétiques obtenues par simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques par différences finies.

Enfin, la théorie précédente est appliquée dans le dernier chapitre aux données issues de la sismique réflexion. Un problème assez ardu vient s'ajouter, celui de la modélisation des petites fluctuations des réflecteurs. Par une approche originale, nous parvenons à découpler les problèmes de la vitesse et du réflecteur en utilisant les espérances conditionnelles, et à les traiter séparément. Il est alors possible d'inverser la structure statistique latérale de la vitesse avec les données à angles faibles. En dernier lieu, une application sur données sismiques réelles vient illustrer notre propos. La tomographie statistique est applicable sur les données de sismique réflexion, tant que le pointé est possible et cohérent.

Chapitre 1

Le champ de vitesse en sismique

La sismologie est le domaine de la géophysique qui étudie les ondes sismiques provenant des séismes naturels. Les distances de propagation sont de l'ordre de plusieurs dizaines à des milliers de kilomètres. En exploration pétrolière en revanche, les ébranlements sont créés artificiellement pour tirer des informations sur les propriétés physiques d'un bassin sédimentaire. Les échelles sont de quelques kilomètres de profondeur et quelques dizaines de large. La sismique réflexion est la technique la plus utilisée, car particulièrement bien adaptée pour donner une image des structures géologiques liées à l'exploitation du pétrole.

La première section de ce chapitre explique les principes élémentaires de l'imagerie sismique. Dans une deuxième section, l'existence dans les sous-sols d'hétérogénéités de vitesse de toutes tailles est mis en évidence. Quelques-uns de leurs effets, négligés dans les techniques sismiques classiques, sont alors brièvement démontrés. Les hétérogénéités sont ensuite classifiées suivant le rapport entre leur taille et la longueur d'onde du signal sismique. En sismique réflexion, les fluctuations des temps de trajet sont dues aux hétérogénéités de vitesse d'échelle hectométrique. Leur modélisation géostatistique est finalement présentée.

1.1 Principes de la sismique réflexion

L'exploration sismique se fait en trois étapes : l'acquisition des données, le traitement de l'information et l'interprétation. L'acquisition des données s'effectue par la mise en œuvre sur le terrain de systèmes d'émission et de détection appropriés. Le traitement de l'information est réalisé en plusieurs phases, comprenant les corrections statiques, la disposition des données, l'estimation des vitesses et la migration qui permet d'obtenir l'image sismique. L'interprétation constitue le passage de l'image sismique à l'image géologique. Notre travail porte sur le point crucial de l'estimation des vitesses.

En sismique terrestre, la source est un explosif ou un camion vibreur. L'ébranlement produit un signal, propagé dans le sous-sol et enregistré par des géophones. En 2D, la source et les récepteurs sont placés le long d'une ligne (Fig. 2 p 1) et en 3D, ils sont placés sur une grille [Lavergne [56] p 117-121]. En sismique marine, un navire remorque une source (*e.g.* canon à air) et des détecteurs (hydrophones) placés le long d'une flûte ("*streamer*") ou de plusieurs flûtes déportées de part et d'autre du navire.

1.1.1 L'analyse de vitesse

Les traces sismiques obtenues peuvent être rangées de différentes manières : par point de tir commun (Fig. 2 p 1 : OR_1, OR_2, OR_3, \dots), par point milieu commun (Fig. 1.1 (a)), ou par offset commun (Fig. 1.2 (a)). Le rangement le plus courant est celui en point-milieu commun. Il permet de procéder aux corrections cinématiques classiques (NMO "normal move out"). On suppose que le milieu est invariant latéralement (couches à vitesse constante séparées par des réflecteurs horizontaux) et que les offsets sont petits devant la profondeur du réflecteur considéré. Ainsi, l'équation du temps de trajet $T(x)$ de l'onde devient une hyperbole (Fig. 1.1 (b)) :

$$T^2(x) = T^2(0) + \frac{x^2}{v_s^2}, \quad (1.1)$$

avec $T(0)$ temps double vertical, v_s vitesse constante (vitesse de stack), x offset.

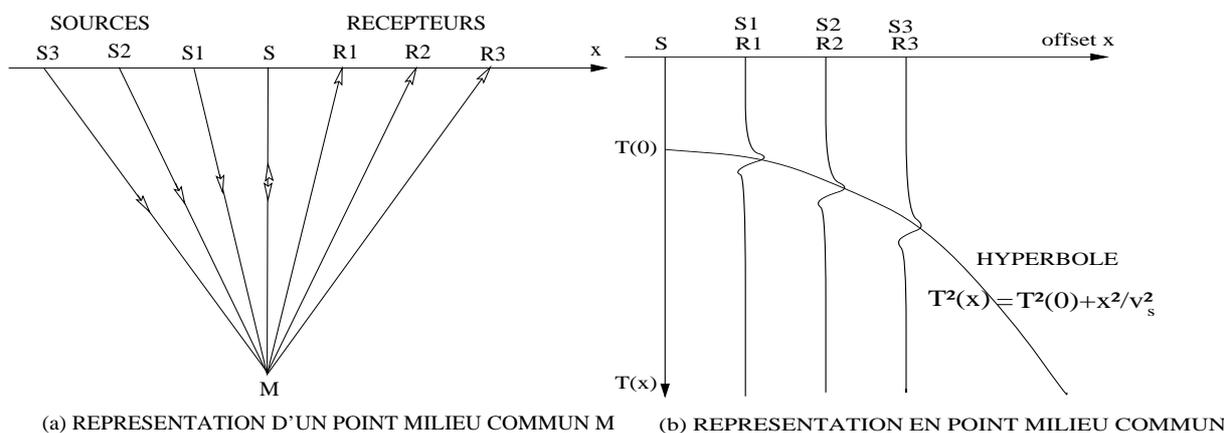


FIG. 1.1 – (a) Rangement par point milieu commun. (b) Hyperbole des temps d'arrivée.

L'analyse de vitesse consiste à déterminer les vitesses de stack de chaque réflexion qui maximisent la cohérence des données sur des hyperboles du type (1.1) (Fig. 1.3). Les vitesses obtenues sont celles qui ajustent le mieux les hyperboles. Pour augmenter le rapport signal/bruit, les traces sont ensuite sommées le long de chaque hyperbole (procédure du "stack"). La couverture multiple permet donc d'obtenir une section "stackée", nettement moins bruitée que les sections brutes à offset commun (Fig. 1.2).

Cette méthode, largement utilisée dans l'industrie depuis les années 50, a pu être généralisée dans les années 70 et 80 par des arguments géométriques à des modèles multicouches pentés (procédure du DMO "dip move out"), à une géométrie 3D et à des variations linéaires de la vitesse avec la profondeur [Telford et al. [87] p 48-63].

Le stack produit une section temps. La difficulté est alors de repositionner les réflecteurs en profondeur (Fig. 1.4, Lavergne [56] p 149). C'est le but de la migration profondeur et celle-ci requiert la connaissance du champ de vitesse.

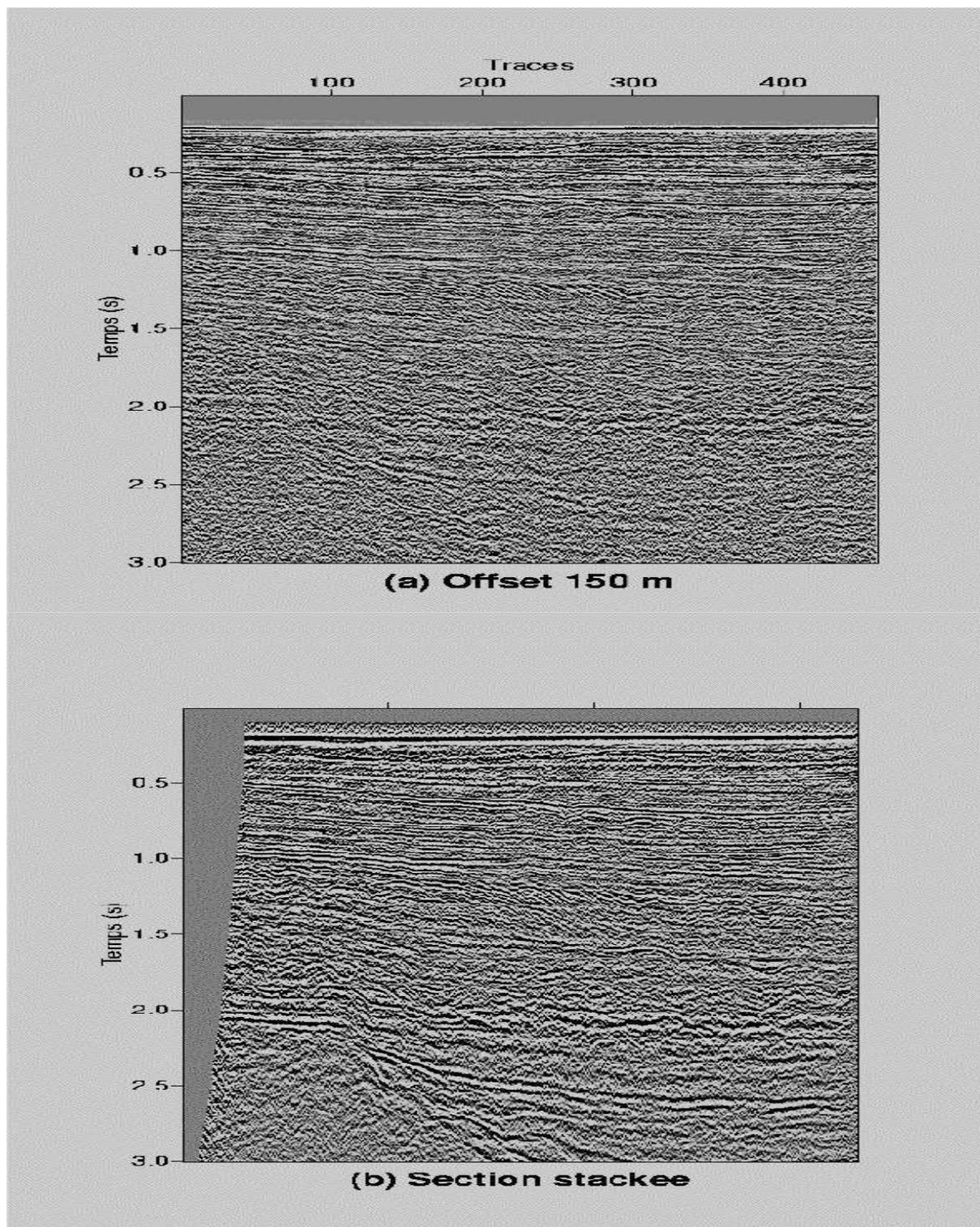
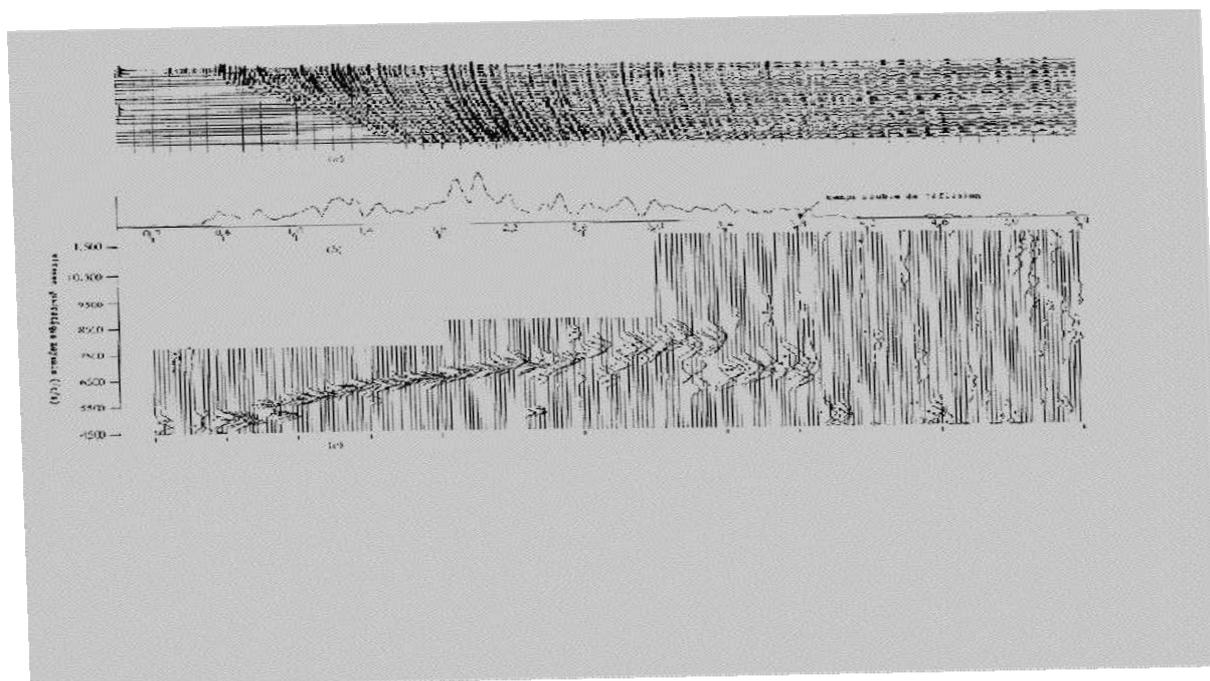


FIG. 1.2 – Données réelles fournies par AGIP (40 mètres entre chaque trace). (a) Section brute à offset commun (après les corrections statiques). (b) Section "stackée" (après correction dynamique). En augmentant le rapport signal/bruit, la sommation fait apparaître les réflecteurs sismiques.



D'après Telford et al. [87] (p 185).

FIG. 1.3 – Exemple d'analyse de vitesse. Le temps, usuellement représenté verticalement, est ici en abscisse. (a) Section à point milieu commune utilisée (offset en ordonnée) ; les hyperboles de diffraction sont dirigées vers le bas. (b) Amplitudes maximales après addition des traces le long des hyperboles, les pics indiquent les réflexions les plus fortes. (c) Amplitude de la trace additionnée en fonction de la vitesse de stack (ordonnée en pieds/sec) ; les pics et les points indiquent la vitesse de stack donnant l'amplitude maximale.

1.1.2 La migration

On a vu en Fig. 1.4 que la migration a pour but de repositionner correctement les réflecteurs. Elle permet également d'effacer les hyperboles de diffraction dont l'origine est expliquée ci-dessous. Soit M_0 un point diffractant (réfléchissant une onde incidente dans toutes les directions). Soit S une source à partir de laquelle un signal sismique se propage et est réfléchi au point M_0 (Fig. 1.5 (a)). Le temps de trajet du signal sismique enregistré au point S est appelé temps d'arrivée à offset nul ; son rayon aller et son rayon retour sont identiques. Sur une section à offset nul, M_0 apporte donc une contribution à chaque trace sismique (Fig. 1.5 (b)). L'opération de migration consiste donc à effacer cette courbe de diffraction ("*collapse the diffractions*") et à assigner à la trace $M'M_0$ les informations obtenues sur les autres traces.

Expliquons la migration géométrique 2D la plus simple, qui suppose un champ de vitesse constant et qui migre la section après sommation (à offset nul). L'avantage de migrer avec un champ de vitesse constant vient du fait que les rayons sont droits. Cette migration peut ainsi effacer les diffractions, repositionner les réflexions et rehausser le rapport signal/bruit. Pour l'expliquer, Claerbout [20] (§1.1) a développé le principe d'imagerie du réflecteur explosant ("*exploding reflector concept*") : le réflecteur est remplacé par une

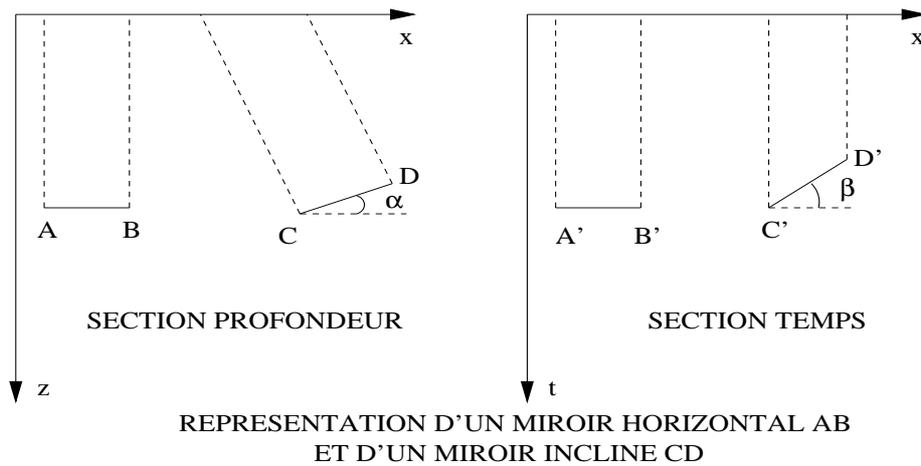


FIG. 1.4 – Erreurs de positionnement des interfaces pentées dans la section temps. Dans une section à offset nul, les réflexions sur CD apparaissent à la verticale des récepteurs, en $C'D'$. La migration consiste à les repositionner correctement.

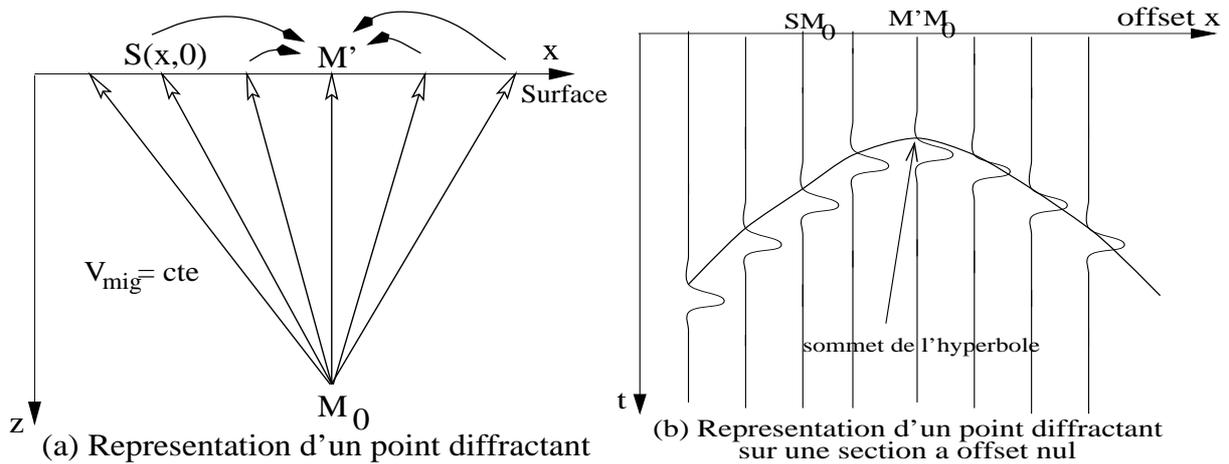


FIG. 1.5 – Principe élémentaire de la migration.

suite de sources sismiques qui explosent au temps $t = 0$, et le milieu initial est remplacé par un milieu où les vitesses ont été divisées par deux. Ce concept repose sur le principe de Huygens (chaque point du champ est un point diffractant) et sur le principe de réciprocité pour les temps à offset nul (les rayons aller et retour sont identiques). Nos notations sont les suivantes (Fig. 1.5 (a)) :

- * $S(x, z)$ point source d'où le rayon part,
- * $M_0(x_0, z_0)$ point réel du réflecteur où le rayon se réfléchit,
- * $T = T(S, M_0)$ temps de parcours entre S et M_0 ,
- * V_{mig} vitesse de migration (constante).
- * $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$ estimateur de $M_0(x_0, z_0)$ obtenu par migration.

Pour chaque point diffractant $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$, la courbe des temps s'écrit en fonction des coor-

données du point source (le plus souvent $z = 0$) :

$$T^2(x, z) = \frac{(x - \tilde{x}_0)^2 + (z - \tilde{z}_0)^2}{V_{mig}^2}. \quad (1.2)$$

Une migration manuelle consiste à sommer les traces le long de cette hyperbole (Fig. 1.5 (b)), puis à placer le résultat à son sommet. Dérivée par rapport à x , l'équation (1.2) donne l'expression analytique de $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = x - \frac{V_{mig}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} T^2(x, z), \\ \tilde{z}_0 = z - \sqrt{V_{mig}^2 T^2(x, z) - (x - \tilde{x}_0)^2}. \end{cases} \quad (1.3)$$

On a décrit le principe géométrique de la migration 2D. Pour prendre en compte les phénomènes de propagation des ondes, la migration est plutôt basée sur une méthode de résolution de l'équation des ondes. Plusieurs types de migration sont utilisés selon la précision et le coût désirés :

▷ **Migration temps / Migration profondeur**

La migration temps suppose localement (pour un point milieu donné) que le champ de vitesse est constant ou verticalement variable. Très rapide, elle produit une coupe en temps qu'il faut ensuite restituer en profondeur à l'aide d'un champ de vitesse. La migration profondeur permet de prendre en compte les grandes variations latérales ou verticales du champ de vitesse (donc la courbure des rayons). Elle demande une connaissance des vitesses beaucoup plus précise que la migration temps.

▷ **Migration après sommation / Migration avant sommation**

La migration après sommation ("*poststack*") traite la section à offset nul provenant de la sommation des sections à tous offsets. Elle est rapide et facile à mettre en œuvre. Toutefois, quand les hypothèses du stack ne sont plus valides (variations de pendage et variations latérales de vitesse), cette migration n'est plus adaptée. La migration avant sommation ("*prestack*") est bien meilleure car elle utilise directement les données relatives à tous les offsets. Elle migre tous les offsets et a donc un coût élevé en temps de calcul. La sommation de toutes les sections migrées permet d'améliorer le rapport signal sur bruit.

▷ **Techniques de résolution de l'équation d'onde**

Des migrations "*intégrales*" utilisent la solution intégrale de l'équation d'onde (par exemple par approximation de Kirchhoff). Certaines résolvent l'équation d'onde par différences finies (souvent sous l'approximation parabolique, cf §2.2). En fait, le champ d'onde est rétro-propagé de la surface jusqu'au réflecteur. Elles acceptent tous les modèles de vitesse, mais sont mauvaises avec les pendages raides et très coûteuses. D'autres migrations traitent l'équation d'onde dans le domaine fréquentiel.

Même si c'est encore un sujet d'actualité en 3D, les méthodes de migration sont maintenant bien éprouvées. Le problème consiste principalement à choisir celle qui est la plus

adaptée aux contraintes inhérentes à chaque étude (coût, complexité structurale, variations latérales de vitesse, quantité de données, ...). Par contre, l'estimation du champ de vitesse est encore un problème ouvert, considéré comme un enjeu majeur depuis une quinzaine d'années.

1.2 Les problèmes liés aux hétérogénéités de vitesse

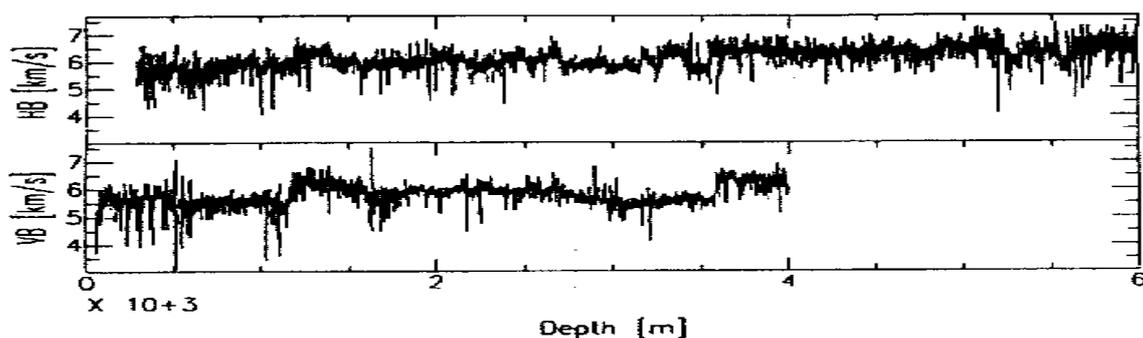
Il est bien connu en sismique réflexion qu'il est possible de retrouver les variations très lentes des vitesses en analysant les temps de trajet des ondes, et les hautes fréquences des impédances grâce aux amplitudes [Claerbout [20] p 21, Jannane et al. [44]]. La modélisation usuelle consiste donc à superposer des couches de vitesse à variations latérales très basses fréquences. Celles-ci sont séparées par des interfaces qui sont en fait un brusque contraste d'impédance (variant sur moins d'une longueur d'onde).

Les traitements géophysiques déterministes sont ainsi voués à retrouver les variations lentes des hétérogénéités de vitesse : les procédures classiques de l'industrie (*e.g.* analyse de vitesse par NMO, DMO, migration temps) supposent des champs homogènes latéralement, et les techniques actuelles plus complexes (*e.g.* tomographie, migration profondeur) peuvent prendre en compte les grandes variations latérales de vitesse. Par exemple, la tomographie des temps d'arrivée ne peut théoriquement pas retrouver des hétérogénéités de taille latérale inférieure à la zone de Fresnel [Williamson & Worthington [98]], *i.e.* d'échelle hectométrique (cf §1.3.2). Cependant, le volume des données est très dense en sismique réflexion, ce qui rend possible une meilleure résolution du champ de vitesse.

Y-a-t-il une évidence de la présence d'hétérogénéités de petite dimension ? Les mesures d'analyse de vitesse montrent souvent des fluctuations hautes fréquences des vitesses de stack. L'exemple de la Fig. 1.3 (c) illustre une augmentation globale linéaire avec le temps autour de laquelle se dessinent des fluctuations. Ce sont des effets de l'hétérogénéité verticale que l'on observe ici surtout entre 2.2s et 3.4s. Au delà de 3.4s, il y a une perte totale de résolution, due soit à l'absence de réflexion, soit aux bruits couvrant les données. D'autre part, les mesures de vitesses effectuées dans les puits exhibent toujours des fluctuations très hautes fréquences. Ainsi, l'analyse structurale des données de la Fig. 1.6 montre une tendance globale d'augmentation linéaire de la vitesse avec la profondeur, et permet de distinguer des structures globales de l'ordre de 2km [Wu, Xu & Li [104]] et des hétérogénéités locales de longueur de corrélation 20m et 1m [Kneib [53]]. Cependant, les vitesses diagraphiques et les vitesses sismiques sont difficilement comparables, car les diagraphies utilisent des fréquences 500 fois plus grandes qu'en sismique.

Les hétérogénéités latérales de vitesse peuvent être observées sur des cartes de vitesse de stack. A un temps donné est associée une carte représentant les variations latérales de la vitesse de stack. Sur un exemple (champ de vitesse en Mer du Nord), Juliard [50] (§5.2) analyse les hétérogénéités faibles et de petite taille en calculant le résidu entre une carte brute et une carte lissée. Il apparaît alors de petites structures rugueuses d'échelle hectométrique et de fluctuations de l'ordre de 5%. Cette variabilité latérale des vitesses de stack est-elle représentative de la variabilité latérale des vitesses réelles ? Y-a-t-il un lien entre leur structure géostatistique ? Telles sont les questions que s'est posées Touati

[89] (§1.3.2). En effectuant l'analyse structurale des vitesses de stack sur des simulations numériques, il a montré que ces deux variabilités ne sont pas du tout les mêmes. Les hypothèses sous entendues avec les vitesses de stack sont trop simplistes. De plus, la variabilité des vitesses de stack dépend fortement de la méthode d'analyse et du degré de couverture (nombre d'offsets dans l'analyse de vitesse).



D'après Wu, Xu & Li [104].

FIG. 1.6 – Diagraphie des vitesses des ondes P dans les puits du German Continental Deep Drilling Project (KTB) : puits principal HB et puits pilote VB. Il s'agit de deux sondages très profonds destinés à améliorer la représentation de la croûte terrestre.

Dans cette section, les raisons géophysiques qui nous poussent à nous intéresser aux rapides fluctuations de vitesse sont présentées (les motivations géostatistiques ayant été données dans l'introduction). Tout d'abord, ce type d'hétérogénéités explique un effet déjà observé par Gibson et Levander [32], qui concerne l'augmentation de la continuité latérale des réflexions avec l'offset. On présente ensuite le phénomène de la diffraction, négligé dans les analyses de vitesse géophysiques classiques, mais important en réalité dans des structures hétérogènes, telles qu'on en trouve dans le sous-sol. Cette description est également utile pour bien comprendre le cadre théorique développé au chapitre 2. Enfin, on résume quelques approches du calcul des incertitudes de la migration. Finalement, tous ces arguments mettent en évidence qu'une modélisation stochastique des petites hétérogénéités de vitesse doit être envisagée.

1.2.1 Influence de l'offset sur la continuité des sections sismiques

L'hypothèse fondamentale des analyses de vitesse repose sur l'idée que le stack est une bonne approximation d'une section à offset nul. Ses conditions classiques sont celles de faibles variations latérales de vitesse et de faibles pendages des réflecteurs. Or récemment, il a été mis en évidence que les faibles (en amplitude) et petites (en taille) hétérogénéités latérales de vitesse sont aussi sources d'erreurs dans le stack. Gibson & Levander [32] montrent qu'elles sont responsables de l'apparition d'une fine stratification dans la section après sommation. Touati [89] chap 1 quantifie ces erreurs qui peuvent atteindre les 10%.

Le degré de couverture est le nombre d'offsets utilisés dans le stack. Les analyses de vitesse en dépendent fortement : les hyperboles ajustées ne sont pas les mêmes et ainsi, les

vitesse de stack obtenues sont différentes [Cordier [22] p 60]. Touati [89] (§1.3.2) analyse en détail ce problème et obtient les conclusions suivantes :

- ◊ Plus le degré de couverture est important, plus la moyenne des vitesses de stack approche la vitesse moyenne du milieu.
- ◊ L'erreur dans l'analyse de $T(0)$ (temps à offset nul) augmente en fonction du degré de couverture.
- ◊ Plus on augmente le nombre d'offsets, plus $T(x)$ est régulier, et plus la variance des vitesses de stack diminue.

Cette augmentation de la régularité des temps de trajet avec l'offset est traduite analytiquement par Touati [89] (chap 6) sous l'hypothèse d'offsets petits devant la profondeur (faibles angles d'incidence). Il montre que $Var[T(x)] < Var[T(y)]$ si $x > y$. Sur nos données réelles, elle se visualise nettement pour la réflexion puissante localisée à $2s$ (Fig. 1.7). Une expérience sur données synthétiques nous la confirme également (Fig. 1.8)¹. Plus l'offset est grand, plus la réflexion est lissée et nette.

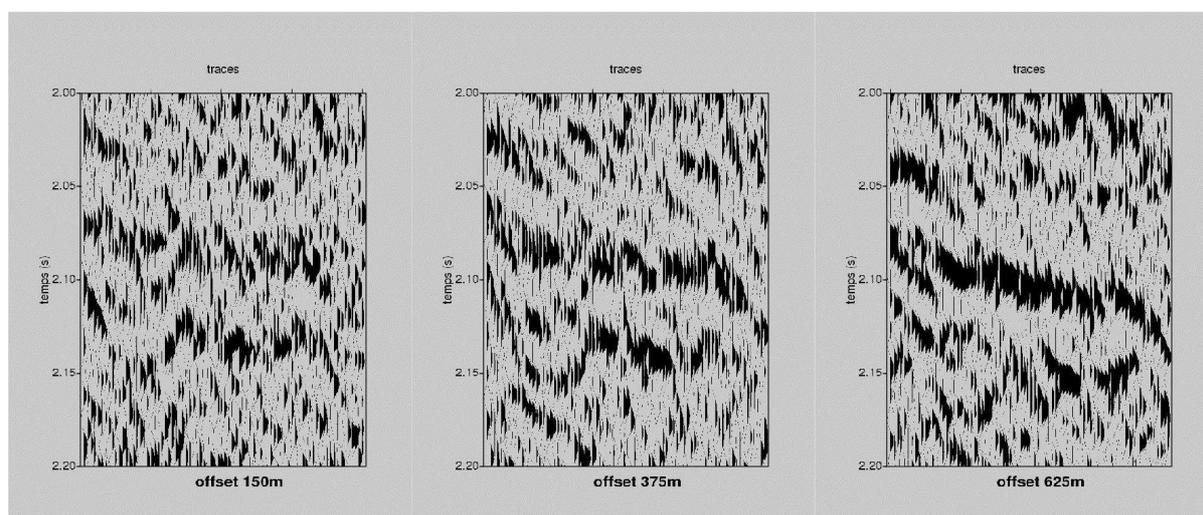


FIG. 1.7 – Données fournies par AGIP ($40m$ entre chaque trace). 80 premières traces entre $2s$ et $2.2s$ de trois sections brutes à offset commun : $x = 150m$, $x = 375m$, $x = 625m$. La continuité de la réflexion entre $2.07s$ et $2.1s$ augmente en fonction de l'offset.

Ce phénomène est facilement compréhensible physiquement. Pour un trajet à offset très faible, l'onde traverse deux fois (trajet aller et trajet retour) les mêmes hétérogénéités et subit donc deux fois les mêmes perturbations. Pour un trajet à offset plus grand, l'onde ne rencontre pas les mêmes hétérogénéités et se propage sur une distance plus grande (donc traverse plus d'hétérogénéités), ce qui régularise le front d'onde. Remarquons que ce résultat n'est plus valide pour de grands offsets, où les réflexions sont très bruitées du fait de grandes distances de propagation et d'angles d'incidence trop importants.

Gibson & Levander [32] ont également étudié les effets de petites hétérogénéités sur la continuité latérale des sections sismiques. Ils simulent des expériences de sismique réflexion dans un champ de réflectivité aléatoire 2D. Par rapport à la section des réflectivités,

¹On utilise la représentation usuelle des traces sismiques : leurs parties positives sont noircies, leurs parties négatives sont tronquées à zéro.

les sections stackées sont nettement plus stratifiées, et ce d'autant plus que le degré de couverture est grand : de petits segments de réflexion apparaissent. Dans des expériences réelles, ceux-ci risqueraient d'être interprétés comme une stratification fine 1D. Gibson & Levander [32] concluent que la migration prestack est nécessaire car la migration poststack ne peut renverser ce type d'effets.

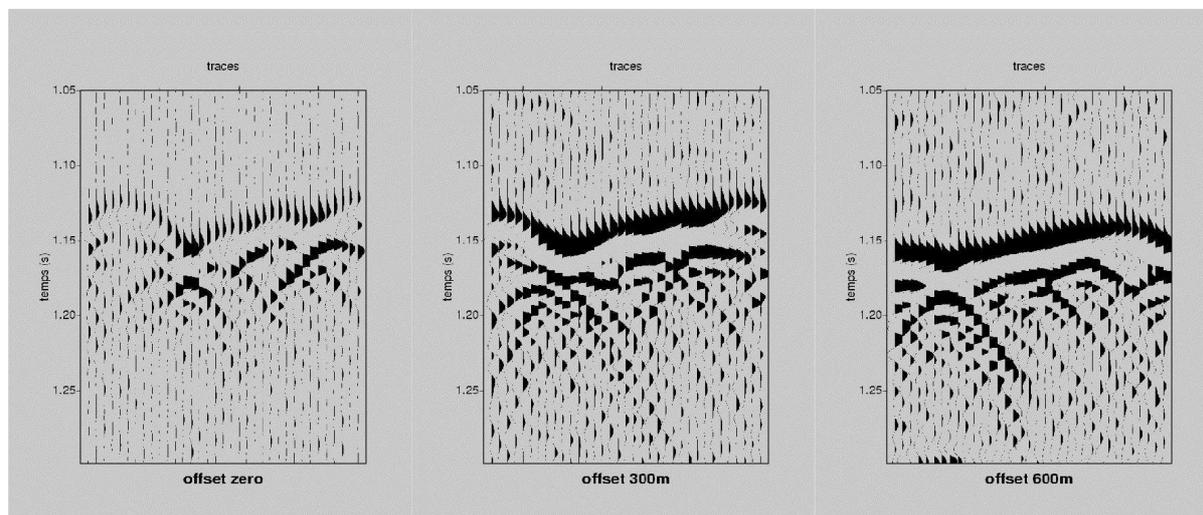


FIG. 1.8 – Trois sections à offset commun issues de sismogrammes synthétiques calculés par différences finies acoustiques (35 tirs espacés de $40m$). Le champ de vitesse est un milieu aléatoire à covariance exponentielle (milieu rugueux) à faibles fluctuations (d'écart-type 3.5%), dont les hétérogénéités sont de tailles caractéristiques $200m$ latéralement et $100m$ verticalement. La vitesse moyenne est de $3000m/s$ et un réflecteur horizontal est placé à une profondeur de $1700m$.

Il est donc clair que les petites et faibles hétérogénéités de vitesse ont des effets de biais importants sur l'analyse de vitesse. Or ceux-ci ne sont pas pris en compte dans les procédures géophysiques classiques. Ce type d'hétérogénéités a aussi pour conséquence des effets de diffraction, que l'on présente dans la section suivante.

1.2.2 Principe géométrique de la diffraction

Le phénomène physique

En géophysique d'exploration, le cadre le plus utilisé pour l'étude de la propagation des ondes dans un milieu hétérogène est celui du principe de Fermat : “*Les rayons joignant deux points suivent des trajets de durée extremum*”. Ainsi, la théorie des rais et l'optique géométrique (étudiée au §2.2.2) sont deux formulations équivalentes de ce principe [Kravstov & Orlov [54] §2.2.6]. Elles donnent des équations analytiques pour les rais, les temps de trajet et les amplitudes d'une onde. Cependant, quand le milieu est trop hétérogène, quand la distance de propagation est trop grande ou quand la fréquence du signal est trop faible, le principe de Fermat est inadéquat. En optique par exemple, des déviations dans la propagation de l'énergie font apparaître des zones sombres et des zones lumineuses. Ce sont des phénomènes de diffraction. Le but de cette section est de présenter brièvement le principe de Huygens-Fresnel qui décrit cette théorie [Born & Wolf [13] chap 8].

D'après le principe de Huygens, chaque point d'un front d'onde de source O à un instant t est une nouvelle source qui crée un front d'onde secondaire. Le front d'onde suivant est l'enveloppe de tous ces fronts d'onde secondaires (Fig. 1.9). Fresnel rajoute le postulat que cette enveloppe est le résultat d'interférences constructives et destructives entre les ondes secondaires. Soit O une source d'onde sphérique monochromatique de longueur d'onde λ . On observe son front d'onde S en t , R étant le point où le champ propagé est observé (Fig. 1.9). Les contributions au champ en R (des hétérogénéités qui se trouvent sur S) dépendent d'un facteur K , qui décrit la variation (avec la direction) de l'amplitude de l'onde diffractée. K est maximale dans la direction initiale de propagation, décroît rapidement quand l'angle de diffraction χ augmente, et s'annule en $\chi = \pi/2$.

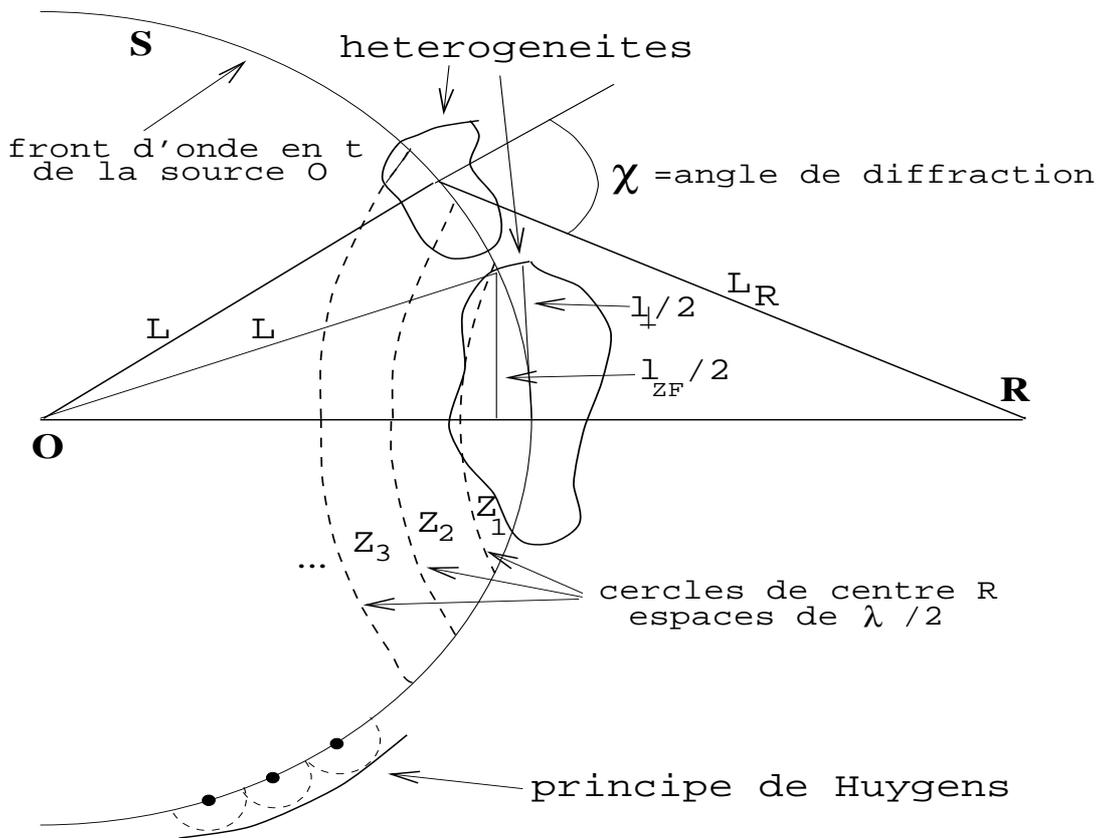


FIG. 1.9 – Principe géométrique de la diffraction, construction des zones de Fresnel, principe de Huygens.

Pour calculer le champ, quand la longueur d'onde est négligeable devant les distances de propagation L et L_R , la construction en zones de Fresnel est utilisée. Ce sont des zones séparées par des cercles concentriques de centre R et espacés de $\lambda/2$. On suppose alors que K reste constant dans chaque zone ($K = 0$ dans la dernière). Les contributions au champ de chaque zone sont alternativement positives et négatives, la première étant la plus constructive. Finalement, on peut montrer que la contribution au champ en R vaut la moitié de celle provoquée par la première zone de Fresnel [Born et Wolf [13] chap 8].

La taille de la première zone de Fresnel est donc un paramètre jouant un rôle prépondérant dans la propagation des ondes, car c'est dans celle-ci qu'ont lieu les diffractions majoritairement prises en compte. Comme O et R sont très éloignés de l'hétérogénéité, les dimen-

sions de la première zone de Fresnel peuvent être calculées de manière simple. Sa taille dans la direction de propagation vaut par définition $\lambda/2$. Dans la direction transverse, on la note l_{ZF} et on applique Pythagore :

$$L^2 = \left(\frac{l_{ZF}}{2}\right)^2 + \left(L - \frac{\lambda}{4}\right)^2. \quad (1.4)$$

La taille transverse de la première zone de Fresnel (son diamètre) vaut donc $l_{ZF} \simeq \sqrt{2\lambda L}$. On l'appelle désormais la zone de Fresnel et on considère que sa taille est approximativement de l'ordre de $\sqrt{\lambda L}$. Bien sûr, si la vitesse est variable, la longueur d'onde l'est aussi le long de la propagation. Toutefois, les effets de courbure des rais qui font varier L tendent à s'opposer aux effets de variation de longueur d'onde [Faily-Berthet [26] p 39].

En optique géométrique, la diffraction n'est pas prise en compte car la fréquence est supposée infinie. Ainsi, la zone de Fresnel est réduite à un point. En fait, l'optique géométrique s'applique quand les dimensions longitudinales et transverses des zones de Fresnel sont négligeables devant les dimensions des hétérogénéités. Ces conditions se notent $\lambda \ll l_{\parallel}$ et $\sqrt{\lambda L} \ll l_{\perp}$, où l_{\parallel} et l_{\perp} sont les dimensions caractéristiques des hétérogénéités, respectivement parallèle et transverse à la direction de propagation. Ces approximations seront retrouvées lors de l'explication théorique de l'optique géométrique au §2.2.2.

La diffraction a donc lieu à partir de distances de propagation de l'ordre de l_{\perp}^2/λ . Elle est la cause du phénomène du "*wavefront healing*" : les discontinuités d'un front d'onde ont tendance à s'atténuer avec le temps [Claerbout [20] §7.3, Wielandt [97]]. Les diffractions lissent le front d'onde car elles se superposent et interfèrent dans la zone de Fresnel. Ce phénomène est bien connu en imagerie et en sismique car il limite la résolution du champ d'onde à la taille de la zone de Fresnel [Gudmundsson [33], Thore & Juliard [88]]. Remarquons toutefois, que si la couverture du milieu par les ondes est très dense, il est possible de s'affranchir de la zone de Fresnel.

Remarque 1.2.1 *Si $\lambda \ll l_{\perp}$, l'angle caractéristique de la diffraction d'un rayon sur une hétérogénéité est de l'ordre de λ/l_{\perp} [Chernov [17] p 52]. Rytov et al. [75] (p 191) montrent ce résultat en mesurant les sections effectives de diffraction en milieu aléatoire.*

Enfin, l'approximation champ lointain est requise lorsque le champ est observé très loin de l'objet diffractant, *i.e.* que la zone de Fresnel est très grande devant les hétérogénéités :

$$\sqrt{\lambda L} \gg l_{\perp}. \quad (1.5)$$

L'approximation champ lointain est équivalente au régime de saturation de la diffraction appelé approximation de Fraunhofer par Chernov [17] (p 45) et Rytov et al. [76] (p 57). Dans ce régime, les discontinuités du front d'onde dues aux diffractions lointaines sont complètement lissées [Wielandt [97], Gudmundsson [33]].

La diffraction en sismique

Lorsque la profondeur croît, la dimension de la zone de Fresnel augmente et les effets de diffraction deviennent plus importants. Pour des données standard de sismique pétrolière

(fréquence caractéristique de 40Hz , vitesse moyenne de 3000m/s , longueur d'onde dominante de 50m , profondeurs d'investigation entre 2000m et 5000m), la taille des zones de Fresnel varie entre 300m et 500m .

Plusieurs auteurs ont étudié les effets de la diffraction et du "*wavefront healing*" sur les temps d'arrivée sismiques. L'exemple très simple donné par Wielandt [97] consiste en une inclusion sphérique (anomalie rapide de vitesse de dix pour cent) dans un milieu homogène. Il montre ainsi que la diffraction des rayons sur l'anomalie provoque des biais dans les temps d'arrivée : les ondes se propagent plus vite que ce qui est prédit par la théorie des rais. Cependant, quand la distance de propagation devient très grande, le temps d'arrivée due à la diffraction n'est plus détecté car le champ d'onde diffracté a été complètement lissé (c'est l'approximation de Fraunhofer).

Les traitements géophysiques classiques sont basés sur la théorie des rais. Ils n'interprètent donc pas correctement les événements sismiques provoqués par la diffraction : si ceux-ci dominent les événements dûs à la transmission, les traitements sismiques ne détectent pas les faibles anomalies de vitesse de taille inférieure à la zone de Fresnel. Thore & Juliard [88] le montrent pour les analyses de vitesse de stack. Ils introduisent dans un milieu homogène une petite anomalie de vitesse surplombant un réflecteur et étudient l'anomalie structurale qui en découle sur les sections stackées et migrées. D'autre part, Williamson & Worthington [98] simulent la propagation d'onde dans des milieux aléatoires à faibles perturbations, et constatent que la tomographie par tracé de rais ne permet pas de retrouver les hétérogénéités de taille inférieure à la zone de Fresnel.

Toutes les erreurs faites dans l'estimation des vitesses affectent le processus de la migration si ces perturbations de vitesse ont elles même perturbé le champ d'onde et les temps d'arrivée. Dans la section suivante, quelques approches concernant les incertitudes de la migration sont passées en revue. Celle qui nous intéresse plus particulièrement est basée sur une connaissance de la structure géostatistique de la vitesse et permet de quantifier statistiquement les erreurs de migration dues aux anomalies de vitesse.

1.2.3 Incertitudes de la migration

La lacune dans la résolution du champ de vitesse est susceptible d'affecter la migration. Il se peut aussi que des hétérogénéités de vitesse de taille supérieure à la zone de Fresnel ne soient pas détectées, à cause de bruits dans les données, de l'imprécision de l'analyse, ... [Juliard [50] §2.2]. Juliard [50] développe alors une procédure pour estimer des anomalies de vitesse à partir des anomalies structurales observées sur les sections migrées (sans les anomalies de vitesse).

D'autre part, Abrahamsen [1] a proposé des solutions géostatistiques au problème de la conversion d'une section temps en une section profondeur. Il compare les méthodes géostatistiques de krigeage universel, cokrigeage et cokrigeage bayésien pour estimer les profondeurs des réflecteurs et les vitesses d'intervalle (considérées comme des champs aléatoires corrélés), à partir des observations de puits et des temps d'arrivée. Par rapport aux techniques sismiques classiques, ces solutions ont l'avantage de donner une estimation avec ses bornes d'incertitudes. Cependant, ce type de méthode ne tient pas compte de la

physique du problème. Les relations entre profondeur, vitesse et temps sont linéaires ou très simples.

Récemment, Matheron [62] a introduit une méthode de calcul des erreurs de migration basée sur les équations de propagation de l'optique géométrique et sur la migration simple décrite par l'équation (1.3). Il remplace dans (1.3) le temps d'arrivée $T(x, z)$ par son expression au premier ordre de l'optique géométrique (eq. (2.42) p 42). Cette migration suppose un champ de vitesse constant. Si le champ de vitesse est perturbé, cette hypothèse induit une erreur théorique.

Avec des champs de vitesse aléatoires, les temps d'arrivée ont une expression stochastique. Sous l'hypothèse de perturbations de vitesse faibles et stationnaires, une formulation stochastique au premier ordre des erreurs de cette migration est obtenue pour une vitesse de migration V_{mig} donnée [Matheron [62], Touati [89] chap 2, Touati et al. [90], [91]]. Les auteurs remarquent que l'erreur augmente avec la profondeur et la pente du réflecteur, mais aussi avec la variance de la perturbation du champ de vitesse. Touati [89] (chap 3) a étendu cette approche à des champs de vitesse non stationnaires. Dans ce cas, les rayons sont courbés et le formalisme théorique est beaucoup plus complexe.

Ainsi, l'erreur étant liée aux perturbations aléatoires de la vitesse, nous pouvons calculer sa variance ou la simuler à l'aide de la covariance des vitesses [Touati et al. [90], [91]]. Dans une modélisation déterministe, il aurait fallu connaître les perturbations de vitesse en tout point. La modélisation probabiliste restreint la connaissance à la covariance des vitesses et donne un critère de qualité pour la vitesse de migration choisie. Cependant, la migration utilisée est simpliste, et cette approche originale doit être poursuivie pour considérer des processus de migration plus complexes.

1.3 La séparation des échelles des hétérogénéités

Le §1.2 a évoqué l'existence de toutes sortes d'hétérogénéités dans le sous-sol, et quelques-uns de leurs effets sur la sismique. Or actuellement, il n'existe pas de méthodes sismiques permettant de déterminer quels types d'hétérogénéités sont présents dans un milieu et quelle est leur importance relative. Dans les bassins sédimentaires, il est possible de hiérarchiser les hétérogénéités de vitesse par leur taille, du grain microscopique à un bloc à l'échelle du bassin [MacBeth [58]]. En exploration pétrolière, les échelles des hétérogénéités qui nous intéressent sont celles qui vont modifier les caractéristiques structurales du sous-sol ou les écoulements de façon significative. En exploration sismique, les échelles des hétérogénéités qu'il est possible de retrouver dépendent de la longueur d'onde dominante λ et des distances de propagation L . Pour les différents types de mesures, les ordres de grandeur sont complètement différents, par exemple :

- ★ en laboratoire (mesures ultrasoniques) : $L \sim 10cm$ et $\lambda \sim 1cm$,
- ★ en diagraphie sonique : $L \sim 1m$, $\lambda \sim 10cm$,
- ★ en sismique de puits : $L \sim 100m$, $\lambda \sim 10m$,
- ★ en sismique réflexion : $L \sim 1km$, $\lambda \sim 50 - 100m$,
- ★ en sismologie : $L \sim 100km$, $\lambda \sim 1km$.

D'autre part, à longueur d'onde fixée, les phénomènes physiques de propagation dépendent de la taille des hétérogénéités de vitesse. Hélas, les effets des différents types d'hétérogénéité ne se superposent pas théoriquement car l'équation des ondes est non linéaire par rapport au paramètre vitesse. Samuelides [77] offre une bonne revue de toute la gamme des phénomènes physiques de propagation. Trois dimensions sont importantes pour l'étude de la propagation d'onde en milieu hétérogène : L , λ et l_ϵ la taille caractéristique des hétérogénéités. Il faut également distinguer les tailles des hétérogénéités transverse l_\perp et parallèle l_\parallel à la direction de propagation. On appelle taille caractéristique la plus petite de ces dimensions : $l_\epsilon = \min(l_\parallel, l_\perp)$.

Cette section permet de bien poser le problème dans notre contexte, celui des données issues de la sismique réflexion. Il est montré que quatre échelles de structure géologique doivent être distinguées dans le problème physique. Un diagramme récapitulatif (Fig. 1.10 p 24) permet finalement de faire le point. Ainsi, on met bien en valeur l'échelle qui nous intéresse pour résoudre les problèmes posés à la section précédente : ceux liés aux fluctuations des temps de trajet.

1.3.1 Le macro-modèle

L'étude d'un terrain se fait d'abord à l'échelle du bassin (50 à 100km) par des méthodes de grande reconnaissance (géologie, cartographie, gravimétrie, magnétisme, ...). Une partie du terrain susceptible de contenir un piège est alors extraite, puis explorée à l'aide des outils sismiques. C'est l'échelle de la structure ou du prospect (5 à 50km). En géologie structurale, le sous-sol est représenté sous la forme de grands ensembles homogènes, d'échelles kilométriques, présentant chacun une unité géologique. Ce macro-modèle est déduit à partir des mesures sismiques classiques et des données de puits.

La modélisation classique du macro-modèle suppose que les vitesses de propagation et la densité dans chaque unité varient lentement. Une variation brusque de la vitesse ou de la densité à une échelle inférieure ou égale à la longueur d'onde est modélisée par une interface. Les interfaces sont également supposées continues (entre deux failles) et à rugosité nulle. Dans les zones d'intérêt pétrolier, les structures se présentent souvent sous la forme d'un empilement de strates. On constate souvent une composante globale de la vitesse augmentant plus ou moins linéairement avec la profondeur.

Dans notre travail, le macro-modèle sera homogène ou linéairement variable en profondeur. Ceci permet de faire l'hypothèse stationnaire ou intrinsèque (accroissements stationnaires, cf §1.4.1) nécessaire à une étude statistique des fluctuations spatiales. Cette hypothèse est bien sûr restrictive. Le milieu est constitué de couches présentant des caractéristiques différentes et les événements géologiques (*e.g.* compaction, érosion, tectonique, diapirisme, ...) provoquent des déformations des couches sédimentaires.

Cependant, nous pouvons supposer que les courtes fluctuations des temps d'arrivée sont dues à de courtes fluctuations des vitesses et de même pour leurs variations lentes. Des méthodes existent alors pour séparer la dérive globale et les résidus d'un processus spatial (procédés de lissage : moyenne mobile, moindres carrés, splines, krigeage, filtrage, ...), s'il n'y a pas d'ambiguïté entre ses composantes lentes et rapides [Matheron [61] chap 6, Chauvet [16] chap 7 §3]. Nous montrerons au chapitre 3 que l'on peut découpler

le problème : inverser le macro-modèle à l'aide des techniques sismiques classiques, alors que les fluctuations plus rapides du modèle (supposées stationnaires) seront inversées à l'aide des résidus des temps d'arrivée.

1.3.2 L'échelle hectométrique

Trop petites pour être prises en compte dans le macro-modèle, les hétérogénéités de taille supérieure à la longueur d'onde ont une influence importante sur le front d'onde, et notamment sur les temps d'arrivée. En sismique réflexion, ce sont donc les hétérogénéités d'échelle hectométrique (car $\lambda \sim 50m$), et on a montré dans la section précédente que celles-ci sont belles et bien présentes dans les zones explorées. La limite inférieure de la taille de ces hétérogénéités se situe au niveau $l_\epsilon/\lambda \sim 2$ [Müller et al. [66]]. Dans ce cadre, le découplage des ondes élastiques P et S est valable, et l'équation de l'acoustique est valide dans le milieu géologique [Wu & Aki [101]].

Dans les milieux faiblement hétérogènes, les phénomènes de transmission par de telles hétérogénéités provoquent des fluctuations hautes fréquences des temps et des amplitudes. Celles-ci sont souvent interprétées dans le cadre de l'optique géométrique, qui offre une définition rigoureuse et fréquemment indépendante des temps d'arrivée et des amplitudes. Néanmoins, quand la distance de propagation devient trop grande, des diffractions apparaissent et les approximations de Rytov et de l'équation parabolique doivent être utilisées. La première suppose que les diffractions sont modérées, et la deuxième limite les cônes de diffraction à des angles faibles. Sous ces conditions, même si la notion de temps de trajet n'existe plus rigoureusement, on peut en définir une approximative, qui est valide tant que la phase est faiblement perturbée. Le temps de trajet $T(\mathbf{r})$ est le temps d'arrivée de la phase $S(\mathbf{r})$ à la fréquence dominante (cf §2.1.2) : $T(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r})}{kv_0}$, où k est le nombre d'onde et v_0 la vitesse moyenne.

1.3.3 L'échelle décamétrique

Ce cas est le plus complexe, les hétérogénéités de taille comparable à la longueur d'onde provoquent des phénomènes multiples : diffraction, rétro-diffraction, atténuation, résonnance, ... L'approximation de Born (cf §2.1) est adaptée à ce type d'hétérogénéités car elle prend en compte des diffractions de direction quelconque [Sato & Fehler [82] chap 4]. En sismologie, l'approximation de Born est utilisée premièrement dans l'analyse spectrale des codas, et deuxièmement dans l'étude de l'atténuation du front direct de l'onde [Sato & Fehler [82] chap 4 et 5]. En effet, les codas (queues des sismogrammes) peuvent être interprétés comme le résultat de diffractions simples [Aki & Chouet [3], Sato [81]], et le facteur de qualité mesure l'atténuation de l'amplitude de l'arrivée directe [Wu [100]]. Jannaud [45] (chap 2 et 3) a testé ces deux méthodes sur simulations numériques et a conclu que la première est efficace et la deuxième inutilisable. Sur des données réelles de sismique entre puits, l'analyse spectrale des codas lui a également permis d'inverser les longueurs de corrélation du champ de vitesse dans les trois directions spatiales. Il obtient $3m$ verticalement et une dizaine de mètres latéralement [Jannaud [45] chap 6].

Cependant, l'approximation de Born est limitée aux diffractions simples et ne peut prendre en compte les diffractions de l'onde sur de multiples hétérogénéités. La théorie du champ moyen explique le phénomène d'atténuation par les hétérogénéités moyennes fréquences. Pour un milieu stratifié ce résultat est connu sous le nom de formule O'Doherty Anstey [O'Doherty & Anstey [67]]. La théorie du transfert radiatif considère les phénomènes de diffraction multiple [Frisch [31] chap 6, Ishimaru [43] chap 14]. Elle fournit en fait des équations de transport de l'énergie de l'onde et donne des indications sur le comportement moyen d'une onde dans un milieu hétérogène. Son emploi s'avère délicat et date d'une dizaine d'années en sismologie [Sato & Fehler [82] chap 7, Papanicolaou [69]].

En sismique réflexion, l'échelle d'hétérogénéité décamétrique est rarement considérée dans la physique de la propagation. En effet, les hétérogénéités provoquant la rétro-diffraction sont soit situées sur un réflecteur, soit modélisées comme des points diffractants. Le reste du signal est interprété comme du bruit. D'autre part, les atténuations mesurées sont souvent plus faibles que la précision admise.

1.3.4 L'échelle métrique

Les vitesses déduites des diagraphies acoustiques effectuées dans les puits révèlent des fluctuations très hautes fréquences d'échelle métrique ou inférieure au mètre. Par exemple, Kneib [53] a trouvé une longueur de corrélation verticale de $1m$ dans le puits KTB (cf Fig. 1.6). Les fréquences utilisées en diagraphie permettent de mesurer de telles hétérogénéités, mais les fréquences sont beaucoup plus faibles en sismique réflexion.

Quand les hétérogénéités sont nettement plus petites que la longueur d'onde, il n'est pas possible d'étudier les interactions de l'onde avec chacune d'entre elles. Le milieu de propagation est alors remplacé par un milieu fictif homogène appelé milieu effectif. La théorie des milieux homogènes équivalents a pour but d'obtenir les propriétés du milieu effectif par moyennage des propriétés des constituants du milieu initial.

Dans un milieu transverse isotrope, horizontalement stratifié, Backus [7] a obtenu les paramètres élastiques du milieu effectif, en considérant que la fréquence de l'onde est nulle. Même si chaque couche est isotrope, le milieu effectif, lui, est intrinsèquement anisotrope : les ondes P se propagent plus rapidement horizontalement que verticalement. Pour les milieux hétérogènes 2D, il n'existe pas de méthodes théoriques pour les remplacer par des milieux effectifs, mais Ikelle et al. [36] ont développé une procédure heuristique. Finalement, toutes les études ont confirmé que $l_\epsilon/\lambda \sim 1/10$ est une bonne limite de la taille des hétérogénéités à prendre en compte dans la théorie des milieux effectifs.

1.3.5 Diagramme récapitulatif

La Fig. 1.10 présente un récapitulatif des différents régimes de propagation en fonction de la longueur d'onde caractéristique λ , de la distance de propagation L et de la taille caractéristique des hétérogénéités l_ϵ .

Au delà de la droite $l_\epsilon = L$, le milieu est homogène car ses dimensions sont supérieures à la distance de propagation. Les hétérogénéités du macro-modèle se placent dans le domaine

de la théorie des rais qui est quant à lui délimité par la condition $\sqrt{\lambda L} \ll l_\epsilon$. En dessous de cette limite, on entre dans le régime de la diffraction, associée aux hétérogénéités hectométriques dans l'approximation parabolique, et aux hétérogénéités décamétriques dans la méthode de perturbation de Born (codas, atténuation).

La méthode de perturbation de Born linéarise l'équation des ondes en ne considérant que les diffractions simples. Lorsque les hétérogénéités sont très petites devant la longueur d'onde, la diffraction devient négligeable, et le milieu se comporte comme un milieu homogène. Cela se traduit par la courbe limite $\Delta I/I = 0.1$ (rapport de l'énergie diffractée sur l'énergie totale), dont on a donné un exemple sur le diagramme [Aki & Richards [4] p 749]. En dessous de cette courbe, la dimension des hétérogénéités est si petite que l'on peut assimiler le milieu à un corps homogène (théorie des milieux effectifs). La méthode de perturbation de Born s'applique à proximité de la droite $\Delta I/I = 0.1$. $\Delta I/I$ est en fait proportionnel à L/λ et à l'intensité des fluctuations de vitesse. $\Delta I/I$ a été tracé ici pour un écart-type de vitesse de l'ordre de 3%.

Enfin, le problème est très complexe pour de grandes distances de propagation ou de fortes fluctuations de vitesse dans le régime $l_\epsilon/\lambda \sim 1$. C'est le domaine des diffractions fortes, des rétro-diffractions et des diffractions multiples.

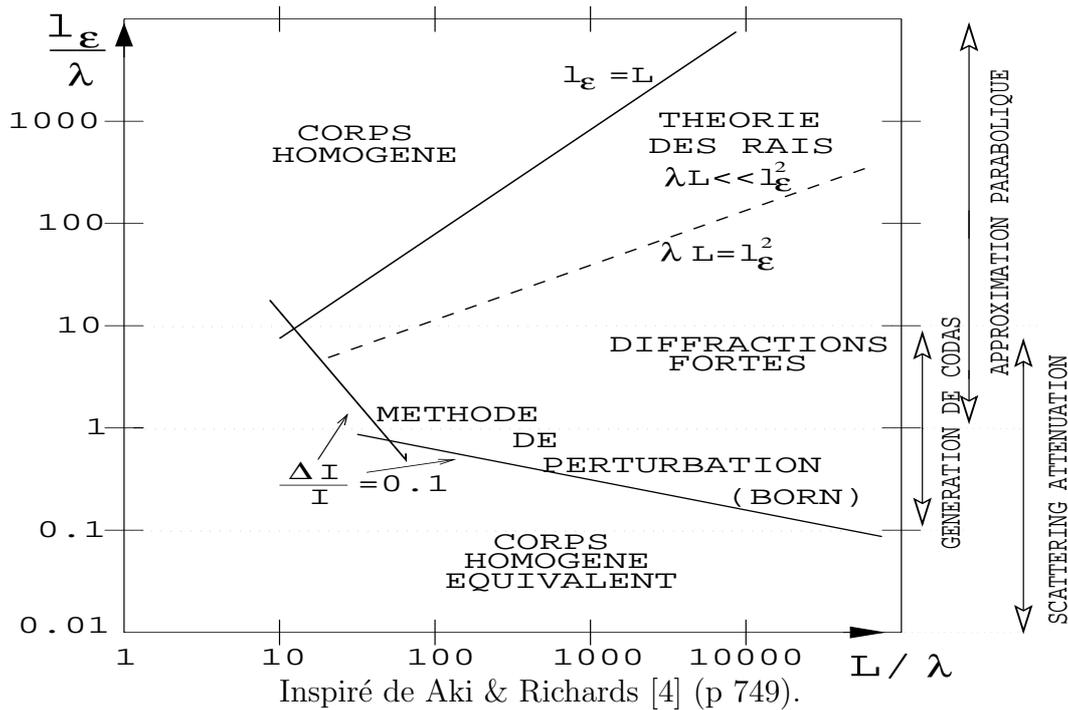


FIG. 1.10 – Classification des domaines de propagation dans le diagramme $(L/\lambda, l_\epsilon/\lambda)$.

Dans la section suivante, on modélise de manière stochastique les hétérogénéités de vitesse à faibles fluctuations et d'échelle hectométrique. En effet, on a vu que ce sont elles qui permettent de travailler avec les temps de trajet d'une onde.

1.4 La modélisation stochastique

Quand L/l_ϵ est trop grand, il n'est plus possible de traiter la problème inverse de manière déterministe car les hétérogénéités traversées sont trop nombreuses. Une modélisation stochastique permet de simplifier le problème : il est plus facile de calculer les moments statistiques du champ d'onde que de résoudre de manière explicite l'équation des ondes.

Cette section a pour mission de présenter notre modélisation probabiliste et ses hypothèses sous-jacentes, puis d'expliciter les modèles géostatistiques utilisés par la suite. Pour fixer moins confusément les idées, la terminologie concernant les paramètres de l'hétérogénéité de la vitesse est fixée en page xiii. Ces notations seront inchangées tout au long de cette thèse.

1.4.1 Champ de vitesse aléatoire

Soit un champ de vitesse homogène v_0 . On définit le champ spatial aléatoire $\epsilon(\mathbf{r})$ comme une perturbation du carré de la lenteur (inverse de la vitesse), *i.e.*

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})] , \quad (1.6)$$

où $|\epsilon| \ll 1$. $v(\mathbf{r})$ est donc un champ de vitesse aléatoire à fluctuations spatiales faibles. Une simple linéarisation donne pour $v(\mathbf{r})$:

$$v(\mathbf{r}) = v_0 \left[1 - \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2} \right] . \quad (1.7)$$

L'hypothèse d'une distribution gaussienne pour les variables aléatoires est souvent émise en géostatistique, pour notamment permettre leurs simulations. Bien sûr, cette hypothèse est restrictive pour les vitesses sismiques, mais certaines études ont montré qu'elle est parfois assez réaliste. Par exemple, la distribution des vitesses de la Fig. 1.6 a une allure de gaussienne [Wu et al. [104]].

Pour rendre compte statistiquement d'un phénomène spatial unique, il faut qu'il ait en plus une structure statistique invariante dans l'espace. En géostatistique linéaire, ses deux premiers moments sont alors suffisants pour le caractériser [Matheron [61] chap 6].

L'hypothèse stationnaire

En sismologie, les champs de vitesse sont souvent supposés stationnaires (*i.e.* stationnaires du second ordre) [Aki & Richards [4] p 738]. Cette hypothèse de stationnarité signifie que les paramètres moyens du milieu sont les mêmes en tout point de l'espace : la moyenne et les corrélations sont invariantes par translation.

La moyenne des fluctuations ϵ est donc constante, et ici, elle est de plus centrée :

$$\mathbb{E}[\epsilon(\mathbf{r})] = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad \mathbb{E}[v(\mathbf{r})] = v_0 . \quad (1.8)$$

La fonction de corrélation ou covariance C_ϵ représente les corrélations moyennes des valeurs des perturbations en fonction de leur distance de séparation :

$$C_\epsilon(\mathbf{h}) = Cov[\epsilon(\mathbf{r}), \epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{h})] = \mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{h})] - \mathbf{E}^2[\epsilon(\mathbf{r})] = \mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{h})] . \quad (1.9)$$

La linéarisation (1.7) nous donne la covariance du champ de vitesse C_v ,

$$C_v(\mathbf{h}) = \frac{v_0^2}{4} C_\epsilon(\mathbf{h}) . \quad (1.10)$$

La covariance décrit l'ampleur, les échelles et la structure (*e.g.* lisse, régulière, rugueuse, fractale, ...) des fluctuations de $\epsilon(\mathbf{r})$. L'ampleur des fluctuations est mesurée par la déviation-standard σ_ϵ ou la variance σ_ϵ^2 . Celle-ci est définie par

$$\sigma_\epsilon^2 = Var[\epsilon(\mathbf{r})] = C_\epsilon(0) . \quad (1.11)$$

L'hypothèse intrinsèque

En géostatistique, une hypothèse plus générale que la stationnarité est souvent employée. Il s'agit de l'hypothèse intrinsèque qui stipule que les accroissements du champ sont stationnaires [Matheron [59] p 53].

La moyenne des accroissements, qui est appelée la dérive m_ϵ , est constante :

$$m_\epsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \epsilon(\mathbf{r})] = m . \quad (1.12)$$

Les moments d'ordre deux sont mesurés par le variogramme γ_ϵ défini par la demi-variance des accroissements (il ne dépend pas des points d'appui mais seulement de leur différence) :

$$\gamma_\epsilon(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} Var[\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \epsilon(\mathbf{r})] \quad (= C_\epsilon(0) - C_\epsilon(\mathbf{h}) \text{ si } \epsilon \text{ est stationnaire}). \quad (1.13)$$

Employée dans le cas stationnaire la plupart du temps, la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire s'applique aussi si le champ de vitesse est intrinsèque dans la direction de propagation et stationnaire perpendiculairement [Tatarskii [86]]. Une telle généralisation permet de prendre en compte les variations linéaires de la moyenne et de la variance de la vitesse dans la direction de propagation. Elle pourrait donc se révéler bien appropriée en sismique réflexion à faible offset. En effet, les champs de vitesse des sous-sols explorés présentent souvent des augmentations plus ou moins linéaires en profondeur, et les ondes s'y propagent avec des incidences faibles. De plus, les zones plus profondes sont souvent plus hétérogènes, donc à variance plus forte.

Remarque 1.4.1 *En turbulence atmosphérique et en radiophysique, l'hypothèse intrinsèque est connue sous le nom de stationnarité locale, et le champ est défini par sa fonction de structure [Tatarskii [86] chap 1, Rytov et al. [75] chap 1].*

1.4.2 Les portées et l'anisotropie statistique

La distance à partir de laquelle les corrélations de $\epsilon(\mathbf{r})$ sont négligeables s'appelle longueur de corrélation ou portée l_ϵ . Elle mesure la taille caractéristique des hétérogénéités [Matheron [59] p 78]. Dans un milieu aléatoire isotrope, la longueur de corrélation est la même dans toutes les directions et la covariance s'écrit

$$C_\epsilon(\mathbf{h}) = C_\epsilon(h) \quad \text{où } h = \|\mathbf{h}\|. \quad (1.14)$$

Dans les études sismologiques, quasiment tous les auteurs se placent dans le contexte de milieu statistiquement isotrope. Notre problème concerne les bassins sédimentaires, et là, cette hypothèse n'est plus respectée. Les milieux sédimentaires sont plus ou moins stratifiés et présentent souvent une forte anisotropie [Matheron [62]].

Il est donc nécessaire de prendre en compte les variations de la portée dans les différentes directions spatiales. Dans les milieux 2D, l'anisotropie statistique est ainsi définie par deux portées horizontale et verticale a et b et par un angle d'anisotropie θ . La portée a est celle de l'axe d'angle θ avec l'horizontale et la portée b est celle de l'axe orthogonal. Dans les milieux 3D, l'anisotropie statistique est caractérisée par la portée horizontale a_x , la portée verticale b , la portée azimuthale a_y , et trois angles d'anisotropie [Wackernagel [96] p 47]. Dans notre travail, la stratification sera supposée horizontale (angles d'anisotropie nuls) ; mais son extension à une stratification quelconque est tout à fait envisageable.

L'anisotropie est aussi supposée géométrique. Les moments d'ordre deux se notent

$$C_\epsilon(x, y, z) = \sigma_\epsilon^2 C_0 \left(\sqrt{\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{b^2}} \right), \quad (1.15)$$

où $C_0(h)$ est isotrope de portée un et de variance un. C_0 se dénomme la covariance standardisée et définit la structure statistique de ϵ .

Dans l'étude de la propagation des ondes en milieu aléatoire anisotrope, les longueurs de corrélation d'intérêt sont celles parallèle à la propagation et transverse à la propagation (Fig. 1 p xiii). Elles seront dénommées portée longitudinale l_{\parallel} et portée transverse $l_{\perp} = (l_{\perp x}, l_{\perp y})$. Leurs expressions en fonction des paramètres d'anisotropie apparaissent naturellement :

▷ En 2D, soit un vecteur \mathbf{r} de direction α par rapport à l'axe Oz . On a

$$C_\epsilon(\mathbf{r}) = C_\epsilon(r \sin \alpha, r \cos \alpha) = \sigma_\epsilon^2 C_0\left(\frac{r}{l_{\parallel}}\right). \quad (1.16)$$

On trouve ainsi l_{\parallel} et l_{\perp} :

$$\frac{1}{l_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{l_{\perp}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}}. \quad (1.17)$$

▷ En 3D, dans la base (Ox, Oy, Oz) , soit un vecteur \mathbf{r} d'angle azimuthal β et d'angle polaire α (cf Fig. 3.3 (a) p 77). On obtient de la même manière, par

(1.15), l_{\parallel} et les deux corrélations transverses l_{\perp_x} et l_{\perp_y} :

$$\begin{cases} \frac{1}{l_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{a_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{a_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}}, \\ \frac{1}{l_{\perp_x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{a_x^2} + \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{a_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}}, \\ \frac{1}{l_{\perp_y}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{a_x^2} + \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{a_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Si en 3D $a_x = a_y$, le milieu est dit transverse isotrope (*i.e.* latéralement isotrope), et on a $l_{\perp_x} = l_{\perp_y} = l_{\perp}$. On retrouve les mêmes expressions qu'en 2D avec $a_x = a$, $l_{\perp_x} = l_{\perp}$, $a_y = l_{\perp_y} = \infty$.

On définit alors la covariance C_{ϵ}^e dans la base (e_x, e_y, e_z) de la propagation suivant e_z :

$$C_{\epsilon}^e(x, y, z) = \sigma_{\epsilon}^2 C_0 \left(\sqrt{\frac{x^2}{l_{\perp_x}^2} + \frac{y^2}{l_{\perp_y}^2} + \frac{z^2}{l_{\parallel}^2}} \right). \quad (1.19)$$

Pour utiliser une même covariance C_{ϵ}^e lors de l'étude de la propagation d'une onde, les différentes directions de propagation considérées doivent donc être proches de e_z . On remarque par ailleurs que dans le cas isotrope, C_{ϵ}^e et C_{ϵ} sont égales.

Outre les portées, quelques autres mesures et fonctions nous seront utiles :

- ◇ Les portées pratiques dans les différentes directions sont les valeurs pour lesquelles la covariance vaut 5% de la variance. On les note $a_p = \mu a$, où μ est un coefficient de proportionalité dépendant du modèle. Contrairement aux portées, les portées pratiques ont l'avantage de pouvoir être comparées indépendamment du choix d'un modèle.
- ◇ La portée intégrale de C_0 mesure l'aire située sous la covariance standardisée :

$$A_0 = \int C_0(z') dz'. \quad (1.20)$$

- ◇ La covariance transverse standardisée $C_{\perp}(h, h_z)$:

$$C_{\epsilon}(x, y, z) = \sigma_{\epsilon}^2 C_{\perp} \left(\sqrt{\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2}}, z \right), \quad C_{\epsilon}^e(x, y, z) = \sigma_{\epsilon}^2 C_{\perp}^e \left(\sqrt{\frac{x^2}{l_{\perp_x}^2} + \frac{y^2}{l_{\perp_y}^2}}, z \right). \quad (1.21)$$

- ◇ La fonction de densité spectrale des fluctuations $\Phi_{\epsilon}(\mathbf{k})$ est obtenue à l'aide de la transformée de Fourier de la covariance (cf Annexe B). L'équation (1.15) permet d'écrire Φ_{ϵ} en fonction de la densité spectrale standardisée Φ_0 :

$$\begin{cases} \Phi_{\epsilon}(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \sigma_{\epsilon}^2 a_x a_y b \Phi_0(\sqrt{a_x^2 \kappa_x^2 + a_y^2 \kappa_y^2 + b^2 \kappa_z^2}), \\ \Phi_{\epsilon}^e(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \sigma_{\epsilon}^2 l_{\perp_x} l_{\perp_y} l_{\parallel} \Phi_0(\sqrt{l_{\perp_x}^2 \kappa_x^2 + l_{\perp_y}^2 \kappa_y^2 + l_{\parallel}^2 \kappa_z^2}), \\ \Phi_{\epsilon}^e(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \sigma_{\epsilon}^2 l_{\perp_x} l_{\perp_y} \Phi_{\perp}^e(\sqrt{l_{\perp_x}^2 \kappa_x^2 + l_{\perp_y}^2 \kappa_y^2}, \kappa_z). \end{cases} \quad (1.22)$$

1.4.3 Quelques modèles géostatistiques

Trois covariances sont employées usuellement en propagation d'onde et plus particulièrement en géophysique [Frankel & Clayton [30], Sato & Fehler [82] §2.2.2]. Elles sont présentées avec leur densité spectrale en 1D, 2D, 3D (avec respectivement $\nu = 1, 2, 3$), leur portée intégrale A_0 et leur coefficient de portée pratique μ .

- ★ La covariance gaussienne (Fig. 1.11), de dérivée nulle à l'origine, modélise des milieux très lisses (Fig. 1.12 (b)) :

$$C_0(h) = \exp(-h^2), \quad \Phi_0(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^\nu \exp\left(-\frac{k^2}{4}\right), \quad A_0 = \sqrt{\pi}, \quad \mu = \sqrt{3}. \quad (1.23)$$

- ★ La covariance exponentielle (Fig. 1.11) modélise des milieux rugueux (Fig. 1.12 (a), (c)), à corrélations lentement décroissantes :

$$C_0(h) = \exp(-|h|), \quad \Phi_0(k) = \frac{1}{[\pi(1+k^2)]^{\frac{1+\nu}{2}}}, \quad A_0 = 2, \quad \mu = 3. \quad (1.24)$$

- ★ La covariance de von Kármán permet de modéliser toute une gamme de milieux plus rugueux et moins corrélés que l'exponentielle :

$$C_0(h) = \frac{2^{1-p}}{\Gamma(p)} h^p K_p(h) \quad \text{avec } p \in [0; 0.5], \quad \Phi_0(k) = \frac{\Gamma(p + \frac{\nu}{2})}{\Gamma(p) \pi^{\frac{\nu}{2}} (1+k^2)^{\frac{1+\nu}{2}}}, \quad (1.25)$$

où Γ est la fonction gamma et K_p est la fonction de Bessel modifiée du second type et d'ordre p . C'est une généralisation de la covariance exponentielle (pour laquelle $p = 0.5$). Ce type de milieu peut également décrire une géométrie fractale ($p = 0$) [Frankel & Clayton [30]].

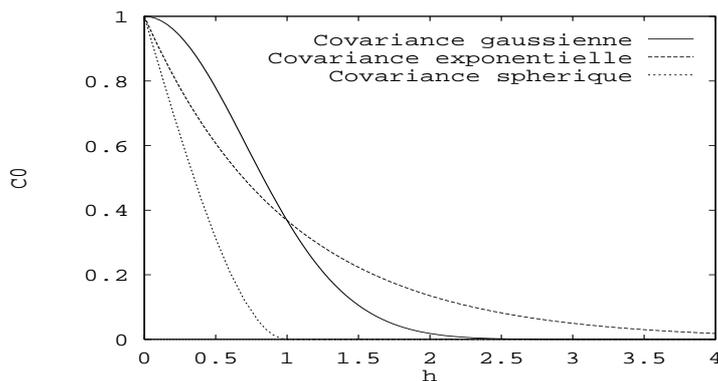


FIG. 1.11 – Trois modèles de covariance standardisée (portée un et variance un).

Introduisons deux autres modèles géostatistiques :

- ★ La covariance sphérique (Fig. 1.11) modélise des milieux très rugueux, où les corrélations sont nulles au delà de la portée (Fig. 1.12 (d)) :

$$C_0(h) = \mathbb{1}_{|h|<1} \left(1 - \frac{3}{2}|h| + \frac{1}{2}|h|^3\right), \quad A_0 = 0.75. \quad (1.26)$$

La portée pratique est usuellement définie dans ce cas par la distance à partir de laquelle la covariance s'annule. Toutefois dans notre travail, on la définit par la même règle que ci-dessus, et on a $\mu = 0.81$.

- ★ Le modèle puissance n'est pas stationnaire, n'a donc pas de covariance, et ainsi, est défini par son variogramme :

$$\gamma_0(h) = |h|^\alpha \text{ avec } \alpha \in]0, 2[, \Phi_0(k) = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1+\nu}{2})}{(2\pi)^{\frac{1+\nu}{2}}} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |k|^{-\alpha + \frac{1+\nu}{2}} . \quad (1.27)$$

Remarque 1.4.2 *Les modèles de covariance de type gaussien $C_\epsilon(h) = \exp(-h^2/l_\epsilon^2)$ sont particulièrement sympathiques. Comme $C'_\epsilon(0) = 0$, ϵ et sa dérivée ne sont pas corrélés : $\epsilon(r) \perp \epsilon'(r) \forall r$. De plus, dans le cas général, si ϵ est stationnaire, alors ϵ' l'est aussi et $C_{\epsilon'}(h) = -C''_\epsilon(h)$ [Matheron [59] p 59]. Ainsi, pour un milieu gaussien, $\sigma_{\epsilon'}^2 = 2\sigma_\epsilon^2/l_\epsilon^2$, et ϵ' est de l'ordre de $\sigma_\epsilon/l_\epsilon$. Ces résultats sont valables en 1D, 2D et 3D.*

1.5 Conclusions

Les méthodes sismiques déterministes ne résolvent pas les petites et faibles hétérogénéités présentes dans les champs de vitesse du sous-sol. Or, à une certaine échelle, ces hétérogénéités ont une influence non négligeable sur le champ d'onde enregistré. Les ignorer peut provoquer des erreurs dans la chaîne du traitement sismique. La caractérisation des petites hétérogénéités est également importante en phase de production pétrolière où on est intéressé par la détermination de la taille des corps.



Actuellement, les méthodes géostatistiques suscitent un bel engouement dans l'industrie pétrolière et notamment en phase de production. Elles sont particulièrement bien adaptées au calcul des incertitudes des différentes variables estimées. Est-il possible à présent d'appliquer une modélisation géostatistique en phase de traitement sismique ? En sismologie, des méthodes stochastiques sont couramment employées pour quantifier l'hétérogénéité des champs de vitesse. Pourquoi ne pas s'en inspirer et tester leur application en sismique d'exploration ? Même si la couverture des sous-sols est bien meilleure en sismique réflexion, les méthodes statistiques peuvent potentiellement apporter de nouvelles informations. Pour le géophysicien, il sera difficile de traiter en terme de probabilités des champs de vitesse et des structures pourtant uniques. Pour le géostatisticien, il conviendra d'intégrer l'équation des ondes dans son analyse structurale des variables. Le chapitre suivant est ainsi dédié à la liaison physique (et symbolique !) entre propriétés statistiques des vitesses et propriétés statistiques des temps.

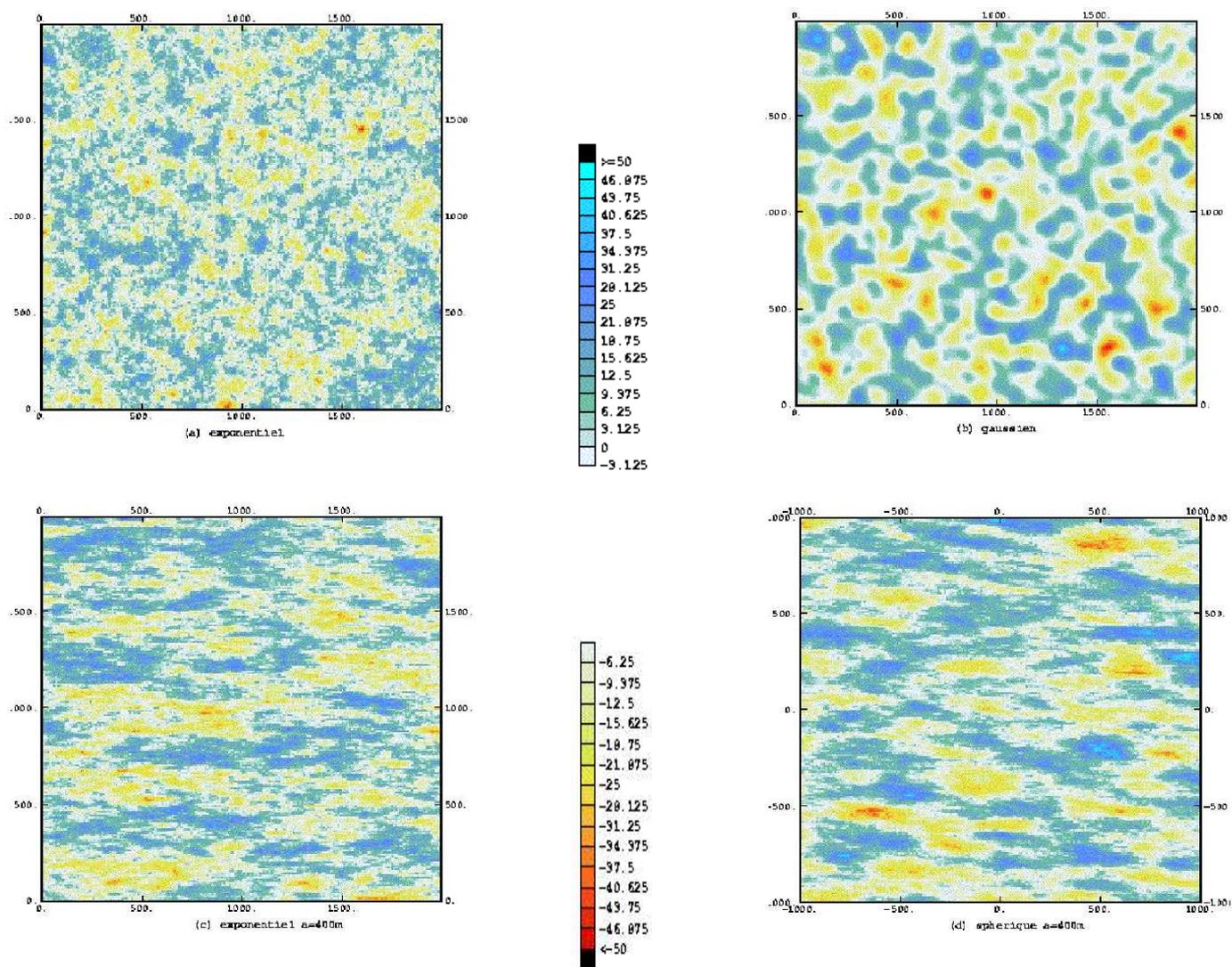


FIG. 1.12 – Réalisations de champs de vitesse aléatoires ($v_0 = 3000m/s, \sigma_v = 106m/s, b = 100m$) simulées par la méthode des bandes tournantes et à covariance : (a) exponentielle isotrope ($a = 100m$), (b) gaussienne isotrope ($a = 100m$), (c) exponentielle anisotrope ($a = 400m$), (d) sphérique anisotrope pentée ($a = 400m, \theta = 5^\circ$).

Chapitre 2

Propagation d'onde en milieu aléatoire

Ce chapitre présente tout d'abord l'équation d'onde acoustique et les approximations qui permettent de définir et de travailler sur les temps d'arrivée d'une onde. Un régime plus général que la théorie des rais et bien adapté à notre problème géophysique est utilisé : l'approximation de Rytov couplée à l'approximation parabolique. Différents cadres de propagation sont considérés : tridimensionnelle (3D) / bidimensionnelle (2D), onde plane / onde sphérique, direction de propagation quelconque.

Dans un deuxième temps, les deux premiers moments statistiques des temps d'arrivée sont liés théoriquement avec ceux du milieu traversé. Pour la moyenne des temps, on se penche sur le phénomène de décalage entre vitesse moyenne et vitesse effective (appelé "*velocity shift*"). Pour la covariance des temps, l'utilisation de la covariance standardisée de la vitesse permet d'obtenir des expressions explicites en milieu anisotrope 3D. Il est également possible de formuler une inversion directe entre covariance des vitesses et covariance des temps. Des expériences numériques testent finalement nos résultats théoriques et nos différentes conditions de validité.

Le milieu est supposé intrinsèquement isotrope : la vitesse des ondes en un point est la même dans toutes les directions. Par la suite, le terme "anisotropie" concernera la distribution statistique des vitesses (cf §1.4.2). Les conditions de base pour étudier statistiquement le champ d'onde stipulent qu'il doit traverser beaucoup d'hétérogénéités et de longueurs d'onde, *i.e.*

$$l_{\parallel} \ll z \text{ et } \lambda \ll z, \quad (2.1)$$

où z est la distance de propagation de l'onde, λ la longueur d'onde et l_{\parallel} la dimension caractéristique des hétérogénéités parallèle à la propagation (cf Fig. 1 p xiii). D'autres conditions de validité seront nécessaires dans nos diverses approximations, et on s'efforcera de les formuler dans le cadre le plus général possible, même si l'hypothèse de milieu gaussien (*i.e.* à covariance gaussienne) nous simplifiera parfois la tâche.

2.1 L'équation d'onde acoustique

L'équation de l'elastodynamique découle du principe fondamental de la dynamique et gouverne les phénomènes associés à la propagation des ondes dans les solides. Dans le domaine de l'élasticité linéaire, les effets mécaniques et thermiques sont découplés en supposant de faibles déplacements des points matériels [Aki & Richards [4] chap 2]. Les deux types d'onde qui se propagent (ondes de compression P et ondes de cisaillement S) sont couplés par la réponse élastique des milieux. Dans un milieu élastique, les ondes se propagent à la vitesse des ondes P et génèrent des ondes S en rencontrant des hétérogénéités. Le choix d'un milieu acoustique implique qu'il n'y ait pas d'ondes S.



Remarque 2.1.1 *En sismique terrestre, la zone altérée convertit les ondes S en ondes P et les géophones n'enregistrent souvent que la composante verticale du champ d'onde. En sismique marine, la couche d'eau n'a pas d'ondes S, et celles-ci proviennent d'ondes converties. Si l'incidence est proche de la verticale, les conversions sont faibles. Ainsi, en sismique réflexion verticale, les ondes S ne sont généralement pas prises en compte.*

Soient $p(t, \mathbf{r})$ la pression au temps t en un point de l'espace \mathbf{r} , $K(\mathbf{r})$ le module d'incompressibilité et $\rho(\mathbf{r})$ la densité, l'équation scalaire de la propagation des ondes acoustiques donnant la pression et ses variations s'écrit en espace libre (hors de la zone source)

$$\frac{\partial^2 p(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = K(\mathbf{r}) \nabla \cdot \left[\frac{\nabla p(t, \mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} \right]. \quad (2.2)$$

C'est une bonne approximation de l'équation élastique pour des hétérogénéités de vitesse basses fréquences (ondes en diffusion-avant, "forward scattering") [Wu & Aki [101]].

Il est classique de se placer en régime périodique en étudiant des ondes monochromatiques. La transformée de Fourier en temps du champ d'onde s'écrit $u(\mathbf{r}) = \int p(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt$, où ω est la pulsation de l'onde. On suppose aussi que les variations de la densité sont négligeables par rapport aux variations de la vitesse $v(\mathbf{r})$: ρ est constante et $K(\mathbf{r}) = \rho v^2(\mathbf{r})$ (cf Rem. 2.1.2). On obtient alors l'équation de Helmholtz

$$\Delta u(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{r})} u(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3)$$

où $u(\mathbf{r})$ est le champ d'onde. En décomposant le carré de la lenteur par

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})], \quad (2.4)$$

où v_0 est une constante et $\epsilon(\mathbf{r})$ une perturbation de lenteur au carré, (2.3) devient

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 [1 + \epsilon(\mathbf{r})] u(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.5)$$

où $k = \|\mathbf{k}\| = \omega/v_0 = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et λ la longueur d'onde.



Remarque 2.1.2 *En sismique réflexion, il est pertinent de supposer la densité constante par couche car les réflexions sont dues aux contrastes d'impédance (= vitesse \times densité). Chaque couche peut être définie par une densité et un champ de vitesse. Ces paramètres, liés aux consistances et aux porosités, sont importants pour la caractérisation pétrolière.*

L'EDP (2.5), de type elliptique, n'est pas analytiquement soluble. Par contre, dans un milieu homogène ($v(\mathbf{r}) = v_0$, $\epsilon(\mathbf{r}) = 0$), la famille des ondes planes en est solution :

$$u_0(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) . \quad (2.6)$$

Une autre famille, les ondes sphériques, ne dépendent que de la variable radiale $r = \|\mathbf{r}\|$:

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \text{ en 3D, } u_0(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \text{ en 2D,} \quad (2.7)$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première sorte et d'ordre zéro. Les ondes sphériques sont asymptotiquement planes loin de l'origine, les ondes planes sont donc utilisées pour décrire des sources acoustiques lointaines.

En espace libre, l'équation (2.5) est équivalente à l'équation intégrale

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' , \quad (2.8)$$

où $G(\mathbf{r})$ est la fonction de Green définie par

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \text{ en 3D, } G(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \text{ en 2D.} \quad (2.9)$$

En 2D, on utilise l'approximation asymptotique de la fonction de Hankel [Arfken [6] §7.4], en supposant que la longueur d'onde est petite devant la distance de propagation :

$$H_0^{(1)}(kr) = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp(ikr) . \quad (2.10)$$

Dans le cadre déterministe, une multitude d'approches permet de résoudre (2.5) ou (2.8) : optique géométrique (fréquence du signal infinie), méthodes de perturbation pour les milieux faiblement hétérogènes (Born, Rytov), méthodes numériques (différences finies, éléments finis, ...), méthodes intégrales (Kirchhoff), ...



Dans le cadre stochastique, $\epsilon(\mathbf{r})$ est un champ spatial aléatoire et les équations (2.5) et (2.8) sont stochastiques. L'objectif est alors de lier théoriquement la densité de probabilité ou les moments de $u(\mathbf{r})$ en fonction de ceux de $\epsilon(\mathbf{r})$. Cette modélisation a été introduite par des astrophysiciens, puis développée dans les années 50 et 60 par l'école des radiophysiciens russes [Rytov [76], Chernov [17], Tatarskii [86], Klyatskin [52]] et par des mathématiciens [Keller [51], Papanicolaou [69]]. Elle permet de s'attacher uniquement au caractère statistique des hétérogénéités, ce qui est utile lorsque le milieu est trop complexe et que les méthodes déterministes échouent.

En géostatistique linéaire, les deux premiers moments statistiques sont suffisants pour caractériser un milieu (cf §1.4.1). On se limite donc aux calculs des deux premiers moments de u , fonctions de ceux de ϵ . Pour ce faire, trois techniques sont classiquement utilisées : une approche markovienne et deux méthodes de perturbations. L'approche markovienne est présentée pour mémoire en Annexe A, et les deux autres dans les sections suivantes.

2.1.1 Méthode de faibles perturbations de Born

Si on suppose que le milieu est faiblement hétérogène, *i.e.*

$$\sigma_\epsilon \ll 1, \quad (2.11)$$

$u(\mathbf{r})$ peut être développé en série asymptotique en puissances de ϵ : $u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}) + \dots$, où u_1 est d'ordre ϵ , u_2 d'ordre ϵ^2 , ... En remplaçant cette série dans (2.8), on obtient une suite infinie de termes. La première approximation de Born consiste à tronquer les termes d'ordre supérieur ou égal à deux :

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + u_1(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.12)$$

La moyenne de $u(\mathbf{r})$ est égale au champ homogène $u_0(\mathbf{r})$ (car $\mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})] = 0$). Par ailleurs, pour obtenir la covariance de $u(\mathbf{r})$, la fonction de Green doit être simplifiée à l'aide de l'approximation champ lointain (cf §1.2.2) [Chernov [17] p 45, Aki & Richards [4] p 738].

En passant de (2.8) à (2.12), u a été remplacé par le champ homogène u_0 dans l'intégrale. L'approximation de Born suppose donc que le champ d'onde a été diffracté une seule fois [Rytov et al. [75] §4.1]. Cette approximation prend en compte les composantes hautes fréquences du champ de vitesse et est limitée à des perturbations de taille inférieure à la longueur d'onde [Beydoun & Tarantola [12], Baina & Podvin [10]]. Elle peut ainsi modéliser les phénomènes d'atténuation et de codas [Aki & Chouet [3], Sato [81], Jannaud et al. [48], [47]]. En revanche, le calcul des temps de trajet dépend des hétérogénéités de taille supérieure à la longueur d'onde [Wu & Aki [101], Jannane et al. [44]].

Remarque 2.1.3 *L'approximation champ lointain $\sqrt{\lambda z} \gg l_\epsilon$ (λ longueur d'onde, z distance de propagation, l_ϵ taille caractéristique des hétérogénéités) peut être utilisée dès lors que l'approximation de Born est valide. En effet, Born suppose $\lambda > l_\epsilon$. Comme $\lambda \ll z$ (eq. (2.1)), on obtient $\sqrt{\lambda z} \gg l_\epsilon$.*

Les fluctuations du champ de vitesse doivent être également suffisamment faibles pour qu'il n'y ait pas de diffraction multiple. Cette approximation n'est donc pas adaptée à la propagation en milieu trop hétérogène car la diffraction multiple peut y apparaître rapidement. La limite de validité de l'approximation de Born dépend linéairement de la distance de propagation et de la variance des perturbations. Pour un milieu aléatoire isotrope, Rytov et al. [76] (p 43) en dérivent une expression :

$$\pi^2 k^2 z \int_0^{2k} \Phi_\epsilon(\kappa) d\kappa \ll 1, \quad (2.13)$$

où Φ_ϵ est la densité spectrale de ϵ et z la distance de propagation.

2.1.2 Approche perturbative de Rytov

Une autre méthode considère l'amplitude complexe de l'onde $\Psi(\mathbf{r})$ définie par

$$u(\mathbf{r}) = \exp[\Psi(\mathbf{r})] \quad \text{où} \quad \Psi(\mathbf{r}) = \log[A(\mathbf{r})] + iS(\mathbf{r}), \quad (2.14)$$

avec $S(\mathbf{r})$ la phase, $A(\mathbf{r})$ l'amplitude. Soit l'amplitude complexe perturbée $\Psi'(\mathbf{r})$ telle que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= u_0(\mathbf{r}) \exp[\Psi'(\mathbf{r})] \text{ avec} \\ \Psi'(\mathbf{r}) &= \chi(\mathbf{r}) + iS'(\mathbf{r}) = \log \left[\frac{A(\mathbf{r})}{A_0(\mathbf{r})} \right] + i[S(\mathbf{r}) - S_0(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (2.15)$$

où $A_0(\mathbf{r})$ et $S_0(\mathbf{r})$ sont la phase et l'amplitude en milieu homogène, $\chi(\mathbf{r})$ est le niveau d'amplitude et $S'(\mathbf{r})$ la déviation de phase. Par (2.15), l'équation d'onde (2.5) devient

$$\Delta[u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r})] + k^2 u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) = -u_0(\mathbf{r})\{[\nabla\Psi'(\mathbf{r})]^2 + k^2\epsilon(\mathbf{r})\}, \quad (2.16)$$

qui est une équation équivalente à l'équation intégrale

$$u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) = - \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\{[\nabla\Psi'(\mathbf{r}')]^2 + k^2\epsilon(\mathbf{r}')\}u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2.17)$$

où $G(\mathbf{r})$ est définie par (2.9) en 3D et (2.10) en 2D. En négligeant $(\nabla\Psi')^2$ dans cette équation, on obtient la solution de la première approximation de Rytov :

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{u_0(\mathbf{r})} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\epsilon(\mathbf{r}')u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.18)$$

Cette approximation néglige les termes d'ordre supérieur à deux dans la série asymptotique (en puissances de ϵ) de $\Psi(\mathbf{r})$. Elle est bien adaptée à l'étude des fluctuations de phase et d'amplitude de l'onde directe [Chernov [17] p 41].

Outre des perturbations de vitesse faibles ($\sigma_\epsilon \ll 1$), l'approximation de Rytov requiert

$$E[(\lambda\nabla\Psi')^2] \ll \sigma_\epsilon, \quad (2.19)$$

pour négliger $(\nabla\Psi')^2$ devant $k^2\epsilon$ dans (2.17). Cette condition impose à Ψ' de varier faiblement sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde. C'est pourquoi cette méthode perturbative appliquée à la phase complexe de l'onde est appelée méthode des perturbations lisses ("*smooth perturbations*") [Rytov et al. [76] §2.3]. En supposant que le champ d'onde n'est pas trop déformé par les hétérogénéités, elle prend en compte les diffractions modérées, négligeant notamment la rétro-diffraction ("*backscattering*"). Pour un milieu aléatoire isotrope, Shapiro et al. [84] donnent une condition explicite quant à sa validité :

$$k^2\sigma_\epsilon^2 z l_\epsilon < 1. \quad (2.20)$$

Quand cette approximation n'est plus valide, l'onde subit une atténuation exponentielle et la forte quantité de bruit rend le signal incohérent [Bailly et al. [8], Fouque et al. [29]]. Il est alors impossible de définir la notion de temps d'arrivée [Shapiro & Kneib [83], Samuelides [78]]. Il est donc indispensable de faire l'approximation de Rytov pour travailler avec les temps. Dans le cas général, les temps d'arrivée d'une onde monochromatique varient en fonction de la fréquence. Cependant, quand le champ d'onde est peu déformé, le temps d'arrivée $T(\mathbf{r})$ de l'énergie d'une impulsion peut être approximé par celui de la phase de l'onde monochromatique à la fréquence dominante [Samuelides [78]] :

$$T(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r})}{kv_0} . \quad (2.21)$$

Les approximations de Born et Rytov peuvent être comparées. Théoriquement, l'expansion asymptotique au premier ordre de Rytov est meilleure que celle de Born car elle en contient les termes [Ishimaru [43] §17.2, Wu & Flatté [102]]. Rytov suppose néanmoins des fluctuations de champ lisses et ne peut prendre en compte la rétro-diffraction. Ceci a été confirmé expérimentalement : Rytov est adaptée à des hétérogénéités de vitesse basses fréquences (diffusion-avant), alors que Born est adaptée à des hétérogénéités de vitesse hautes fréquences (ondes réfléchies) [Beydoun & Tarantola [12], Baina & Podvin [10]].

L'équation (2.18) exprime la solution de l'équation des ondes issue de l'approximation de Rytov. Pour calculer les moments statistiques de Ψ , des simplifications de l'intégrale sont encore nécessaires pour négliger explicitement la rétro-diffraction. L'approximation de l'équation parabolique présentée dans la section suivante permet d'atteindre ce but.

2.2 L'approximation parabolique

Soit la base $(e_{\boldsymbol{\rho}}, e_z)$ où e_z est l'axe de propagation principal. On travaille aussi bien en 3D qu'en 2D (où $\boldsymbol{\rho} = \rho$). La covariance C_ϵ^e et la densité spectrale Φ_ϵ^e sont définies dans cette base par (1.19) (p 28) et (1.22) (p 28). Négliger la rétro-diffraction revient dans un premier temps à limiter le domaine d'intégration dans (2.8).

$$u(\mathbf{r}) = u(\boldsymbol{\rho}, z) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int_0^z \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\boldsymbol{\rho}' dz' . \quad (2.22)$$

où la source est à l'origine. Cette approximation peut être justifiée si la longueur d'onde est petite devant les dimensions transverse l_\perp et longitudinale l_\parallel des hétérogénéités, *i.e.*

$$\lambda \ll l_\perp \text{ et } \lambda \ll l_\parallel . \quad (2.23)$$

Sous ces condition en effet, l'angle caractéristique de la diffraction est faible et de l'ordre de λ/l_\perp (cf Rem 1.2.1 p 18).

La rétro-diffraction est donc négligeable car le champ d'onde est diffracté à l'intérieur d'un petit cône autour de sa direction de propagation [Rytov et al. [76] §2.1, Claerbout [20] p 75]. Une condition plus rigoureuse pour cette approximation peut être déterminée en tenant compte des sections effectives de diffraction [Rytov et al. [76] p 43, [75] §4.3].

$$\text{Cas isotrope : } \pi^2 k^2 z \int_{k\sqrt{z}}^{2k} \Phi_\epsilon(\kappa) d\kappa \ll 1 , \text{ cas gaussien : } \sigma_\epsilon^2 k^2 z l_\epsilon \ll \exp[(kl_\epsilon)^2/2] . \quad (2.24)$$

Cette condition est incluse dans la condition de Rytov (2.20) car $\exp[\frac{(kl_\epsilon)^2}{2}]$ est toujours supérieur à un. Dans nos études numériques, on considèrera la condition de Rytov, et il sera inutile de vérifier la condition (2.24).

L'équation (2.22) peut être simplifiée avec une utilisation plus poussée des conditions (2.23). Comme l'angle caractéristique de diffraction vaut $\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\|/|z - z'| \sim \lambda/l_{\perp} \ll 1$, $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ peut s'approximer dans la fonction de Green (2.9) par

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = (z - z') + \frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{2(z - z')} . \quad (2.25)$$

Une condition supplémentaire est nécessaire car l'exponentielle de la fonction de Green contient la phase $k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. Le premier terme négligé dans (2.25) s'écrit $\frac{-(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^4}{8(z - z')^3}$. Pour le négliger, $\|k(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^4/8(z - z')^3\|$ doit être petit devant un. En utilisant $\frac{\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\|}{|z - z'|} \sim \frac{\lambda}{l_{\perp}}$, ceci mène à $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}^2/\lambda$. Ainsi, en 3D, la fonction de Green devient

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi(z - z')} \exp[ik(z - z') + \frac{ik(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{2(z - z')}] . \quad (2.26)$$

Si l'onde est plane, $u_0(\mathbf{r})$ est donné par (2.6). Si l'onde est sphérique, (2.7) se simplifie en utilisant (2.25). L'équation intégrale (2.22) devient alors

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - \frac{k^2}{4\pi} \int_0^z \frac{\exp[ik(z - z')]}{z - z'} \int \exp\left[\frac{ik(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{2(z - z')}\right] \epsilon(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}') d\boldsymbol{\rho}' dz' . \quad (2.27)$$

En différentiant cette équation par z et en posant $u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \exp(ikz)$, il en découle la forme classique de l'équation d'onde parabolique [Rytov et al. [76] chap 2] :

$$2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_{\perp} U(\mathbf{r}) + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) = 0 , \quad (2.28)$$

En 2D, (2.27) a une forme différente, mais (2.28) est identique.

Récapitulons les différentes conditions nécessaires à l'approximation parabolique :

$$\lambda \ll l_{\perp} , \lambda \ll l_{\parallel} , \sqrt{\lambda z} \ll \frac{l_{\perp}^2}{\lambda} , \pi^2 k^2 z \int_{k\sqrt{2}}^{2k} \Phi_{\epsilon}(\kappa) d\kappa \ll 1 . \quad (2.29)$$

L'équation parabolique élimine les ondes rétrogrades. Pour dériver à partir de (2.28) ou (2.27) les moments du champ d'onde, il faut découpler les moments de $\epsilon(\mathbf{r})u(\mathbf{r})$ en moments de $\epsilon(\mathbf{r})$ et de $u(\mathbf{r})$. L'approximation markovienne (annexe A) permet de le faire explicitement et l'approximation de Rytov transforme (2.28) en une équation prenant en compte ϵ de manière additive (et non comme un coefficient). Cependant, pour travailler avec les temps d'arrivée, il a été montré au §2.1.2 que l'approximation de Rytov est indispensable.

Dans la section suivante, la solution parabolique et le développement perturbatif de Rytov sont couplés. L'approximation markovienne est tout de même présentée en Annexe A, car elle permettrait de généraliser notre travail à des régimes de fluctuations plus fortes, en ne considérant non plus les temps mais les champs d'onde.

2.2.1 L'approximation Rytov parabolique

L'équation parabolique revient à considérer de faibles angles de diffraction : les diffractions ont lieu autour de sa trajectoire de référence. L'approximation de Rytov (cf §2.1.2) suppose que le champ d'onde n'est pas très différent de celui propagé en milieu non perturbé : il est faiblement atténué. Ces deux approximations sont donc complémentaires (l'une considérant la trajectoire et l'autre considérant le champ), celle de Rytov étant quand même plus contraignante sur la force des fluctuations σ_ϵ^2 .

Si l'approximation parabolique est respectée, les diffractions ont une direction proche de la direction de propagation et le nombre d'hétérogénéités traversées peut être approximé par z/l_\parallel . L'approximation de Bourret (seconde condition de (A.7) p 110) signifie que le champ est peu atténué sur une hétérogénéité. Si cette condition est multipliée par le nombre d'hétérogénéités traversées, on peut supposer posséder une condition pour l'approximation de Rytov (sous l'approximation parabolique) en milieu anisotrope s'écrivant $k^2\sigma_\epsilon^2 z l_\parallel \ll 1$. Dans nos autres conditions, on fait intervenir la longueur d'onde λ et non k . On utilisera donc plutôt la condition

$$\sigma_\epsilon^2 z l_\parallel \ll \lambda^2 . \quad (2.30)$$

Cette relation est en accord avec la condition (2.20) et une remarque de Shapiro & Kneib [83]. Sur différents tests numériques, ils remarquent que la transition entre les régions de fluctuations faibles et fortes (limite de Rytov) a lieu plus tôt quand l_\parallel augmente. Bien sûr, il faudra voir ce que signifie " \ll " numériquement.

Combinons à présent les deux approches parabolique et Rytov et appelons la "*l'approximation Rytov parabolique*". Soit un milieu 3D de base (e_ρ, e_z) , où e_z est l'axe principal de propagation. L'amplitude complexe de l'onde en milieu homogène s'écrit $\Psi_0(\mathbf{r}) = \log[A_0(\mathbf{r})] + ikz$, et l'amplitude complexe perturbée

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) - \Psi_0(\mathbf{r}) = \log[u(\mathbf{r})/u_0(\mathbf{r})] = \log[U(\mathbf{r})/A_0(\mathbf{r})] . \quad (2.31)$$

L'équation d'onde acoustique (2.16) est non linéaire en Ψ' . Ψ' est donc développée en série asymptotique en puissances de ϵ : $\Psi' = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots$, où Ψ_1 est d'ordre ϵ , Ψ_2 d'ordre ϵ^2 , ... Ses deux premiers termes sont ainsi solutions de deux équations explicitement solubles :

$$\begin{cases} 2ik \frac{\partial \Psi_1(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_\perp \Psi_1(\mathbf{r}) + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) = 0 , \\ 2ik \frac{\partial \Psi_2(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_\perp \Psi_2(\mathbf{r}) + [\nabla_\perp \Psi_1(\mathbf{r})]^2 = 0 . \end{cases} \quad (2.32)$$

Calculons Ψ_1 à partir de la solution sous Rytov (2.18). Sous l'approximation parabolique, la fonction de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est donnée par (2.26). Pour une onde sphérique, le même type de développement limité (2.25) donne pour $u_0(\mathbf{r}')/u_0(\mathbf{r})$:

$$\frac{u_0(\mathbf{r}')}{u_0(\mathbf{r})} = \frac{r e^{ikr'}}{r' e^{ikr}} = \frac{1}{\eta} \exp[ik(z' - z) + \frac{ik}{2} \left(\frac{\rho'^2}{z'^2} - \frac{\rho^2}{z^2} \right)] , \text{ où } \eta = \frac{z'}{z} . \quad (2.33)$$

Si l'onde est plane, $u_0(\mathbf{r}) = e^{ikr}$ et le résultat est le même avec $\eta = 1$. On obtient finalement

$$\begin{cases} \Psi_1(\boldsymbol{\rho}, z) = \int_0^z \int h(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z - z') \epsilon(\boldsymbol{\rho}', z') d\boldsymbol{\rho}' dz' , \text{ où} \\ h(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z - z') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(z - z')\eta} \exp \left[\frac{ik}{2} \frac{(\eta\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{(z - z')\eta} \right] . \end{cases} \quad (2.34)$$

Ψ_2 s'exprime de la même manière, avec le terme $[\nabla_{\perp} \Psi_1(\mathbf{r})/k]^2$ à la place de $\epsilon(\mathbf{r})$.

La déviation de phase S' et le niveau d'amplitude χ sont respectivement les parties imaginaire et réelle de Ψ' . On obtient une expression explicite au premier ordre du temps d'arrivée défini par $T(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r})/kv_0$ (eq. (2.21)) :

$$T(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{z}{v_0} - \frac{k}{4\pi v_0} \int_0^z \int \frac{1}{(z-z')\eta} \cos \left[\frac{k(\eta\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{2(z-z')\eta} \right] \epsilon(\boldsymbol{\rho}', z') d\boldsymbol{\rho}' dz' . \quad (2.35)$$

Le domaine spectral permettra de simplifier considérablement les opérations mathématiques lors de la corrélation des temps d'arrivée. On travaille donc avec les transformées de Fourier latérales (par rapport à $\eta\boldsymbol{\rho}$) $\Psi_1(\boldsymbol{\kappa}, z)$, $\epsilon(\boldsymbol{\kappa}, z)$, $H(\boldsymbol{\kappa}, z)$ de $\Psi_1(\boldsymbol{\rho}, z)$, $\epsilon(\boldsymbol{\rho}, z)$, $h(\boldsymbol{\rho}, z)$ (cf Annexe B). $\boldsymbol{\kappa}$ est la coordonnée latérale dans le domaine spectral ($\|\boldsymbol{\kappa}\| = \kappa$). Dans ce domaine, (2.34) devient [Ishimaru [43] §18.1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(\boldsymbol{\kappa}, z) = \int_0^z H(\boldsymbol{\kappa}, z-z')\epsilon(\boldsymbol{\kappa}, z') dz' , \text{ où} \\ H(\boldsymbol{\kappa}, z-z') = \frac{ik}{2} \exp\left[-\frac{i\kappa^2}{2k}(z-z')\eta\right] , \\ S'(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{k}{2} \int_0^z \cos\left[\frac{\kappa^2}{2k}(z-z')\eta\right]\epsilon(\boldsymbol{\kappa}, z') dz' , \\ \chi(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{k}{2} \int_0^z \sin\left[\frac{\kappa^2}{2k}(z-z')\eta\right]\epsilon(\boldsymbol{\kappa}, z') dz' . \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Le terme exponentiel de H dans (2.36) est un filtre qui permet de prendre en compte la dépendance fréquentielle du champ d'onde. Ce filtre affecte la phase, donc les temps d'arrivée, par ce que l'on appelle le phénomène du "*wavefront healing*" : le front d'onde est lissé dans la zone de Fresnel car les diffractions se superposent et interfèrent (cf §1.2.2).

Remarque 2.2.1 *En 2D, l'expression de $h(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}', z-z')$ est différente, mais l'expression de H dans le domaine spectral est la même que celle de (2.36) au signe négatif près (cf Annexe G, eq. (G.38), (G.40) p 136).*

2.2.2 Régime asymptotique de l'optique géométrique

Voyons à présent un régime asymptotique de l'approximation parabolique qui néglige complètement les phénomènes de diffraction : l'optique géométrique. Cette théorie puise son origine dans le domaine de l'optique, là où les longueurs d'onde sont minuscules par rapport aux objets rencontrés. Une des ses formulations, la théorie des rais, est courante en sismique car particulièrement bien adaptée au problème inverse et à l'imagerie sismique.

Les équations de l'optique géométrique (l'eikonale et les équations de transport) sont dérivées en supposant que la vitesse du milieu varie faiblement sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde, et donc que celui-ci est relativement lisse. Les dimensions des hétérogénéités sont donc grandes devant la longueur d'onde, *i.e.*

$$\lambda \ll l_{\epsilon} . \quad (2.37)$$

Sous cette condition, l'onde est localement plane et on peut poser $u(\mathbf{r}) = \exp[\Psi(\mathbf{r})]$ (eq. (2.14)). On suppose de plus que les variations d'amplitude et du gradient de la phase sont faibles sur une longueur d'onde. Une deuxième condition d'applicabilité est alors nécessaire [Kravstov & Orlov [54] §2.10] : la taille transverse de la zone de Fresnel $\sqrt{\lambda z}$ est petite devant la dimension transverse des hétérogénéités l_{\perp} , *i.e.*

$$\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp} . \quad (2.38)$$

On utilise alors la méthode de Debye qui développe l'amplitude de l'onde en série à termes inversement proportionnels au nombre d'onde [Kravstov & Orlov [54] p 7]. En remplaçant cette série dans (2.5), on regroupe les termes de même puissance k . La première équation obtenue, l'eikonale, fait intervenir uniquement le temps d'arrivée de l'onde :

$$[\nabla T(\mathbf{r})]^2 = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})] . \quad (2.39)$$

Remarque 2.2.2 *Il faut noter que la théorie des rais n'est plus valide lors de phénomènes singuliers tels que les caustiques et les zones d'ombre. La condition interdisant leur apparition dépend de l'ampleur des fluctuations de vitesse et limite quelque peu le domaine de validité de la théorie [Samuelides & Mukerji [80], Iooss et al. [40]] :*

$$z \ll Cte \left(\frac{l_{\perp}^4}{l_{\parallel}} \right)^{\frac{1}{3}} \sigma_{\epsilon}^{-\frac{2}{3}} . \quad (2.40)$$

Pour résoudre l'équation non linéaire (2.39), une méthode de perturbation peut être utilisée. T est développé en série asymptotique en puissances de ϵ : $T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots$, où T_1 est d'ordre ϵ , T_2 d'ordre ϵ^2 , ... Ceci donne pour les trois premiers termes :

$$[\nabla T_0(\mathbf{r})]^2 = \frac{1}{v_0^2}, \quad \nabla T_0(\mathbf{r}) \nabla T_1(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2v_0^2}, \quad \nabla T_0(\mathbf{r}) \nabla T_2(\mathbf{r}) + [\nabla T_1(\mathbf{r})]^2 = \frac{\epsilon^2(\mathbf{r})}{4v_0^2}. \quad (2.41)$$

A l'approximation du premier ordre, on obtient donc

$$T(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + T_1(\mathbf{r}) = \frac{r}{v_0} + \frac{1}{2v_0} \int_{\mathbf{r}} \epsilon(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' . \quad (2.42)$$

T_0 représente le terme déterministe obtenu en milieu homogène, et T_1 correspond aux perturbations de vitesse intégrées sur le rayon non perturbé \mathbf{r} . Quand cette approximation n'est plus valide, il faut prendre en compte le terme correctif d'ordre deux des temps :

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4v_0} \int_0^z \left[\int_0^{z'} \frac{z''}{z'} \nabla_{\perp} \epsilon(\boldsymbol{\rho}, z'') dz'' \right]^2 dz' , \quad (2.43)$$

pour une onde sphérique [Boyse et Keller [14]]. Pour une onde plane, $z''/z' = 1$.

Dans l'approximation au premier ordre, $(\nabla T_1)^2$ est négligé par rapport à $2\nabla T_0 \nabla T_1$. Cela suppose que $|\nabla T_1| \ll |\nabla T_0| = 1/v_0$. Pour préciser cette condition, Matheron [62] propose d'utiliser la perturbation moyenne sur le rayon non perturbé, $\bar{\epsilon} = \frac{1}{r} \int_{\mathbf{r}} \epsilon(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$, pour obtenir $2v_0 \nabla T_1 = \bar{\epsilon} \nabla r + r \nabla \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} + r \nabla \bar{\epsilon}$. Il faut donc que la perturbation moyenne $\bar{\epsilon}$

soit petite, ce qui est vérifié quand on suppose de faibles perturbations de vitesse ($\sigma_\epsilon \ll 1$, condition (2.11)). De plus, il faut que $|r\nabla\epsilon| \ll 1$, *i.e.* que le rayon perturbé dévie seulement faiblement de sa position non perturbé. On remplace cette condition par la condition plus rigoureuse $|r\nabla\epsilon| \ll 1$. En étudiant la propagation d'une onde de distance de propagation z et de direction e_z , la condition devient $|z\nabla_\perp\epsilon| \ll 1$ car on s'intéresse aux déviations latérales du rayon. Si on considère un milieu à covariance gaussienne, $\nabla_\perp\epsilon$ est de l'ordre de σ_ϵ/l_\perp (cf Rem. 1.4.2 p 30). Ainsi, on obtient une condition explicite quant à la validité de l'approximation au premier ordre (dans le cas gaussien) :

$$z \ll \frac{l_\perp}{\sigma_\epsilon}. \quad (2.44)$$

Cette condition est nettement plus restrictive que (2.40) car $\sigma_\epsilon \ll 1$. Par exemple, pour $\sigma_\epsilon = 0.1$ (perturbations de 10%), (2.40) mène à $z \ll 2l_\perp/\sigma_\epsilon$.

2.3 Moments d'ordre un et "velocity shift"

L'équation de Helmholtz (2.5) a été résolue grâce à l'approximation parabolique, mais aussi par l'approche perturbative de Rytov. La solution est sous la forme d'une série asymptotique en $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots$. Sous les conditions (2.30) de la première approximation de Rytov, on approxime Ψ par $\Psi_0 + \Psi_1$, Ψ_0 étant déterministe et Ψ_1 dépendant de l'aléa ϵ . A partir de cette solution, il est possible de calculer les moments de Ψ en fonction de ceux de ϵ .

Hélas, pour le moment d'ordre un, (2.34) nous donne $\mathbf{E}[\Psi_1(\mathbf{r})] = 0$ et la première approximation de Rytov échoue car l'espérance des termes suivants n'est pas nulle. Il faut donc évaluer l'espérance de Ψ_2 pour obtenir une approximation de celle de Ψ . Dans l'approximation de Born, le calcul de l'espérance du terme d'ordre deux est classique car assez facile à expliciter [Keller [51]]. Par contre dans l'approximation de Rytov, ce calcul est très récent à notre connaissance [Shapiro et al. [84], Samuelides [78]].

Sur les temps d'arrivée sismiques, cet effet du deuxième ordre a été découvert dans les années 80, expérimentalement [Wielandt [97], Müller et al. [66]] et théoriquement par des russes [Petersen [70]]. Par la suite, les géophysiciens l'ont principalement caractérisé en terme de déviation de la vitesse effective par rapport à la vitesse moyenne statistique (phénomène du "velocity shift"). Ainsi, la vitesse effective v_{eff} d'un milieu est définie par

$$v_{eff} = \mathbf{E} \left[\frac{z}{T(z)} \right], \quad (2.45)$$

où les $T(z)$ sont les temps d'arrivée d'une onde de distance de propagation z . L'approximation du deuxième ordre donne $T = T_0 + T_1 + T_2$ où T_1 est d'ordre ϵ et T_2 d'ordre ϵ^2 , donc $|T_1 + T_2| \ll T_0$. Le velocity shift $v_{eff} - v_0$ peut donc être calculé par

$$\begin{aligned} v_{eff} &= \mathbf{E} \left(\frac{z}{T_0 + T_1 + T_2} \right) = \frac{z}{T_0} \mathbf{E} \left(1 - \frac{T_1 + T_2}{T_0} \right) = v_0 - \frac{v_0^2}{z} \mathbf{E}(T_2), \text{ donc} \\ v_{eff} - v_0 &= -\frac{v_0^2}{z} \mathbf{E}(T_2) = v_0 \left[1 - \frac{v_0}{z} \mathbf{E}(T) \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$



Dans l'optique géométrique, les temps d'arrivée sont rigoureusement définis et l'expression de T_2 (2.43) est relativement maniable. Les contributions à l'étude théorique du velocity shift se sont donc faites principalement dans l'optique géométrique pour une onde plane en milieu isotrope [Roth et al. [74], Mukerji et al. [65], Boyse & Keller [14]] et en milieu anisotrope gaussien [Samuelides & Mukerji [80], [79]]. Pour une onde sphérique, Boyse et Keller [14] montrent que $\mathbf{E}(T_2)$ vaut un tiers de $\mathbf{E}(T_2)$ d'une onde plane.

En Annexe C, on obtient son expression pour une onde plane en milieu anisotrope :

$$\mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] = \frac{\sigma_\epsilon^2}{8v_0} z^2 l_{\parallel} \left(\frac{1}{l_{\perp x}^2} + \frac{1}{l_{\perp y}^2} \right) \int_0^\infty \frac{C'_0(z')}{z'} dz', \quad (2.47)$$

où C_0 est définie en (1.19) (p 28) et où $l_{\perp x} = l_{\perp}$ et $l_{\perp y} = \infty$ en 2D. Dans les modèles de covariance classique (sans effet de trou), l'intégrale sur C'_0 est négative car $C_0(h)$ est décroissante. $\mathbf{E}(T_2)$ est donc négative. Ainsi, $v_{eff} > v_0$, la vitesse du milieu effectif est supérieure à la vitesse moyenne du milieu réel. L'analyse des temps de trajet par une approximation au premier ordre fait donc apparaître le milieu plus rapide qu'il ne l'est intrinsèquement. La vitesse moyenne que l'on en déduit est biaisée. D'autre part, tant que l'optique géométrique est valide, le velocity shift augmente linéairement avec la profondeur z et dépend de $l_{\parallel}/l_{\perp}^2$: il augmente avec la taille longitudinale des hétérogénéités et diminue avec leurs tailles transverses.

Dans l'approximation Rytov parabolique, le calcul a été effectué pour la phase d'une onde plane 2D par Shapiro et al. [84] en milieu isotrope. En milieu anisotrope, Samuelides [78] obtient pour une onde sphérique 2D :

$$\mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] = -\frac{1}{8v_0} \int_0^z dz_1 \iint_0^{z_1} dz_2 dz_3 \int d\kappa \cos\left[\frac{\kappa^2}{2k}(2z - z_1 - z_2)\eta\right] \kappa^2 F_\epsilon^e(\kappa, z_2 - z_3), \quad (2.48)$$

où F_ϵ^e est la densité spectrale horizontale (cf Annexe B) dans la base de la propagation. Dans le cas particulier d'un milieu gaussien, Samuelides [78] précise les expressions du velocity shift en 2D et 3D. Il montre qu'après l'augmentation linéaire en fonction de z dans l'optique géométrique, le shift sature dans l'approximation parabolique, puis décroît très lentement vers zéro dans l'approximation de Fraunhofer. Ces relations et le comportement du velocity shift seront étudiés plus en détail lors des tests numériques (cf §2.5.3).

2.4 Moments d'ordre deux des temps d'arrivée

Cette section présente les résultats concernant les moments d'ordre deux des temps d'arrivée dans les approximations Rytov parabolique, optique géométrique et Fraunhofer. Les calculs des covariances transverses (*i.e.* à égale distance de propagation) de l'amplitude complexe sous l'approximation Rytov parabolique sont classiques et bien exposés dans la bibliographie. Pour une onde plane, Rytov et al. [76] (chap 2) les développent dans un milieu 3D transverse isotrope et Shapiro & Kneib [83] dans un milieu 2D isotrope.

Wu & Flatté [102] les effectuent dans un milieu 3D anisotrope pour deux ondes planes d'incidences différentes mais proches de la verticale. Pour une onde sphérique, Ishimaru [43] (§18.1) les dérive dans un milieu 3D isotrope, et Chevret [18] (annexe B) les conclut en milieu 2D isotrope. En milieu 2D et 3D isotrope, Kneib [53] calcule en plus les corrélations générales (en deux points quelconques) d'une onde plane.

Notre problème est relatif aux corrélations transverses des temps d'une onde sphérique en milieu anisotrope 2D ou 3D (Fig. 2.1 (b)). Elles sont calculées en milieu 2D anisotrope dans Iooss [39] (Annexe G, appendix). Au paragraphe suivant, on généralise les dérivations de Rytov et al. [76] (chap 2) et d'Ishimaru [43] (§18.1) à un milieu 3D anisotrope. Les démonstrations sont similaires en 2D et 3D car les expressions de la phase dans le domaine spectral sont les mêmes (cf Rem. 2.2.1 p 41).

Nos résultats sont valides pour n'importe quelle direction de propagation car la covariance C_ϵ^e et la densité spectrale Φ_ϵ^e de vitesse sont définies dans la base de la direction principale de propagation. Cette extension s'inspire de Samuelides [78] et Samuelides & Mukerji [80] qui ont traité la variance des temps dans un milieu gaussien. Pour une onde sphérique se propageant en milieu anisotrope, il est capital de supposer que l'angle entre les deux rayons \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 est faible (Fig. 2.1 (b)). Cette hypothèse permettra de corrélérer les perturbations de vitesse le long du même axe central, et donc de considérer la même covariance C_ϵ^e pour les fluctuations de vitesse. Cela revient à supposer que la séparation transverse $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|$ entre les récepteurs est faible devant la distance de propagation z , *i.e.*

$$\rho \ll z. \quad (2.49)$$

Ce problème ne se pose pas si l'onde est plane (les rayons ont tous la même direction) ou si le milieu est isotrope (la covariance est la même dans toutes les directions : $C_\epsilon^e = C_\epsilon$).

2.4.1 Approximation Rytov parabolique

Etudions dans un milieu anisotrope 3D les corrélations transverses des phases. Dans le domaine spectral, la phase $S(\boldsymbol{\kappa}, z) = S_0(\boldsymbol{\kappa}, z) + S'(\boldsymbol{\kappa}, z)$ est définie par (2.36),

$$S(\boldsymbol{\kappa}, z) = kz + \frac{k}{2} \int_0^z H_S(\boldsymbol{\kappa}, z - z') \epsilon(\boldsymbol{\kappa}, z') dz', \text{ où } H_S(\boldsymbol{\kappa}, z - z') = \cos\left[\frac{\kappa^2}{2k}(z - z')\eta\right]. \quad (2.50)$$

Pour une onde sphérique, $\eta = z'/z$; pour une onde plane, $\eta = 1$.

A l'aide de (2.50) et (B.5) (p 111), la corrélation entre deux phases vaut

$$\begin{aligned} Cov[S(\boldsymbol{\kappa}_1, z), S(\boldsymbol{\kappa}_2, z)] &= \iint_0^z H_S(\boldsymbol{\kappa}_1, z - z'_1) H_S(\boldsymbol{\kappa}_2, z - z'_2) \mathbf{E}[\epsilon(\boldsymbol{\kappa}_1, z'_1) \epsilon(\boldsymbol{\kappa}_2, z'_2)] dz'_1 dz'_2 \\ &= \int_0^z \int_0^z \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_2) H_S(\boldsymbol{\kappa}_1, z - z'_1) H_S(\boldsymbol{\kappa}_1, z - z'_2) F_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}_1, z'_1 - z'_2) dz'_1 dz'_2, \end{aligned} \quad (2.51)$$

Soient les changements de variables $\zeta = z'_1 - z'_2$ et $z' = (z'_1 + z'_2)/2$. On a donc $z'_1 = z' + \frac{\zeta}{2}$ et $z'_2 = z' - \frac{\zeta}{2}$. Montrons que dans le cosinus de H_S , $(z - z'_i) \frac{z'_i}{z}$ peut être remplacé par $(z - z') \frac{z'}{z}$, pour $i = 1$ et $i = 2$. Pour z_1 , on a $(z - z'_1) \frac{z'_1}{z} = (z - z') \frac{z'}{z} + R$, avec $R = \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta}{z}(\frac{\zeta}{4} + z')$. R est donc de l'ordre de $\frac{\zeta}{2}$, donc $\frac{\kappa_1^2}{2k} R \sim \frac{\kappa_1^2 \zeta}{4k}$.

Or, $F_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}_1, \zeta)$ est négligeable hors de la région $\|\boldsymbol{\kappa}_1\| |\zeta| < 2\pi \frac{l_\parallel}{l_\perp}$ (cf Annexe B). Si la portée longitudinale n'est pas plus grande que la portée transverse, *i.e.*

$$l_\parallel \lesssim l_\perp, \quad (2.52)$$

les contributions principales de l'intégrant dans le calcul de l'intégrale (2.51) se font pour $\|\boldsymbol{\kappa}_1\| |\zeta| < 2\pi$. De même, $F_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}_1, \zeta)$ est négligeable en dehors de $\|\boldsymbol{\kappa}_1\| = \kappa_1 < \frac{2\pi}{l_\perp}$. Or $l_\perp \gg \lambda$, donc F_ϵ^e est négligeable en dehors de $\kappa_1 \ll \frac{2\pi}{\lambda} = k$. Avec ces inégalités, on en déduit que $\frac{\kappa_1^2 \zeta}{4k} \ll \frac{\pi}{2}$. La contribution d'un terme petit devant $\frac{\pi}{2}$ est négligeable dans un cosinus. Ainsi, la contribution de $\frac{\kappa_1^2}{2k} R$ dans le cosinus de H_S est négligeable. Pour le cosinus en z'_2 , on effectue le même raisonnement. Sous la condition (2.52), on en déduit que l'on peut remplacer (pour $i = 1$ et $i = 2$) $(z - z'_i) \frac{z'_i}{z}$ par $(z - z'_i) \frac{z'}{z}$:

$$Cov[S(\boldsymbol{\kappa}_1, z), S(\boldsymbol{\kappa}_2, z)] = \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_2) \int_0^z \int_{-z'}^{z'} \cos^2\left[\frac{\kappa_1^2(z - z')}{2k} \eta\right] F_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}_1, \zeta) d\zeta dz'. \quad (2.53)$$

L'intégration sur z' est bornée de 0 à z , celle sur ζ a donc lieu entre $-z$ et z . Si $l_\parallel \ll z$ (l'onde traverse beaucoup d'hétérogénéités), $F_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}_1, \zeta)$ est concentrée dans la région $|\zeta| \ll z$. Les contributions de F_ϵ^e à l'intégration sur ζ sont donc confinées dans une petite bande autour de $\zeta = 0$ (Fig. 2.1 (b)). L'intégration peut alors être étendue jusqu'aux bornes infinies sans erreur significative [Ishimaru [43] p 356, Rytov et al. [76] p 52] :

$$F_S(\boldsymbol{\kappa}, 0) = \frac{k^2}{4} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2\left[\frac{\kappa^2(z - z')}{2k} \eta\right] F_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}, \zeta) d\zeta dz'. \quad (2.54)$$

Par (B.2) (p 111) et transformée de Fourier inverse, la covariance s'écrit

$$Cov[S(\boldsymbol{\rho}_1, z), S(\boldsymbol{\rho}_2, z)] = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^z \iint \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\rho}) \cos^2\left[\frac{\kappa^2(z - z')}{2k} \eta\right] \Phi_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}, 0) d\boldsymbol{\kappa} dz'. \quad (2.55)$$

où $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$. La covariance des temps de trajet $T(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r})/kv_0$ vaut donc

$$Cov[T(\boldsymbol{\rho}_1, z), T(\boldsymbol{\rho}_2, z)] = \frac{\pi}{2v_0^2} \int_0^z \iint \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\rho}) \cos^2\left[\frac{\kappa^2(z - z')}{2k} \eta\right] \Phi_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}, 0) d\boldsymbol{\kappa} dz'. \quad (2.56)$$

La covariance transverse des temps d'arrivée est donc stationnaire, car elle dépend de $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$. Comme elle dépend aussi de z , on la note pour une onde sphérique :

$$C_T(\boldsymbol{\rho}, z) = C_T(x, y, z) = Cov[T(\boldsymbol{\rho}_1, z), T(\boldsymbol{\rho}_2, z)]. \quad (2.57)$$

On note également C_{Tpl} pour une onde plane, C_T^{PA} dans l'approximation Rytov parabolique, C_T^{GO} dans l'optique géométrique et C_T^{FA} dans l'approximation de Fraunhofer.

Appliquons sur (2.56) la transformation $\Phi_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}, \kappa_z) = \sigma_\epsilon^2 l_{\perp x} l_{\perp y} \Phi_\perp^e(\sqrt{l_{\perp x}^2 \kappa_x^2 + l_{\perp y}^2 \kappa_y^2}, \kappa_z)$, où Φ_\perp^e est la densité spectrale transverse standardisée de ϵ (eq. (1.22) p 28). Soit $\boldsymbol{\kappa}_\perp$ le vecteur $(\kappa_x/l_{\perp x}, \kappa_y/l_{\perp y})$. Les changements de variable $\kappa_x = l_{\perp x} \kappa_x$ et $\kappa_y = l_{\perp y} \kappa_y$ donnent

$$C_T^{PA}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} \int_0^z \iint \exp(i\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\kappa}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}) \cos^2\left[\frac{\kappa_\perp^2(z - z')}{2k} \eta\right] \Phi_\perp^e(\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}, 0) d\kappa_x d\kappa_y dz'. \quad (2.58)$$

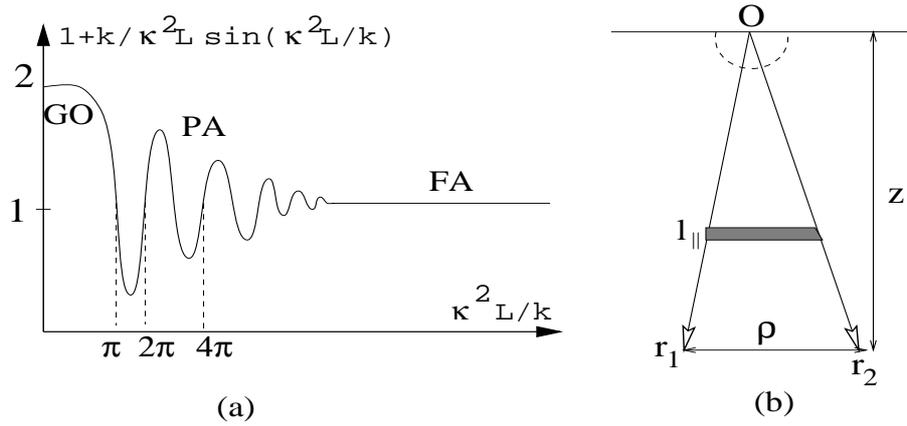


FIG. 2.1 – (a) Filtre pour une onde plane. (b) Rayons droits d'une onde sphérique.

Soit le vecteur $\boldsymbol{\rho}_\perp$ de coordonnées $(x/l_{\perp x}, y/l_{\perp y})$, alors $\boldsymbol{\kappa}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}_\perp$. Dans (2.58), par le changement de variable $\mathbf{u} = \eta \boldsymbol{\rho}_\perp$ (en module $u = \eta \rho_\perp = \frac{z'}{z} \rho_\perp$), on obtient

$$C_T^{PA}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2 z}{2v_0^2 \rho_\perp} \int_0^{\rho_\perp} \iint e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}} \cos^2 \left[\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k} \frac{u}{\rho_\perp} \left(1 - \frac{u}{\rho_\perp}\right) \right] \Phi_\perp^e(\boldsymbol{\kappa}, 0) d\boldsymbol{\kappa} du. \quad (2.59)$$

Si à présent on utilise la densité spectrale standardisée $\Phi_0(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\Phi_\perp^e(\boldsymbol{\kappa}, 0)}{l_\parallel}$ (cf (1.22) p 28),

$$C_T^{PA}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2 l_\parallel z}{2v_0^2 \rho_\perp} \int_0^{\rho_\perp} \iint e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}} \cos^2 \left[\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k} \frac{u}{\rho_\perp} \left(1 - \frac{u}{\rho_\perp}\right) \right] \Phi_0(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} du, \text{ pour } \boldsymbol{\rho} \neq 0.$$

Si l'onde est plane, la covariance se déduit de (2.56) (avec $\eta = 1$) et de

$$\int_0^z \cos^2 \left[\frac{\kappa^2 (z - z')}{2k} \right] dz' = \frac{z}{2} \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \left(\frac{\kappa^2 z}{k} \right) \right]. \quad (2.60)$$

On obtient

$$C_{Tpl}^{PA}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2 l_\parallel z}{4v_0^2} \iint e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}_\perp} \left[1 + \frac{k}{\kappa_\perp^2 z} \sin \left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \right) \right] \Phi_0(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.61)$$

Pour une onde sphérique, si $\boldsymbol{\rho} = 0$, l'équation (2.58) se simplifie par le changement de variable $u = z'/z$. Finalement, la covariance des temps d'une onde sphérique s'écrit

$$\begin{cases} C_T^{PA}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2 l_\parallel z}{2v_0^2 \rho_\perp} \int_0^{\rho_\perp} \iint e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}} \cos^2 \left[\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k} \frac{u}{\rho_\perp} \left(1 - \frac{u}{\rho_\perp}\right) \right] \Phi_0(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} du, \\ C_T^{PA}(0, z) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2 l_\parallel z}{2v_0^2} \int_0^1 \iint \cos^2 \left[\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k} u(1 - u) \right] \Phi_0(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} du. \end{cases} \quad (2.62)$$

En 3D : $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, $\rho_\perp = \sqrt{x^2/l_{\perp x}^2 + y^2/l_{\perp y}^2}$, $\kappa_\perp = \sqrt{\kappa_x^2/l_{\perp x}^2 + \kappa_y^2/l_{\perp y}^2}$.

En 2D : $\boldsymbol{\rho} = \rho$, $\boldsymbol{\kappa} = \kappa$, $\rho_\perp = \rho/l_\perp$, $\kappa_\perp = \kappa/l_\perp$.

Soit le filtre spectral

$$W \left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \right) = 1 + \frac{k}{\kappa_\perp^2 z} \sin \left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \right). \quad (2.63)$$

La variance des temps de trajet $Var[T(z)] = C_T^{PA}(0, z)$ (eq. (2.62) n^o2) augmente linéairement avec la variance des perturbations de vitesse σ_ϵ^2 et avec la distance de propagation z . De plus, elle dépend linéairement de la portée le long de la direction de propagation l_\parallel . Les dimensions transverses l_\perp des hétérogénéités, quant à elles, agissent à l'intérieur du filtre W . La covariance des temps $C_T^{PA}(\boldsymbol{\rho}, z)$ (eq. (2.62) n^o1) dépend aussi linéairement de z , σ_ϵ^2 et l_\parallel . Par contre, pour la covariance, les portées transverses agissent dans le filtre en cosinus et hors du filtre (dans ρ_\perp). Ces filtres sont en fait les fonctions de lissage du wavefront healing.

2.4.2 Régimes asymptotiques

Dans les équations (2.61) et (2.62) (n^o2), la densité spectrale des perturbations de vitesse Φ_0 est filtrée par la fonction $W(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k})$. Celle-ci est représentée en Fig. 2.1 (a). W est constante pour des valeurs petites ou grandes par rapport à un. Comme $W(0) = 2$ et $W(\infty) = 1$, elle vaut le double pour $\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \ll 1$ par rapport à $\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \gg 1$.

Or $\Phi_0(\kappa)$ est négligeable pour les κ plus grands que 2π , *i.e.* pour $\kappa_\perp > 2\pi/l_\perp$. Ainsi, dans (2.61) et (2.62) (n^o2), les contributions importantes de $\Phi_0(\kappa)$ à l'intégration se font pour $\kappa_\perp^2 z/k \lesssim \lambda z/l_\perp^2$. Les deux domaines $\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \ll 1$ et $\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \gg 1$ sont donc bien les deux régions de l'optique géométrique GO ($\sqrt{\lambda z} \ll l_\perp$, condition (2.38)) et de l'approximation de Fraunhofer FA ($\sqrt{\lambda z} \gg l_\perp$, condition (1.5) p 18). Le domaine intermédiaire et général est celui de l'approximation parabolique PA. On a analysé le filtre dû à une onde plane par souci de simplicité, mais pour une onde sphérique, le comportement du filtre est similaire.

Dans le domaine de l'optique géométrique, le terme $\frac{\kappa_\perp^2 z}{k}$ est négligeable devant un. Donc le cosinus dans l'équation (2.59) vaut un. Ainsi, en revenant dans le domaine spatial grâce à l'équation (B.3) de l'Annexe B, la covariance des temps s'écrit

$$C_T^{GO}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} \frac{z}{\rho_\perp} \int_0^{\rho_\perp} \int_0^\infty C_\perp^e(u, z') dz' du, \quad \text{où } \boldsymbol{\rho}_\perp = \left(\frac{x}{l_{\perp x}}, \frac{y}{l_{\perp y}} \right). \quad (2.64)$$

Les covariances des temps pour des ondes sphériques et planes s'écrivent donc

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T^{GO}(\boldsymbol{\rho}, z) = C_T^{GO}(\rho_\perp, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} \frac{l_\parallel z}{\rho_\perp} \int_0^{\rho_\perp} \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z'^2}) dz' du, \\ C_T^{GO}(0, z) = C_{Tpl}^{GO}(0, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} l_\parallel z \int_0^\infty C_0(z') dz', \\ C_{Tpl}^{GO}(\boldsymbol{\rho}, z) = C_{Tpl}^{GO}(\rho_\perp, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} l_\parallel z \int_0^\infty C_0(\sqrt{\rho_\perp^2 + z'^2}) dz'. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Dans l'approximation de Fraunhofer ($\frac{\kappa_\perp^2 z}{k} \gg 1$), les corrélations valent deux fois moins que les précédentes :

$$C_T^{FA}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{2} C_T^{GO}(\boldsymbol{\rho}, z). \quad (2.66)$$

Dans les deux régimes asymptotiques, la variance des temps de trajet est indépendante des dimensions transverses des hétérogénéités. En effet, (2.65) (n^o2) mène à

$$Var[T(z)]^{AS} = C_T^{AS}(0, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{4\Upsilon v_0^2} l_\parallel z A_0 \quad (AS \text{ pour asymptotique}), \quad (2.67)$$

où $A_0 = 2 \int_0^\infty C_0(h)dh$ est la portée intégrale de C_0 (eq. (1.20) p 28), $\Upsilon = 1$ dans GO, $\Upsilon = 2$ dans FA.

D'autre part, l'approximation (2.52) $l_{\parallel} \lesssim l_{\perp}$ n'est pas nécessaire dans l'optique géométrique, car le filtre de diffraction contenant les termes négligés grâce à (2.52) n'y apparaît pas. La condition de l'approximation parabolique $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}^2/\lambda$ est également inutile car elle est contenue dans la condition basique de l'optique géométrique $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}$. Par contre, ces conditions sont nécessaires dans l'approximation de Fraunhofer ($\sqrt{\lambda z} \gg l_{\perp}$).

2.4.3 Inversion des paramètres statistiques

A partir des expressions des covariances des temps, toute une gamme de procédures d'inversion des paramètres statistiques (portées, variance, structure) de la vitesse peuvent être imaginées. Par exemple, les temps d'arrivée d'une onde verticale permettent de retrouver la portée horizontale, et les temps d'arrivée d'une onde horizontale permettent de retrouver la portée verticale [Iooss & Samuelides [42]]. Il suffit ensuite d'utiliser (2.67) pour estimer la variance des perturbations σ_ϵ^2 .

Il est possible de formuler des inversions dans le cadre général parabolique, mais les régimes asymptotiques conduisent à des expressions particulièrement simples. Par exemple, des variances des temps dans deux directions différentes il est aisé d'en déduire le rapport d'anisotropie $\Lambda = a/b$. En 2D, soit $T_\alpha(z)$ le temps d'arrivée de l'onde de distance de propagation z et d'incidence α (par rapport à la verticale) et soit l_α la portée dans cette direction, (2.67) donne

$$\frac{Var[T_{\alpha_1}(z_1)]}{Var[T_{\alpha_2}(z_2)]} \Big|_{AS} = \frac{z_1 l_{\alpha_1}}{z_2 l_{\alpha_2}}, \quad (2.68)$$

où $\frac{1}{l_{\alpha_i}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha_i}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha_i}{b^2}}$ pour $i = 1, 2$ (eq. (1.17) n°1 p 27). Le rapport entre l_{α_1} et l_{α_2} dépend explicitement de Λ , α_1 , α_2 . En 3D, les portées sont données par (1.18) (p 28).

D'autre part, Touati [89] (chap 6) montre que dans l'optique géométrique, la covariance normalisée des temps $C_T^{GO}(\rho, z)/C_T^{GO}(0, z)$ ne dépend pas de la portée l_{\parallel} et permet de retrouver le type de covariance de la vitesse. Avec la connaissance de la structure de cette covariance, on estime ensuite la portée transverse l_{\perp} [Touati [89] (chap 6)]. En effet, par changements de variable, (2.65) devient

$$\frac{C_T^{GO}(\mathbf{l}_{\perp}, z)}{C_T^{GO}(0, z)} = \frac{2}{A_0} \int_0^1 \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z'^2}) dz' du. \quad (2.69)$$

Cette équation ne dépend ni des portées, ni de la variance; elle ne dépend que de C_0 . Si C_0 est connue, le rapport (2.69) est connu et \mathbf{l}_{\perp} est directement retrouvée.

Dans l'approximation de Fraunhofer, $C_T^{FA}(\rho, z)/C_T^{FA}(0, z) = C_T^{GO}(\rho, z)/C_T^{GO}(0, z)$ et les expressions sont identiques à celles de l'optique géométrique. Dans l'approximation parabolique, le rapport $C_T^{PA}(\rho, z)/C_T^{PA}(0, z)$ est aussi indépendant de l_{\parallel} (chaque terme en dépend linéairement). Par contre, le rapport $C_T^{PA}(\mathbf{l}_{\perp}, z)/C_T^{PA}(0, z)$ est dépendant de

la portée transverse car elle apparaît dans κ_\perp . Il n'est donc pas possible d'obtenir une procédure d'inversion exacte pour l'approximation parabolique. Cependant, comme l'approximation parabolique lie de manière régulière les deux régimes où la même inversion est exacte, on peut espérer que l'application de cette inversion dans l'approximation parabolique donne un résultat entaché d'une erreur faible. On le vérifiera numériquement.

2.4.4 Inversion directe de la covariance

Les intégrales des équations (2.65) peuvent s'inverser par une transformée d'Abel. Müller et al. [66] l'ont utilisée pour inverser la covariance des temps d'une onde plane en milieu 2D isotrope. Développons cette inversion dans le cadre général d'un milieu 3D anisotrope. Posons $I(\boldsymbol{\rho}, z)$ pour les deux cas d'onde sphérique et d'onde plane ($\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial \rho}$) :

$$I(\boldsymbol{\rho}, z) = \nabla_\perp[\boldsymbol{\rho}C_T(\boldsymbol{\rho}, z)] = \nabla_\perp[\rho_\perp C_T(\rho_\perp, z)] \quad \text{et} \quad I(\boldsymbol{\rho}, z) = C_{Tpl}(\boldsymbol{\rho}, z). \quad (2.70)$$

Dans les régimes asymptotiques et pour une onde sphérique (sous la condition $\rho \ll z$), $I(\boldsymbol{\rho}, z)$ est égal à

$$I(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\Upsilon v_0^2} l_\parallel z \int_0^\infty C_0(\sqrt{\rho_\perp^2 + z'^2}) dz'. \quad (2.71)$$

Si le milieu est 2D ($l_{\perp y} = \infty$) ou si la distribution de vitesse est transverse isotrope ($l_{\perp x} = l_{\perp y}$), on a $l_{\perp x} = l_\perp$, $I(\boldsymbol{\rho}, z) = I(\rho, z)$ et $\rho_\perp = \rho/l_\perp$. Posons $I_\perp(\rho_\perp, z) = I(\rho, z)$, par le changement de variable $r_\perp = r/l_\perp = \sqrt{\rho_\perp^2 + z'^2}$, on a

$$I_\perp(\rho_\perp, z) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\Upsilon v_0^2} l_\parallel z \int_{r_\perp}^\infty C_0(r_\perp) \frac{r_\perp}{\sqrt{r_\perp^2 - \rho_\perp^2}} dr_\perp. \quad (2.72)$$

Par la transformée d'Abel démontrée en Annexe D, l'intégrale (2.71) s'inverse et donne

$$C_0(r_\perp) = -\frac{4\Upsilon v_0^2}{\pi \sigma_\epsilon^2} \frac{1}{l_\parallel z} \int_{r_\perp}^\infty \frac{\nabla_\perp I_\perp(\rho'_\perp, z)}{\sqrt{\rho'^2_\perp - r_\perp^2}} d\rho'_\perp, \quad i.e. \quad (2.73)$$

$$C_0\left(\frac{r}{l_\perp}\right) = -\frac{4\Upsilon v_0^2}{\pi \sigma_\epsilon^2} \frac{1}{l_\parallel z} \int_r^\infty \frac{\nabla_\perp I(\rho', z)}{\sqrt{\rho'^2 - r^2}} d\rho', \quad (2.74)$$

Sans aucune connaissance des paramètres de la vitesse, ni du domaine d'approximation (de Υ), la structure de la covariance des vitesses C_0 peut être inversée à partir de la covariance des temps uniquement (en utilisant la propriété $C_0(0) = 1$) :

$$C_0\left(\frac{r}{l_\perp}\right) = \left[\int_r^\infty \frac{\nabla_\perp I(\rho', z)}{\sqrt{\rho'^2 - r^2}} d\rho' \right] / \left[\int_0^\infty \frac{\nabla_\perp I(\rho', z)}{\rho'} d\rho' \right]. \quad (2.75)$$

Une fois le modèle estimé, cette expression donne la portée transverse par $C_0(1)$.

Si le milieu 3D n'est pas transverse isotrope, mais anisotrope général ($l_{\perp x} \neq l_{\perp y}$), on utilise la fonction $I(x, 0, z)$ pour inverser la portée le long de e_x ($l_{\perp x}$), et la fonction $I(0, y, z)$ pour inverser la portée dans la direction e_y ($l_{\perp y}$). Par exemple pour e_x , $\rho_\perp = x/l_{\perp x}$. Les équations d'inversion (2.74) et (2.75) sont les mêmes avec $l_{\perp x}$ à la place de l_\perp , x' à la place de ρ' et $I(x', 0, z)$ à la place de $I(\rho', z)$.

2.4.5 Extensions et remarques

Si le champ de vitesse n'est pas stationnaire, mais intrinsèque dans la direction de propagation et stationnaire perpendiculairement, il est défini par son variogramme γ_ϵ (cf §1.4.1). Dans le domaine spatial (GO et FA), il suffit juste de remplacer C_T et C_0 par les variogrammes γ_T et γ_0 . Tous les résultats précédents se généralisent par

$$\gamma_T(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{2} \text{Var}[T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})] = C_T(0, z) - C_T(\boldsymbol{\rho}, z). \quad (2.76)$$

En 2D, les résultats pour la covariance des temps sont quasiment les mêmes qu'en 3D. Les variables à changer sont : $\boldsymbol{\rho} = \rho$, $\rho_\perp = \rho/l_\perp$, $\boldsymbol{\kappa} = \kappa$, $\kappa_\perp = \kappa/l_\perp$, $\mathbf{u} = u$, intégrale simple sur κ . Ces résultats concordent avec ceux obtenus dans l'article de l'Annexe G qui n'utilise pas les fonctions standardisées C_0, Φ_0 , mais garde $C_\epsilon, \Phi_\epsilon$. Pour une onde sphérique, on a (G.9), (G.10), (G.12) (p 122) ; pour une onde plane, on a (G.51) (p 137), (G.11) (p 123).

En milieu transverse isotrope 3D, les intégrales (2.62) ($n^\circ 1$) et (2.61) se simplifient en remplaçant $\iint \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}) W() \Phi_\epsilon(\boldsymbol{\kappa}, 0) d\boldsymbol{\kappa}$ par $2\pi \int_0^\infty \kappa J_0(\kappa u) W() \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa$, avec J_0 fonction de Bessel d'ordre zéro.

La dérivation des corrélations du log d'amplitude (niveau χ , eq. (2.15)) suit exactement celle des corrélations de phase. Dans l'équation (2.62) de l'approximation parabolique, la fonction cosinus est remplacée par la fonction sinus et le filtre $1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin(\frac{\kappa^2 z}{k})$ est remplacé par $1 - \frac{k}{\kappa^2 z} \sin(\frac{\kappa^2 z}{k})$. Ainsi, dans l'optique géométrique, la covariance des niveaux est très faible (les amplitudes fluctuent très peu). Elle augmente ensuite rapidement et tend vers la covariance des phases dans l'approximation de Fraunhofer [Rytov et al. [76] §2.3].

Que se passe-t-il quand l'approximation au premier ordre n'est plus valide ? Il faut prendre en compte le temps du deuxième ordre T_2 qui est négatif (cf §2.3). Si la distribution du champ de vitesse est gaussienne, on a par exemple pour la variance des temps :

$$\text{Var}(T) = \text{Var}(T_0 + T_1 + T_2) = \text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2) + \mathbf{E}(T_1 T_2) = \text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2). \quad (2.77)$$

En effet, dans le calcul de $\mathbf{E}(T_1 T_2)$, il apparaît le moment statistique d'ordre trois de ϵ , qui s'annule sous l'hypothèse gaussienne. La variance des temps est donc supérieure à celle prédite par l'approximation au premier ordre ($\text{Var}(T) > \text{Var}(T_1)$).

2.5 Expériences numériques

Dans cette section, des expériences numériques 2D vont valider de manière simple les résultats théoriques concernant le velocity shift et la covariance des temps. Tout d'abord, les paramètres statistiques d'un milieu aléatoire sont choisis : densité ρ , vitesse moyenne v_0 , type de corrélation C_0 , écart-type σ_ϵ , portées horizontale a et verticale b . Différentes réalisations du milieu aléatoire sont alors simulées par la méthode des bandes-tournantes de Matheron [60]. A l'intérieur de chaque réalisation, une onde plane acoustique verticale (donc $a = l_\perp$, $b = l_\parallel$) est ensuite propagée numériquement. Son champ d'onde, dont on déduit les temps d'arrivée, est enregistré en différentes distances de propagation. En

statistique, pour obtenir des résultats robustes, il faut veiller à la convergence des moyennages effectués. En augmentant le nombre de simulations, les moments d'ordre un et deux des temps d'arrivée doivent converger vers des valeurs limites. Si cela n'est pas le cas, les résultats ne sont pas valides, et des simulations supplémentaires sont nécessaires.

Plusieurs méthodes de résolution numérique de l'équation d'onde sont basées sur l'approximation haute fréquence de l'optique géométrique. Celle-ci permet en effet le calcul direct des temps d'arrivée. Le tracé de rais [Virieux, Farra & Madariaga [95]] est la méthode la plus rapide, mais échoue dans les zones d'ombre, aux caustiques et néglige la diffraction. La méthode de Huygens [Vidale [93], Podvin & Lecomte [71]] résout l'eikonale (2.39) par différences finies et ne néglige pas le wavefront healing [Witte et al. [99]]. D'autres techniques (faisceaux gaussiens, intégrale de Kirchhoff) étendent le domaine d'applicabilité des précédentes, mais souffrent toujours de limitations dans l'hétérogénéité admise du champ de vitesse. Pour valider définitivement nos résultats, il est nécessaire de simuler l'équation acoustique sans autre approximation.

2.5.1 Différences finies sur l'équation des ondes

La méthode utilisée est basée sur l'algorithme proposé par Virieux [94], c'est-à-dire une formulation des équations élastodynamiques en termes de relation entre les vitesses des particules et les pressions. Ces équations sont résolues par la méthode des différences finies centrées dans un schéma explicite du premier ordre par rapport à la vitesse (schéma d'ordre deux par rapport au déplacement). Les interfaces entre les domaines ne sont pas traitées explicitement mais sont modélisées par des variations des paramètres physiques (par exemple un gros contraste de densité). Les constantes élastiques en surface sont négligeables devant celles du sol et cela correspond à une surface libre. Sur les autres frontières du domaine, des conditions absorbantes (zones tampons) permettent d'y atténuer le champ d'onde, et donc de minimiser les réflexions sur les bords. Le milieu est au repos à l'instant initial $t = 0$ (vitesses et contraintes égales à zéro).

Le code numérique a été écrit par Doerflinger [25], puis adapté aux acquisitions sismiques multitraces par Faily-Berthet [26]. Quelques modifications triviales ont été ajoutées : choix d'une source sphérique ou plane, enregistrement par une grille de récepteurs. Les paramètres en entrée sont une grille de densité, une grille de vitesse des ondes P, une grille de vitesse des ondes S, une géométrie d'acquisition (nombres et coordonnées des sources et des récepteurs), la fréquence caractéristique f_c et le type de la source impulsionnelle (gaussienne, dérivée d'une gaussienne ou Ricker). En sortie, nous obtenons des instantanés (pression en chaque point) à intervalle de temps régulier, et des sismogrammes synthétiques (cf Fig. 2.4). Pour modéliser des ondes acoustiques, il suffit de choisir la densité constante et la vitesse des ondes S égale à zéro. Le code est réduit à un code de propagation acoustique en supprimant les calculs inutiles des contraintes élastiques.

Dans nos approximations, on raisonne en termes de longueur d'onde et de fréquence dominantes : $\lambda = \lambda_c/\sqrt{2}$ (λ_c longueur d'onde caractéristique), $f = \sqrt{2}f_c$, $\lambda = v_0/f$. Dans nos expériences numériques, la fréquence caractéristique sera quasiment toujours fixée à une valeur sismique typique : $f_c = 40Hz$. Si la vitesse moyenne v_0 vaut $3000m/s$, la longueur d'onde dominante est alors de l'ordre de $50m$. La fréquence maximale est définie

par le double de la fréquence dominante. Elle vaut donc $115Hz$, alors que la longueur d'onde minimale vaut environ $25m$. La source a la forme d'une dérivée de gaussienne. On désire propager une onde plane verticale sur une distance assez importante. Notre modèle est choisi de dimension $2500m \times 8000m$ (cf Fig. 2.4). Pour l'étude de la dispersion numérique, le champ d'onde est enregistré après $4000m$ de propagation (environ 90 fois la longueur d'onde), en 151 récepteurs espacés horizontalement tous les $10m$.

Le problème à présent est donc d'assurer une discrétisation du champ de vitesse suffisamment fine pour qu'il n'y ait pas de dispersion numérique, mais en veillant à ce que les temps de calcul ne soient pas prohibitifs. La stabilité spatiale du problème est conditionnée par le nombre de points de calcul par longueur d'onde du signal. Une limite classique fixe le pas de calcul minimum à un dixième de la longueur d'onde. La stabilité temporelle est donnée par un pas de temps dt respectant la condition $dt < dx/(\sqrt{2}v_P)$ [Virieux [94]], où v_P est la vitesse maximale des ondes P et dx le pas de calcul. Le pas de temps diminue donc avec le pas de discrétisation, ce qui augmente encore plus la lourdeur des calculs.

En Fig. 2.2 et 2.3, des sismogrammes sont calculés pour des propagations en milieu homogène et en milieu aléatoire particulièrement complexe ($a = b = 2\lambda = 100m$). Les pas de calcul $dx = dz$ décroissent de $5m$ (un dixième de λ) à $1m$. Quand le pas diminue, les effets numériques à l'arrière du champ d'onde (*i.e.* après l'arrivée impulsionnelle) tendent à disparaître. Les lignes diagonales que l'on observe sont les réflexions sur les bords du modèle. Elles sont fortement atténuées, mais il est difficile de les supprimer entièrement.

Notre problème concerne la détermination des temps d'arrivée. On visualise donc en bas des Fig. 2.2 et 2.3 notre pointé (défini au §2.5.2) pour différents pas de calcul ($3m$, $2m$, $1.5m$ et $1m$). Il y a une bonne convergence entre les discrétisations $2m$ et $1.5m$ pour le milieu homogène (Fig. 2.2), et $1.5m$ et $1m$ pour le milieu aléatoire (Fig. 2.3). Les différences entre leurs valeurs pointées sont inférieures à $1ms$, ce qui équivaut au pas de temps ($0.9ms$ pour $1.5m$). La discrétisation $dx = dz = 1.5m$ (trentaine de points par longueur d'onde) est donc choisie. Elle induit une incertitude sur les temps pointés de l'ordre de $1ms$. L'utilisation d'un super-calculateur IBM-SP2 par rapport à une SPARC-20 permet de diviser le temps de calcul par un facteur six : une propagation sur $7000m$ ($2.5s$) est exécutée en une dizaine d'heures.

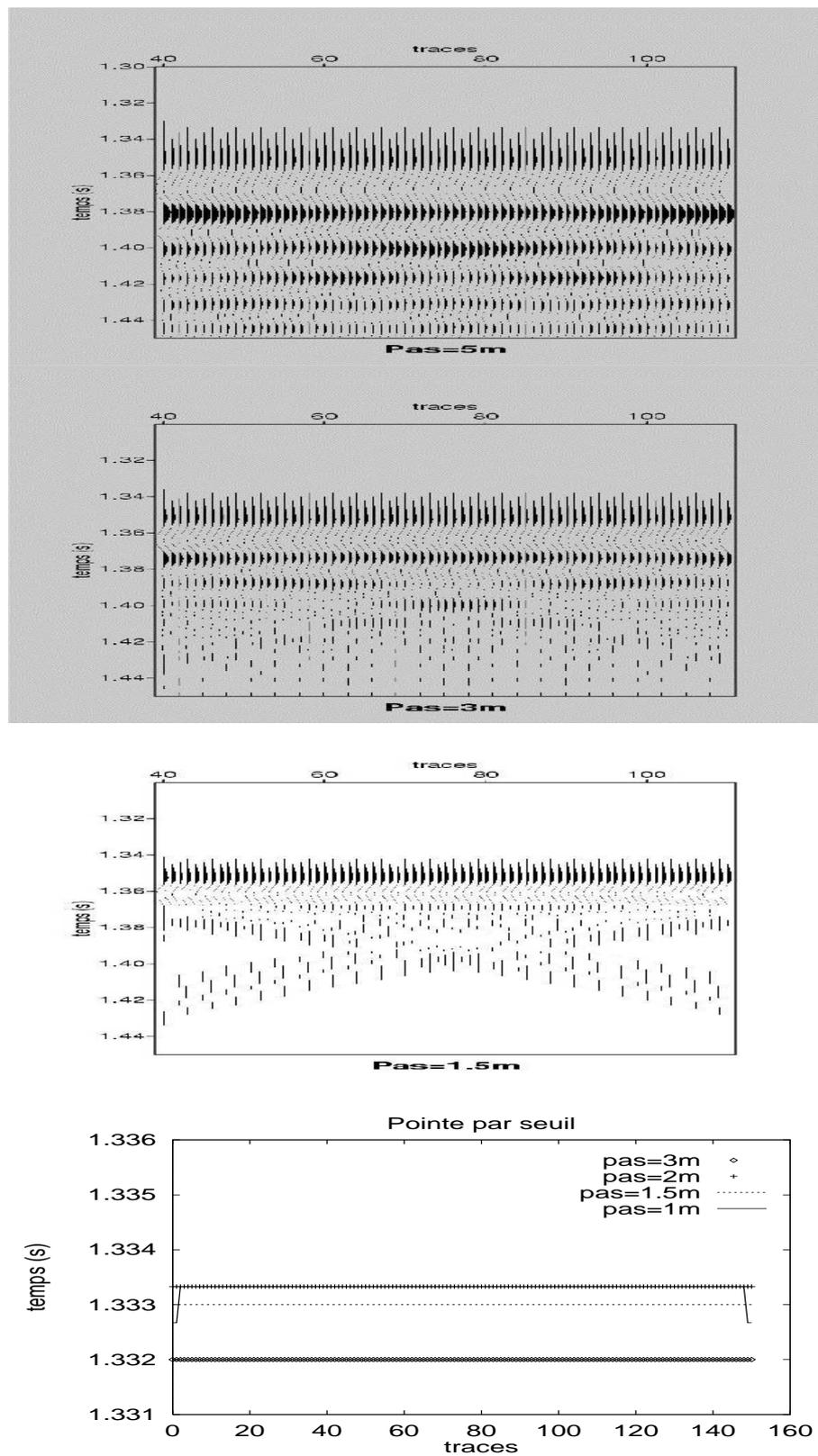


FIG. 2.2 – Sismogrammes et pointés pour différents pas de calcul en milieu homogène ($v_0 = 3000m/s$, $z = 4000m$, $f_c = 40Hz$, pas entre traces=10m).

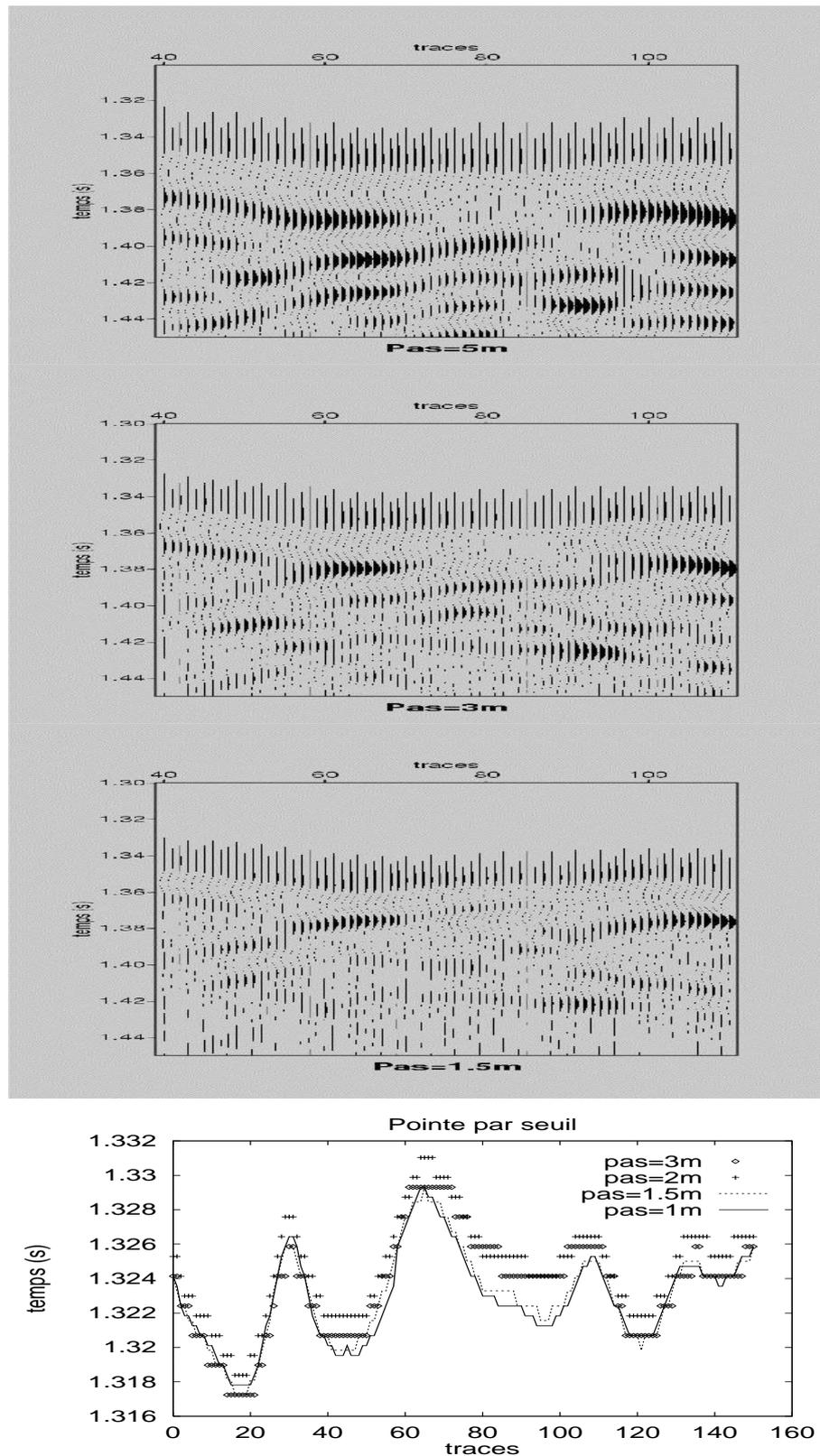


FIG. 2.3 – Sismogrammes et pointés pour différents pas de calcul en milieu aléatoire gaussien ($a = b = 100m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$, $v_0 = 3000m/s$, $z = 4000m$, $f_c = 40Hz$).

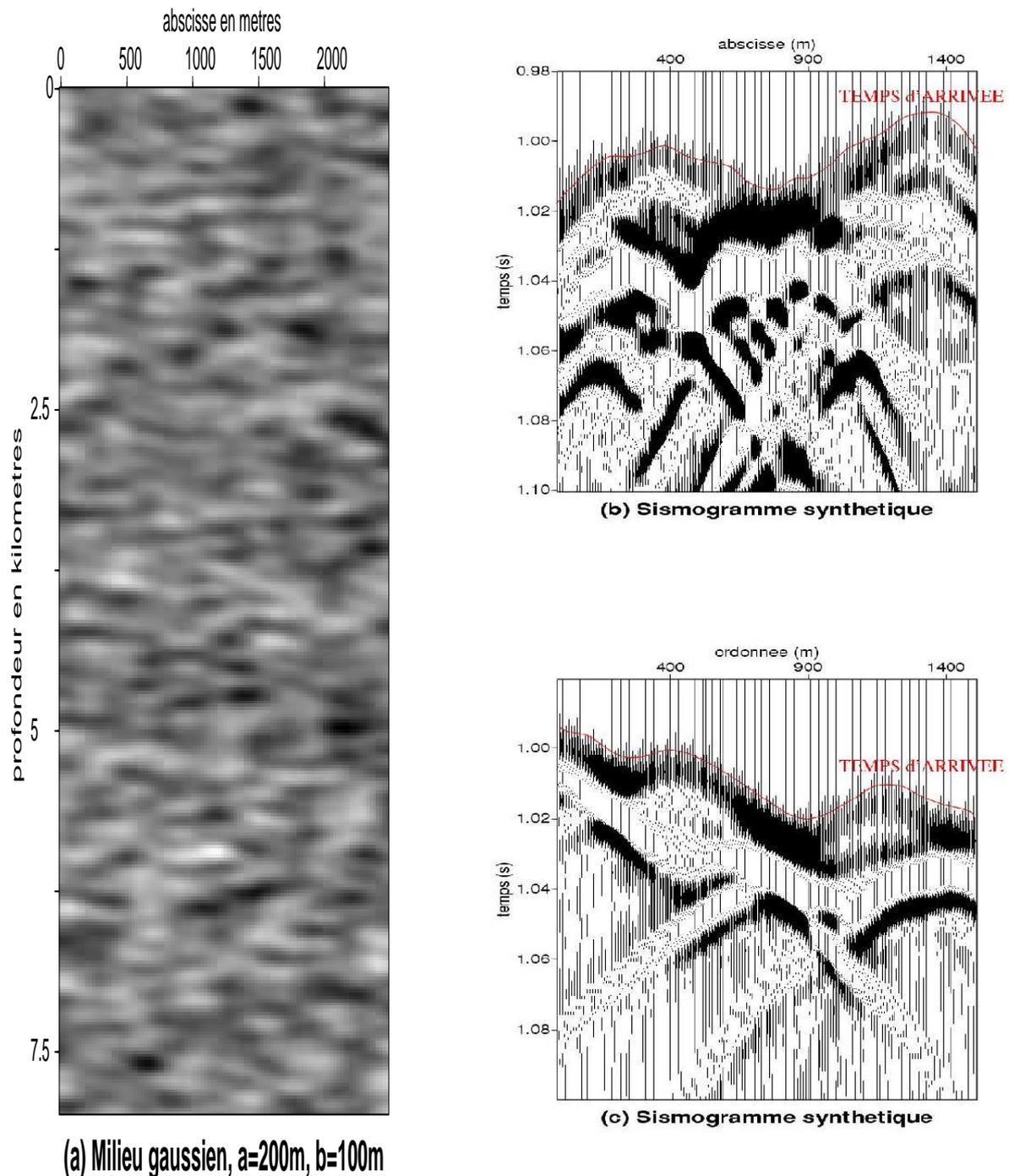


FIG. 2.4 – (a) Champ de vitesse aléatoire de dimension $2500m \times 8000m$, avec $v_0 = 3000m/s$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$, $a = 200m$, $b = 100m$. Plus les zones sont claires, plus leurs vitesses sont grandes ($\sigma_v = 106m/s$). A droite : sismogrammes et allures du pointé des temps, après propagation (b) d'une onde plane horizontale et (c) d'une onde plane verticale, dans un tel milieu aléatoire (de dimension $3000m \times 3000m$). L'enregistrement se fait après $3000m$ de propagation sur une largeur de $1500m$ (espacement de $10m$ entre les récepteurs).

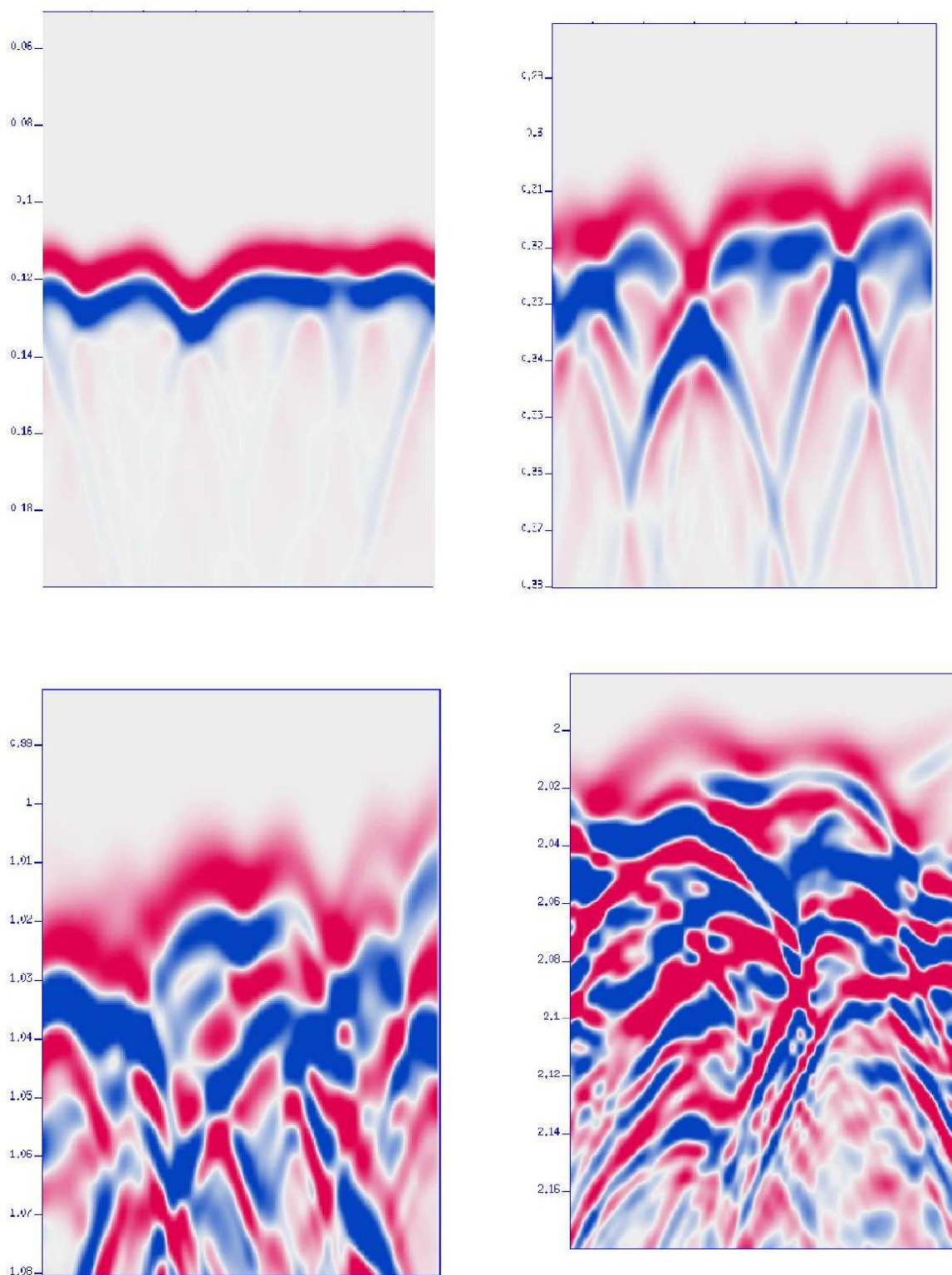


FIG. 2.5 – Enregistrement d'un champ d'onde (ordonnée en secondes) se propageant dans un milieu gaussien avec $\lambda = 50m$, $v_0 = 3000m/s$, $\sigma_v = 106m/s$, $a = b = 100m$.

Dans cette section, on observe le comportement des ondes dans des milieux gaussiens. Dans des milieux rugueux, le bruit, la dispersion numérique et les diffractions dûs aux petites hétérogénéités, entâcheraient nos résultats d'erreurs. Des tests dans des milieux exponentiels seront faits dans le chapitre 3. Un milieu gaussien est présenté en Fig. 2.4 (a). Deux ondes, horizontales et verticales, propagées sur $3000m$ dans ce type de milieu, sont enregistrées et visualisées sur des sismogrammes (Fig. 2.4 (b) et (c)).

Pour la propagation horizontale ($l_{\parallel} = a = 200m$, $l_{\perp} = b = 100m$), du bruit est visible à l'arrière du front d'onde primaire. Ce sont des codas, dûs à un régime de rétro-diffraction et de diffractions multiples. En effet, l'approximation parabolique (conditions $\lambda \ll l_{\perp}, l_{\parallel}$ et $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}^2/\lambda$) n'est pas respectée car $\sqrt{\lambda z} > l_{\perp}^2/\lambda$. De plus, on se trouve en dehors de notre condition de Rytov ($\sigma_{\epsilon}^2 z l_{\parallel} \ll \lambda^2$) car $\sigma_{\epsilon}^2 z l_{\parallel} / \lambda^2 \sim 1.6$. Pour la propagation verticale ($l_{\parallel} = b = 100m$, $l_{\perp} = a = 200m$), les approximations sont mieux respectées ($l_{\perp}/\lambda = 4$, $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}^2/\lambda$, $\sigma_{\epsilon}^2 z l_{\parallel} / \lambda^2 \sim 0.8$), et le front d'onde primaire domine.

La Fig. 2.5 présente l'enregistrement d'un champ d'onde dans un milieu aléatoire isotrope mais particulièrement complexe ($a = b = 2\lambda = 100m$). Différentes distances de propagation sont considérées : $z = 400m$ ($t \sim 0.1s$), $z = 1000m$ ($t \sim 0.3s$), $z = 3400m$ ($t \sim 1s$), $z = 6400m$ ($t \sim 2s$). A mesure que l'onde se propage, l'arrière du champ d'onde se complexifie (apparition de codas), mais le front d'onde primaire reste cohérent et lisse. En $z = 1000m$, il n'a pas été déformé et possède encore sa forme initiale ; notre pointé est encore cohérent. Par contre en $z = 6400m$, le front d'onde est déstructuré.

Notre problème est concentrée sur ce front d'onde primaire. Par la suite, on appelle ondelette la forme du signal enregistré sur une période en un récepteur. L'ondelette a donc plus ou moins la forme du signal initial : plus le milieu est perturbé, plus l'ondelette est déformée. A présent, deux questions se posent : comment définir les temps d'arrivée et où les pointer sur les traces pour obtenir leur juste valeur ?

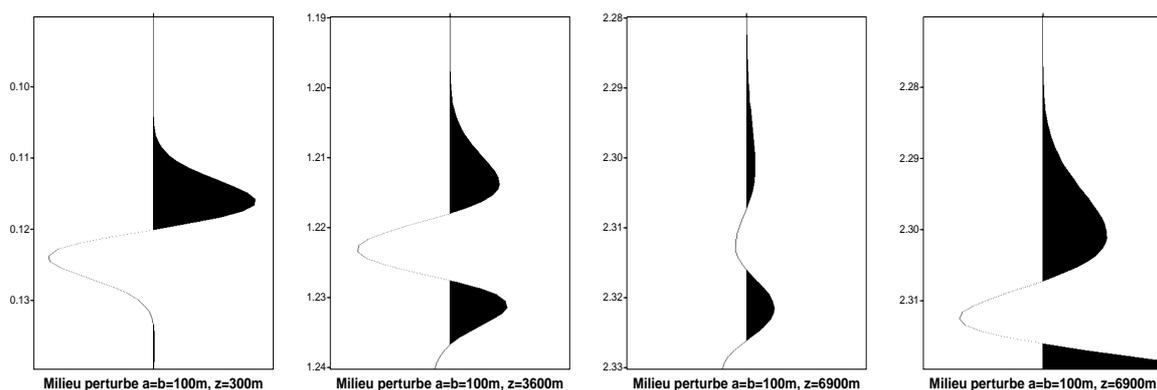


FIG. 2.6 – Ondelettes en milieu perturbé (Rytov valide, PA pas valide).

2.5.2 Les temps d'arrivée et leur pointé

Le temps d'arrivée d'une impulsion est défini rigoureusement dans les milieux non dispersifs (optique géométrique, milieu effectif). Il est égal à celui de la première phase

d'une onde monochromatique ($T = S/kv_0$) et ne dépend plus de la fréquence. Dans les cas dispersifs, le champ d'onde est défini dans une bande fréquentielle limitée. La phase dépend donc d'une gamme de fréquences. Ici, le champ d'onde est supposé peu déformé par rapport à un champ d'onde homogène (approximation de Rytov). On définit alors le temps d'arrivée de l'énergie d'une impulsion par celui de la phase à la fréquence dominante.

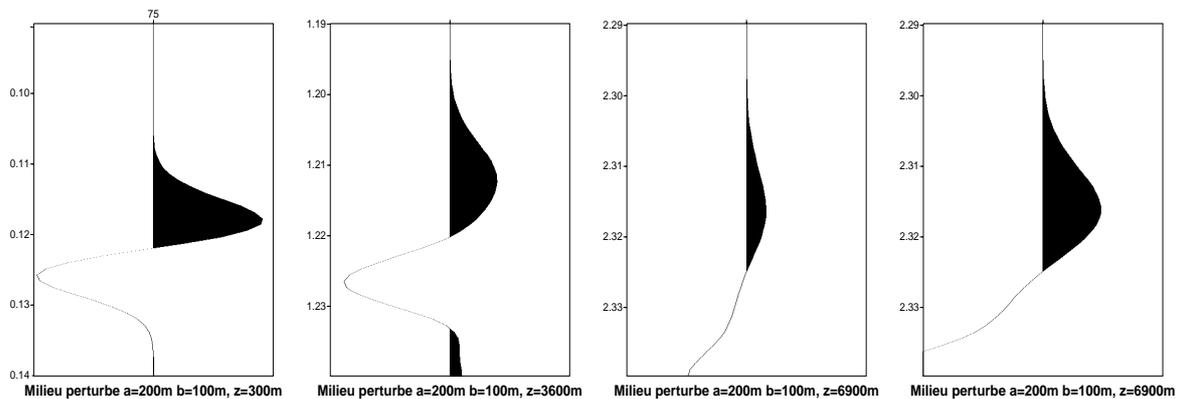


FIG. 2.7 – Ondelettes en milieu perturbé (Rytov parabolique valide).

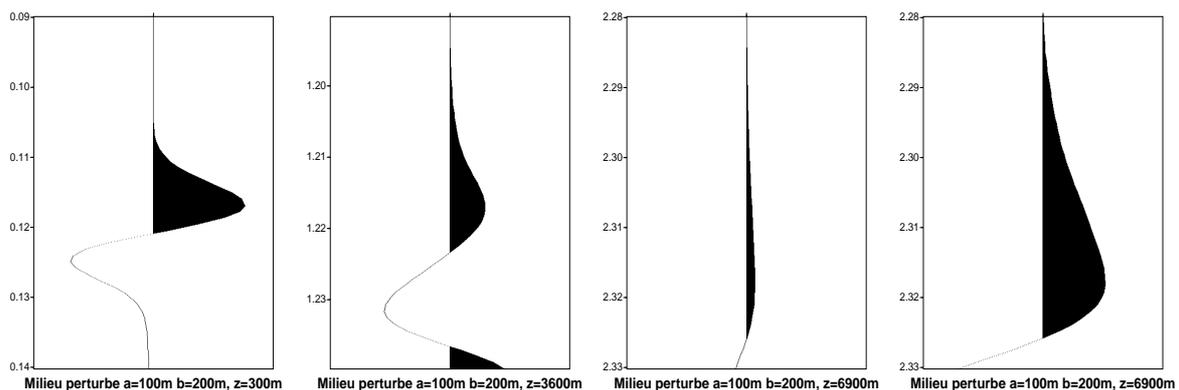


FIG. 2.8 – Ondelettes en milieu perturbé (Rytov et PA pas valides).

Les Fig. 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, présentent des ondelettes issues de nos simulations dans plusieurs types de milieu gaussien (avec $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$). On trace juste leur première phase, le but étant de voir les déformations qu'elle a subies. La première colonne ($z = 300m$) donne la forme du signal initial, et les deux suivantes correspondent aux distances de propagation $z = 3600m$ et $z = 6900m$, sans amplification de l'amplitude. La quatrième colonne représente les ondelettes de la troisième colonne en amplifiant leur amplitude.

Tous les milieux sont dispersifs ($f_c = 40Hz$) mais respectent $a, b > 2\lambda$ (hétérogénéités de tailles supérieures à la longueur d'onde). Les milieux sont distingués selon leurs domaines de validité en $z = 3600m$ pour l'approximation de Rytov ($\sigma_\epsilon^2 z b \ll \lambda^2$) et pour l'approximation parabolique ($\sqrt{\lambda z} \ll a^2/\lambda$). L'atténuation des amplitudes que l'on observe est due à l'atténuation géométrique que l'on peut mesurer dans un milieu homogène et à l'atténuation par diffraction qui augmente quand z augmente et quand a/λ diminue. En $z = 6900m$, les approximations ne sont valides pour aucun des milieux considérés. Les premières phases sont déformées, les signaux sont très atténués et présentent des codas.

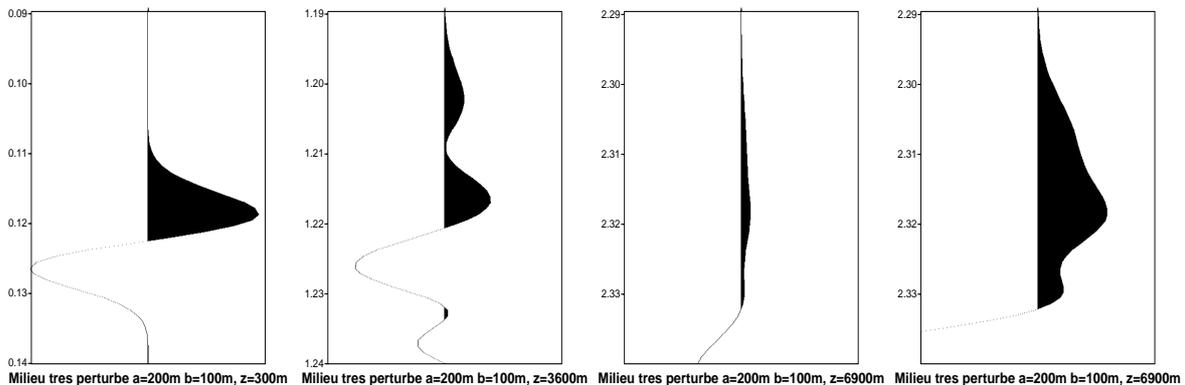


FIG. 2.9 – Ondelettes en milieu très perturbé ($\sigma_\epsilon^2 = 0.01$, PA valide, Rytov pas valide).

Dans les milieux où l'approximation de Rytov est valide ($z = 3600m$, Fig. 2.6 et 2.7), la phase est peu déformée par rapport à la phase initiale. En revanche, lorsque Rytov n'est pas valide (Fig. 2.8, 2.9 et 2.10), les ondelettes sont déstructurées et les temps d'arrivée n'ont plus de sens. Il faut noter que si Rytov est valide mais pas l'approximation parabolique (Fig. 2.6), il n'y a pas de déformation particulière de la première phase, mais surtout une atténuation et l'apparition de codas. C'est donc l'approximation de Rytov qui joue un rôle prépondérant quant à la validité de notre définition des temps d'arrivée.

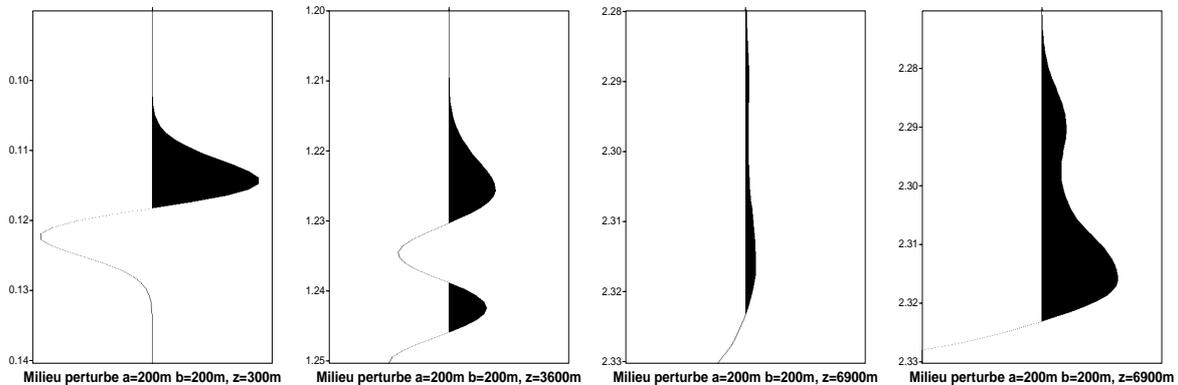


FIG. 2.10 – Ondelettes en milieu perturbé ($\sigma_\epsilon^2 = 0.005$, PA valide, Rytov pas valide).

Après l'obtention des sismogrammes, le problème majeur consiste à extraire les temps correspondant aux premières arrivées par pointé. L'identification de la première arrivée d'un signal n'est pas évidente et a conduit au développement de plusieurs méthodes :

- ◇ Ricker [72] étudie la forme des ondelettes sismiques et propose une méthode précise utilisant l'intersection entre l'axe des temps et la tangente au point d'inflexion de l'ondelette. Cette méthode a deux défauts : les valeurs obtenues sont supérieures aux temps réels et la construction des tangentes est coûteuse.
- ◇ On peut envisager de pointer au sommet de l'ondelette. Cette procédure est peu sensible au bruit de fond et le pointé du maximum est très précis [Coppens

[21]], mais les temps obtenus ne reflètent pas les vrais temps d'arrivée. Une méthode plus robuste de Coppens [21] utilise un rapport de fonction d'énergie pour y pointer un extremum cohérent.

- ◇ La technique la plus rapide est une méthode de seuil : quand l'amplitude de l'onde dépasse un certain niveau par rapport à l'amplitude maximale, le temps est pointé. C'est la méthode utilisée par Wielandt [97] (seuil de 15%) et Müller et al. [66] (critère de 1%). Cependant, elle est très sensible au bruit [Dillon & Collyer [24]] et les temps obtenus sont déphasés par rapport aux temps réels. Williamson & Worthington [98] corrigent alors les temps pointés sur la base d'une ondelette estimée (c'est également la solution adoptée par Baina [9]). Baina [9] met en avant deux autres problèmes. Le seuil doit être supérieur au rapport signal sur bruit et pour corriger l'effet dû à la divergence géométrique, il renormalise le seuil en fonction de la distance de propagation.
- ◇ Dillon & Collyer [24] proposent une déconvolution par la signature de la source, suivie d'une déconvolution à phase minimale, transformant le signal en une impulsion centrée sur le temps de première arrivée.
- ◇ La technique la plus répandue en sismique autocorrèle les traces entre elles et pointe le maximum d'autocorrélation [Yilmaz [105] §3.4]. Cette procédure permet d'augmenter fortement le rapport signal/bruit, mais n'est pas très précise car l'autocorrélation a un lobe large à sommet quasiment plat. De plus, Gudmundsson [33] montre que les temps récupérés par autocorrélation ont une plus faible résolution spatiale que les temps pointés par seuil. En effet, le pointé par seuil se concentre au début de l'ondelette, alors que le pointé par autocorrélation prend en compte toute la forme de l'ondelette, et donc des effets indésirables.

Pour ces raisons et en l'absence de bruit dans nos sismogrammes, la méthode de pointé par seuil et son incertitude de $1ms$ nous satisfont. Cela procure une imprécision de $\frac{v_z^2}{z} \times 10^{-3}$ (m/s) sur le velocity shift et de $10^{-6}s^2$ sur la variance des temps. Contrairement aux techniques qui utilisent un seuil constant ou renormalisé, on définit un seuil pour chaque distance de propagation à partir de sismogrammes de référence (champ d'onde propagé en milieu homogène). L'effet de la divergence géométrique est ainsi effacée.

2.5.3 Visualisation du velocity shift

Les expériences sont réalisées dans différents modèles. Les ondes planes sont propagées dans cinq réalisations de chaque modèle pour obtenir des résultats plus robustes. Dans chaque milieu, le champ d'onde est enregistré tous les $300m$ (de $300m$ à $7200m$) sur des lignes de 151 récepteurs (espacés horizontalement tous les $10m$).

Etudions à présent l'effet du velocity shift, qui est important pour déterminer précisément la vitesse moyenne d'un milieu à partir de la moyenne des temps d'arrivée. Dans l'optique géométrique, son expression est explicite dans le cas d'une covariance anisotrope (eq. (2.46) et (2.47)). Il augmente linéairement avec la distance de propagation et la variance des perturbations. Avec le tracé de rais, Witte et al. [99] observent numériquement cet

effet, puis une saturation due à la formation de caustiques. En Fig. 2.11, l'augmentation linéaire est présente aux faibles distances de propagation et la dépendance en σ_ϵ^2 est visible en comparant le modèle où $a = 200m$, $b = 100m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$ et celui avec les mêmes paramètres sauf $\sigma_\epsilon^2 = 0.0025$.

Par contre, dans Rytov parabolique, l'expression du velocity shift est plus complexe (eq. (2.48)). Si on considère un milieu 2D anisotrope à covariance gaussienne, il est possible d'obtenir des formules explicites dans l'optique géométrique (GO), l'approximation parabolique (PA) et l'approximation de Fraunhofer (FA) [Samuelides [78]] :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_{eff} - v_0)^{GO} = \frac{\sqrt{\pi}v_0\sigma_\epsilon^2}{8} \frac{z l_{\parallel}}{l_{\perp}^2}, \\ (v_{eff} - v_0)^{PA} = \frac{\sqrt{\pi}v_0\sigma_\epsilon^2}{8} \frac{l_{\parallel}}{z} \int_0^z \left[1 + \left(\frac{4z'}{k l_{\perp}^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4z'}{k l_{\perp}^2} \right) \right] dz', \\ (v_{eff} - v_0)^{FA} = \frac{\sqrt{2\pi}k^{\frac{3}{2}}}{16} v_0 \sigma_\epsilon^2 \frac{l_{\parallel} l_{\perp}}{\sqrt{z}}. \end{array} \right. \quad (2.78)$$

Dans l'approximation parabolique, le shift sature à cause du wavefront healing : le front d'onde est lissée dans la taille latérale de la zone de Fresnel. Cette saturation a été constatée par Roth et al. [74] sur simulations par différences finies acoustiques. Enfin, dans l'approximation de Fraunhofer, le wavefront healing est complètement saturé, et le shift décroît lentement (en $1/\sqrt{z}$). Ce phénomène est légèrement visible en Fig. 2.11 pour les milieux $a = b = 200m$ et $a = 200m$, $b = 100m$.

Sur les enregistrements de la Fig. 2.5, le wavefront healing est bien visible. La belle régularité du front d'onde dans l'optique géométrique (en haut à gauche) commence à être brouillée par les diffractions dans l'approximation parabolique (en haut à droite). Puis, le front d'onde se reconstruit et se lisse (en bas à gauche), pour finalement retrouver une certaine régularité (en bas à droite). Si le front d'onde continuait sa propagation dans un milieu homogène, il retrouverait son aspect initial d'onde plane. Ce phénomène est connu sous le nom de "cicatrisation" des fronts d'onde.

En Fig. 2.11, on constate que la distance à laquelle apparaît la saturation (distance de saturation notée z_s) varie en fonction de $a = l_{\perp}$: $z_s \sim 600m$ pour $a = 100m$, $z_s \sim 1600m$ pour $a = 200m$. Cette distance correspond à peu près au double de celle prédite par la zone de Fresnel : $z_s \sim 2l_{\perp}^2/\lambda$. Pour $a = 400m$, la courbe obtenue n'est pas bonne, les hétérogénéités étant assez larges, il faudrait réaliser beaucoup plus de simulations pour obtenir un bon moyennage et la convergence vers la courbe limite. Or ces simulations sont beaucoup trop coûteuses en temps de calcul pour pouvoir en faire un nombre suffisant.

L'anisotropie du velocity shift nous intéresse plus particulièrement : il est maximal quand l'onde se propage le long de la plus grande longueur de corrélation. Dans l'optique géométrique, Samuelides & Mukerji [80] ont étudié le velocity shift dans les milieux anisotropes en fonction de l'angle de propagation et ont confirmé les résultats théoriques avec des simulations par tracé de rais. Dans nos expériences numériques, nous pourrions comparer les valeurs obtenues aux valeurs théoriques, mais nous ne le faisons pas ici. Les valeurs expérimentales ne s'accordent pas aux valeurs théoriques car les effets mesurés sont trop faibles et trop sensibles. Notre procédure de pointé peut également introduire des

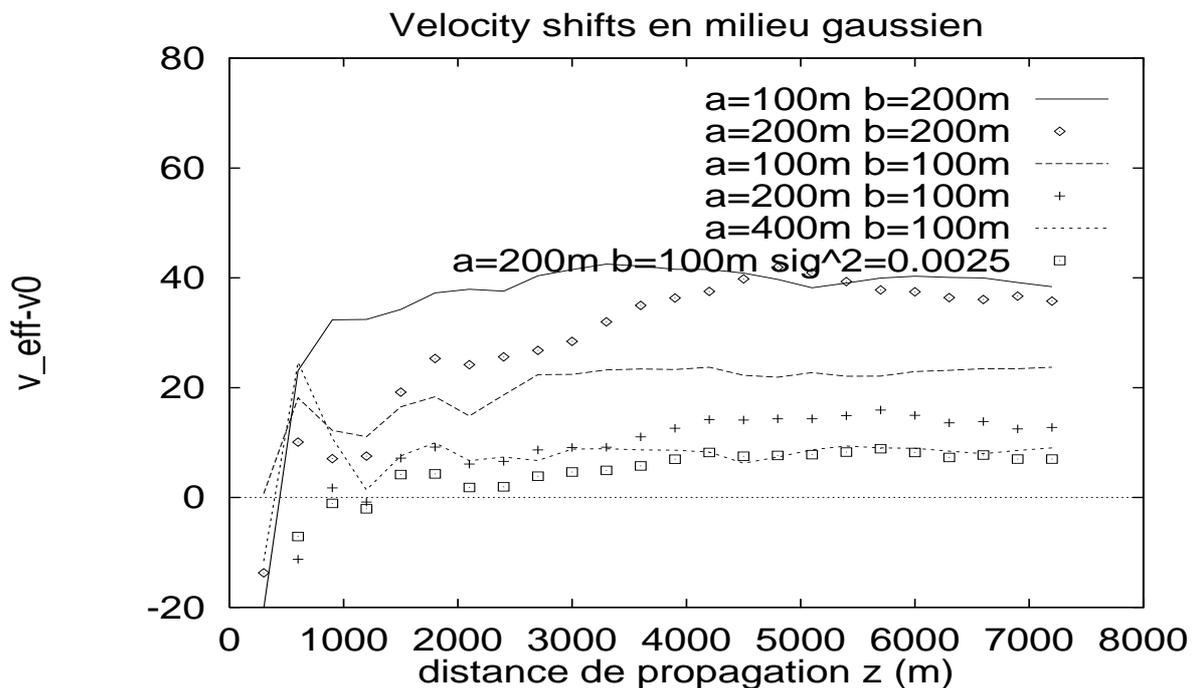


FIG. 2.11 – Velocity shifts après simulations numériques dans des milieux gaussiens (propagation dans cinq réalisations de chaque modèle).

biais non négligeables dans les temps de trajet. Nous nous contentons donc de comparer les velocity shifts expérimentaux entre eux.

L'anisotropie du velocity shift passe d'une dépendance en $l_{\parallel}/l_{\perp}^2$ dans l'optique géométrique à une dépendance en $l_{\parallel}l_{\perp}$ dans l'approximation de Fraunhofer. Ainsi, pour les faibles distances de propagation (inférieures à 1500m), les shifts les plus grands sont ceux du milieu $a = 100m, b = 200m$ ($l_{\parallel}/l_{\perp}^2 = 0.02$), suivi du milieu $a = b = 100m$ ($l_{\parallel}/l_{\perp}^2 = 0.01$), du milieu $a = b = 200m$ ($l_{\parallel}/l_{\perp}^2 = 0.005$) et du milieu $a = 200m, b = 100m$ ($l_{\parallel}/l_{\perp}^2 = 0.0025$). Aux grandes distances cependant, la dépendance en $l_{\parallel}l_{\perp}$ n'est pas encore présente.



Remarque 2.5.1 *Ce phénomène du velocity shift n'a été pris en compte que récemment en sismologie. En sismique pétrolière, il n'a pas encore été confronté aux données de terrain. L'anisotropie du velocity shift pourrait par exemple expliquer une part de l'anisotropie apparente mesurée par la sismique : différences entre logs soniques, vitesses de sismique de puits, vitesses de sismique réflexion, vitesses de sismique réfraction, ...*

2.5.4 La variance des temps de trajet

Avant de s'attaquer au calcul des covariances des temps, on étudie le comportement de la variance des temps en fonction de la profondeur z , des portées longitudinale $b = l_{\parallel}$ et transverse $a = l_{\perp}$, et de l'écart-type σ_{ϵ} des perturbations. Les mesures de variance sont plus robustes que les mesures de moyenne statistique. Il est donc à présent possible de comparer mesures expérimentales et résultats théoriques. Nos hypothèses de travail pourront ainsi être validées. En propageant le champ d'onde dans plusieurs réalisations de chaque modèle aléatoire, on a pu veiller à l'ergodicité de nos résultats. On visualise

les différentes courbes de variances calculées avec un nombre croissant de réalisations. On estime que les résultats sont statistiquement corrects quand la convergence a été atteinte. Pour obtenir la convergence, cinq réalisations ont été suffisantes pour chaque modèle.

Les conditions théoriques de base sont vérifiées pour tous les milieux : $b \ll z$ et $a, b \gg \lambda$. Les conditions à prendre en compte sont celles de l'approximation parabolique (eq. n°3 de (2.29), $z \ll a^4/\lambda^3$), de l'approximation de Rytov (eq. (2.30), $z \ll \lambda^2/(\sigma_\epsilon^2 b)$) et de la dérivation de la covariance des temps (eq. (2.52), $b \lesssim a$).

Quand $z \sim a^4/\lambda^3$, l'approximation parabolique n'est plus valide car un terme important n'est pas présent dans la fonction de lissage. Des contributions au wavefront healing ont été négligées, et la variance prédite par la théorie est plus forte que la variance réelle. C'est ce que l'on observe en Fig. 2.12 (a), pour $a = 100m$, $b = 100m$ ($a^4/\lambda^3 \sim 800m$). La variance expérimentale s'éloigne de la variance théorique (celle de Fraunhofer) au delà de $z = 2000m$. En revanche, quand $a = 200m$ (Fig. 2.12 (c)), $a^4/\lambda^3 \sim 13000m$ et les mesures expérimentales et théoriques s'accordent jusqu'à $5500m$.

Par ailleurs, la variance des temps pour $a = 100m$, $b = 200m$ (Fig. 2.12 (a)) ne correspond pas à la variance théorique à partir de $z = 1000m$. Il faut cependant faire attention à ce cas qui ne respecte pas l'hypothèse $b \lesssim a$ (ici b vaut le double de a). C'est certainement l'échec de cette approximation qui est responsable de la chute si précoce de la variance des temps. Toutefois, dans les deux cas ($a = 100m$ avec $b = 100m$ ou $b = 200m$), l'augmentation de la variance semble tout de même linéaire jusqu'à $5000m$, ce qui montre une certaine cohérence dans les mesures de variance. En fait, ces deux approximations ($z \ll a^4/\lambda^3$ et $b \lesssim a$) conduisent à l'omission de termes de régularisation et de lissage des temps. Ceux-ci ont pour effet une diminution de la variance des temps.

Quand l'approximation parabolique est valide mais que l'approximation au premier ordre échoue, la variance expérimentale devrait être supérieure à la variance théorique (eq. (2.77)). Ce résultat théorique a été observé expérimentalement par Fiorina [28] et Lhuillier et al. [57], qui utilisent la méthode des faisceaux gaussiens pour calculer les amplitudes et les temps d'arrivée. Basée sur une approximation haute fréquence, elle permet la prise en compte des caustiques et des zones d'ombre. Ces auteurs observent alors l'échec de l'approximation au premier ordre sur la variance des temps, en des distances de propagation de l'ordre de 40 fois la portée (avec $a = 3cm$, $\sigma_\epsilon = 0.011$). Ce résultat est cohérent avec la limite $z/a \ll 1/\sigma_\epsilon = 90$ que l'on a obtenue en (2.44).

Nos résultats sur les temps de trajet sont plus ambigus, car le pointé des temps n'est plus valable quand le champ d'onde est trop déformé. Ils sont toutefois plus réalistes car nos simulations utilisent l'acoustique et non l'approximation haute fréquence. On observe sur nos expériences une chute brutale ou une saturation de la variance à certaines distances de propagation. Quand $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$, la chute a lieu vers $5000m$ pour $b = 100m$ (Fig. 2.12 (b), (c)) et vers $3000m$ pour $b = 200m$ (Fig. 2.12 (d)). Pour $\sigma_\epsilon^2 = 0.0025$, la chute est beaucoup plus faible (Fig. 2.12 (c)). Ce phénomène est certainement lié à la limite de Rytov : $\lambda^2/(\sigma_\epsilon^2 b) \sim 2500m$ pour $b = 200m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$. Pour que Rytov soit valide, les distances de propagation doivent donc respecter $z < \lambda^2/(\sigma_\epsilon^2 b)$.

Le modèle $a = 400m$, $b = 100m$ respecte les hypothèses de l'optique géométrique sur quelques milliers de mètres ($a^2/\lambda \sim 3200m$). A cause de la largeur des hétérogénéités le nombre de simulations pour obtenir la convergence doit être plus grand, et ici il est

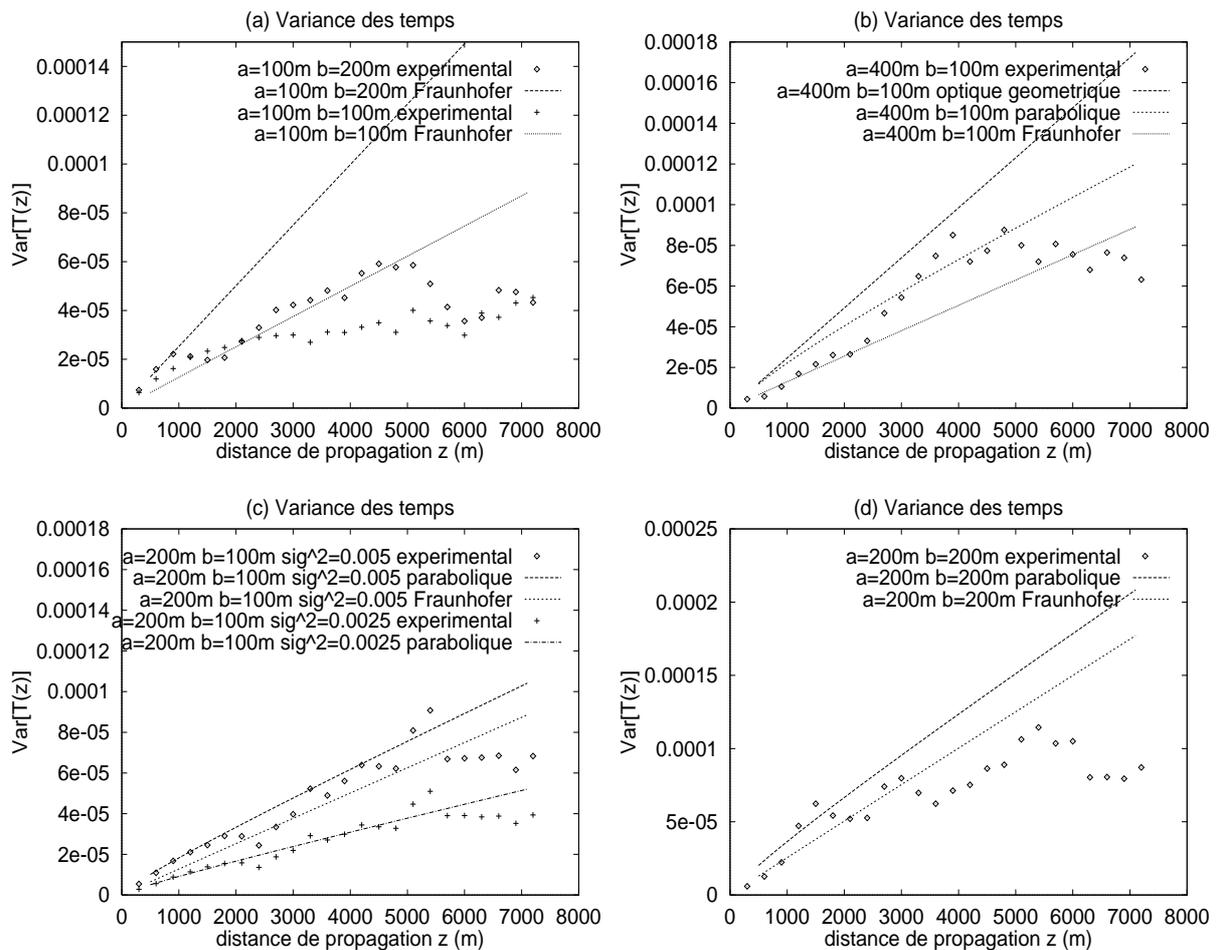


FIG. 2.12 – Variance des temps de trajet après simulations numériques dans des milieux gaussiens (propagation dans cinq réalisations de chaque modèle). Comparaisons avec courbes théoriques (approximations de Fraunhofer, parabolique, optique géométrique).

insuffisant. La convergence vers la courbe théorique de l'optique géométrique a lieu pour de grandes distances de propagation ($z \sim 4000\text{m}$) (Fig. 2.12 (b)). Cependant, on observe bien une augmentation linéaire de la variance jusqu'à 4000m , ce qui est en accord avec la théorie. Ensuite, la variance sature certainement du fait de l'échec de l'approximation de Rytov.

2.5.5 Inversion de la covariance des temps

On a vu que les mesures de variance des temps sont cohérentes avec les différents régimes théoriques de propagation, mais ne coïncident pas exactement aux prédictions théoriques. Dans cette section, les mesures de covariance des temps sont pris en considération, mais normalisées par la variance. Par effets de compensation, le rapport obtenu a alors plus de chance de coïncider avec la théorie que les valeurs absolues de covariance. Deux milieux et différentes distances de propagation sont choisis. Les covariances normalisées des temps sont calculées tous les 10m (espacement entre récepteurs) pour chaque distance de propa-

gation. Elles sont comparées aux covariances normalisées théoriques $C_{Tpl}(\rho, z)/C_{Tpl}(0, z)$ dans l'optique géométrique, égales à celles de l'approximation de Fraunhofer. En 2D, on a

$$\frac{C_{Tpl}^{AS}(\rho, z)}{C_{Tpl}^{AS}(0, z)} = \frac{2}{A_0} \int_0^\infty C_0 \left(\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} + z'^2} \right) dz', \quad (2.79)$$

où AS signifie régimes asymptotiques, et A_0 est la portée intégrale de la covariance standardisée C_0 . Pour une onde plane, la condition (2.49) $\rho \ll z$ (séparation spatiale entre les temps faible devant la distance de propagation) n'est pas nécessaire.

Par ailleurs, on applique l'inversion directe sur la covariance normalisée des temps d'une onde plane (eq. (2.75)). On cherche à retrouver la covariance standardisée des vitesses $C_0(\rho/a)$. Sur cette courbe, il est possible d'obtenir une valeur pour la portée lorsqu'un modèle a été choisi. Par exemple pour un milieu gaussien, $C_0(\rho/a) = e^{-1} \simeq 0.37$ en $\rho = a$. L'une des difficultés repose sur l'intégration numérique que l'équation (2.75) nécessite. Il faut se fixer une distance d'intégration à la place de la borne infinie, ni trop petite pour ne pas négliger des contributions importantes, ni trop grande car la covariance aux grandes distances n'est pas robuste. On choisit la distance correspondant au double de la portée. D'autre part, pour effectuer plus facilement l'intégration, on ajuste un polynôme à l'aide d'une régression par moindres carrés sur la covariance des temps. Un polynôme de degré quatre est satisfaisant, et c'est sur celui-ci que l'intégration est effectuée.

En Fig. 2.13 (a) et 2.14 (a), les covariances normalisées théoriques et expérimentales sont montrées. La covariance théorique correspond à celle de l'optique géométrique et de l'approximation de Fraunhofer. Celle de l'approximation parabolique serait légèrement moins décroissante. En Fig G.3 (b) (p 127), on compare ces deux covariances normalisées théoriques pour deux types d'anisotropie.

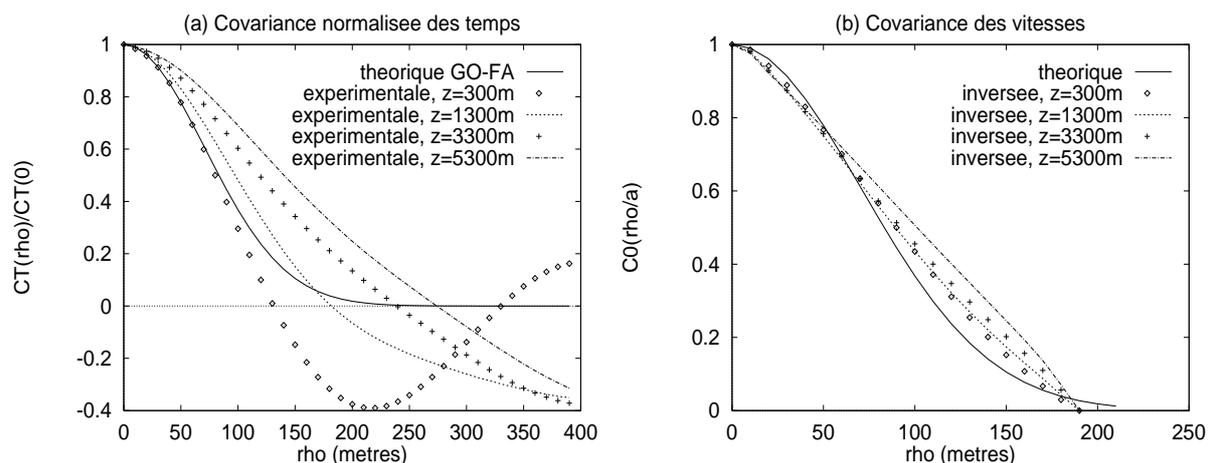


FIG. 2.13 – (a) Covariances normalisées des temps (en différentes profondeurs) et (b) leur inversion, pour un milieu gaussien $a = b = 100m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$.

En Fig. 2.13, les résultats du milieu $a = b = 100m$ sont présentés. La covariance expérimentale des temps en $z = 300m$ s'ajuste bien avec la covariance théorique pour les faibles ρ . Ensuite, les courbes sont de moins en moins décroissantes. Dans ce milieu, la

limite théorique entre optique géométrique et Fraunhofer se situe en $z \sim a^2/\lambda = 200m$. Par ailleurs, on a vu au §2.5.4 que l'approximation parabolique n'est pas valide dans ce milieu au delà de $2000m$, donc celle de Fraunhofer non plus. Les temps sont plus régularisés et lissés que ce qui est prévu par l'approximation parabolique, ainsi la décroissance des corrélations est plus faible. Comme notre polynôme des moindres carrés ne représente pas exactement la covariance, l'inversion directe ne donne pas des courbes avec une allure de gaussienne. Les courbes que l'on obtient ont tout de même une dérivée nulle en zéro (comme la covariance gaussienne). L'inversion de la portée a donne $115m$ au lieu de $100m$ pour les trois premières distances (erreur de 15%).

En Fig. 2.14, le milieu $a = b = 200m$ est considéré. Cette fois-ci, l'approximation parabolique est valide, et théoriquement, l'optique géométrique est respectée en $z = 300m$, alors que l'approximation de Fraunhofer est valide aux grandes distances ($z = 5300m$). Les covariances des temps correspondant à ces deux distances s'accordent bien avec la théorie. Les autres covariances devraient être moins décroissantes, alors que l'on observe des décroissances plus rapides. Ce phénomène n'est pas significatif, et révèle bien la sensibilité de nos mesures. L'inversion directe en $z = 300m$ et $z = 1300m$ donne de bons résultats (allure de gaussienne), mais de mauvais en $z = 3300m$ et $z = 5300m$. Pour les trois premières distances, les portées sont bien estimées (erreurs inférieures à 15%).

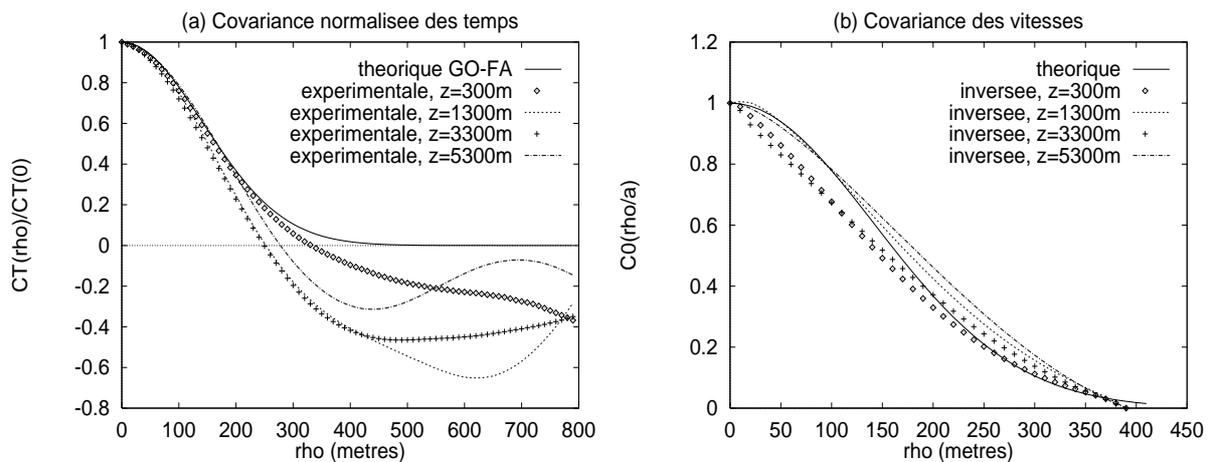


FIG. 2.14 – (a) Covariances normalisées des temps (en différentes profondeurs) et (b) leur inversion, pour un milieu gaussien $a = b = 200m$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$.

Du fait de difficultés dans les procédures de dérivation et d'intégration, la structure de la covariance ne s'inverse pas parfaitement. Néanmoins, les covariances inversées sont proches du modèle théorique. Le point le plus positif est l'inversion de la portée qui diffère à 15% près de celle du modèle théorique. Même quand l'approximation de Rytov et l'approximation parabolique ne sont plus valides, il est possible d'obtenir une bonne estimation de cette portée.

2.6 Conclusions

La théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire a été abordée dans ce chapitre comme une théorie physique, basée sur les ordres de grandeur des variables du milieu et du champ d'onde. Les conditions de validité de nos approximations ne sont pas mathématiquement rigoureuses, mais ont toutes un sens intuitif. Les fluctuations de phase et de temps de trajet en milieu hétérogène ont été largement étudiées dans la littérature. On en a fait une synthèse, mettant l'accent sur notre domaine d'intérêt (la sismique pétrolière), et démontrant au passage quelques résultats nouveaux : précision des domaines de validité de l'approximation Rytov parabolique en milieu anisotrope, velocity shift dans l'optique géométrique en milieu anisotrope 2D et 3D, covariance des temps d'une onde sphérique en milieu 3D anisotrope, inversion directe de la covariance des vitesses pour une onde sphérique dans l'optique géométrique et dans l'approximation de Fraunhofer.

L'originalité de ce chapitre concerne surtout les expériences numériques basées sur les différences finies en acoustique et très lourdes à mettre en œuvre. Les conditions de validité des différentes approximations ont ainsi pu être éclaircies. Voici un bref rappel des différentes contraintes pour l'application de nos résultats théoriques :

- ▷ Etude statistique des hétérogénéités par la propagation d'ondes acoustiques : $\lambda \ll z$ et $l_{\parallel} \ll z$, où λ est la longueur d'onde, l_{\parallel} la taille caractéristique des hétérogénéités le long de la direction de propagation, et z la distance de propagation. Il est communément admis que la portée doit être inférieure à un dixième du champ pour que l'inférence statistique soit possible : $l_{\parallel} < z/10$.
- ▷ Approximation de Rytov : $\sigma_{\epsilon} \ll 1$ et $\sigma_{\epsilon}^2 z l_{\parallel} \ll \lambda^2$, où σ_{ϵ} représente l'écart-type des perturbations de lenteur au carré. Nos simulations numériques ont permis de distinguer dans la seconde condition la limite $z < \lambda^2 / (\sigma_{\epsilon}^2 l_{\parallel})$.
- ▷ Approximation parabolique : $\lambda \ll l_{\perp}$, $\lambda \ll l_{\parallel}$, $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}^2 / \lambda$ où l_{\perp} est la taille caractéristique des hétérogénéités transverse à la propagation. Des études précédentes ont défini les limites $l_{\perp}, l_{\parallel} > 2\lambda$ [Müller et al [66]]. Pour l'autre condition, nos expériences numériques ont distingué la frontière $z < 2l_{\perp}^4 / \lambda^3$.
- ▷ Optique géométrique : $\sqrt{\lambda z} \ll l_{\perp}$. Du comportement du velocity shift, on en a déduit la borne $z < 2l_{\perp}^2 / \lambda$. Cette condition numérique est en parfait accord avec celle de Samuelides & Mukerji [80], $z < 0.3kl_{\perp}^2$.
- ▷ Développement au premier ordre dans l'optique géométrique : $z \ll l_{\perp} / \sigma_{\epsilon}$. Des mesures numériques de Fiorina [28] (en utilisant la méthode des faisceaux gaussiens) coïncident avec $z < l_{\perp} / (2\sigma_{\epsilon})$.
- ▷ Approximation de Fraunhofer : $\sqrt{\lambda z} \gg l_{\perp}$. Sa limite est très difficile à observer à cause de la multitude d'autres conditions à respecter. De plus, dans un milieu aléatoire, les hétérogénéités sont présentes partout, et avant d'atteindre les distances soumises à Fraunhofer, l'onde s'est propagée dans l'optique géométrique, puis dans l'approximation parabolique.
- ▷ Simplification dans le calcul de la covariance des temps : $l_{\parallel} \lesssim l_{\perp}$ (pas nécessaire dans l'optique géométrique). On a constaté que nos formules n'étaient pas valides dans un milieu où $l_{\parallel} = 2l_{\perp}$.

- ▷ Simplification dans le calcul de la covariance des temps d'une onde sphérique en milieu anisotrope : $\rho \ll z$, où ρ est la séparation spatiale transverse entre les deux temps.

Les méthodes théoriques exposées sont toutes limitées à la propagation en espace libre et à des cas d'école. Le milieu, à densité constante et à vitesse stationnaire ou intrinsèque, n'autorise pas la prise en compte d'interfaces réfléchissantes. Les conditions de propagation en milieu réel sont complexes et la résolution théorique du problème est rarement possible. Dans le cadre d'un problème direct, les méthodes numériques de propagation acceptent toutes les géométries de milieu aléatoire. En propageant dans plusieurs réalisations d'un modèle, les caractéristiques statistiques du champ d'onde peuvent être retrouvées en moyennant les résultats des différentes réalisations [Chevret [18], Fiorina [28]].

Dans le cadre du problème inverse (retrouver les paramètres statistiques de la vitesse), il est indispensable d'avoir des formules théoriques à notre portée. Touati [89] développe une méthode pour prendre en compte dans la propagation sous l'optique géométrique la réflexion sur une interface plane. On se base dans le chapitre suivant sur cette approche, la généralisant à des géométries d'interface irrégulières, à des champs de vitesse non stationnaires, et y adaptant nos nouveaux résultats théoriques (approximation parabolique, approximation de Fraunhofer, inversion du rapport d'anisotropie, inversion directe, ...).

Chapitre 3

Application à la sismique réflexion

La théorie développée au chapitre précédent concerne la transmission et la diffusion-avant d'une onde dans un milieu acoustique contenant uniquement des hétérogénéités de vitesse de taille supérieure à la longueur d'onde. A densité constante, les contrastes d'impédance sont donc lisses et il y a très peu d'énergie réfléchi car ce sont les courtes variations d'impédance qui sont la cause des réflexions. Or, la modélisation usuelle en sismique réflexion consiste à diviser le sous-sol en différentes couches de vitesse séparées par des interfaces. Celles-ci représentent en fait un contraste d'impédance (ou de densité) qui provoque la réflexion de l'onde incidente. Il est donc impératif de prendre en compte les différentes interfaces que l'onde peut rencontrer.

Dans la première section, on s'attache à développer une procédure d'inversion des paramètres statistiques de la vitesse pour un réflecteur horizontal. Dans la deuxième section, on la généralise en tenant compte des fluctuations du réflecteur. On parvient à séparer les fluctuations à l'échelle du macro-modèle et les fluctuations hectométriques modélisées par une fonction aléatoire. Ceci revient à supposer que ce sont les fluctuations rapides des temps d'arrivée qui contiennent les informations sur les fluctuations rapides du champ de vitesse et du réflecteur. On ne traite pas en profondeur le problème qui consiste à séparer fluctuations lentes et rapides, mais une solution heuristique est donnée pour le résoudre dans notre cas. Notre contribution revient surtout à découpler les perturbations des temps liées au réflecteur et celles dues à la vitesse. L'inversion est ensuite étendue aux géométries multicouches et aux champs de vitesse non stationnaires (*i.e.* en prenant en compte un macro-modèle de vitesse non constant). Finalement, des expériences numériques sur données réelles montrent l'utilité pratique de notre procédure d'inversion.

3.1 Milieu avec un réflecteur horizontal

Le contexte le plus simple pour intégrer une réflexion dans notre analyse statistique des fluctuations de temps de trajet est le cadre d'un réflecteur horizontal. Ce problème a été résolu en 2D par Touati [89] (chap 6) et Touati et al. [90] par une idée simple. On l'explique en Annexe G (p 124 et 125) et en Fig. G.1 (p 124). En 3D, le principe est exactement le même. En décomposant le temps d'arrivée par le temps du trajet descendant source-réflecteur ($\mathbf{r}_1 = SM$) et le temps du trajet montant réflecteur-récepteur ($\mathbf{r}_2 = MR$), la

variance des temps à offset commun se développe en

$$Var[T_M(\mathbf{x})] = Var[T(\mathbf{r}_1)] + Var[T(\mathbf{r}_2)] + 2Cov[T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)] , \quad (3.1)$$

où $T_M(\mathbf{x})$ est le temps d'arrivée d'offset \mathbf{x} (qui est un vecteur) et de point milieu M .

Il est clair que si le réflecteur est horizontal de profondeur L , la variance ne dépend pas de la position de M , mais uniquement de \mathbf{x} . En effet, les angles d'incidence de \mathbf{r}_1 et de \mathbf{r}_2 sont indépendants de la position du tir, et donc les statistiques sur $T(\mathbf{r}_1)$ et $T(\mathbf{r}_2)$ ne dépendent plus de M . De plus, $Var[T(\mathbf{r}_1)]$ et $Var[T(\mathbf{r}_2)]$ sont égales, car les angles d'incidence de \mathbf{r}_1 et de \mathbf{r}_2 sont les mêmes en valeur absolue. Cela n'est plus vrai si le réflecteur est penté ou si il y a un pendage dans l'anisotropie du champ de vitesse.

Les formules obtenues au chapitre 2 sont valides sous de multiples hypothèses résumées au §2.6. On note z la distance de propagation, σ_ϵ l'écart-type de ϵ , l_\parallel et l_\perp les portées de ϵ , λ la longueur d'onde dominante. Dans ce chapitre, certaines devront toujours être vérifiées : $\sigma_\epsilon \ll 1$, $l_\parallel \ll z$, $\lambda \ll l_\perp$ et $\lambda \ll l_\parallel$. Dans l'approximation Rytov parabolique, il faut aussi que $\sigma_\epsilon^2 z l_\parallel \ll \lambda^2$, $\sqrt{\lambda z} \ll l_\perp^2 / \lambda$ et $l_\parallel \lesssim l_\perp$. Dans les régimes asymptotiques, soit on se place dans l'approximation de Fraunhofer qui nécessite $\sqrt{\lambda z} \gg l_\perp$ avec en plus les conditions Rytov parabolique, soit on se place dans l'optique géométrique valide pour $\sqrt{\lambda z} \ll l_\perp$ et $z \ll l_\perp / \sigma_\epsilon$.

Pour une onde sphérique, la séparation angulaire entre les rayons doit également être faible. C'est pourquoi, cette section est constituée de deux parties. En premier lieu, l'application des formules à faibles angles d'incidence permet de développer une procédure d'extraction de la structure de la covariance et de la portée latérale des vitesses. En second lieu, il est possible après cette inversion d'utiliser les temps à grand offset pour inverser le rapport d'anisotropie, et donc la portée verticale des vitesses, puis son écart-type.

3.1.1 Utilisation des temps à offset faible

Principes

En sismique réflexion, l'hypothèse de faibles offsets devant la profondeur L du réflecteur signifie que les rayons sont quasi-verticaux (cf Fig. 3.3 (a)) :

$$x = \|\mathbf{x}\| \ll 2L . \quad (3.2)$$

La direction de propagation est quasi-verticale ; donc quel que soit \mathbf{x} , $C_\epsilon^e = C_\epsilon$, les longueurs des rayons sont approximées par L , et les longueurs de corrélation parallèle et transverse à la direction de propagation valent $l_\parallel = b$, $\mathbf{l}_\perp = \mathbf{a}$.

Pour utiliser notre formule de covariance des temps, les conditions $b \lesssim a$ et $b \ll L$ sont nécessaires. Dans les bassins sédimentaires, l'hypothèse $b \lesssim a$ est amplement justifiée, car le sous-sol est constitué de strates. Pour garantir $b \ll L$, il faut considérer des réflecteurs suffisamment profonds. b doit en fait être inférieur à un dixième de L [Roth [73]].

De (3.1), on obtient la variance des temps d'arrivée à offset commun (cf (G.15) et (G.16) p 124) :

$$Var[T(\mathbf{x})] = 2C_T(0, L) + 2C_T(\mathbf{x}, L) , \quad (3.3)$$

où $C_T(\mathbf{x}, L)$ est la covariance transverse des temps séparés de \mathbf{x} et de distance de propagation L . Dans l'approximation parabolique PA (eq. (2.62) p 47) et dans les régimes asymptotiques (AS), *i.e.* dans l'optique géométrique (eq. (2.65) p 48, $\Upsilon = 1$) et dans l'approximation de Fraunhofer (eq. (2.66) p 48, $\Upsilon = 2$), on a pour $\mathbf{x} \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T^{PA}(\mathbf{x}, L) = \frac{\pi\sigma_\epsilon^2 bL}{2v_0^2 x_\perp} \int_0^{x_\perp} \iint e^{i\mathbf{\kappa}\cdot\mathbf{u}} \cos^2 \left[\frac{\kappa_\perp L}{2k} \frac{u}{x_\perp} \left(1 - \frac{u}{x_\perp}\right) \right] \Phi_0(\kappa) d\mathbf{\kappa} du, \\ C_T^{PA}(0, L) = \frac{\pi\sigma_\epsilon^2 bL}{2v_0^2} \int_0^1 \iint \cos^2 \left[\frac{\kappa_\perp L}{2k} u(1-u) \right] \Phi_0(\kappa) d\mathbf{\kappa} du, \\ C_T^{AS}(\mathbf{x}, L) = \frac{\sigma_\epsilon^2 bL}{2\Upsilon v_0^2 x_\perp} \int_0^{x_\perp} \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z^2}) dz du, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où $x_\perp = \sqrt{x^2/a_x^2 + y^2/a_y^2}$ et $\kappa_\perp = \sqrt{\kappa_x^2/a_x^2 + \kappa_y^2/a_y^2}$.

On esquisse ici les points clés de notre algorithme d'inversion de la portée ; l'article de l'Annexe G présente les détails du raisonnement. On conseille vivement la lecture de cet article qui a pour but d'exposer la méthode d'inversion de la portée latérale du champ de vitesse, et ce dans nos trois approximations considérées. Les calculs sont effectués pour un milieu aléatoire 2D. En milieu 3D transverse isotrope, les formules (G.17), (G.18), (G.19) et (G.20) sont également valides.

Pour résumer, il est utile de calculer et de tracer les courbes suivantes :

- ★ La variance des temps à l'offset zéro qui vaut dans les régimes asymptotiques (eq. (2.67) p 48) :

$$Var[T(0)]^{AS} = 4C_T^{AS}(0, L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\Upsilon v_0^2} bLA_0, \text{ avec } \Upsilon = 1 \text{ en GO, } \Upsilon = 2 \text{ en FA,} \quad (3.5)$$

et A_0 la portée intégrale de la covariance standardisée C_0 .

- ★ La variance normalisée qui s'écrit

$$\frac{Var[T(\mathbf{x})]}{Var[T(0)]} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{C_T(\mathbf{x}, L)}{C_T(0, L)} \right]. \quad (3.6)$$

Au §2.4.3, il a été montré que, sous l'approximation parabolique, le rapport $C_T(\mathbf{x}, L)/C_T(0, L)$ ne dépend pas de la portée longitudinale, mais uniquement de C_0 et des portées transverses. Cette courbe permet donc de caractériser la structure de la covariance. Dans les régimes asymptotiques et pour un milieu 2D ou 3D transverse isotrope ($x_\perp = x/a$), elle est égale à

$$\frac{C_T^{AS}(\mathbf{x}, L)}{C_T^{AS}(0, L)} = \frac{C_T^{AS}(x, L)}{C_T^{AS}(0, L)} = \frac{2a}{A_0 x} \int_0^{x/a} \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z^2}) dz du, \quad (3.7)$$

- ★ La variance normalisée à l'offset $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ qui vaut

$$\frac{Var[T(\mathbf{a})]}{Var[T(0)]} \Big|^{AS} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_0} \int_0^1 \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z^2}) dz du. \quad (3.8)$$

Le membre de droite est connu si le type de covariance C_0 a été déterminé. A ce moment là, l'estimation de \mathbf{a} se fait directement. Pour un milieu gaussien,

$Var[T(\mathbf{a})]/Var[T(0)] = 0.875$ (eq. (G.21) p 126) ; pour un milieu exponentiel, $Var[T(\mathbf{a})]/Var[T(0)] = 0.91$ (eq. (G.22) p 126). Touati [89] (chap 6) calcule ces rapports pour d'autres types de milieu et montre que l'incertitude sur a est au pire de 20% si C_0 est mal estimé.

★ Pour l'inversion directe de la covariance de la vitesse C_0 , on a (eq. (2.75) p 50)

$$C_0\left(\frac{r}{a}\right) = \left[\int_r^\infty \frac{\nabla_\perp I_R(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \right] / \left[\int_0^\infty \frac{\nabla_\perp I_R(x)}{x} dx \right], \quad (3.9)$$

pour un milieu 2D ou 3D transverse isotrope avec $I_R(x) = \frac{\partial}{\partial x} \{x Var[T(x)]\}$. Les procédures de dérivation et d'intégration numériques qui sont liées à cette formule sont toutefois sensibles (cf §2.5.5).

Remarque 3.1.1 *L'hypothèse d'un champ de vitesse transverse isotrope est très utile en pratique (si elle est valide). La variance des temps ne dépend plus que de la valeur absolue de l'offset. Tous les temps de même offset peuvent être utilisés indépendamment de leur direction pour le calcul de la variance, ce qui permet d'utiliser un nombre beaucoup plus important de données et d'obtenir des mesures plus robustes. C'est l'avantage des données 3D, le problème étant alors de pointer un aussi gros volume de traces.*

Tests numériques

Des tests synthétiques 2D, effectués dans l'article de l'Annexe G, sont consacrés à l'inversion de la portée horizontale a . Il s'agit de faibles hétérogénéités de vitesse (fluctuations de l'ordre de 3.5%), de covariance gaussienne et de taille hectométrique. Pour la simulation, la propagation ($\lambda = 50m$) et le pointé, on utilise les mêmes outils que ceux du §2.5. Voici les conclusions tirées de ces expériences numériques :

- ◇ Les valeurs de $Var[T(0)]$ correspondent aux valeurs théoriques et respectent bien les domaines de validité des différentes approximations (PA, GO, FA).
- ◇ La décroissance de la variance avec l'offset a lieu, et est proche de la décroissance théorique. Cependant, la précision est approximative.
- ◇ Les erreurs dans l'estimation de la portée sont au pire de l'ordre de 20%.
- ◇ L'ergodicité des temps d'arrivée est un point mal maîtrisé. Pour obtenir la convergence des variances, plus les hétérogénéités sont larges, plus le champ exploré doit être grand, et plus il est nécessaire de produire des simulations.
- ◇ Si le milieu a une portée horizontale supérieure à l'offset maximal utilisé, aucune décroissance de la variance n'est visible. On en conclut que le milieu est homogène sur une distance supérieure à l'offset maximal.

Présentons à présent deux tests dans des milieux gaussien et exponentiel [Iooss et al. [41]]. Les deux modèles ont les mêmes paramètres : dimensions $4000m \times 2000m$, portées $a = 200m$, $b = 100m$, variance $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$. Un réflecteur horizontal de profondeur $L = 1700m$ réfléchit les ondes sphériques qui y sont propagées (de longueur d'onde $\lambda = 50m$). La discrétisation du milieu et les pas de calcul sont les mêmes que ceux utilisés dans les expériences numériques de l'Annexe G : $dx = dz = 2.5m$ (un dixième de la longueur

d'onde minimale). 15 réalisations (14 tirs dans chacune) ont été nécessaires pour obtenir la convergence des courbes de variance des temps à offset commun. Ainsi, 210 temps ont été pointés pour chaque offset. Pour chaque tir, le champ est enregistré en 51 offsets espacés de $20m$ ($x = 0$ à $x = 1000m$).

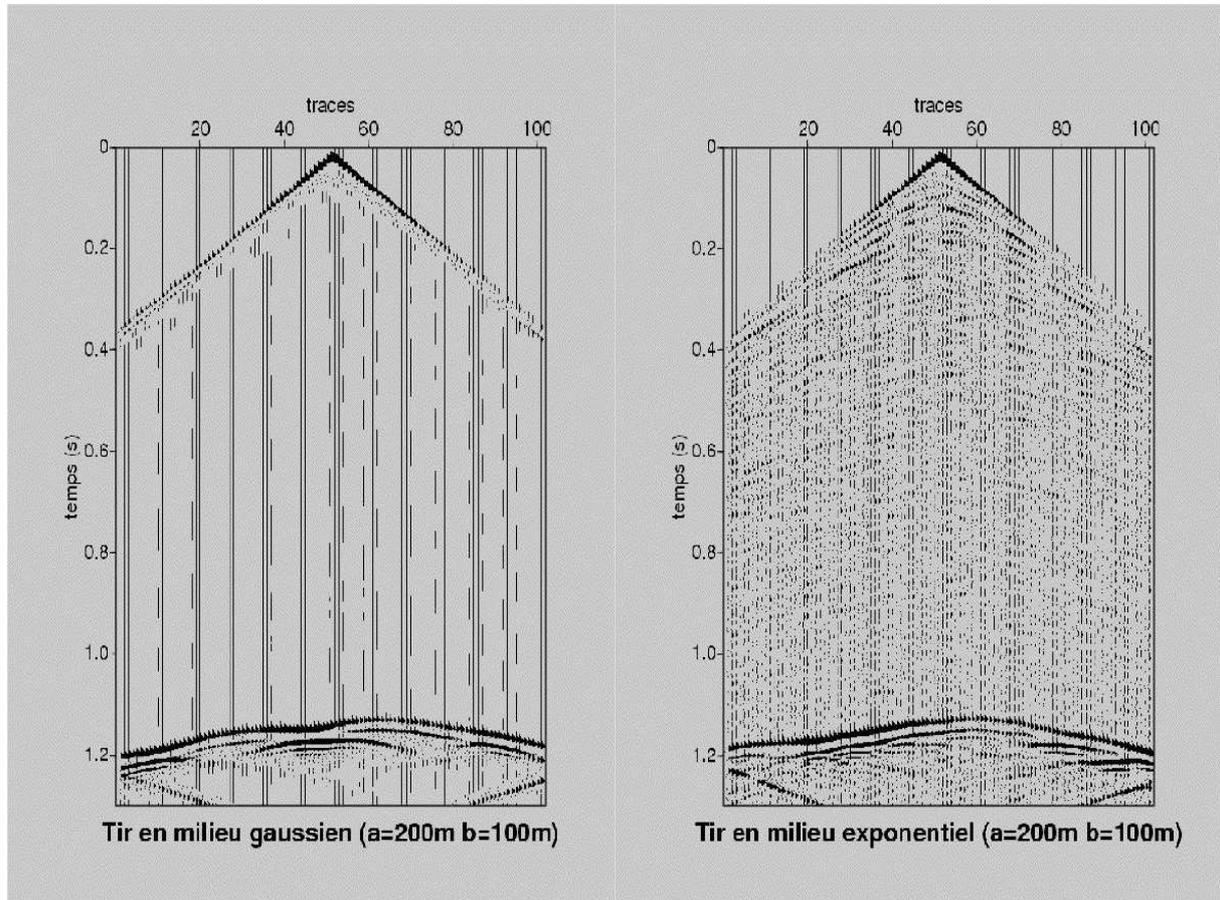


FIG. 3.1 – Enregistrements de tirs synthétiques dans un milieu gaussien et dans un milieu exponentiel. La source et les récepteurs sont disposés en surface (offsets des deux côtés de la source), la distance entre les traces est de $20m$ et le réflecteur est situé en $1700m$.

En Fig. 3.1, on visualise les sismogrammes synthétiques correspondant à un tir dans chaque milieu. Pour le milieu gaussien, seule l'arrivée de la réflexion de l'onde sur le réflecteur est visible. Pour le milieu exponentiel, beaucoup de bruit est présent à l'arrière mais aussi à l'avant du champ d'onde réfléchi. C'est en fait la conséquence de la rugosité du milieu exponentiel : l'onde se diffracte sur les petites hétérogénéités. D'autre part, les différences finies n'étant pas bien adaptées à la propagation en milieu rugueux, il apparaît du bruit et de la dispersion numérique dans les sismogrammes. Par contre, il n'y a pas de difficultés majeures à suivre l'arrivée de l'onde car le champ d'onde réfléchi est aussi net en milieu exponentiel qu'en milieu gaussien. La Fig. 1.8 (p 16) présente des sections à offset commun de simulations en milieu exponentiel. A cause du bruit entourant l'onde primaire, le pointé des temps est plus difficile et moins précis que celui des données correspondant au milieu gaussien.

Dans de tels milieux ($a = 200m$, $b = 100m$), l'approximation Rytov parabolique est valide et les variances expérimentales et théoriques sont en accord (Fig. 3.2 (a)). Pour

le milieu gaussien, la courbe expérimentale est bien lisse et se situe au niveau de celle de l'approximation parabolique. L'estimation de la portée horizontale par (3.8) donne $250m$ au lieu de $200m$. Pour le milieu exponentiel, la courbe est légèrement bruitée et se situe entre l'approximation parabolique et l'optique géométrique. L'estimation de la portée horizontale par (3.8) donne $150m$.

On constate que nos résultats expérimentaux sont très proches de ceux de la courbe théorique issue de l'approximation parabolique (à la fréquence dominante). Dans le cas exponentiel, la portée intégrale A_0 vaut 2; dans le cas gaussien, $A_0 = \sqrt{\pi}$. Il est donc logique que la variance des temps dans un milieu exponentiel soit supérieure à celle d'un milieu gaussien (eq. (3.5)). Il est clair cependant que les courbes expérimentales ne peuvent ajuster la théorie exactement. En effet, l'approximation parabolique suppose une onde monochromatique (à fréquence fixée), alors que nos sismogrammes ont été générés en utilisant une impulsion (fonction source à bande fréquentielle limitée).

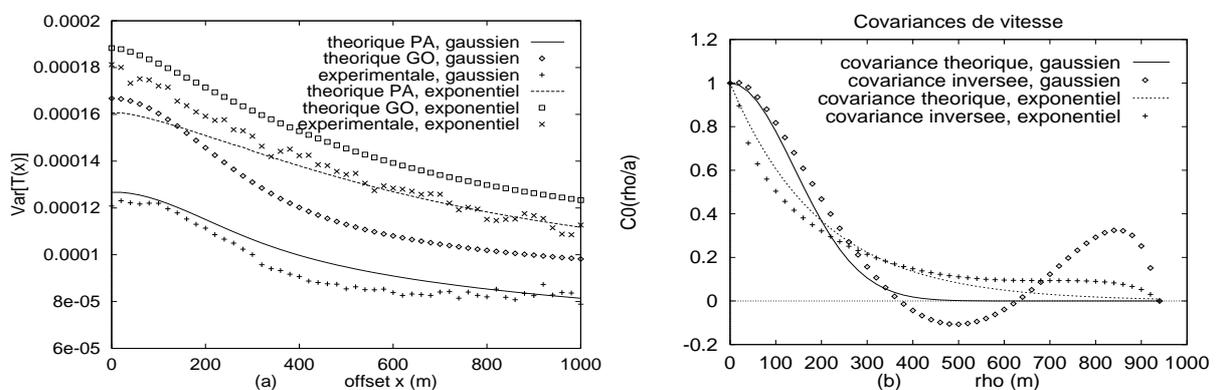


FIG. 3.2 – Simulations pour deux milieux gaussien et exponentiel ($a = 200m$, $b = 100m$, $v_0 = 3000m/s$, $\sigma_v = 106m/s$). (a) Variances des temps expérimentales et théoriques (PA et GO). (b) Inversion des covariances normalisées de vitesse $C_0(\rho/a)$.

En Fig. 3.2 (b), l'inversion directe (3.9) est réalisée. Les courbes de variance normalisée, ajustées par un polynôme de degré quatre, sont intégrées entre 0 et $1000m$. Les résultats sont satisfaisants. Non seulement, les allures des covariances sont bien retrouvées, mais en plus, l'estimation des portées horizontales par $C_0(1) = e^{-1}$ donnent de bons ordres de grandeur : $240m$ pour le milieu gaussien et $180m$ pour le milieu exponentiel.

Nos procédures d'inversion de la covariance et d'estimation de la portée latérale sont définies dans les régimes asymptotiques. Théoriquement, leur utilisation dans le cadre de l'approximation parabolique devrait conduire à une surestimation de la portée. Or dans le cas exponentiel, la portée est sous-estimée. Ceci est bien sûr dû à l'imprécision des mesures de temps. Finalement, nous pouvons conclure que dans le cas idéal d'un réflecteur horizontal et à partir des mesures de temps d'arrivée, nos procédures produisent de manière simple, robuste et rapide un ordre de grandeur de la portée latérale et une idée de la structure de la covariance de la vitesse. De plus, l'estimation de la portée en passant par l'inversion directe est meilleure que celle déduite de la covariance des temps.

3.1.2 Utilisation des temps à grand offset



L'inversion de la longueur de corrélation horizontale et de la vitesse à partir des données sismiques revêt un grand intérêt en exploration pétrolière. En effet, les données de puits sont peu pertinentes s'il s'agit de calculer les corrélations latérales (faible nombre de puits et espacement entre les puits trop grand), mais bien adaptées pour estimer la structure statistique verticale. Cependant, les fréquences utilisées en diagraphies ne sont pas du même ordre qu'en sismique, et la cohérence entre corrélations horizontales issues de la sismique réflexion et corrélations verticales issues des diagraphies risque d'être douteuse.

Les essais sismiques entre puits (où les ondes de propagent horizontalement) permettraient d'obtenir des corrélations verticales cohérentes avec les fréquences utilisées en sismique. Toutefois, deux problèmes majeurs se posent. D'une part, ce type d'expérience ne produit pas de gros volumes de données (inférence statistique difficile). D'autre part, pour des ondes horizontales, l'hypothèse de base de l'utilisation de la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire se note $a \ll z$ (portée horizontale faible devant la distance de propagation). Dans les milieux sédimentaires et étant donné l'espacement entre les puits (de l'ordre du kilomètre), cette condition a de fortes chances d'être violée.

Les moyens d'acquisition actuels permettent l'enregistrement sismique à des offsets de plus en plus grands, où les ondes se propagent jusqu'à 45° . Dans cette section, nous allons développer une méthode permettant d'extraire la portée verticale et l'écart-type des fluctuations à partir des données grand-angle de sismique réflexion. Cette extension pourrait également trouver tout son sens dans d'autres applications pratiques où il est souvent interdit de forer des puits (*e.g.* stockage des déchets radioactifs).

Principes

Dans la section précédente, les covariances des temps ont pu être calculées et les variances des temps des rayons à petit offset ont été approximées par la variance du temps vertical : en passant de (3.1) à (3.3), $Var[T(\mathbf{r}_1)] = Var[T(\mathbf{r}_2)] = C_T(0, L)$. Si l'offset est grand, il faut tenir compte de la direction de propagation car le milieu est anisotrope (cf Fig. 3.3 (a)). De plus, les distances de propagation varient avec l'offset ($z = \sqrt{L^2 + \frac{\mathbf{x}^2}{4}}$). L'expression générale de la covariance des temps (sans supposer l'angle faible) est calculable, mais n'est pas utilisable pour une inversion [Touati [89] chap 5]. Pour simplifier, supposons que si l'offset est suffisamment grand, la covariance entre les temps des rayons descendant et montant est négligeable par rapport à leur variance. La variance des temps à grand offset en sismique réflexion s'écrit alors

$$\begin{aligned} Var[T(\mathbf{x})]^{PA} &= \frac{\pi\sigma_z^2}{2v_0^2} l_{\parallel} \sqrt{L^2 + \frac{\mathbf{x}^2}{4}} \int_0^1 \int \int W\left[\left(\frac{\kappa_x^2}{l_{\perp x}^2} + \frac{\kappa_y^2}{l_{\perp y}^2}\right) \frac{\sqrt{L^2 + \frac{\mathbf{x}^2}{4}}}{2k}\right] \Phi_0(\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}) d\kappa_x d\kappa_y du, \\ Var[T(\mathbf{x})]^{AS} &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\Upsilon v_0^2} l_{\parallel} A_0 \sqrt{L^2 + \frac{\mathbf{x}^2}{4}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où $W\left(\frac{\kappa^2 z}{k}\right) = \cos^2\left[\frac{\kappa^2 z}{k} u(1-u)\right]$, L est la profondeur du réflecteur et l_{\parallel} la portée dans la direction de propagation qui correspond à l'offset \mathbf{x} . En 2D, $\frac{1}{l_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}}$ où $\alpha =$

$\arctan(x/2L)$. En 3D, l_{\parallel} est définie par (1.18) (p 28), où pour un couple $(\mathbf{x}, L) = (x, y, L)$, la direction de propagation est donnée par ses angles azimuthal $\beta = \arctan(y/x)$ et polaire $\alpha = \arctan(x/2L)$ (cf Fig. 3.3 (a)).

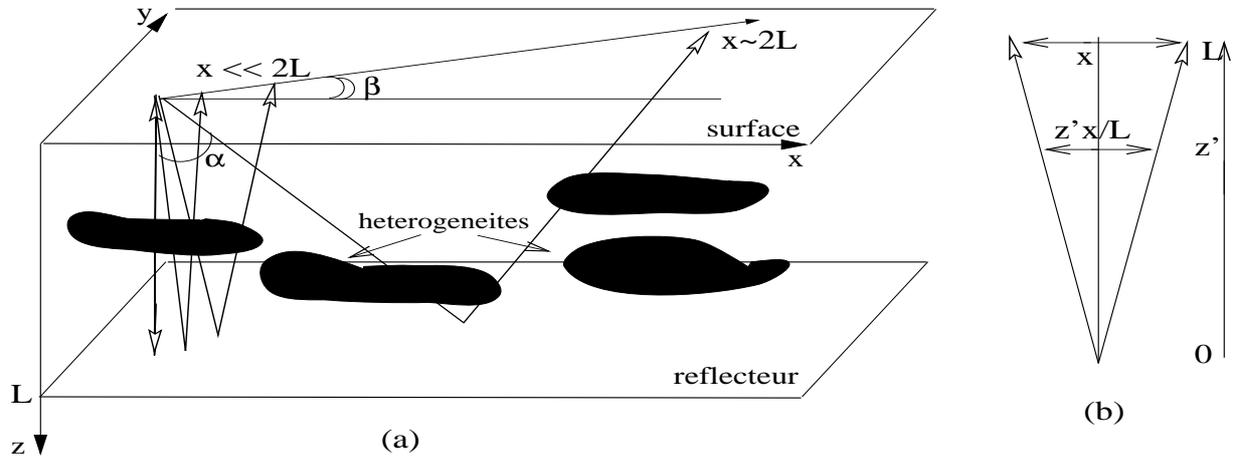


FIG. 3.3 – (a) Représentation en 3D de la sismique à faible offset et de la sismique à grand offset. (b) Séparation transverse des deux rayons.

Précisons quelle condition l'offset doit respecter pour pouvoir négliger la covariance des temps de deux rayons. La séparation transverse entre les rayons descendant et montant dépend de la position verticale z' à laquelle on la calcule (Fig. 3.3). La covariance est quasiment nulle quand la séparation transverse entre les rayons est nettement supérieure à la portée transverse $l_{\perp} = a$ des perturbations de vitesse du milieu. Si z' varie le long du rayon central de 0 à L , cela équivaut à $z'x/L \gg l_{\perp}$ (Fig. 3.3 (b)). Donc si $z' < z_m = l_{\perp}L/x$, la covariance des temps n'est pas nulle, mais peut être bornée par la variance du temps d'un rayon. Le rayon choisi a une distance de propagation z_m , et est dirigé le long de la portée maximale du milieu. Dans notre cas, on choisit une direction latérale, de portée caractéristique $a = l_{\perp}$. On a donc

$$\text{Cov}[T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)] < \text{Var} \left[T \left(z_m = a \frac{L}{x} \right) \right] = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{4\Upsilon v_0^2} a \frac{aL}{x} A_0. \quad (3.11)$$

Ce terme est négligeable par rapport à la variance totale des temps d'arrivée (3.10) si $a^2 \frac{L}{x} \ll 2l_{\parallel} \sqrt{L^2 + \frac{x^2}{4}}$. On prend l_{\parallel} le plus petit possible : $l_{\parallel} = b$. Si $x \lesssim 2L$ (angle jusqu'à 45°), $\sqrt{L^2 + \frac{x^2}{4}} \sim L$ et la condition devient

$$x \gg \Lambda a, \quad (3.12)$$

où $\Lambda = a/b$ est le rapport d'anisotropie. Cette hypothèse montre les limites de cette méthode en sismique pétrolière où les angles d'incidence vont rarement au delà de 45° . Par exemple, si $\Lambda = 5$ et $a = 500\text{m}$, l'offset x doit être largement supérieur à 3000m , ce qui n'est pas réaliste.

Remarque 3.1.2 Dans l'approximation parabolique, la formule de la variance des temps (3.10) est inexacte si l_{\parallel} (qui varie avec l'offset) devient trop grand devant l_{\perp} (condition

(2.52) p 46). Un terme qui n'est pas pris en compte dans le filtre W pourrait modifier sensiblement les résultats. Cependant, dans l'optique géométrique, ce problème ne se pose pas car l'approximation $l_{\parallel} \approx l_{\perp}$ n'est pas nécessaire.

Pour estimer Λ , les régimes asymptotiques donnent une procédure simple et directe. On se contente de l'expliciter en milieu 2D et en milieu 3D transverse isotrope, où la variance ne dépend pas de la direction de l'offset (β n'est pas pris en compte et l_{\parallel} s'exprime de manière identique qu'en 2D). Par (3.10) et (3.5), on calcule le rapport entre la variance à un grand offset x et la variance à l'offset 0. Le rapport des variances s'écrit alors

$$\frac{Var[T(x)]}{Var[T(0)]} \Big|_{AS} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + (\frac{x}{2L})^2}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha / \Lambda^2}}, \quad (3.13)$$

où la même approximation (optique géométrique ou approximation de Fraunhofer) est valide pour les deux offsets. $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + (x/2L)^2}$ et $\sin \alpha = (x/2L)/\sqrt{1 + (x/2L)^2}$, l'inversion de (3.13) donne

$$\Lambda = \frac{x/2L}{\sqrt{\{[1 + (x/2L)^2] \frac{Var[T(0)]}{2Var[T(x)]}\}^2 - 1}}. \quad (3.14)$$

L'estimation de Λ requiert la connaissance de la profondeur L du réflecteur. L'offset $x = 2L$ est une valeur typique ($\alpha = 45^\circ$) et caractérise facilement le rapport d'anisotropie :

$$\Lambda = \left\{ \left\{ \frac{Var[T(0)]}{Var[T(2L)]} \right\}^2 - 1 \right\}^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Cette expression est valide si $2L \gg \Lambda a$ (eq. (3.12)).

Une fois C_0 , a et b estimées ($b = a/\Lambda$), il est aisé d'en déduire une estimation de la variance des fluctuations par (3.5) :

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{\Upsilon v_0^2}{L} \frac{1}{bA_0} Var[T(0)]. \quad (3.16)$$

Cette expression est valable dans les régimes asymptotiques, et nécessite la connaissance de v_0 et du domaine de validité. Si la fréquence dominante est connue, il est possible d'être plus précis, en estimant σ_ϵ^2 dans l'approximation parabolique avec l'expression de $Var[T(0)] = 4C_T^{PA}(0, L)$, où $C_T^{PA}(0, L)$ est définie en (3.4).

Tests numériques

Des simulations numériques dans des modèles très larges ($8000m \times 2000m$) ont produit des données synthétiques 2D pour tester ces formules. 131 tirs (espacés de $20m$) sont simulés dans chacune des 15 réalisations du modèle. Les temps sont enregistrés en 126 récepteurs espacés de $20m$ (offset $x = 0$ à $x = 2500m$). Pour permettre des simulations aussi lourdes, la méthode des différences finies en acoustique (cf §2.5.1) n'est plus adaptée,

car beaucoup trop coûteuse. L'algorithme de propagation choisi est basé sur la méthode de Huygens, *i.e.* la résolution de l'eikonale par différences finies [Vidale [93], Podvin & Lecomte [71]]. La discrétisation du champ de vitesse qu'il nécessite doit être suffisamment fine pour bien décrire toutes les hétérogénéités du milieu. Cette méthode, expliquée brièvement en Annexe H (p 145), permet alors d'obtenir les mesures directes des premiers temps d'arrivée.

Un milieu gaussien de portées $a = b = 100m$ ($\Lambda = 1$) est tout d'abord choisi. Le rapport d'anisotropie expérimental (eq. (3.14)) est tracé en fonction de l'offset (Fig. 3.4 (a)). Deux tests ont été effectués avec deux profondeurs de réflecteur différentes ($L = 1000m$ et $L = 1500m$). Pour $L = 1000m$, le rapport d'anisotropie inversé est correct à partir de $x = 1400m$ et converge vers 0.8. La portée verticale estimée est donc de $80m$. Pour $L = 1500m$, le rapport d'anisotropie inversé est correct à partir de $x = 1800m$ et converge vers la valeur exacte 1. Le second test concerne un milieu gaussien de portée $a = 200m$ et $b = 100m$ ($\Lambda = 2$) avec un réflecteur de profondeur $L = 1000m$. Le rapport d'anisotropie converge alors vers 1.65 en $x = 2500m$ (Fig. 3.4 (b)). Avec une bonne estimation de a , l'estimation de b serait de $120m$ (erreur de 20%).

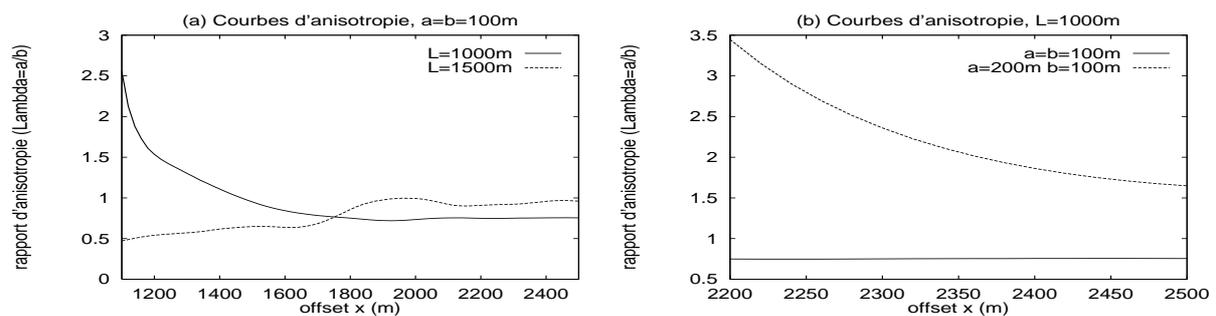


FIG. 3.4 – Rapports d'anisotropie expérimentaux en fonction de l'offset. Simulations dans des champs de vitesse gaussiens ($\sigma_v = 3.5\%$) avec différentes profondeurs L du réflecteur.

Ces tests confirment que plus la portée latérale est large, plus l'offset requis pour inverser le rapport d'anisotropie doit être grand (condition (3.12)). Même des angles de 45° ne suffisent pas. L'offset doit être beaucoup plus grand que Λa (dix fois pour $a = 100m$ et cinq fois pour $a = 200m$). En pratique, la procédure consistera à tracer le rapport d'anisotropie en fonction de l'offset. Le rapport d'anisotropie sera estimé par la valeur de convergence de la courbe. Si elle ne converge pas, l'estimation sera impossible.

D'autre part, l'inversion de la variance des perturbations n'a pas été effectuée, car notre méthode de propagation ne permet pas la connaissance du domaine de validité. Basée sur l'eikonale, la méthode de Huygens prend en compte le wavefront healing de manière non fréquentielle [Witte et al. [99]].

Nécessitant des modèles de vitesse très larges, ces simulations numériques sont difficiles à programmer. Il nous a été par exemple impossible d'obtenir la convergence pour un milieu avec une portée horizontale de $400m$. Soit notre nombre de réalisations était insuffisant, soit les offsets considérés étaient trop faibles (pour $a = 400m$ et $b = 100m$, $\Lambda a = 1600m$). Le rapport des variances des temps (en deux points dont les rayons font un angle de 45°) permet d'inverser correctement le rapport d'anisotropie pour différents types

de milieu (gaussien avec $\Lambda = 4$, exponentiel avec $\Lambda = 2$). La variance des perturbations de vitesse ($\sigma_c^2 = 0.005$) est ensuite facilement estimée.

3.2 Milieu avec un réflecteur irrégulier

L'hypothèse d'un réflecteur horizontal est terriblement restrictive. Tout d'abord, du fait des déformations tectoniques et du système de sédimentation, les interfaces géologiques présentent souvent des dérives à l'échelle kilométrique (cf Fig. 1.2 (b) p 9). Néanmoins, les événements géologiques plus rapides sont certainement responsables de fluctuations plus rapides de la profondeur du réflecteur. On a précédemment séparé en deux catégories les hétérogénéités de vitesse qui affectent les temps d'arrivée de l'onde incidente. Les hétérogénéités à variations lentes (à l'échelle du macro-modèle) se prêtent en effet à un traitement déterministe, et les hétérogénéités plus hautes fréquences (aux échelles de la longueur d'onde et de la zone de Fresnel) relèvent d'une interprétation probabiliste. Il est alors logique de modéliser un réflecteur de la même manière : une fonction déterministe représentant sa variation globale, autour de laquelle fluctue une fonction aléatoire dont les variations pourraient également affecter les temps de trajet des ondes s'y réfléchissant.

3.2.1 Fluctuations lentes

Pour chaque offset, on possède une section de temps d'arrivée, chacun localisé en leur point milieu (ou point de tir). L'espacement entre les temps d'arrivée est égal au pas de tir. En 2D, une courbe de temps en fonction de l'abscisse est donc obtenue pour chaque offset. En 3D, il s'agit d'une surface. Dans ce jeu de données, on désire séparer la dérive globale de ses fluctuations rapides. En effet, on suppose que les fluctuations lentes du réflecteur sont responsables de cette dérive, et qu'elles n'agissent pas sur les fluctuations hautes fréquences des temps d'arrivée. On considérera au §3.3.1 que les fluctuations lentes latérales du champ de vitesse sont également responsables de la dérive des temps. En sismique réfraction, pour un problème similaire, Roth [73] utilise la technique des moindres carrés pour séparer les fluctuations des temps (liées aux petites hétérogénéités de vitesse) et leur tendance globale (due à la profondeur variable de la couche d'eau).

Il existe toute une gamme de méthode pour estimer la dérive d'un phénomène spatial. On ne s'attarde pas sur ce problème qui est hors de notre propos, et on se contente d'utiliser une des méthodes les plus classiques : la régression polynomiale par moindres carrés. Celle-ci a été critiquée par Matheron [59] (§4.1) qui lui reproche tout d'abord son absence de sens physique. Il souligne aussi que c'est une solution non optimale, et qu'elle ne produit pas d'évaluation de l'erreur commise. Il développe alors les méthodes de krigeage (équivalentes aux splines) qui pallient ces problèmes.

Le krigeage est recommandé lorsque les données sont irrégulièrement espacées, avec des zones denses et d'autres éparses. Dans notre problème, les données sont régulièrement espacées et nombreuses : l'espacement entre les points de mesure est très petit devant la portée du phénomène. Dans ce cas, l'estimation du polynôme des moindres carrés peut se faire avec une bonne précision [Chilès [19]]. Même si le critère des moindres carrés est arbitraire, il permet de disposer d'une bonne estimation locale de la dérive du phénomène.

Formellement, soient $T_M^g(\mathbf{x})$ le temps d'arrivée pointé d'offset \mathbf{x} et de point milieu M , $\bar{T}_M(\mathbf{x})$ le temps d'arrivée estimé par moindres carrés, on a

$$T_M(\mathbf{x}) = T_M^g(\mathbf{x}) - \bar{T}_M(\mathbf{x}), \quad (3.17)$$

où les $T_M(\mathbf{x})$ sont les résidus sur lesquels nos procédures statistiques sont appliquées.

Le problème principal qui se pose lors de l'utilisation des moindres carrés repose sur le choix du degré du polynôme. Il n'est pas possible d'avoir un critère objectif pour décider à partir de quel degré les résidus sont suffisamment stationnaires. Pour juger par nous-mêmes de la position de cette difficulté dans notre problème, deux tests synthétiques avec des réflecteurs irréguliers sont effectués. Le premier test consiste en un anticlinal très faiblement penté (Fig. 3.5 (a)) [Iooss et al. [41]]. Le second test dispose un réflecteur plus chahuté, dont les angles d'inclinaison valent 1.5° (Fig. 3.5 (b)).

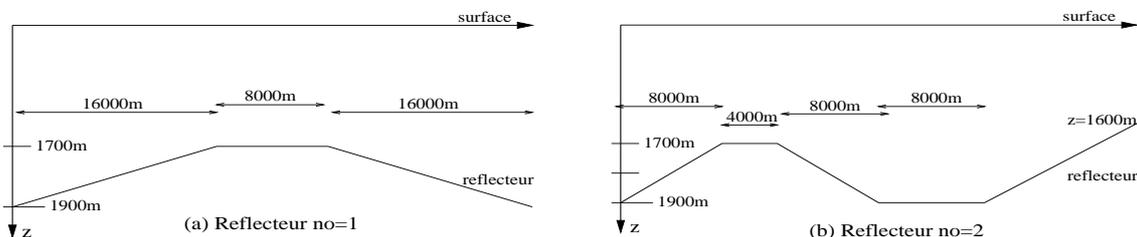


FIG. 3.5 – Réflecteurs irréguliers 2D utilisés dans nos tests (champs de $40km$ en surface).

10 réalisations d'expériences de sismique réflexion 2D sont simulées. Le modèle est gaussien ($a = 400m$, $b = 100m$, $v_0 = 3000m/s$, $\sigma_v^2 = 3.5\%$), de dimension $4000m \times 2000m$. Chaque réflecteur est donc divisé en 10 parties (chacune de longueur $4000m$). La technique de propagation est basée comme au §3.1.2 sur la méthode de Huygens (cf Annexe H p 145). 91 tirs espacés de $20m$ sont effectués dans chaque modèle, et les temps sont enregistrés en 101 offsets espacés de $10m$ ($x = 0$ à $x = 1000m$).

Pour chaque réflecteur, la courbe des temps à l'offset zéro est représentée en Fig. 3.6. La courbe des temps expérimentaux est discontinue car les temps sont calculés au milieu de chaque réalisation sur une bande de $2000m$. La première source se situe en $1100m$ et son premier offset est donc positionné à $100m$ du bord gauche du modèle. La dernière source est située en $2900m$ et son dernier offset est donc positionné à $100m$ du bord droit. Dans chaque modèle, le premier temps à offset nul est donc localisé en $1100m$, le dernier en $2900m$. Sur chaque courbe de temps à offset commun, des régressions polynomiales de divers degrés sont effectuées pour estimer la tendance globale des temps en fonction de l'abscisse. A partir du degré trois ou quatre, on constate que les modifications du polynôme sont faibles quand le degré varie.

Pour chaque offset, la régression polynomiale est réalisée avec le même degré. Sur les résidus des temps, il est alors possible d'appliquer notre analyse, *i.e.* de calculer les variances des temps en fonction de l'offset. La variance normalisée nous intéresse plus particulièrement, car elle permet d'estimer directement la portée horizontale a du modèle de vitesse. Pour différents degrés du polynôme de régression, cette courbe est représentée en Fig. 3.7, et comparée à la variance normalisée théorique de l'optique géométrique (eq. (3.6) et (3.7)).

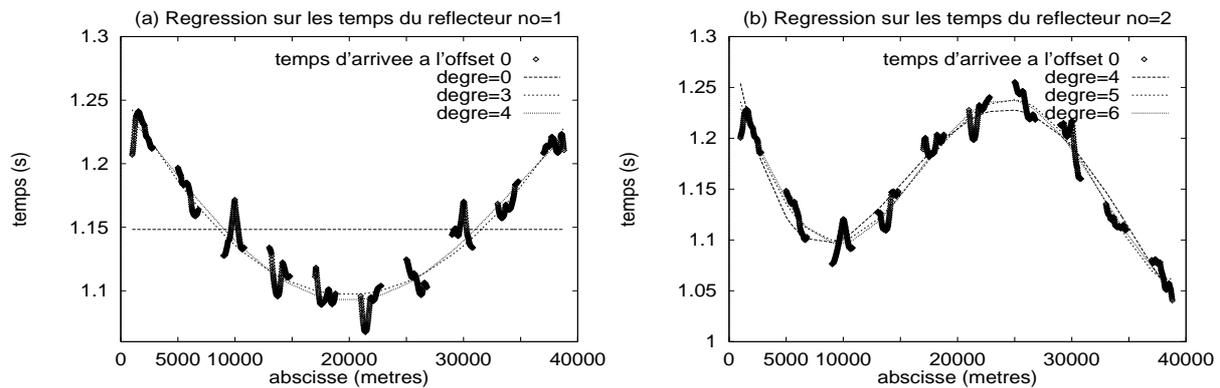


FIG. 3.6 – Exemples de régression pour différents degrés des polynômes.

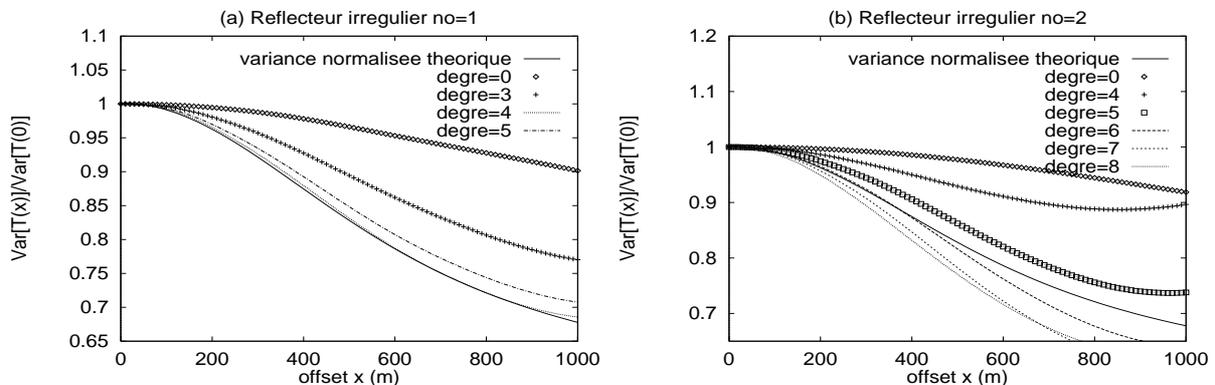


FIG. 3.7 – Variances normalisées des résidus des temps en fonction du degré du polynôme utilisé pour la dérive. Comparaison avec la variance normalisée théorique ($a = 400m$).

Quand la tendance est sous-représentée (degré trop faible), la variance décroît très faiblement en fonction de l'offset. A partir d'un certain degré, on observe un tassement dans les courbes de variance autour de la courbe théorique. Il se produit au degré 4 pour le premier réflecteur (Fig. 3.7 (a)) et au degré 6 pour le second (Fig. 3.7 (b)). Les résultats de l'estimation de la portée horizontale par la formule (3.8) sont donnés en Table 3.1. \emptyset signifie que l'estimation n'a pas été possible, car la valeur théorique de $Var[T(a)]/Var[T(0)]$ n'a pas été atteinte par la variance normalisée. Plus le degré augmente, plus la portée estimée diminue. En effet, un polynôme de degré trop élevé efface des composantes hautes fréquences des résidus des temps d'arrivée, et ceux-ci ne sont alors plus pleinement représentatifs des fluctuations aléatoires de vitesse.

Le problème majeur est donc bien celui que l'on soupçonnait : quel degré choisir pour le polynôme de la dérive ? Pour répondre à cette question, on se base sur des considérations expérimentales. La procédure consiste à visualiser toutes les variances normalisées pour les différents degrés, et à choisir le premier degré pour lequel on considère que le tassement a été atteint. Pour le réflecteur $n^{\circ}1$, l'estimation de la portée horizontale serait alors de $430m$ (erreur de 7.5%). Pour le réflecteur $n^{\circ}2$, on obtient la valeur exacte de $400m$. Il est clair que ce critère est subjectif. Néanmoins, sur notre test réel au §3.4.3 (Fig. 3.20 (a) p

Degré du polynôme	0	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{a} (Réflecteur $n^{\circ}1$)	\emptyset	\emptyset	590	560	430	410	440	380	350
\hat{a} (Réflecteur $n^{\circ}2$)	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	480	400	360	340

TAB. 3.1 – Estimation \hat{a} de $a = 400m$ en fonction du degré de régression.

101), cette méthode s'applique aisément et donne des résultats réalistes.

Dans cette section, on a étudié les fluctuations lentes des interfaces. Qui dit lent, dit la plupart du temps faible pendage, car une pente trop raide est difficilement présente sur une longue distance (à moins qu'il n'y ait un plongement du réflecteur en profondeur). C'est pourquoi les angles d'inclinaison choisis dans nos expériences numériques sont très faibles. Cela a permis de montrer que même d'aussi faibles pentes ont une grosse influence sur notre analyse. Il est probable cependant, que des pendages plus importants puissent avoir des effets sur les temps que l'on ne peut effacer. Des techniques plus appropriées que les moindres carrés devront alors être mises en œuvre. Ce problème ne sera pas traité dans notre travail. Par contre dans la section suivante, un moyen d'analyse des fluctuations rapides des réflecteurs est développé.

3.2.2 Petites fluctuations aléatoires

Quand le réflecteur est trop hétérogène, *i.e.* quand ses perturbations sont trop rapides, les méthodes déterministes ne peuvent le caractériser précisément. Il s'agit là du même problème qui nous a poussé à choisir une modélisation probabiliste pour le champ de vitesse. Pour le résoudre, deux solutions stochastiques sont applicables :

- ★ On peut représenter l'interface par des hétérogénéités de vitesse volumétriques.
- ★ On peut respecter la notion d'interface comme la frontière géométrique (courbe en 2D, surface en 3D) d'un fort contraste de densité.

Dans les deux sections suivantes, on précise pourquoi la deuxième solution nous convient et comment on souhaite l'appliquer.

Théorie de la diffraction sur des surfaces aléatoires

La théorie de la diffraction des ondes sur des surfaces aléatoires est utilisée pour caractériser des surfaces rugueuses dans divers domaines de la physique (optique, acoustique, radiophysique, physique des solides, ...). Le réflecteur est modélisé par une fonction $L(x, y) = L_0 + \zeta(x, y)$, où L_0 est une profondeur constante et ζ la perturbation de l'interface. ζ , stationnaire ou intrinsèque, est définie par ses paramètres statistiques : covariance C_ζ , écart-type σ_ζ , portée l_ζ , ou variogramme γ_ζ . Dans le cas d'une surface 2D anisotrope stationnaire, on distingue ses portées horizontale et azimuthale. Dans la plupart des travaux, la distribution des hauteurs est supposée gaussienne [Ogilvy [68] p 14]. La fonction

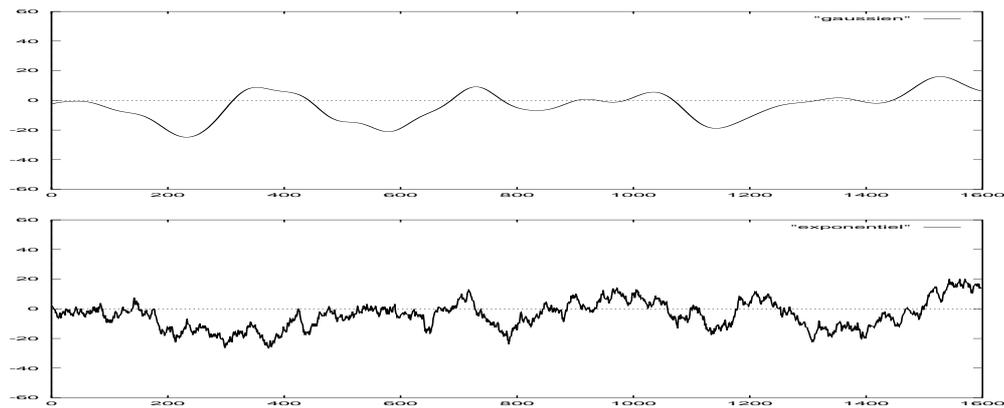


FIG. 3.8 – Réflecteurs aléatoires 2D de portée $l_\zeta = 80m$ et d'écart type $\sigma_\zeta = 10m$ (les abscisses et les ordonnées sont en mètres). En haut, réflecteur gaussien (lisse); en bas, réflecteur exponentiel (rugueux).

de corrélation gaussienne est bien adaptée pour modéliser un réflecteur lisse, alors que la fonction de corrélation exponentielle représente un réflecteur rugueux (Fig. 3.8).

Il n'existe pas de théorie exacte de la diffraction des ondes sur des surfaces aléatoires générales et deux méthodes approximatives ont été développées [Ogilvy [68]] :

- ▷ Une méthode perturbative suppose que les surfaces ont de petites irrégularités devant la longueur d'onde ($\sigma_\zeta \ll \lambda$) et restent faiblement inclinées ($\sigma_\zeta \ll l_\zeta$). Le champ diffracté est linéarisé pour conserver les termes du premier ordre.
- ▷ L'approximation de Kirchhoff s'applique sur des hétérogénéités à plus grande échelle mais lisses ($\sqrt{\lambda\sigma_\zeta} \ll l_\zeta/2$). Cette condition signifie que le rayon de courbure de la surface est nettement supérieur à la longueur d'onde. Chaque point du réflecteur est traité comme un point diffractant faisant partie d'un plan infini tangent à la surface au point considéré. Les irrégularités peuvent être raides, mais de telle sorte qu'il n'y ait ni réflexion multiple, ni zone d'ombre.

Application à la géophysique

En tomographie sismique, modéliser un réflecteur de manière probabiliste a été fait par Bataille et Flatté [11] en sismologie et par Jannaud [46] en sismique réflexion. Bataille et Flatté [11] utilisent les caractéristiques statistiques de champs d'onde réfléchis pour déterminer la nature des hétérogénéités situées entre le noyau et le manteau. Soit ce sont des hétérogénéités volumétriques (perturbations de la densité et des paramètres de Lamé) et ils utilisent l'approximation de Born sur l'équation des ondes élastiques pour retrouver la densité spectrale des hétérogénéités (théorie développé par Wu & Aki [101]). Soit ce sont des irrégularités topographiques et la méthode de Kirchhoff permet de retrouver la densité spectrale des fluctuations de l'interface. Cependant, ces deux types d'hétérogénéité ne peuvent être distingués car les deux méthodes sont incompatibles.

Jannaud [46] cherche à prendre en compte l'incertitude des temps de trajet pointés sur les sections sismiques avant sommation. En effet, le pointé est un obstacle majeur à l'utilisation de la tomographie des temps d'arrivée en sismique réflexion pour donner

une image des structures complexes. Il modélise alors les faibles fluctuations du réflecteur par une fonction aléatoire, et il lie les corrélations des positions des points d'émergence des rayons réfléchis et de leur temps de trajet aux propriétés statistiques du réflecteur. Cette approche perturbative purement géométrique est basée sur une linéarisation des équations de la théorie des rais, et permet de donner une mesure de confiance sur les points d'émergence et sur les temps de trajet. Des tests synthétiques et réels la valident pour des perturbations d'interface à covariance gaussienne.

On choisit de suivre l'approche de Jannaud qui considère des réflecteurs lisses pour travailler sur les temps de trajet. Si le réflecteur présente trop de rugosité, l'onde ne se réfléchit pas dessus, mais diffuse dans toutes les directions. Le champ d'onde risque alors d'être sévèrement déformé et il est impossible d'en déduire des temps de trajet. De plus, on ne base pas la propagation de l'onde incidente sur la théorie des rais comme dans le travail de Jannaud, mais sur l'approximation Rytov parabolique, et il faut prendre en compte la dépendance fréquentielle de l'onde. Notre objectif est de coupler la diffusion-avant de l'onde dans un champ de vitesse hétérogène et sa réflexion sur une interface irrégulière. La réflexion est prise en compte d'un point de vue uniquement géométrique. Cette approche doit donc vérifier les conditions de l'approximation de Kirchhoff (réflecteur lisse).

”Caractérisation probabiliste de réflecteurs en sismique réflexion”

Dans un article présenté en Annexe H [Iooss [38]], on effectue une étude poussée de la réflexion sur des surfaces aléatoires dans le cadre de la sismique réflexion. Les perturbations d'interface sont petites et leurs pendages sont faibles ; les champs de vitesse sont supposés homogènes de telle sorte que tous les rayons considérés sont droits. Cette section va en résumer les principaux résultats.

- ★ Quelques hypothèses sont nécessaires à l'étude géométrique de la longueur des rayons. Le réflecteur est lisse, faiblement perturbé ($|\zeta|/L_0 \ll 1$), peu penté ($\|\zeta'\| \ll 1$), l'offset est faible devant la distance de propagation :

$$\sqrt{\lambda\sigma_\zeta} \ll \frac{l_\zeta}{2}, \quad \sigma_\zeta \ll L_0, \quad \sigma_\zeta \ll l_\zeta, \quad \mathbf{x} \ll 2L_0, \quad (3.18)$$

où ζ est stationnaire, σ_ζ décrit l'ampleur des perturbations, l_ζ représente leur taille caractéristique.

- ★ Dans un modèle de réflecteur unique, le variogramme et la covariance des temps d'arrivée à offset commun ne dépendent pas de l'offset (la vitesse est constante). Si $T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ est le temps d'arrivée d'offset \mathbf{x} et de point milieu \mathbf{m} :

$$\gamma[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x})] = \frac{4}{v_0^2} \gamma_\zeta(\mathbf{m} - \mathbf{m}'), \quad Cov[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x})] = \frac{4}{v_0^2} C_\zeta(\mathbf{m} - \mathbf{m}'). \quad (3.19)$$

Ces formules sont valides sous l'hypothèse supplémentaire $L_0\sigma_\zeta \ll l_\zeta^2$.

- ★ La variance des temps à offset commun, quant à elle, est constante quels que soient l'offset et le point milieu :

$$Var[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})] = Var[T(\mathbf{x})] = \frac{4}{v_0^2} \sigma_\zeta^2. \quad (3.20)$$

- ★ Les calculs théoriques peuvent être étendus à une géométrie multicouche.
- ★ Des tests synthétiques, utilisant la méthode de Huygens, valident ces formules et leurs conditions de validité. Les portées acceptables sont d'ordre hectométrique, et les écart-types de l'ordre de $10m$.

Découplage champ de vitesse/réflecteur

Avec un champ de vitesse hétérogène, le problème se complique car les rayons ne sont plus droits. Dans l'optique géométrique, à l'approximation du premier ordre, on montre que les perturbations de vitesse sont intégrées le long du rayon droit joignant la source au récepteur (eq. (2.42) p 42). Touati [89] a déterminé quel est le rayon droit lorsque le rayon se réfléchit sur une interface plane : c'est celui qui passe par le point H (cf Fig. H.1 p 140). Si le réflecteur est irrégulier, la localisation du rayon droit est plus complexe. En Fig. 3.9, on s'aperçoit qu'il suffit de traiter le problème symétrisé par rapport à la tangente du réflecteur au point de réflexion. Dans le milieu symétrisé, les perturbations sont intégrées sur OX' . En remontant au milieu initial, on en déduit que le rayon droit est celui qui se réfléchit géométriquement (angle incident=angle réfléchi) sur la tangente au réflecteur (en H).

Dans l'approximation Rytov parabolique, cette description n'a plus de sens car la notion de rayons n'existe pas. Or pour pouvoir résoudre notre problème, *i.e.* prendre en compte les fluctuations rapides d'interface dans le calcul des temps, il est nécessaire de considérer la réflexion d'un point de vue géométrique. On conserve donc le résultat d'une réflexion en milieu homogène au point H .

Pour séparer les problèmes de propagation dans un champ de vitesse aléatoire et de réflexion sur une interface aléatoire, on utilise une approche conditionnelle. Elle consiste à conditionner les temps d'arrivée (qui sont aléatoires par la vitesse et par le réflecteur) par la connaissance du réflecteur. Une fois les temps conditionnés, on peut travailler à rayons droits fixés. On les déconditionne ensuite afin d'obtenir les moments cherchés. On établit tout d'abord l'expression du déconditionnement de la covariance conditionnelle. Soient X , Y et Z trois variables aléatoires, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\{Cov[(X, Y)|Z]\} &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(XY|Z) - \mathbf{E}(X|Z)\mathbf{E}(Y|Z)] \\
 &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(XY|Z)] - \mathbf{E}[\mathbf{E}(X|Z)\mathbf{E}(Y|Z)] + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \\
 &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}[\mathbf{E}(X|Z)\mathbf{E}(Y|Z)] + \mathbf{E}[\mathbf{E}(X|Z)]\mathbf{E}[\mathbf{E}(Y|Z)]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ainsi, on obtient pour la covariance, le variogramme et la variance :

$$\begin{cases}
 Cov(X, Y) &= \mathbf{E}\{Cov[(X, Y)|Z]\} + Cov[\mathbf{E}(X|Z), \mathbf{E}(Y|Z)] , \\
 \gamma(X, Y) &= \mathbf{E}\{\gamma[(X, Y)|Z]\} + \gamma[\mathbf{E}(X|Z), \mathbf{E}(Y|Z)] , \\
 Var(X) &= \mathbf{E}[Var(X|Z)] + Var[\mathbf{E}(X|Z)] .
 \end{cases} \tag{3.22}$$

Soient $T_{\mathbf{m}(\mathbf{x})}$ et $T_{\mathbf{m}'(\mathbf{x}')}$ les temps d'arrivée respectifs de point milieu \mathbf{m} et \mathbf{m}' , d'offset \mathbf{x} et \mathbf{x}' , de rayon $\mathbf{r}_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ et $\mathbf{r}_{\mathbf{m}'\mathbf{x}'}$. On conditionne le couple $(T_{\mathbf{m}(\mathbf{x})}, T_{\mathbf{m}'(\mathbf{x}')})$ par les points de réflexion H et H' des rayons $\mathbf{r}_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ et $\mathbf{r}_{\mathbf{m}'\mathbf{x}'}$ sur les tangentes du réflecteur R (cf Fig. 3.9 et Fig. H.2 p 141). On note pour simplifier, que l'on conditionne $(T_{\mathbf{m}(\mathbf{x})}, T_{\mathbf{m}'(\mathbf{x}')})$ par le

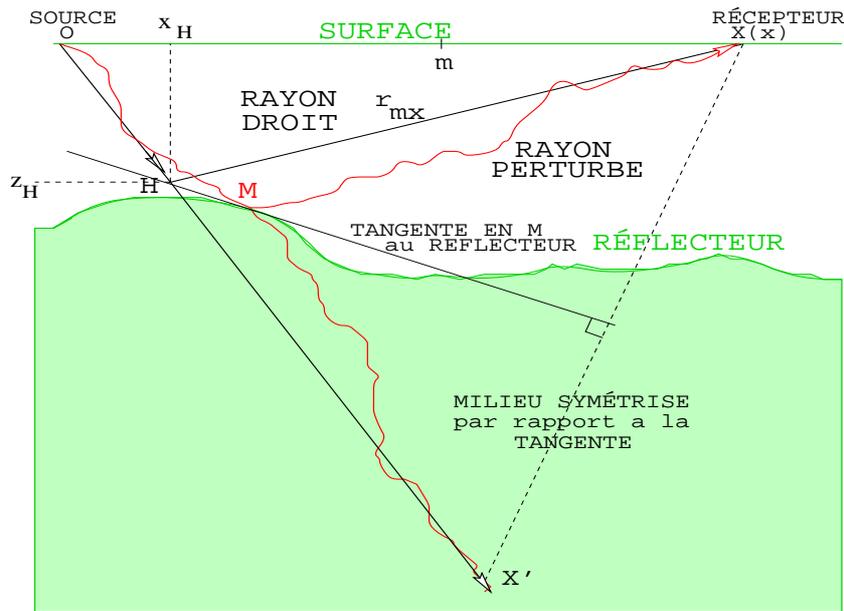


FIG. 3.9 – Géométrie des rayons pour un réflecteur irrégulier, symétrisation du problème.

réflecteur R . On considère les temps d'arrivée de notre calcul dans l'approximation Rytov parabolique, car c'est celle-ci qui est utilisée dans la propagation en milieu hétérogène. Il est clair que si on conditionne les temps d'arrivée par le réflecteur, les rayons $\mathbf{r}_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$, $\mathbf{r}_{\mathbf{m}'\mathbf{x}'}$ et la distance de propagation de l'onde qui étaient aléatoires deviennent déterministes. On a donc au premier ordre

$$E[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})|R] = \frac{r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}}{v_0}. \quad (3.23)$$

Des équations (3.22) et (3.23), en posant $X = T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ et $Y = T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')$, on obtient la covariance, le variogramme et la variance des temps d'arrivée. Ils se décomposent en un terme où le champ de vitesse est aléatoire et le réflecteur est supposé connu, et en un autre terme où le milieu est homogène et le réflecteur aléatoire :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cov[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')] = E\{Cov\{[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')] | R\}\} + \frac{1}{v_0^2} Cov(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}, r_{\mathbf{m}'\mathbf{x}'}), \\ \gamma[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')] = E\{\gamma\{[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')] | R\}\} + \frac{1}{v_0^2} \gamma(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}, r_{\mathbf{m}'\mathbf{x}'}), \\ Var[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})] = E\{Var[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) | R]\} + \frac{1}{v_0^2} Var(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}). \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Formule générale de la variance des temps

Dans Iooss [37], les espérances de $Cov\{[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')] | R\}$ et $\gamma\{[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{m}'}(\mathbf{x}')] | R\}$ sont calculées. Ici, nous sommes intéressés uniquement par la variance $Var[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) | R]$. Le problème revient à calculer la covariance entre les temps de trajet des rayons HO et HX d'une onde sphérique de source H (cf Fig. 3.9). Comme $x \ll 2L_0$ et $\|\boldsymbol{\zeta}'\| \ll 1$, les deux rayons sont faiblement inclinés et de longueurs à peu près égales à la profondeur z_H de H . Ainsi, on est amené à corrélérer les temps d'arrivée (de séparation latérale \mathbf{x}) d'une onde sphérique de distance de propagation z_H .

Montrons en raisonnant en 2D que la profondeur de H peut être approximée au premier ordre par la profondeur du réflecteur en x_H , *i.e.* $L_0 + \zeta(x_H)$. Les points $M(x_M, z_M)$ et $H(x_H, z_H)$ sont sur la tangente au réflecteur en M (Fig. 3.9), on a donc $\zeta'(x_M) = (z_M - z_H)/(x_M - x_H) \ll 1$. Comme $x_M - x_H \ll L_0$ et que z_M et z_H sont d'ordre L_0 , on en déduit que $z_M = z_H$ au premier ordre. D'autre part, $L(x)$ est la fonction décrivant la profondeur du réflecteur. Par le théorème des accroissements finis, il existe $u \in]x_H, x_M[$ tel que $L'(u) = \zeta'(u) = [L(x_M) - L(x_H)]/(x_M - x_H) \ll 1$. Donc au premier ordre, $L(x_M) = z_M = L(x_H) = L_0 + \zeta(x_H)$. On conclut que $z_H = L_0 + \zeta(x_H)$ au premier ordre.

Dans les régimes asymptotiques, $Var[T_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})|R]$ est une fonction dépendant linéairement de la distance de propagation (eq. (3.4) $n^{\circ}3$ et eq. (3.5)), donc de $z_H = L_0 + \zeta(\mathbf{x}_H)$. Dans l'équation (3.24), il faut prendre son espérance, et celle-ci annule le terme en ζ car $E(\zeta) = 0$. Il ne reste plus que le terme habituel correspondant à un réflecteur horizontal de profondeur L_0 . Le cas de l'approximation parabolique est plus complexe, car la distance de propagation z_H joue un rôle dans le filtre spectral (eq. (3.4)). Pour une onde sphérique, le filtre vaut $\cos^2[\frac{\kappa^2(L_0+\zeta)}{2k} \frac{u}{\rho}(1 - \frac{u}{\rho})]$. Le terme en ζ est négligeable dans cette fonction si $\frac{\kappa^2 \zeta}{2k} \ll 2\pi$. Comme κ est inférieur à $2\pi/l_{\perp}$, la condition nécessaire devient

$$\sqrt{\lambda \sigma_{\zeta}} \ll l_{\perp} = a. \quad (3.25)$$

Cette hypothèse ressemble fortement à la condition de Kirchhoff $\sqrt{\lambda \sigma_{\zeta}} \ll l_{\zeta}/2$ (eq. (3.18) $n^{\circ}1$). Elle signifie que la largeur de la zone de diffraction créée par la perturbation d'interface doit être faible devant la largeur des hétérogénéités de vitesse.

Sous cette condition et par (3.24) ($n^{\circ}3$), la variance des temps d'arrivée dans l'approximation Rytov parabolique, issus d'un milieu hétérogène et réfléchis sur un réflecteur irrégulier, se compose de deux termes. Le premier est issu de (3.3) (vitesse aléatoire, réflecteur horizontal) et le second de (3.20) (réflecteur aléatoire, vitesse constante) :

$$Var[T(\mathbf{x})] \simeq 2C_T(0, L_0) + 2C_T(\mathbf{x}, L_0) + \frac{4\sigma_{\zeta}^2}{v_0^2}. \quad (3.26)$$

où C_T est définie par l'équation (3.4).

La contribution des perturbations du réflecteur est constante en fonction de l'offset. Ainsi, la procédure d'estimation de la portée latérale de la vitesse à partir de la variance normalisée des temps n'est plus valable. D'autre part, notre approche n'est pas valide si l'offset est trop grand, donc l'inversion du rapport d'anisotropie n'est pas possible. Par contre l'inversion directe fonctionne et n'est pas modifiée pour (3.26) : elle nécessite la dérivée de $I_R(\mathbf{x})$, donc les dérivées première et seconde de $Var[T(\mathbf{x})]$ (eq. (3.9)).

Tests numériques

Les hétérogénéités du réflecteur et celles de vitesse ont été traitées de façon indépendante, et cette hypothèse demande une validation expérimentale. Cependant, nous n'avons pas réussi à effectuer des expériences numériques où le modèle comprendrait à la fois un champ de vitesse aléatoire et un réflecteur aléatoire. En effet, nos tests avec la méthode de Huygens nécessitent la même discrétisation pour le réflecteur et pour le champ de vitesse. Or,

la discrétisation du réflecteur doit être très fine, car les perturbations de hauteur sont de l'ordre du mètre. Lors de nos expériences en Annexe H, le champ de vitesse était homogène et les temps propagés à l'intérieur étaient rapidement calculés, indépendamment de sa discrétisation. Or si le champ de vitesse est hétérogène, les temps de calcul explosent.

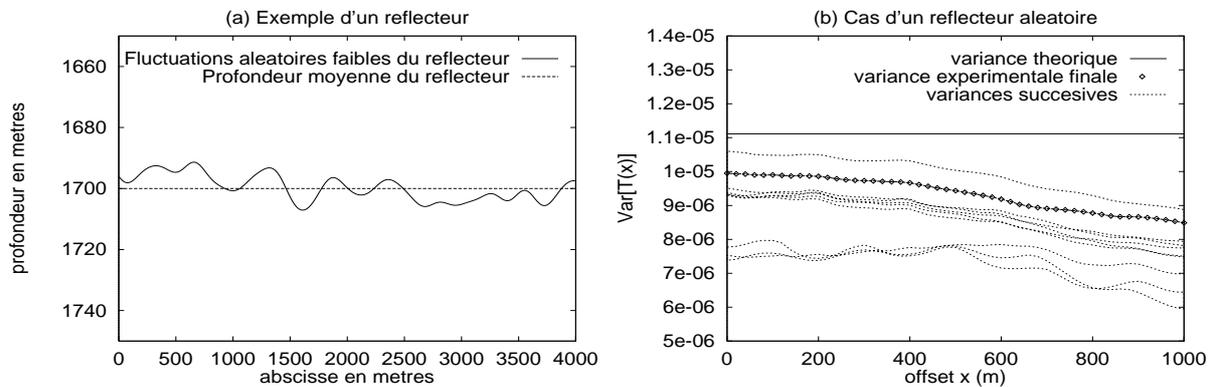


FIG. 3.10 – (a) Réalisation d'un réflecteur aléatoire de paramètres $L_0 = 1700m$, $l_\zeta = 200m$, $\sigma_\zeta = 5m$. (b) Variances des temps d'arrivée (en fonction de l'offset) après propagation dans ce type de modèle (avec un champ de vitesse homogène). On effectue 14 tirs dans chaque réalisation, et on visualise la convergence de la variance des temps quand on augmente le nombre de réalisations (de une à dix).

Nous allons tout de même illustrer nos principaux résultats théoriques. La Fig. 3.10 (a) présente un exemple de réflecteur aléatoire 2D. Des expériences de sismique réflexion 2D ont été effectuées sur ce modèle par la méthode de Huygens : 14 tirs espacés de $100m$, 51 offsets espacés de $20m$. Il s'agit là du même test dont les résultats sont présentés en Annexe H (Fig. H.10). Ici, on s'intéresse uniquement à la variance des temps en fonction de l'offset. Théoriquement, elle devrait rester constante pour les offsets faibles par rapport à la profondeur. En Fig. 3.10 (b), on visualise la convergence de la courbe de variance en fonction du nombre de réalisations utilisées (28 temps d'arrivée sont ajoutés pour chaque nouvelle réalisation). À partir de quatre réalisations, la variance semble converger, les courbes oscillent entre $0.9 \times 10^{-5}s^2$ et $1.1 \times 10^{-5}s^2$. On constate que la variance finale (dix réalisations) est constante jusqu'à $400m$, et qu'ensuite, elle décroît lentement. L'erreur par rapport à la variance théorique est, quant à elle, de l'ordre de 10%. Pour ce type de modèle, le résultat (3.20) est donc vérifié à 10% près pour les offsets suffisamment faibles.

Pour étudier l'effet des fluctuations du réflecteur sur la variance normalisée, on choisit d'effectuer une expérience de sismique réflexion dans un milieu aléatoire gaussien (avec un réflecteur horizontal), puis d'ajouter à la variance des temps obtenue le terme théorique $4\sigma_\zeta^2/v_0^2$ (eq. (3.26)). L'expérience consiste en 91 tirs espacés de $20m$ dans un milieu de dimension $4000m \times 2000m$, avec 101 offsets espacés de $10m$. Le champ de vitesse a pour paramètres $v_0 = 3000m/s$, $a = 200m$, $b = 100m$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.005$. Les temps de trajet sont calculés avec la méthode de Huygens. En Fig. 3.11 (a), les courbes de variance normalisée en fonction de l'offset sont représentées.

Les résultats du test réalisé (réflecteur horizontal) concordent bien avec les résultats théoriques. L'estimation de la portée horizontale avec cette courbe (eq. (3.8)) donne $240m$

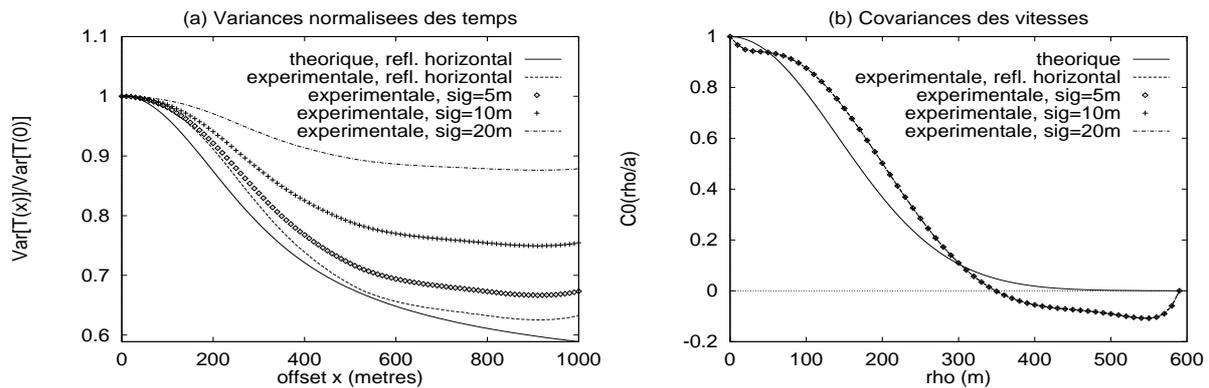


FIG. 3.11 – (a) Variance normalisées des temps. La variance expérimentale avec un réflecteur horizontal ($L_0 = 1900m$) a été obtenue après propagation dans un champ de vitesse aléatoire. Les autres variances ont été calculées en y additionnant le terme théorique $4\sigma_\zeta^2/v_0^2$ (correspondant à un réflecteur aléatoire d'écart-type $\text{sig} = \sigma_\zeta$). (b) Résultat de l'inversion des covariances de vitesse à partir des variances normalisées de (a).

au lieu de $200m$. Pour étudier l'effet d'un réflecteur aléatoire sur cette courbe, le terme $4\sigma_\zeta^2/v_0^2$ est ajouté à la variance des temps du test, pour différentes valeurs de σ_ζ . Plus σ_ζ est grand et moins la variance normalisée décroît. L'estimation de la portée horizontale est alors de moins en moins bonne : $260m$ pour $\sigma_\zeta = 5m$, $310m$ pour $\sigma_\zeta = 10m$ et pas d'estimation possible pour $\sigma_\zeta = 20m$.

Par contre, les résultats sont identiques quel que soit σ_ζ pour l'inversion directe de la covariance de la vitesse. En effet, celle-ci nécessite juste la dérivée de la variance des temps, et le terme constant dû aux fluctuations du réflecteur n'y apporte pas de contributions. La covariance inversée a l'allure d'une gaussienne malgré des problèmes à l'origine (dus aux procédures numériques d'intégration). Elle donne une estimation de la portée horizontale de l'ordre de $230m$ quel que soit σ_ζ . L'erreur est donc inférieure à 15%.

3.3 Champs de vitesse non stationnaires

Au §1.2, on a vu que les champs de vitesse présentent des dérives verticales et latérales. Or notre modélisation probabiliste suppose une dérive constante v_0 , additionnée d'une faible perturbation de vitesse stationnaire. Si la dérive est variable, *i.e.* si le champ de vitesse n'est pas stationnaire, le problème est plus complexe, car les rayons sur lesquels on intègre les perturbations de vitesse ne sont plus droits. Dans l'optique géométrique, Rytov et al. [76] (p 7) donnent la covariance générale des temps (sans l'hypothèse de stationnarité). Cette expression n'est pas analytiquement utilisable. Pour l'appliquer, il faudrait supposer la dérive $v_0(\mathbf{r})$ connue, et suivre les rayons d'intégration numériquement.

Dans cette section, on suppose que $v_0(\mathbf{r})$ n'est pas connue et on procède différemment, en séparant les composantes latérales et verticales de la dérive. On montre qu'une tendance lente latérale produit une tendance lente sur les temps. Celle-ci peut alors être

traitée comme la dérive due aux fluctuations lentes du réflecteur. D'autre part, en supposant de faibles offsets et une tendance verticale linéaire, l'hypothèse d'un champ de vitesse intrinsèque verticalement s'applique. Enfin, la modélisation d'un sous-sol considère plusieurs macro-couches séparés par des réflecteurs. Quelques résultats sur la variance des temps d'ondes propagées dans plusieurs couches sont donc obtenus.

Contrairement à la section précédente où tous nos résultats sont illustrés par des tests synthétiques, cette section se contente de présenter quelques résultats théoriques et les idées directrices qu'il faudrait suivre pour compléter cette tentative de généralisation.

3.3.1 Dérives latérales de la vitesse

L'intuition nous laisse supposer que les petites fluctuations des temps sont causées par les petites fluctuations de vitesse, alors que les larges variations des temps sont dues aux larges variations de vitesse. Une telle décomposition permet de résoudre le problème : on étudie les fluctuations des temps après suppression de leur composante déterministe.

Notre approche a l'avantage d'être basée sur une analyse statistique des temps à offset constant. Les temps sont donc localisés par leur point milieu qui est une mesure latérale. Ainsi, les composantes verticales de la vitesse n'ont pas d'influence sur les variations des temps (à offset commun) d'un point milieu à un autre, donc sur la variance des temps à offset commun. Par contre, les composantes latérales de la vitesse ont un impact sur les temps en fonction de leur point milieu. Il s'agit du même type d'effet que celui provoqué par les fluctuations lentes du réflecteur.

Pour l'éliminer, il est donc possible d'utiliser la technique des moindres carrés, même si celle-ci n'est pas idéale. Voyons ce qu'elle donne sur un exemple 2D simple, en regardant comment s'ajuste un polynôme sur la courbe des temps à offset zéro. Le modèle est constitué uniquement de sa composante déterministe latérale. La dérive latérale est linéaire et forte : $v_0(\rho, z) = 2000 + \rho$ (la vitesse augmente de $1m/s$ tous les mètres). Les temps à l'offset zéro en fonction de l'abscisse m du point milieu s'expriment donc par $T_m(0) = \frac{1}{1 + m/2000}$. La Fig. 3.12 présente la fonction temps et son ajustement par régression polynomiale aux moindres carrés. L'ajustement avec un polynôme de degré deux est très satisfaisant.

Cette exemple laisse augurer que même dans le cas de dérives latérales fortes, si les variations de vitesse ne sont pas trop brutales, la séparation entre les fluctuations lentes et rapides des temps d'arrivée est tout à fait réalisable.

3.3.2 Dépendance en profondeur

Dans la section précédente, la composante verticale du champ de vitesse n'a pas été traitée, car elle n'induit pas de variations entre les temps à offset commun. Une dérive en profondeur rend toutefois invalide notre théorie : les rayons d'intégration sont courbés, et leur géométrie dépend de l'offset. Ainsi, la variance des temps d'arrivée en fonction de l'offset ne correspond plus à la variance théorique du cadre stationnaire.

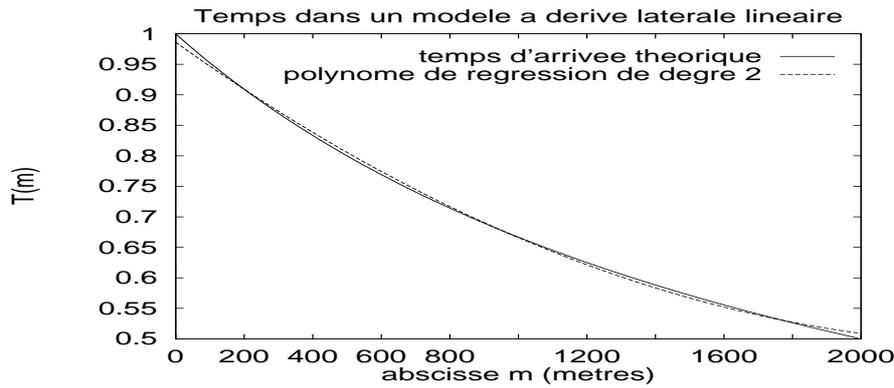


FIG. 3.12 – Régression sur la courbe des temps à offset zéro.

Au §2.4.5 (eq. (2.76) p 51), on a vu qu'il est possible d'étendre la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire à des champs de vitesse intrinsèque dans la direction de propagation (et stationnaire transversalement). Dans le cadre de la sismique réflexion à faible offset, cette extension permettrait de considérer des champs de vitesse présentant une dérive de leur moyenne et de leur variance linéaire en profondeur. Par exemple, la vitesse et l'ampleur de ses fluctuations pourraient augmenter (linéairement) avec la profondeur. Dans ce modèle non stationnaire, il n'est plus possible de considérer la variance des temps à offset constant. Il faut calculer le variogramme des temps à offset constant.

Soit $T_M(\mathbf{x})$, le temps d'arrivée d'offset \mathbf{x} et de point milieu M , tel que $T_M(\mathbf{x}) = T_M^1(\mathbf{x}) + T_M^2(\mathbf{x})$, où T^1 est le temps de descente et T^2 le temps de montée (Fig. 3.13). On suppose que le réflecteur est horizontal de profondeur L et que $x \ll 2L$, et on considère une direction de propagation quasi-verticale quel que soit l'offset. Le variogramme entre deux temps de même offset est égal à

$$\begin{aligned} \gamma[T_M(\mathbf{x}), T_{M'}(\mathbf{x})] &= \frac{1}{2} \text{Var}[T_M(\mathbf{x}) - T_{M'}(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \text{Var}[T_M^1(\mathbf{x}) - T_{M'}^1(\mathbf{x})] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Var}[T_M^2(\mathbf{x}) - T_{M'}^2(\mathbf{x})] + \text{Cov}[T_M^1(\mathbf{x}) - T_{M'}^1(\mathbf{x}), T_M^2(\mathbf{x}) - T_{M'}^2(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le premier terme de (3.27) est égal au variogramme des temps descendant $T_M^1(\mathbf{x})$ et $T_{M'}^1(\mathbf{x})$. Les deux rayons d'intégration correspondant à ces temps sont parallèles et séparés de $\mathbf{m}' - \mathbf{m}$ (cf Fig. 3.13). On peut donc considérer que le variogramme de ces temps est égal au variogramme des temps d'une onde plane de distance de propagation L :

$$\frac{1}{2} \text{Var}[T_M^1(\mathbf{x}) - T_{M'}^1(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \text{Var}[T_M^2(\mathbf{x}) - T_{M'}^2(\mathbf{x})] = \gamma_{Tpl}(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, L). \quad (3.28)$$

Dans l'optique géométrique, on a $\gamma_{Tpl}(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} bL \int_0^\infty \gamma_0(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, z') dz'$, en transformant les covariances de l'équation (2.65) (p 48) en variogrammes (γ_0 est le variogramme standardisé de ϵ).

Le troisième terme de (3.27) se développe grâce à (E.2) (p 115) :

$$\begin{aligned} &\text{Cov}[T_M^1(\mathbf{x}) - T_{M'}^1(\mathbf{x}), T_M^2(\mathbf{x}) - T_{M'}^2(\mathbf{x})] = \\ &= \gamma[T_M^1(\mathbf{x}), T_{M'}^2(\mathbf{x})] + \gamma[T_{M'}^1(\mathbf{x}), T_M^2(\mathbf{x})] - \gamma[T_M^1(\mathbf{x}), T_M^2(\mathbf{x})] - \gamma[T_{M'}^1(\mathbf{x}), T_{M'}^2(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Les deux derniers termes de cette équation sont égaux à $\gamma_T(\mathbf{x}, L)$, *i.e.* au variogramme des temps d'une onde sphérique de distance de propagation L . Dans l'optique géométrique,

$\gamma_T(\mathbf{x}, L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} \frac{bz}{x_\perp} \int_0^{x_\perp} \int_0^\infty \gamma_0(\sqrt{u^2 + z^2}) dz' du$, en transformant les covariances de l'équation (3.4) en variogrammes.

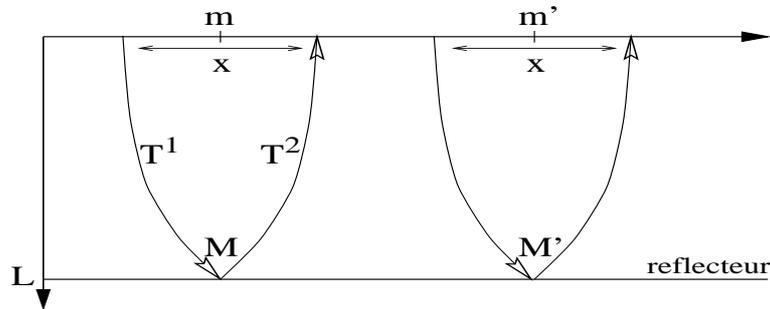


FIG. 3.13 – Rayons dans un milieu à gradient de vitesse positif et linéaire en profondeur.

En Annexe F, le variogramme des temps de deux ondes qui n'ont pas la même source est calculé en fonction du variogramme des temps d'une onde sphérique. Les rayons considérés doivent être dans le même plan, ce qui est vérifié ici. L'équation (F.4) (p 118) est donc utilisée pour exprimer les deux premiers termes de (3.29). On obtient

$$\begin{aligned}
 \gamma[T_M^1(\mathbf{x}), T_{M'}^2(\mathbf{x})] &= \gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m} + \mathbf{x}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m} + \mathbf{x}\|}{x}) - \gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m}\|}{x}), \\
 \gamma[T_{M'}^1(\mathbf{x}), T_M^2(\mathbf{x})] &= \gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m} - \mathbf{x}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m} - \mathbf{x}\|}{x}) - \gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m}\|}{x}).
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Finalement, le variogramme des temps à offset constant est égal à

$$\begin{aligned}
 \gamma[T_M(\mathbf{x}), T_{M'}(\mathbf{x})] &= \gamma_T(\mathbf{x})(\mathbf{m}' - \mathbf{m}) = \\
 &= 2\gamma_{T_{pl}}(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, L) - 2\gamma_T(\mathbf{x}, L) - 2\gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m}\|}{x}) \\
 &\quad + \gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m} + \mathbf{x}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m} + \mathbf{x}\|}{x}) + \gamma_T(\mathbf{m}' - \mathbf{m} - \mathbf{x}, L \frac{\|\mathbf{m}' - \mathbf{m} - \mathbf{x}\|}{x}).
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cette expression est complexe et demande une étude plus détaillée, qui reste à développer. Cette section 3.3 consiste juste à donner des pistes pour généraliser notre approche.

3.3.3 Modèle multicouche

L'usage des modèles multicouches est classique dans la pratique des géophysiciens, qui traitent souvent le sous-sol comme une superposition de couches à vitesse constante. Notre modélisation tente plutôt de différencier les grosses structures, de l'ordre du kilomètre en profondeur, et de les caractériser par la moyenne et la covariance de leur vitesse. Touati [89] (§7.2) a effectué cette extension dans le cas d'un bicouche, et cette section la généralise à n couches. Pour ne pas compliquer le problème, les réflexions multiples ne sont pas prises en compte.

Soit $T^{(n)}(\mathbf{x})$ le temps d'arrivée d'offset \mathbf{x} issu de la réflexion sur le $n^{\text{ème}}$ réflecteur. Les notations sont définies en Fig. 3.14. Les hypothèses sont les suivantes :

- \diamond Les angles d'incidence de l'onde sont faibles : $\forall i = 1, \dots, n, \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}\| \ll L^{(i)} - L^{(i-1)}$, où $L^{(i)}$ et $\mathbf{x}^{(i)}$ sont la profondeur et l'offset intermédiaire de la $i^{\text{ème}}$ interface ($L^{(0)} = 0$ et $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$).

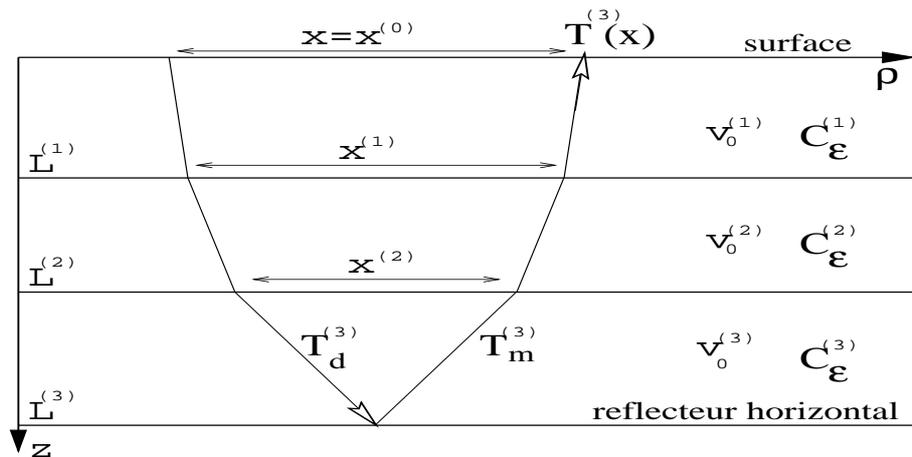


FIG. 3.14 – Notations pour le modèle multicouche.

- ◇ Les champs de vitesse de chaque couche sont stationnaires, de vitesse moyenne $v_0^{(i)}$ et de covariance $C_\epsilon^{(i)}$.
- ◇ Les perturbations de vitesse sont faibles : $\forall i = 1, \dots, n$, $\sigma_\epsilon^{(i)} \ll 1$, où $\sigma_\epsilon^{(i)}$ est l'écart-type des perturbations de vitesse de la $i^{\text{ème}}$ couche.
- ◇ Les portées verticales $b^{(i)}$ sont faibles devant les épaisseurs des couches : $\forall i = 1, \dots, n$, $b^{(i)} \ll L^{(i)} - L^{(i-1)}$.
- ◇ Les vitesses entre deux couches ne sont pas corrélées entre elles : $\forall (i, j)$ tels que $i \neq j$, $\forall \mathbf{r}, \mathbf{r}'$, $\epsilon^{(i)}(\mathbf{r}) \perp \epsilon^{(j)}(\mathbf{r}')$.
- ◇ Les interfaces sont horizontales ou faiblement pentées. Sous ces hypothèses, l'expression des offsets intermédiaires (*i.e.* les séparations des rayons à chaque interface) est donnée dans l'Annexe H par (H.11) (p 144) :

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x} \left[1 - \sum_{j=1}^i \frac{L_0^{(j)} - L_0^{(j-1)}}{\sum_{k=1}^n \frac{(L_0^{(k)} - L_0^{(k-1)})v_0^{(k)}}{v_0^{(j)}}} \right]. \quad (3.32)$$

Si les vitesses moyennes sont les mêmes dans chaque couche, $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x} \left(1 - \frac{L_0^{(i)}}{L_0^{(n)}} \right)$.

On note $C_T^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, z) = Cov[T^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_1, z), T^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_2, z)]$, où $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$ et $T^{(i)}$ est le temps d'arrivée d'une onde propagée dans la $i^{\text{ème}}$ couche (de distance de propagation z). La variance des temps à offset constant vaut donc

$$Var[T^{(n)}(\mathbf{x})] = 2 \sum_{i=1}^n C_T^{(i)}(0, L^{(i)}) + 2 \sum_{i=1}^n Cov[T_d^{(i)}, T_m^{(i)}], \quad (3.33)$$

car les corrélations entre les temps de deux couches différentes sont nulles (les corrélations entre les vitesses de deux couches différentes sont nulles).

Pour calculer les termes $Cov[T_d^{(i)}, T_m^{(i)}]$, il faut connaître la covariance des temps de deux ondes issues de sources différentes (Annexe F, eq. (F.2) p 118). Les rayons considérés

doivent être dans le même plan, ce qui est vérifié ici. On obtient finalement

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[T^{(n)}(\mathbf{x})] &= 2C_T^{(n)}(0, L^{(n)} - L^{(n-1)}) + 2C_T^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-1)}, L^{(n)} - L^{(n-1)}) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ C_T^{(i)}(0, L^{(i)} - L^{(i-1)}) + C_T^{(i)} \left[\mathbf{x}^{(i-1)}, (L^{(i)} - L^{(i-1)}) \frac{\mathbf{x}^{(i-1)}}{\|\mathbf{x}^{(i-1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|} \right] \right. \\
 &\quad \left. - C_T^{(i)} \left[\mathbf{x}^{(i)}, (L^{(i)} - L^{(i-1)}) \frac{\mathbf{x}^{(i)}}{\|\mathbf{x}^{(i-1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|} \right] \right\}, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

où C_T est définie en (3.4) (p 72) si Rytov parabolique est valide dans chaque couche.

La méthode d'inversion des paramètres statistiques de la vitesse de chaque couche consiste alors à étudier les réflexions les unes après les autres. Connaissant la structure de la vitesse de la première couche (grâce aux temps réfléchis sur le premier réflecteur), on en déduit la structure de la vitesse de la deuxième couche (grâce aux temps réfléchis sur le deuxième réflecteur), et ainsi de suite.

Etudions le cas particulier d'un milieu comprenant $(n - 1)$ couches homogènes et une $n^{\text{ème}}$ couche à vitesse hétérogène. Les covariances des temps dans les $(n - 1)$ premières couches sont nulles : $C_T^{(i)}(., .) = 0 \forall i = 1, \dots, n - 1$. L'équation (3.34) devient

$$\text{Var}[T^{(n)}(\mathbf{x})] = 2C_T^{(n)}(0, L^{(n)} - L^{(n-1)}) + 2C_T^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-1)}, L^{(n)} - L^{(n-1)}) . \tag{3.35}$$

Cette expression est de la même forme que la variance des temps dans le cas d'un mono-couche. Nos procédures d'inversion de la portée horizontale par le rapport des variances, ou d'inversion directe de la covariance des vitesses, sont indépendantes de $L^{(n)} - L^{(n-1)}$. Par contre, il est nécessaire de connaître $\mathbf{x}^{(n-1)}$ qui dépend de l'offset \mathbf{x} , des vitesses moyennes et des épaisseurs de toutes les couches.

3.4 Essai sur données réelles

Le chapitre 2 décrit une théorie générale de la propagation d'onde en milieu hétérogène, et la valide sur données synthétiques. Au §3.1, cette théorie a été appliquée à un problème physique concret, celui de l'estimation du modèle de vitesse en sismique réflexion. Des tests synthétiques ont confirmé qu'il est possible de déterminer la structure statistique latérale du sous-sol à partir des mesures des temps de trajet sismiques à faible offset. Cependant, ces voies alléchantes théoriquement ne sont pas convaincantes pour les praticiens qui soutiennent que les effets mesurés sont de l'ordre de grandeur ou inférieurs aux bruits des mesures et du pointé, et donc qu'il n'est pas possible de les distinguer.

Le but de cette section est de replacer ce travail dans son contexte pratique et de montrer qu'il peut être la base d'une quantification statistique de l'hétérogénéité de la vitesse à l'aide des données de sismique réflexion. Pour ce faire, une analyse sans prétention est effectuée sur des données réelles fournies par la compagnie pétrolière AGIP. Celle-ci permet non seulement de confirmer nos intuitions physiques, mais aussi de mettre en avant la nature des difficultés auxquelles on sera confronté pour rendre applicable ce procédé.

Les données dont nous disposons sont des données marines d'assez bonne qualité. 461 tirs, espacés de 40m, et 160 enregistrements (pour chaque tir), espacés de 25m, ont été

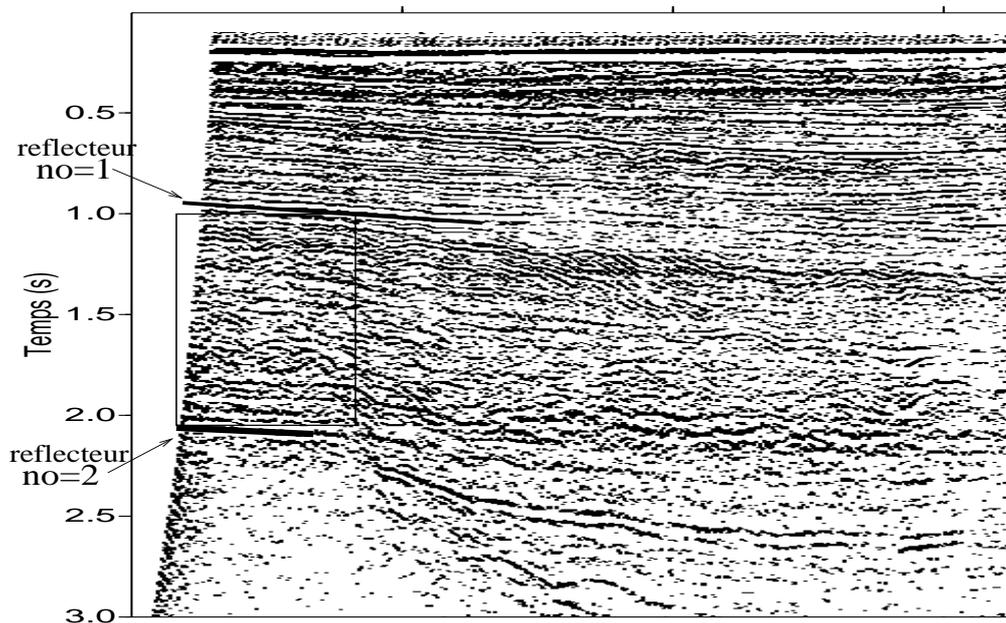


FIG. 3.15 – Visualisation sur la section après sommation (de longueur totale 20km) des réflecteurs pointés et de la zone hétérogène dont on inverse la covariance.

effectués le long d'une ligne sismique. Le premier offset n'est pas nul et vaut 150m ; le dernier est égal à 4125m . Le pas d'échantillonnage en temps est de 4ms , et l'enregistrement dure jusqu'à 5s . Nous nous sommes limités à 3s , car au delà, le bruit de fond domine. L'image obtenue après sommation (Fig. 3.15) présente un empilement régulier de strates inclinées jusqu'à 1s , une zone floue hétérogène de 1s à 2s , puis un réflecteur puissant situé entre 2s et 2.5s . Ce réflecteur, quasi-horizontale dans la partie gauche, est ensuite coupé par une faille, et admet un pendage nettement plus important.

3.4.1 Le pointé des temps d'arrivée

Le pointé des sismogrammes réels est beaucoup plus difficile que celui des données synthétiques. En effet, notre méthode requiert le pointé des données brutes (non sommées) qui ont un faible rapport signal/bruit. La difficulté la plus importante est donc de tenir compte du bruit de fond (bruits de mesure, variations de la qualité des réflexions, variations des formes d'onde, réflexions partielles, ...), et celui-ci peut submerger le début du signal. La précision communément admise du pointé sur données réelles est de 10ms à 5ms [Dillon & Collyer [24]]. Pour modéliser le bruit aléatoire du pointé, la plupart des géophysiciens adopte l'hypothèse d'erreurs à distribution gaussienne, de moyenne nulle, et statistiquement indépendantes [Al-Chalabi [5] p 463, Delprat-Jannaud [23] p 60].

D'autre part la méthode de pointé par seuil est difficile à mettre en œuvre sur données réelles. Sur données synthétiques, Müller et al. [66] comparent les méthodes de pointé par seuil et par maximum : les courbes des temps ont les mêmes allures et sont déphasées

d'une valeur constante. On choisit donc de pointer les temps au maximum de l'ondelette, sachant qu'une soustraction par un facteur constant permet de remonter aux temps réels. Ce facteur est inconnu, mais heureusement, il n'est pas nécessaire dans notre analyse : ce biais systématique disparaît quand on calcule la variance des temps. Ceci est un des gros avantages de la tomographie statistique. En tomographie par tracé de rais, il est nécessaire d'avoir un temps pointé très proche du temps réel, car même une faible déviation des temps entraîne des perturbations sur le modèle inversé [Williamson & Worthington [98]].

Nos arguments peuvent être résumés analytiquement. Si $T_M^p(\mathbf{x})$ est le temps pointé, $T_M^g(\mathbf{x})$ le vrai temps d'arrivée, δ_t^p le biais systématique, $\xi_M(\mathbf{x})$ le bruit aléatoire, on a

$$T_M^p(\mathbf{x}) = T_M^g(\mathbf{x}) + \xi_M(\mathbf{x}) + \delta_t^p. \quad (3.36)$$

On pose à présent $T_M^g(\mathbf{x}) = T_M(\mathbf{x}) + \bar{T}_M(\mathbf{x})$, où $\bar{T}_M(\mathbf{x})$ est la dérive des temps en fonction de M et $T_M(\mathbf{x})$ le résidu des temps (eq. (3.17) p 81). Si $\xi_M(\mathbf{x})$ est stationnaire tel que $\xi_M(\mathbf{x}) \perp T_M(\mathbf{x})$ et $\sigma_p^2 = Var[\xi_M(\mathbf{x})]$, on a

$$Var[T_M^p(\mathbf{x}) - \bar{T}_M(\mathbf{x})] = Var[T_M(\mathbf{x})] + \sigma_p^2 = Var[T(\mathbf{x})] + \sigma_p^2. \quad (3.37)$$

Le bruit du pointé apparaît de la même manière que le terme dû aux petites fluctuations du réflecteur. σ_p^2 est de l'ordre de $10^{-5}s^2$ à $10^{-4}s^2$, *i.e.* du même ordre de grandeur que les effets que l'on étudie (cf Fig. G.7 p 130, G.8 p 130, G.9 p 131). Il risque donc de faire échouer l'inversion des paramètres statistiques du champ de vitesse à partir de la variance des temps. Par contre, dans l'inversion directe de la covariance des vitesses, on utilise la dérivée de la variance des temps qui est égale à la dérivée de la variance des temps pointés (σ_p^2 est une constante, de dérivée nulle). L'inversion directe est donc théoriquement possible sur données réelles.

Sur nos données réelles, le pointé est réalisé sur les sections à offset commun, en veillant à bien suivre toujours le même réflecteur. Deux réflexions très nettes sont choisies (Fig. 3.15). Les corrections statiques éliminent dans les traces les arrivées de l'onde directe, des ondes de surface et la réverbération. Dans les sections avant sommation, le début des traces est donc tronqué à zéro (procédure appelée le "*mute*"), sur des temps de plus en plus longs quand l'offset augmente. Ainsi, pour un réflecteur donné, il y a une limite dans l'offset maximal qui l'éclaire.

3.4.2 Premier réflecteur

Il s'agit tout d'abord du réflecteur quasi-plan situé entre 0.95s (à gauche) et 1.15s (à droite) (Fig. 3.15). Les couches qui le dominent semblent homogènes car les réflexions présentent un empilement régulier. On ne pointe que ses 160 premières traces (le tiers du champ), le pointé devenant ambigu ensuite. Le champ considéré a donc une longueur de 6.5 kilomètres. 28 offsets illuminent ce réflecteur, l'offset maximum étant 825m. Il est de l'ordre de grandeur de la profondeur du réflecteur (1s équivaut approximativement à une profondeur de 1000m). En Fig. 3.18, des sections à offset commun (avant sommation) de ce réflecteur sont présentées.

Le pointé de la section à offset minimum ($x = 150m$) est représenté en Fig. 3.16 (a). La série des temps présente une dérive et n'est pas stationnaire. Une dérive polynomiale de

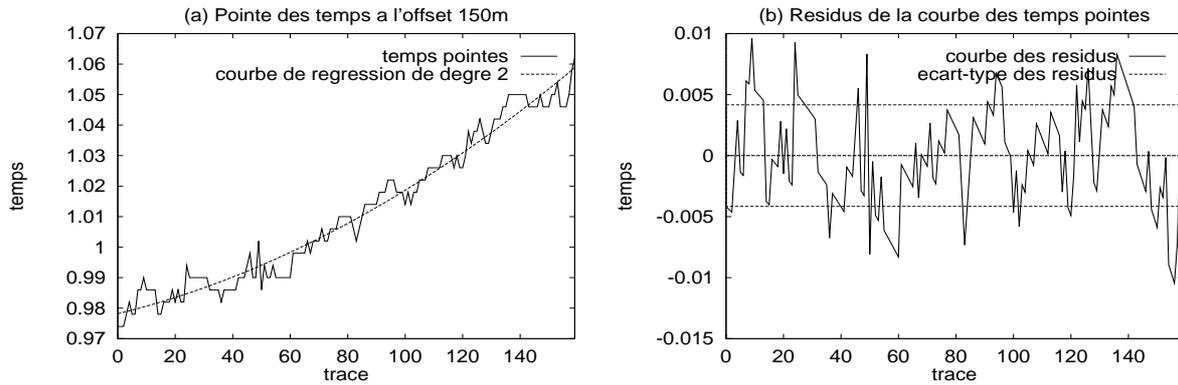


FIG. 3.16 – (a) Pointé des temps et courbe de régression. (b) Résidus entre la courbe de pointé et la courbe de régression, bornes constituées par l'écart-type des résidus.

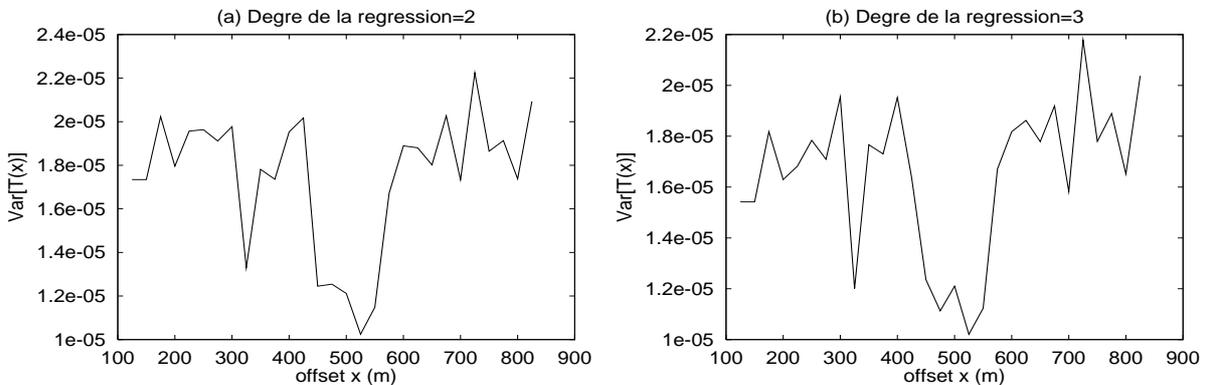


FIG. 3.17 – Variations des temps à offset constant, avec une régression sur les temps pointés de degré 2 (a) et de degré 3 (b).

degré deux s'y ajuste bien, la courbe des résidus ayant une allure nettement plus stationnaire (Fig. 3.16 (b)). On applique donc une régression polynomiale d'ordre deux à toutes les courbes de temps à offset commun, et on calcule la variance des temps en fonction de l'offset (Fig. 3.17 (a)). Pour s'assurer que le degré de régression choisi n'introduit pas de biais dans le comportement de la courbe de variance, cette opération est reproduite avec des degrés d'ordre supérieur. La Fig. 3.17 (b) correspond à un degré de régression trois. Il est logique qu'en valeur absolue, la variance diminue, mais son comportement en fonction de l'offset est le même lorsque l'on passe du degré deux au degré trois, et même à des degrés plus élevés. On choisit donc le degré deux pour l'étude de la variance des temps.

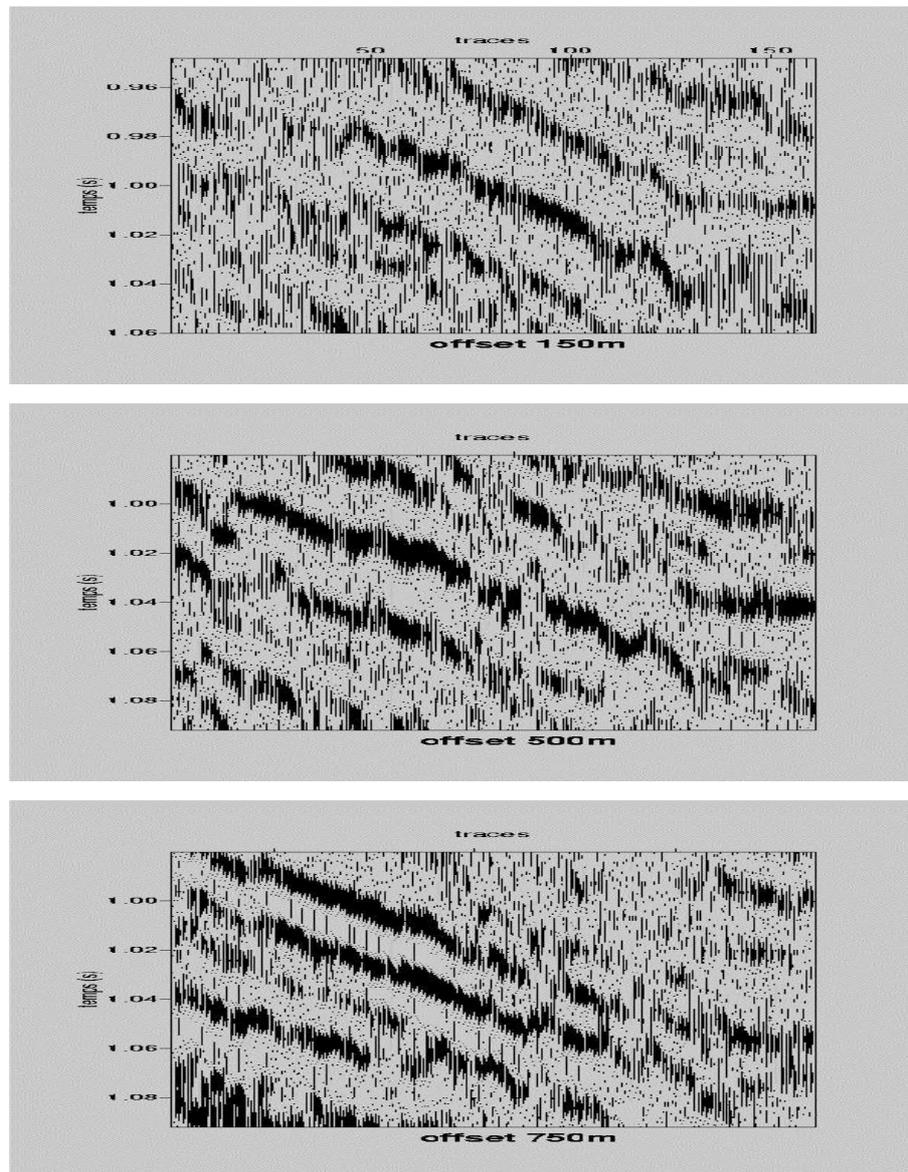


FIG. 3.18 – Trois sections à offset commun centrées sur le premier réflecteur étudié. A l’offset $x = 150m$, c’est celui qui part de $0.96s$ à gauche. Aux offsets $x = 500m$ et $x = 750m$, le réflecteur pointé part de $0.99s$ à gauche.

Globalement, la variance des temps fluctue autour de la valeur moyenne $1.9 \times 10^{-5} s^2$, avec un écart-type d’ordre $10^{-6} s^2$. Entre les offsets $450m$ et $600m$, une brusque chute de la variance est observée. Cette chute d’ordre $10^{-5} s^2$ est problématique. Essayons de l’expliquer en observant les sections à offset commun de la Fig. 3.18. Les temps d’arrivée des sections d’offset $150m$ et $750m$ ont des variances de l’ordre de $1.8 \times 10^{-5} s^2$, alors que ceux de la section d’offset $500m$ ont une variance égale à $1.2 \times 10^{-5} s^2$. Cette différence peut être expliquée par la plus grande régularité du réflecteur d’offset $500m$. Dans les 40 premières traces, le réflecteur d’offset $150m$ présente un aspect trouble, alors que les deux autres réflecteurs sont nettement plus réguliers. C’est typiquement ce type d’effets qu’expliquent notre analyse statistique des temps d’arrivée : la variance des temps à faible offset est plus forte que celle à grand offset, et cette variation permet de retrouver

les échelles caractéristiques des hétérogénéités de vitesse.

Cependant, le réflecteur d'offset $750m$ présente un aspect plus désordonné que les deux autres dans ces 50 dernières traces. Ces irrégularités augmentent la variance des temps pointés. Il est possible que ces effets soient dûs à des petites hétérogénéités locales qui ne sont pas traversées par les ondes des sections à offset plus petit. Comme les ordres de grandeur des fluctuations sont très faibles, de telles hétérogénéités affectent nettement la variance des temps, et il n'est plus possible d'appliquer notre analyse sur la courbe de variance des temps à offset commun.

3.4.3 Second réflecteur

Etudions à présent le réflecteur puissant situé entre $2s$ (à gauche) et $2.4s$ (à droite) (Fig. 3.15). L'analyse statistique des temps de trajet issus de ce réflecteur devrait permettre de quantifier l'hétérogénéité du champ de vitesse situé entre $1s$ et $2s$. Néanmoins, l'illisibilité de ce réflecteur sur les données brutes (cf Fig. 1.2 (a) p 9) rend impossible son pointé. En revanche, les 80 premières traces (champ de longueur $3km$) sont suffisamment nettes pour être pointées. Cette fois-ci, il est possible de pointer 60 sections à offset commun ($x \in [150m, 1625m]$). En Fig. 1.7 (p 15), on présente ces 80 traces pour trois sections d'offsets différents.

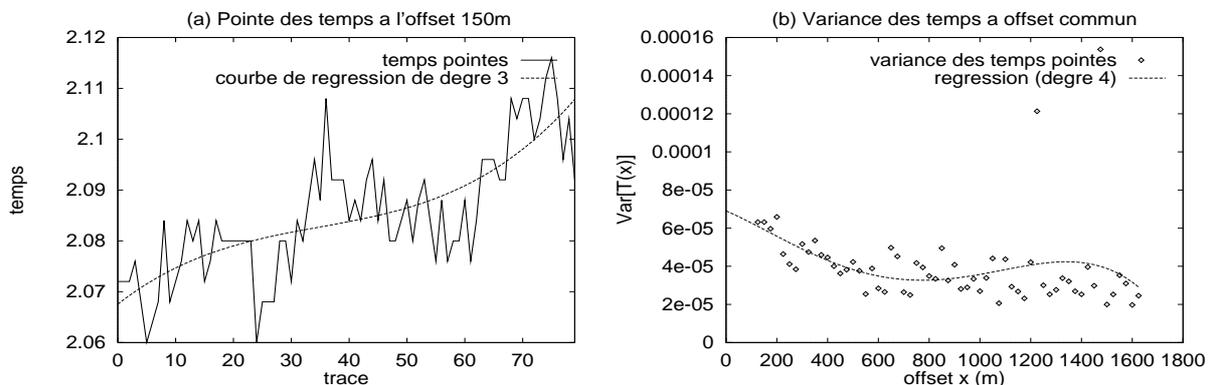


FIG. 3.19 – (a) Pointé des temps et courbe de régression. (b) Variance des temps à offset constant et courbe de régression.

Le pointé de la section à offset minimum est présenté en Fig. 3.19 (a). La série présente à nouveau une dérive, et il n'est pas possible à vue de choisir le degré le plus adapté pour la régression. Au §3.2.1, il est proposé une technique heuristique pour choisir le degré de la dérive, en traçant les variances des temps en fonction de l'offset pour différents degrés (Fig. 3.20 (a)). Le comportement varie brutalement entre les degrés deux et trois, mais faiblement entre les degrés d'ordre supérieur. On applique donc la régression d'ordre trois.

En Fig. 3.19 (b), la variance des temps est tracée en fonction de l'offset. Cette fois-ci, l'écart-type de la variance est d'ordre $10^{-5}s^2$, mais on observe tout de même une variance plus forte à faibles offsets. Une régression polynomiale (de degré quatre) sur cette variance confirme cette impression. Deux mesures en $x \sim 1200m$ et $x \sim 1500m$ nettement plus élevées sont incohérentes et dues à des difficultés de pointé. On se permet de les supprimer.

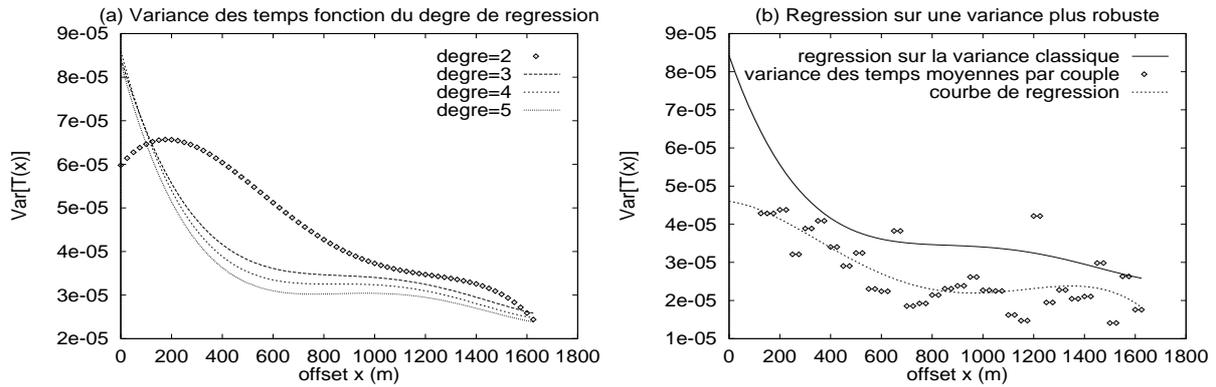


FIG. 3.20 – (a) Variances en fonction du degré de régression sur les temps. (b) Régression sur une variance plus robuste : les points de la variance sont moyennés deux à deux.

D'autre part, le nuage de points de la variance est assez bruité. Cette dispersion peut être réduite en moyennant deux à deux et de proche en proche les mesures de variance. Le nuage de points obtenu est alors nettement plus concentré (Fig. 3.20 (b)). Ce moyennage diminue en valeur absolue la variance des temps. Les courbes de régression appliquées sur la variance initiale et sur cette nouvelle variance sont comparées en Fig. 3.20 (b), et en Fig. 3.21 (a) pour les courbes normalisées. Celle de la nouvelle variance normalisée est beaucoup plus robuste vis à vis de notre modélisation théorique : dérivée nulle à l'origine, allure de cloche, et convergence vers 0.5. C'est pourquoi on l'appelle variance robuste.

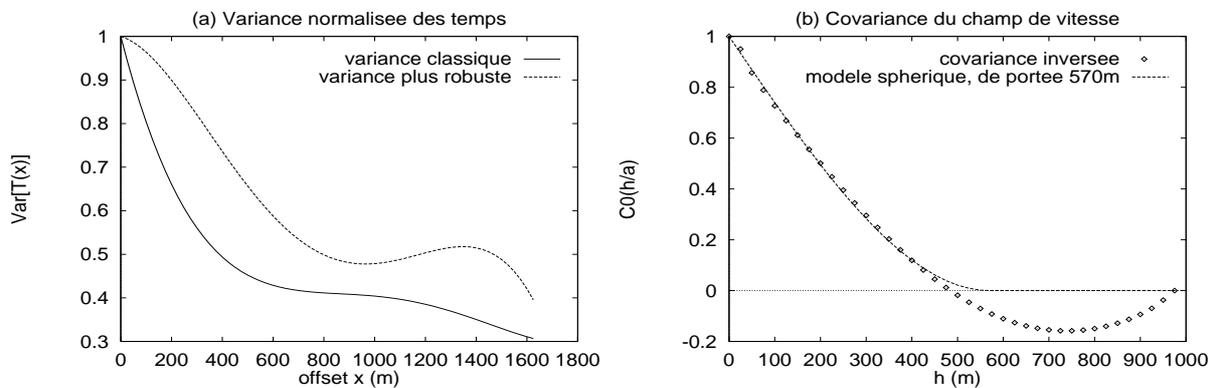


FIG. 3.21 – (a) Variances normalisées des temps. (b) Inversion de la covariance avec la variance normalisée robuste, ajustement avec une covariance sphérique.

En toute rigueur, il faudrait prendre en compte une modélisation multicouche pour séparer les fluctuations des temps dues à la zone située au dessus du premier réflecteur et celles dues à la zone qui nous intéresse. La formule du cas multicouche (3.34) requiert la connaissance des vitesses moyennes et des épaisseurs de chaque couche. Pour ne pas compliquer notre analyse et désirant juste expliquer son principe, on utilise les formules du cas monocouche. Les estimations que l'on obtient seront à considérer avec précaution.

L'estimation de la portée latérale par (3.8) (p 72) sous l'hypothèse de covariance gaussienne ou exponentielle ($Var[T(a)]/Var[T(0)] \simeq 0.9$) donne un ordre de grandeur de

200m. La portée pratique est donc de 350m dans le cas gaussien et de 600m dans le cas exponentiel (cf §1.4.3). Le résultat de l'inversion directe de la variance normalisée robuste par (3.9) est donné en Fig. 3.21 (b). La courbe a été intégrée entre zéro et 1000m, pour ne pas prendre en compte ses effets à grand offset que l'on considère indésirables. La covariance inversée obtenue colle très bien avec la covariance d'un modèle sphérique de portée 570m. Pour comparer la portée pratique de ce modèle et les portées pratiques obtenues précédemment, on utilise la même règle (portée pratique = valeur où la covariance atteint 5% de la variance). La portée pratique vaut alors 460m (cf §1.4.3). On retrouve approximativement à une erreur de 30% près nos précédentes estimations.

3.5 Conclusions

Le processus de tomographie statistique est simple et rapide. La seule phase vraiment délicate concerne le pointé des temps d'arrivée. Si les données sont trop bruitées, il n'y a pas d'espoir d'obtenir un pointé suffisamment robuste. Notre procédure est alors inapplicable car les effets que l'on mesure sont très faibles (de l'ordre de quelques millisecondes). Cependant, si les interfaces ne sont pas trop perturbées et bien éclairées, cette méthode permet d'extraire une information inédite sur les hétérogénéités de petite taille.

Le principe de l'inversion de la variance des temps est dû à Touati [89]. Même si les lacunes de notre modèle sont encore importantes (les réflecteurs et les vitesses sont limités à de petites perturbations), on a largement étendu cette technique d'inversion :

- ★ Une formule d'inversion directe de la structure de la covariance a été obtenue.
- ★ L'utilisation des données à grand offset permet d'inverser la portée verticale.
- ★ La diffraction modérée est prise en compte. Il est démontré théoriquement que le régime de saturation (approximation de Fraunhofer) donne les mêmes résultats que l'optique géométrique.
- ★ Les réflecteurs et les champs de vitesse peuvent varier lentement.
- ★ Les petites perturbations d'interface sont modélisées. L'inversion de la portée par la variance normalisée n'est plus possible, mais l'inversion directe si.
- ★ Des expériences synthétiques sont effectuées par simulation de sismogrammes synthétiques avec l'équation d'onde acoustique.
- ★ L'application à des données réelles est difficile du fait de notre inexpérience du pointé des temps, mais les résultats obtenus sont cohérents.

Pour synthétiser nos résultats, donnons la formule théorique (dans les régimes asymptotiques) de la variance des temps d'arrivée :

$$Var[T_M^p(\mathbf{x}) - \bar{T}_M(\mathbf{x})] = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\Upsilon v_0^2} b L_0 \left[\frac{A_0}{2} + \frac{1}{x_\perp} \int_0^{x_\perp} \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z^2}) dz du \right] + \frac{4\sigma_\zeta^2}{v_0^2} + \sigma_p^2, \quad (3.38)$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$ est l'offset, $T_M^p(\mathbf{x})$ est le temps pointé d'offset \mathbf{x} et de point milieu M , $\bar{T}_M(\mathbf{x})$ la dérive estimée par régression (fonction de M), σ_ϵ^2 la variance de ϵ (perturbations du carré de la lenteur), $\Upsilon = 1$ dans l'optique géométrique et $\Upsilon = 2$ dans l'approximation de Fraunhofer, v_0 la vitesse moyenne, b la portée verticale de ϵ , C_0 la covariance standardisée

	GO	PA	FA	Réflecteur aléatoire
Etude des temps de trajet	$\sqrt{\lambda L_0} < a$		$\sqrt{\lambda L_0} \gg a$ $\sqrt{\lambda L_0} < \frac{a^2}{\lambda}$	$\sqrt{\lambda \sigma_\zeta} \ll \frac{l_\zeta}{2}$
Méthode de perturbations	$L_0 < \frac{a}{4\sigma_\epsilon}$	$\sigma_\epsilon \ll 1$ $\sigma_\epsilon^2(2L_0)b < \lambda^2$		$\sigma_\zeta \ll L_0$ $\sigma_\zeta < l_\zeta/20, x \ll 2L_0$
Etude statistique	$b < L_0/10$			
Cov. des temps		$b \lesssim a$		
Onde sphérique	$x < L_0$			
Réfl. aléatoire		$\sqrt{\lambda \sigma_\zeta} \ll a$		

TAB. 3.2 – Récapitulation des conditions de validité numériques de la tomographie statistique en sismique réflexion à faible offset.

de ϵ , L_0 la profondeur moyenne du réflecteur, A_0 la portée intégrale de C_0 , $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ la portée latérale de ϵ , $x_\perp = \sqrt{x^2/a_x^2 + y^2/a_y^2}$, σ_ζ^2 la variance des fluctuations d'interface, σ_p^2 la variance des erreurs de pointé. Dans (3.38), le premier terme correspond aux hétérogénéités de vitesse, le second aux fluctuations du réflecteur, et le dernier aux erreurs de pointé. En sismique réflexion, ces termes peuvent atteindre un ordre de $10^{-4}s^2$ à $10^{-3}s^2$.

La possibilité d'inversion directe de la covariance des vitesses est due au fait que les deux derniers termes de (3.38) sont constants. En 3D, la formule d'inversion est explicitée pour les milieux transverses isotropes par (3.9) (p 73). L'hypothèse d'isotropie statistique transverse est réaliste dans les bassins sédimentaires. Il est plausible que les tailles caractéristiques latérales des hétérogénéités soient les mêmes.

Les conditions de validité de la formule (3.38) sont résumées en Table 3.2. Elles dérivent des approximations pour calculer la covariance des temps en milieu aléatoire (avec $z = 2L_0$ comme distance de propagation), des approximations effectuées lors de la caractérisation probabiliste des miroirs sismiques, et de celles permettant le couplage des deux modélisations. On donne les conditions numériques quand on a pu les observer (cf §2.6). Elles sont moins floues que les conditions théoriques qui utilisent \ll .

Conclusion générale

Positionnement du sujet

Ce travail constitue une approche originale en géophysique et plus particulièrement en sismique. D'innombrables travaux essaient d'améliorer et de raffiner les méthodes d'exploitation des données sismiques, mais le fossé partageant le monde industriel du monde théorique n'est pas comblé. Depuis une quinzaine d'années, avec l'avènement des ressources informatiques, les techniques de tomographie sont les plus prometteuses. Pourtant, elles ont du mal à s'imposer en pratique dans la chaîne de traitement sismique.

Dans le chapitre 1, une courte revue bibliographique met en évidence la présence d'hétérogénéités de tailles multiples dans les zones explorées. Ce sont les hétérogénéités de vitesse d'échelle hectométrique qui ont une influence potentiellement importante sur le processus d'imagerie sismique, *i.e.* sur le positionnement des interfaces. Par contre, les hétérogénéités de vitesse d'échelle plus petite peuvent être responsables de la nature très bruitée des sections sismiques, mais n'interagissent pas avec les temps d'arrivée. Les réflexions, quant à elles, sont provoquées par de forts et rapides contrastes d'impédance.

Très en vogue actuellement dans l'industrie pétrolière, les outils géostatistiques permettent de mesurer les incertitudes des différents processus d'exploration et d'exploitation du sous-sol. La nature hétérogène des milieux explorés a poussé Matheron [62] à introduire une modélisation stochastique en sismique réflexion : considérer le champ de vitesse comme une réalisation d'une fonction aléatoire statistiquement anisotrope. Cette modélisation est classique en sismologie. Touati [89] a ensuite proposé une méthode pour inverser la covariance du champ de vitesse à partir des temps d'arrivée. Se référant aux travaux de nombreux géophysiciens, on la dénomme tomographie statistique, *i.e.* inversion des paramètres statistiques de la vitesse à partir des temps de trajet. Notre travail s'est majoritairement attaché à étendre les domaines de validité de cette technique, dans le but avoué de la rendre applicable en sismique réflexion.

Résultats théoriques et expérimentaux

Sous un titre très général, la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire est en fait composée de plusieurs domaines fort différents. Selon que l'on soit en transmission ou en réflexion, que les hétérogénéités soient faibles ou fortes, petites ou grandes par rapport à la longueur d'onde, les outils mathématiques et physiques utilisés sont très variables. L'équation d'onde acoustique modélise une petite partie des phénomènes se produisant réellement dans le sous-sol lors de la propagation des ondes sismiques, mais c'est une bonne approximation pour le calcul du front d'onde direct [Wu & Aki [101]]. Deux autres approximations sont absolument nécessaires pour étudier les temps de trajet :

l'approximation parabolique et celle de Rytov. Celles-ci ont un domaine de validité plus large que l'optique géométrique. Dans le chapitre 2, les conditions de leur validité ont été particulièrement prises en considération et élucidées dans les milieux stationnaires anisotropes. Des formules de l'espérance des temps au deuxième ordre et de la covariance des temps au premier ordre ont ensuite été obtenues dans le cadre d'une anisotropie statistique géométrique (à stratification horizontale), aussi bien en milieu 3D que 2D.

La nouveauté de notre approche concerne l'utilisation de la covariance standardisée C_0 qui, par de simples transformations géométriques, ramène une fonction anisotrope (multidimensionnelle) à une fonction isotrope (à une dimension). Finalement, des procédures théoriques d'inversion de tous les paramètres statistiques (portées, écart-type, covariance standardisée) sont développées. Ces inversions sont rigoureusement valides dans les deux régimes asymptotiques (optique géométrique et Fraunhofer) encadrant l'approximation parabolique.

Nos résultats sont validés sur des expériences synthétiques 2D très lourdes à mettre en œuvre (différences finies acoustiques). Les résultats numériques les plus intéressants concernent la visualisation de la saturation et de l'anisotropie du velocity shift, de la limite de Rytov, et une limite (rarement prise en compte) de l'approximation parabolique. L'inversion de la portée transverse à la propagation est également valide.

Notre contribution à la tomographie statistique en sismique réflexion est exposée dans le chapitre 3. Elle porte sur plusieurs points :

- ▷ La géométrie considérée est 3D.
- ▷ L'optique géométrique utilisée par Touati [89] définit rigoureusement les temps d'arrivée, mais l'inversion se heurte alors à la limite de la zone de Fresnel. Le filtre fréquentiel produit par la diffraction et agissant sur les temps n'est pas pris en compte. Son oubli biaise alors le processus d'inversion des temps [Baina [9]]. Ce problème est résolu à l'aide des approximations parabolique et de Rytov, qui prennent en compte les régimes de diffusion-avant modérée.
- ▷ Dans le cas d'un réflecteur horizontal, à l'aide de la variance des temps à offset constant, Touati [89] (chap 6) inverse la structure horizontale de la covariance à l'aide des temps à faible offset. On montre que les temps à grand offset permettent de remonter à l'anisotropie statistique de la vitesse. En pratique cependant, cette inversion risque d'échouer si l'anisotropie est trop forte, car les offsets requis sont beaucoup trop grands.
- ▷ Les tests effectués par différences finies sur l'équation des ondes valident nos formules théoriques. Deux types de milieu sont utilisés : un milieu lisse (gaussien) et un milieu rugueux (exponentiel). Le problème majeur consiste à pointer les temps d'arrivée sur les sismogrammes. D'autres tests réalisés par différences finies sur l'eikonale contournent ce problème, mais sont moins réalistes que les premiers.
- ▷ Sous l'hypothèse de pendage faible, les composantes lentes des réflecteurs et des champs de vitesse peuvent être prises en compte de manière simple. Une régression polynomiale par moindres carrés, appliquée directement sur les temps, a pour but d'obtenir les résidus des temps correspondant aux fluc-

tuations aléatoires de la vitesse. La tomographie statistique s'applique alors sur ceux-ci.

- ▷ Les fluctuations rapides des interfaces sont modélisées par une fonction aléatoire. Sous l'hypothèse de pendage faible, il est montré que leur contribution est constante dans la variance des temps en fonction de l'offset. Sous certaines conditions, les bruits de mesure et de pointé n'y ajoutent également qu'une constante.
- ▷ L'inversion directe de la covariance est alors applicable sans aucune connaissance sur la vitesse moyenne ou sur la profondeur moyenne du réflecteur. Les résultats qu'elle nous donne sur des données réelles sont satisfaisants.

Cependant, de fortes limitations sont présentes dans cette approche. Tout d'abord, les techniques sont basées sur des linéarisations de l'équation des ondes et de la longueur des rayons réfléchis. Les domaines de validité de ces approximations sont donnés et limitent considérablement l'application de notre analyse. Les fluctuations de vitesse doivent être faibles (de l'ordre de quelques pourcents), et les fluctuations d'interface inférieures à 5% de la portée de l'interface. Telle quelle, cette technique ne s'applique donc pas à des milieux géologiques complexes, où les pendages des réflecteurs sont importants. L'hypothèse stationnaire est également restrictive, mais l'extension à des champs de vitesse et des réflecteurs intrinsèques ne pose pas de problème particulier. Enfin, l'anisotropie est géométrique à stratification horizontale, alors que les champs de vitesse réels présentent souvent des stratifications pentées.

D'autre part, le pointé des temps de données synthétiques est facile, mais sur données réelles, il est très difficile, voire même irréalisable en 3D. La tendance actuelle en sismique concerne plutôt la recherche de méthodes ne nécessitant pas le pointé.

Perspectives

Il est possible d'étendre cette hypothèse d'anisotropie à des stratifications de pente quelconque. De nouvelles procédures devront permettre d'inverser les pendages d'anisotropie. L'extension à une anisotropie zonale (différentiation des covariances verticale et horizontale) est également importante car elle est plus réaliste que l'anisotropie géométrique. Elle est observable dans les réservoirs pétroliers présentant souvent de nettes stratifications latérales. Dans cet article, les conséquences d'un effet de pépite sur la covariance des temps sont également analysées.

L'ordre de grandeur de la taille verticale des hétérogénéités que l'on a considérées ($\sim 100m$) ne correspond pas du tout aux ordres de grandeurs utilisés en caractérisation de réservoirs ($\sim 5m$). Il faut donc voir les hétérogénéités décelées par la sismique comme un empilement de minces couches hétérogènes. La relation qui lie une hétérogénéité d'échelle verticale hectométrique et la superposition d'hétérogénéités d'échelle verticale métrique doit donc être trouvée.

On s'est contenté d'effectuer des simulations de milieux à distribution gaussienne. Quel serait l'effet d'une zone fortement hétérogène sur notre analyse? Ce type de tests sur des milieux à distribution non gaussienne pourrait être effectué dans le but de cerner plus précisément les problèmes rencontrés en pratique.

Avec les moyens de calcul actuels, il est possible d'envisager des tests numériques 3D. C'est possible par automatisation du pointé des temps, si les données synthétiques ne

sont pas trop bruitées. Pour un jeu de données 3D, la procédure de séparation entre les fluctuations lentes et rapides des temps d'arrivée doit être fortement améliorée. Que ce soit en 2D ou en 3D, des méthodes plus complexes que les moindres carrés devraient se montrer nettement plus efficaces.

Dans notre approche stochastique des perturbations du réflecteur, un phénomène géométrique semblable au "*velocity shift*" a été observé (cf Annexe H). Appelons le "*reflector shift*" : les rais se réfléchissent préférentiellement sur les parties hautes des réflecteurs, du coup la moyenne des temps de trajet est plus faible que le temps issu de la profondeur moyenne du réflecteur. Cet effet pourrait être quantifié de la même manière que le *velocity shift* : développement des temps à l'ordre deux, et calcul de leur moyenne. D'autre part, l'hypothèse de base considère que les offsets sont faibles devant la profondeur de l'interface. Il est nécessaire de s'en défaire pour inverser le rapport d'anisotropie en tenant compte des fluctuations aléatoires d'interface.

Un point très intéressant, que nous n'avons pas présenté ici, concerne l'étude du domaine de validité de la méthode de Huygens développée par Vidale [93] et Podvin & Lecomte [71]. La variance des temps en milieu aléatoire est une mesure robuste, particulièrement bien adaptée pour étudier les différents domaines de validité. Il serait intéressant de comparer cette mesure pour des simulations effectuées par différences finies acoustiques et méthode de Huygens.

Finalement, la définition de temps d'arrivée dans un cadre non asymptotique est un des points contestables de notre travail. Le champ d'onde doit être faiblement déformé pour que les temps pointés aient une signification physique. En considérant le champ d'onde complet, au lieu des temps d'arrivée, ce problème est résolu. La covariance du champ d'onde peut être calculée dans l'approximation markovienne. Celle-ci, plus générale que celle de Rytov, prend en compte des régimes de fluctuations fortes du champ d'onde. Elle n'est pas limitée dans la distance de propagation de l'onde. Cependant, considérer le champ d'onde pose d'autres problèmes, des hétérogénéités de dimension inférieure à la longueur d'onde doivent également être prises en compte. Regrouper dans une théorie unificatrice les fluctuations des temps et l'atténuation des amplitudes est un problème ouvert. Sato [81] a proposé une première solution permettant de prendre en compte les fluctuations de temps dans le calcul du facteur d'atténuation des amplitudes.

Actuellement, un gros effort théorique se porte sur deux domaines de la propagation d'onde en milieu aléatoire : la théorie du transfert radiatif et la localisation [Papanicolaou [69]]. L'équation de transfert radiatif est une équation de transport de l'énergie de l'onde. Elle décrit correctement les interactions de l'onde avec des hétérogénéités faibles, de dimensions comparables à la longueur d'onde. Un nouveau paramètre caractérise un milieu hétérogène dans cette théorie : le libre parcours moyen ("*mean free path*"), qui est une mesure donnant l'importance de la diffraction multiple. La localisation, quant à elle, apparaît en sismologie à des distances de propagation de plusieurs dizaines de kilomètres. Elle se manifeste par un phénomène curieux : à cause des diffractions sur de petites et fortes hétérogénéités stratifiées, l'énergie d'une onde est emprisonnée à l'intérieur d'une zone du sous-sol. Cette théorie ouvre une voie vers des méthodes d'inversion en sismologie, mais ne semble pas jouer de rôle en sismique réflexion.

Enjeux techniques et industriels

De nouvelles informations statistiques disponibles sur le champ de vitesse ont une utilité certaine. Parmi leurs possibilités d'application, nous citerons :

- ◇ L'intégration d'information *a priori* dans l'inversion des temps de trajet (tomographie classique). Cette information supplémentaire de nature statistique (modèle de covariance de la vitesse, portées, bornes de vitesse) serait obtenue très rapidement à partir des temps pointés. Elle pourrait aider à supprimer les solutions non correctes et à stabiliser la solution.
- ◇ La détermination du champ de vitesse de migration. Celui-ci est souvent calculé à partir des vitesses de stack. Il est alors nécessaire de lisser les vitesses de stack, et la détermination des paramètres de lissage est difficile [Juliard [50] §5.2]. Les longueurs de corrélation que l'on obtient sont des mesures objectives qui pourraient être utilisées dans ce processus.
- ◇ Touati [89] (§7.5) montre que l'on peut simuler les erreurs de migration à l'aide de la covariance des vitesses. Pour l'instant, la migration considérée est très simple, mais il serait possible d'intégrer la modélisation probabiliste dans des migrations plus complexes.
- ◇ L'étude des écoulements dans les réservoirs pétroliers est un enjeu scientifique important. Les méthodes géostatistiques permettent de simuler les réservoirs. Elles nécessitent des attributs sismiques (impédances, réflectivité, forme d'onde, ...) pour calculer leur corrélation avec les faciès à l'aide des données de puits. Notre inversion permettrait, dans un premier temps, d'introduire une nouvelle information statistique sur la vitesse : sa portée horizontale. La vitesse est liée à la composition des couches traversées, mais aussi à la plupart de leurs paramètres physiques : densité, impédance, porosité, perméabilité, pression effective, ... [Versteeg [92] chap 6]. Il est donc envisageable de déduire la portée horizontale de ces paramètres à partir de celle de la vitesse.
- ◇ La tomographie statistique est applicable dans des contextes de tectonique calme (réflecteurs peu pentés). Elle pourrait s'avérer très utile pour déterminer la taille latérale des corps dans un réservoir. La résolution latérale à l'intérieur d'un réservoir est un enjeu majeur pour la production pétrolière.
- ◇ La bibliographie effectuée a mis en valeur certains domaines d'intérêt de la tomographie statistique : sismologie, sonar (propagation dans l'océan), radar (propagation dans l'atmosphère), nucléaire (ultrasons dans des cuves), optique, astrophysique, imagerie médicale, ...

Annexe A

L'approximation markovienne

L'approximation markovienne suppose que les corrélations des vitesses dans la direction de propagation ont très peu d'effets sur les corrélations du champ : les fluctuations du milieu sont delta-corrélées dans la direction de propagation [Rytov et al. [76] §3.1] :

$$\mathbf{E}[\epsilon(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)\epsilon(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)] = C_\epsilon^e(\boldsymbol{\rho}, z) = \delta(z)A(\boldsymbol{\rho}) , \quad (\text{A.1})$$

$$\text{où } A(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi \int \Phi_\epsilon^e(\boldsymbol{\kappa}, 0)e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\kappa} , \quad z = z_1 - z_2 , \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 , \quad (\text{A.2})$$

avec les conditions $\|\boldsymbol{\rho}\| = \rho \ll z$ et $\lambda \ll z$.

L'opérateur de moyenne statistique appliqué à l'équation de Helmholtz (2.5) donne

$$\Delta \mathbf{E}[u(\mathbf{r})] + k^2 \mathbf{E}[u(\mathbf{r})] + k^2 \mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})u(\mathbf{r})] = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Le terme $\mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})u(\mathbf{r})]$ traduit un couplage entre les fluctuations du milieu et celles du champ d'onde. Ce terme peut être découplé si le processus $u(\mathbf{r})$ est markovien : la solution à chaque instant ne dépend que des valeurs aléatoires à l'instant précédent (principe de causalité dynamique) [Rytov et al. [76] §3.1, Klyatskin [52] chap 1]. La notion de temps n'intervenant pas ici, son rôle est joué par la variable spatiale correspondant à la direction de propagation. Or l'équation de Helmholtz traduit l'existence d'ondes progressives et rétrogrades. L'approximation markovienne ne peut s'y appliquer car le champ d'onde en un point ne dépend pas uniquement du champ d'onde au point précédent, mais aussi du champ d'onde au point suivant puisqu'il y a de la rétro-diffraction. Il n'est donc pas possible d'utiliser l'équation (A.3) avec l'approximation markovienne. Par contre, l'équation parabolique, qui peut être dérivée à partir de l'équation de Helmholtz, permet d'éliminer les ondes rétrogrades (cf §2.2).

L'équation parabolique (2.28) (p 39) néglige explicitement la rétro-diffraction, et l'approximation markovienne peut s'y appliquer. Pour obtenir une équation différentielle en $\mathbf{E}[U(\mathbf{r})]$, (2.28) est moyennée :

$$2ik \frac{\partial \mathbf{E}[U(\mathbf{r})]}{\partial z} + \Delta_\perp \mathbf{E}[U(\mathbf{r})] + k^2 \mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})U(\mathbf{r})] = 0 , \quad (\text{A.4})$$

Le problème revient à décomposer le terme $\mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})U(\mathbf{r})]$ en $g(\mathbf{r})\mathbf{E}[U(\mathbf{r})]$. Pour ce faire, on peut supposer que $\epsilon(\mathbf{r})$ est un champ aléatoire gaussien et passer par une formule

intégrale de Furutsu-Novikov [Ishimaru [43] chap 20]. Celle-ci mène à $\mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})U(\mathbf{r})] = (ik/4)A(0)\mathbf{E}[U(\mathbf{r})]$. On n'explicite pas la résolution de l'équation différentielle obtenue, mais sa solution est donnée pour mémoire :

$$\mathbf{E}[U(\mathbf{r})] = U_0(\mathbf{r}) \exp\left[-k^2 \frac{A(0)}{8} z\right]. \quad (\text{A.5})$$

C'est l'expression du champ moyen en milieu perturbé en fonction du champ en milieu homogène, produits par les mêmes sources en $z = 0$.

De la même manière, une équation différentielle pour la covariance transverse du champ peut être dérivée. Pour une onde plane, sa solution s'écrit [Rytov et al. [76] §3.3]

$$\mathbf{E}[U(\boldsymbol{\rho}_1, z)U^*(\boldsymbol{\rho}_2, z)] = U_0^2 \exp\left\{\frac{k^2}{2}[A(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) - A(0)]\right\}, \quad (\text{A.6})$$

où U^* désigne le complexe conjugué de U .

Rytov et al. [76] (§3.5) obtiennent des conditions explicites pour la validité de l'approximation markovienne (A.1) :

$$\sqrt{\lambda l_{\parallel}} \ll l_{\perp} \text{ et } \sigma_{\epsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1. \quad (\text{A.7})$$

La première condition signifie que la largeur de la zone de diffraction créée sur la longueur d'une hétérogénéité est petite devant la largeur de l'hétérogénéité. La seconde s'appelle l'approximation de Bourret et implique que le champ moyen est faiblement atténué sur une hétérogénéité. Dans ces conditions, la distance de propagation z de l'onde n'est pas restreinte et l'approximation markovienne prend en compte des régimes de fluctuations d'intensité fortes qui apparaissent aux grandes longueurs de propagation. En revanche, pour l'approximation parabolique, la distance de propagation est limitée (eq. (2.29)).

Annexe B

Représentation spectrale

L'utilisation de la densité spectrale permet d'obtenir des formules explicites, utilisables pour une inversion. Le but de cette annexe est juste de présenter les résultats utilisés.

Soit $X(\mathbf{r})$ un champ aléatoire, $C_X(\mathbf{r})$ sa covariance si il est stationnaire, $\Phi_X(\mathbf{k})$ sa densité spectrale et $F_X(\boldsymbol{\kappa}, z)$ sa densité spectrale latérale (transformée de Fourier dans les directions latérales). Pour un champ 3D stationnaire, si C_X est de carré intégrable, on a par transformée de Fourier

$$\begin{cases} \Phi_X(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint C_X(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} & , & C_X(\mathbf{r}) = \iiint \Phi_X(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} , \\ F_X(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint C_X(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} & , & C_X(\boldsymbol{\rho}, z) = \iint F_X(\boldsymbol{\kappa}, z) e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\kappa} . \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

En 2D, les expressions sont identiques avec $(2\pi)^2$ à la place de $(2\pi)^3$, (2π) à la place de $(2\pi)^2$, $\boldsymbol{\rho} = \rho$ et $\boldsymbol{\kappa} = \kappa$. Que ce soit en 2D ou en 3D, on en déduit facilement

$$2\pi\Phi_X(\boldsymbol{\kappa}, 0) = \int F_X(\boldsymbol{\kappa}, z) dz , \quad (\text{B.2})$$

$$\iint \Phi_X(\boldsymbol{\kappa}, 0) e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C_X(\boldsymbol{\rho}, z) dz . \quad (\text{B.3})$$

Soit $X(\boldsymbol{\kappa}, z)$ la transformée de Fourier latérale (en $\boldsymbol{\rho}$) d'un champ aléatoire $X(\boldsymbol{\rho}, z)$. Supposons qu'il est centré et calculons sa covariance transverse :

$$\begin{aligned} Cov[X(\boldsymbol{\kappa}_1, z_1), X(\boldsymbol{\kappa}_2, z_2)] &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int e^{-i\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1} d\boldsymbol{\rho}_1 \int e^{-i\boldsymbol{\kappa}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2} \mathbf{E}[X(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)X(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)] d\boldsymbol{\rho}_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \exp[-i\boldsymbol{\rho}_2\cdot(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_2)] d\boldsymbol{\rho}_2 \int e^{-i\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{\rho}} C_X(\boldsymbol{\rho}, z_1 - z_2) d\boldsymbol{\rho} , \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$. On obtient au sens des distributions

$$Cov[X(\boldsymbol{\kappa}_1, z_1), X(\boldsymbol{\kappa}_2, z_2)] = \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_2) F_X(\boldsymbol{\kappa}_1, z_1 - z_2) . \quad (\text{B.5})$$

Dans cette thèse, on raisonne le plus souvent en termes d'approximations physiques. Beaucoup de celles-ci sont basées sur les fonctions de corrélation et sur leurs portées. On dit généralement que la covariance isotrope $C(r)$ est concentrée dans le domaine $|r/a| < 1$ où a est la portée de C . Ceci signifie qu'elle est négligeable hors de ce domaine. Dans le cas anisotrope, si (a_x, a_y, b) sont les portées de C dans la base (Ox, Oy, Oz) , $C(\mathbf{r}) = C(x, y, z)$ est concentrée dans la région $\sqrt{\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{b^2}} < 1$.

Dans le domaine spectral, $\Phi(k)$ (isotrope) est concentrée dans $|ak| < 2\pi$ et $\Phi(\mathbf{k}) = \Phi(\boldsymbol{\kappa}_x, \boldsymbol{\kappa}_y, \boldsymbol{\kappa}_z)$ (anisotrope) est concentrée dans $\sqrt{a_x^2 \kappa_x^2 + a_y^2 \kappa_y^2 + b^2 \kappa_z^2} < 2\pi$. On en déduit que $\Phi(\boldsymbol{\kappa}_x, \boldsymbol{\kappa}_y, \boldsymbol{\kappa}_z)$ est négligeable si $|\kappa_x| \gg 2\pi/a_x$, si $|\kappa_y| \gg 2\pi/a_y$, ou si $|\kappa_z| \gg 2\pi/b$. $F(\boldsymbol{\kappa}, z)$ (anisotrope) est quant à lui négligeable si $|z| \gg b$ ou si $\|\boldsymbol{\kappa}\| \gg 2\pi/a$ (avec $a = \min(a_x, a_y)$). On en déduit que $F(\boldsymbol{\kappa}, z)$ est concentrée dans la région $\|\boldsymbol{\kappa}\||z| < 2\pi \frac{b}{a}$.

Annexe C

Velocity shift en milieu anisotrope

Le velocity shift se déduit de la moyenne des temps à l'ordre deux par l'équation (2.46). Calculons $\mathbf{E}[T_2]$ dans le cadre de l'optique géométrique et pour une onde plane. Soit $\epsilon(\mathbf{r})$ une perturbation aléatoire 2D ou 3D, par (2.43), on a

$$T_2(\mathbf{r}) = T_2(\boldsymbol{\rho}, z) = -\frac{1}{4v_0} \int_0^z \left[\int_0^{z'} \nabla_{\perp} \epsilon(\boldsymbol{\rho}, z'') dz'' \right]^2 dz' . \quad (\text{C.1})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] &= -\frac{1}{4v_0} \int_0^z \int_0^{z'} \int_0^{z'} \langle \nabla_{\perp} \epsilon(\boldsymbol{\rho}, z'_1) \nabla_{\perp} \epsilon(\boldsymbol{\rho}, z'_2) \rangle dz''_1 dz''_2 dz' \\ &= \frac{1}{4v_0} \int_0^z \int_0^{z'} \int_0^{z'} [\nabla_{\perp}^2 C_{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}, z''_1 - z''_2)]_{\boldsymbol{\rho}=0} dz''_1 dz''_2 dz' . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

On suppose que ϵ a une anisotropie géométrique. Par (1.19),

$$C_{\epsilon}(x, y, z) = \sigma_{\epsilon}^2 C_0 \left(\sqrt{\frac{x^2}{l_{\perp x}^2} + \frac{y^2}{l_{\perp y}^2} + \frac{z^2}{l_{\parallel}^2}} \right) . \text{ On a donc}$$

$$[\nabla_{\perp}^2 C_{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}, z)]_{\boldsymbol{\rho}=0} = \frac{\sigma_{\epsilon}^2 l_{\parallel}}{l_{\perp x}^2 z} C'_0 \left(\frac{z}{l_{\parallel}} \right) + \frac{\sigma_{\epsilon}^2 l_{\parallel}}{l_{\perp y}^2 z} C'_0 \left(\frac{z}{l_{\parallel}} \right) \text{ si } z \neq 0 . \quad (\text{C.3})$$

Par les changements de variable $z'' = z'_1 - z'_2$ et $s = \frac{z'_1 + z'_2}{2}$, (C.2) mène à

$$\mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{4v_0} l_{\parallel} \left(\frac{1}{l_{\perp x}^2} + \frac{1}{l_{\perp y}^2} \right) \int_0^z \int_0^{z'} \int_0^{\infty} \frac{C'_0(z''/l_{\parallel})}{z''} dz'' ds dz' . \quad (\text{C.4})$$

On a pu étendre le domaine d'intégration de z'' jusqu'à l'infini car $C'_0(z''/l_{\parallel})/z''$ est concentrée dans la région $|z''| < l_{\parallel}$, et on a supposé $z \gg l_{\parallel}$.

Finalement, par un dernier changement de variables, on obtient

$$\mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{8v_0} z^2 l_{\parallel} \left(\frac{1}{l_{\perp x}^2} + \frac{1}{l_{\perp y}^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{C'_0(z')}{z'} dz' . \quad (\text{C.5})$$

Annexe D

Une transformée d'Abel

Cette annexe suit la démonstration donnée par Bracewell [15] (p 262) pour inverser l'intégrale

$$f_A(x) = 2 \int_x^\infty r \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr . \quad (\text{D.1})$$

On pose $\xi = x^2$, $\rho = r^2$, $f_A(x) = F_A(x^2)$, $f(r) = F(r^2)$ et $K(\xi) = \begin{cases} 1/\sqrt{-\xi} & \text{si } \xi < 0 \\ 0 & \text{si } \xi \geq 0. \end{cases}$

Ainsi,

$$F_A(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{F(\rho)}{\sqrt{\rho - \xi}} d\rho , \text{ et sous forme convolutive, } F_A = K \star F . \quad (\text{D.2})$$

En passant par la transformée de Fourier, on a $\hat{F}_A = \hat{K}\hat{F}$, avec $\hat{K}(s) = \frac{1}{\sqrt{-2is}}$; et donc

$$\hat{F} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{-2is}} i2\pi s \hat{F}_A = -\frac{1}{\pi} \hat{K} \hat{F}_A . \quad (\text{D.3})$$

On obtient finalement

$$F = -\frac{1}{\pi} K \star F'_A , \text{ et ainsi } F(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_\rho^\infty \frac{F'_A(\xi)}{\sqrt{\xi - \rho}} d\xi . \quad (\text{D.4})$$

Par un dernier changement de variables, on conclut l'inversion :

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{f'_A(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx . \quad (\text{D.5})$$

Annexe E

Covariance d'accroissements

Soit $X(\mathbf{x})$ une fonction aléatoire intrinsèque de variogramme $\gamma_X(\mathbf{h})$ défini par la demi-variance des accroissements de X ,

$$\begin{aligned}\gamma_X(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2}Var[X(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2}Var[X(\mathbf{x} + \mathbf{h})] + \frac{1}{2}Var[X(\mathbf{x})] - Cov[X(\mathbf{x} + \mathbf{h}), X(\mathbf{x})].\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

On cherche à donner une expression entre la covariance des accroissements de X et son variogramme. On a

$$\begin{aligned}Cov[X(\mathbf{x}_1) - X(\mathbf{x}_2), X(\mathbf{y}_1) - X(\mathbf{y}_2)] &= \\ &Cov[X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{y}_1)] - \frac{1}{2}\{Var[X(\mathbf{x}_1)] + Var[X(\mathbf{y}_1)]\} \\ &+ Cov[X(\mathbf{x}_2), X(\mathbf{y}_2)] - \frac{1}{2}\{Var[X(\mathbf{x}_2)] + Var[X(\mathbf{y}_2)]\} \\ &- Cov[X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{y}_2)] + \frac{1}{2}\{Var[X(\mathbf{x}_1)] + Var[X(\mathbf{y}_2)]\} \\ &- Cov[X(\mathbf{x}_2), X(\mathbf{y}_1)] + \frac{1}{2}\{Var[X(\mathbf{x}_2)] + Var[X(\mathbf{y}_1)]\}\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule

$$\begin{aligned}Cov[X(\mathbf{x}_1) - X(\mathbf{x}_2), X(\mathbf{y}_1) - X(\mathbf{y}_2)] &= \\ \gamma[X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{y}_2)] + \gamma[X(\mathbf{x}_2), X(\mathbf{y}_1)] - \gamma[X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{y}_1)] - \gamma[X(\mathbf{x}_2), X(\mathbf{y}_2)] & (\text{E.2}) \\ = \gamma_X(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_2) + \gamma_X(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1) - \gamma_X(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) - \gamma_X(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2).\end{aligned}$$

Si les accroissements sont les mêmes, on a

$$\begin{aligned}Cov[X(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}), X(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{y})] &= \\ \gamma_X(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{h}) + \gamma_X(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{h}) - 2\gamma_X(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

Annexe F

Covariance et variogramme des temps de deux ondes

Aux §2.4.1 et 2.4.2, la covariance $C_T(\boldsymbol{\rho}, z)$ des temps d'arrivée d'une onde sphérique a été calculée (où z est la distance de propagation et $\boldsymbol{\rho}$ la séparation transverse). Essayons de calculer la covariance entre les temps de deux ondes sphériques de sources différentes, en suivant les idées de Touati [89] (§7.2).

Soient deux rayons SH et $S'H'$ issus du même plan ($z = 0$) et atteignant le même plan à la profondeur z . Si ces rayons sont parallèles, la covariance de leur temps respectif est égale à la covariance des temps d'une onde plane.

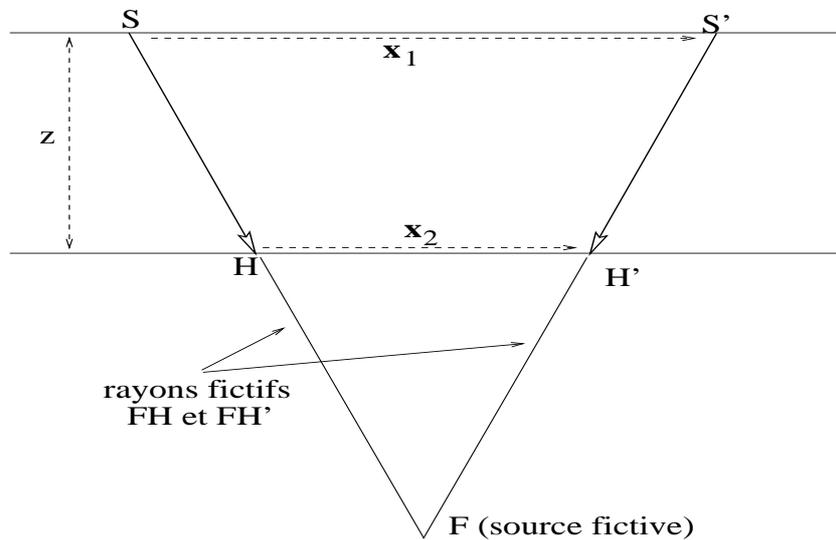


FIG. F.1 – Deux rayons SH et $S'H'$ de sources différentes, représentation des rayons dans un milieu fictif.

Si les rayons ne sont pas parallèles mais compris dans un même plan (cf Fig. F.1), et tels que $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \ll 2z$ (rayons faiblement inclinés), on a $SH \simeq S'H' \simeq z$. On imagine alors un milieu fictif situé sous le réflecteur et de même nature que le milieu supérieur. F est l'intersection des droites SH et $S'H'$. F est donc la source fictive de l'onde sphérique

qui a pour rayons FS et FS' . On a

$$\begin{aligned}
Cov[T(SF), T(S'F)] &= C_T(\mathbf{x}_1, FS) \\
&= Cov[T(SH) + T(HF), T(S'H') + T(H'F)] \\
&= Cov[T(SH), T(S'H')] + Cov[T(SH) + T(HF), T(H'F)] \\
&\quad + Cov[T(HF), T(S'H') + T(H'F)] - Cov[T(HF), T(H'F)] \quad (F.1) \\
&= Cov[T(SH), T(S'H')] + Cov[T(SF), T(H'F)] \\
&\quad + Cov[T(HF), T(S'F)] - Cov[T(HF), T(H'F)] \\
&= Cov[T(SH), T(S'H')] + C_T(\mathbf{x}_2, FH') + C_T(\mathbf{x}_2, FH) - C_T(\mathbf{x}_2, FH).
\end{aligned}$$

Ainsi, $Cov[T(SH), T(S'H')] = C_T(\mathbf{x}_1, FS) - C_T(\mathbf{x}_2, FH)$. Comme $SH \simeq z$, on obtient la covariance des temps de deux rayons issus de sources différentes :

$$Cov[T(SH), T(S'H')] \simeq C_T(\mathbf{x}_1, z \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}) - C_T(\mathbf{x}_2, z \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}). \quad (F.2)$$

Soit à présent le variogramme des temps d'arrivée d'une onde sphérique $\gamma[T(\mathbf{r}), T(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})] = \frac{1}{2}Var[T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})]$. Si les temps sont intrinsèques et que la distance de propagation vaut z , $\gamma[T(\mathbf{r}), T(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})]$ se note $\gamma_T(\boldsymbol{\rho}, z)$ pour une onde sphérique et $\gamma_{Tpl}(\boldsymbol{\rho}, z)$ pour une onde plane. Calculons le variogramme des temps de deux rayons non parallèles et de sources différentes. On a

$$\begin{aligned}
\gamma[T(SF), T(S'F)] &= \gamma_T(\mathbf{x}_1, FS) \\
&= \gamma[T(SH) + T(HF), T(S'H') + T(H'F)] \\
&= \gamma[T(SH), T(S'H')] + \gamma[T(HF), T(H'F)] \quad (F.3) \\
&\quad + \gamma[T(SH), T(H'F)] + \gamma[T(HF), T(S'H')] \\
&\quad - \gamma[T(SH), T(HF)] - \gamma[T(S'H'), T(H'F)],
\end{aligned}$$

en utilisant le résultat (E.2) de l'Annexe E.

Les quatre derniers termes de (F.3) se réduisent à zéro. En effet, $\gamma[T(SH), T(S'H')] = Var[T(SH)] + Var[T(S'H')] - 2Cov[T(SH), T(S'H')]$. Les deux variances s'annulent avec celles du terme $-\gamma[T(SH), T(HF)]$; la covariance s'annule quant à elle avec celle du terme $-\gamma[T(S'H'), T(H'F)]$.

Ainsi, $\gamma[T(SH), T(S'H')] = \gamma_T(\mathbf{x}_1, FS) - \gamma_T(\mathbf{x}_2, FH)$. Finalement l'expression du variogramme des temps est analogue à celle de la covariance :

$$\gamma[T(SH), T(S'H')] \simeq \gamma_T(\mathbf{x}_1, z \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}) - \gamma_T(\mathbf{x}_2, z \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}). \quad (F.4)$$

Annexe G

Inversion de la portée horizontale

Seismic reflection traveltimes in two-dimensional statistically anisotropic random media

Bertrand IOOSS

[Geophysical Journal International (1998), **135**, 999-1010]

Abstract

Velocity estimation remains one of the main problems when imaging the subsurface with seismic reflection data. Traveltime inversion enables us to obtain large scale structures of the velocity field and the position of seismic reflectors. However, as the media currently under study are becoming more and more complex, we need to know the finer scale structures. The problem is that below a certain range of velocity heterogeneities, deterministic methods become difficult to use, so we turn to a probabilistic approach. With this in view, we characterize the velocity field as a random field defined by its first and second statistical moments. Usually, a seismic random medium is defined as a homogeneous velocity background perturbed by a small random field that is assumed to be stationary. Thus, we make a link between such a random velocity medium (together with a simple reflector) and seismic reflection traveltimes. Assuming that the traveltimes are ergodic, we use 2-D seismic reflection geometry to study the decrease in the statistical traveltime fluctuations, as a function of the offset (the source-receiver distance). Our formulas are based on the Rytov approximation and the parabolic approximation for acoustic waves. The validity and the limits are established for both of these approximations in statistically anisotropic random media. Finally, theoretical inversion procedures are developed for the horizontal correlation structure of the velocity heterogeneities for the simplest case of a horizontal reflector. Synthetic seismograms are then computed (on particular realisations of random media) by simulating scalar wave propagation via finite difference algorithms. There is good agreement between the theoretical and experimental results.

Key words : random media, seismic reflection, traveltime fluctuations, wave propagation.

Introduction

Due to the complexity of reservoir models, quantifying uncertainty has become one of the major concerns in petroleum exploration and production. Probabilistic methods and geostatistical tools are suitable for this task. The problem of imaging the subsurface with seismic reflection data (the migration process) is that of the velocity field estimation. It is well known that in seismic reflection experiments, there is a resolution limit on velocity heterogeneities. Deterministic methods like velocity analysis or ray tomography do not resolve the fine structure of the velocity field (Thore and Juliard 1996, Williamson and Worthington 1993). Moreover, migration does not resolve the lateral limits of non reflecting velocity heterogeneities (Thore and Juliard 1996). Their lateral resolution is the size of the first Fresnel zone which reaches lengths of several hundred meters. Matheron (1991) and Touati (1996) show that even with

weak velocity fluctuations, migration errors can become important. They also prove that under certain circumstances, knowing the statistical structure of the velocity field, one can simulate the migration errors.

Small-scale velocity fluctuations can often be described by their statistical properties. This reduces the problem to the determination of a few unknowns, like the mean value, the standard deviation, the structure of the correlation function and the correlation lengths in different directions. This is why a stochastic approach can deal with smaller heterogeneities than deterministic methods.

In seismology, it is important to be able to estimate these statistical parameters from seismic measurements. Aki and Chouet (1975) and Sato (1982) were among the first to predict small-scale velocity heterogeneities in the earth's crust from the presence of the seismic codas. Sato (1982) and Wu (1982) started to study theoretical and experimental aspects of seismic wave scattering attenuation. Later Frankel and Clayton (1986) and Jannaud, Adler and Jacquin (1991) used finite difference modeling to investigate coda decay rates and scattering attenuation. However, while these two methods are well suited to teleseismic transmission data, we need a different approach for seismic reflection data.

A more promising stochastic approach is based on direct P wave amplitude and arrival time fluctuations. The theory of wave propagation in random media can link the correlation functions of log amplitude and arrival time to that of the velocity field. Chernov (1960) developed this for a plane wave and for stationary random media. To connect fluctuations of the plane wave to medium variations, the underlying theory (Rytov approximation and parabolic approximation) neglects backscattering and assumes wavelengths shorter than the characteristic lengths of inhomogeneities. Guided by this work, several authors deduced a stationary statistical model for the crust from seismological data (Aki 1973, Frankel and Clayton 1986). Wu and Flatté (1990) extended this method by calculating correlations between two plane waves with near vertical incident angles, for quasi-stationary random media (*i.e.* stationary with a weak dependence on depth). This type of inversion is called stochastic tomography.

Some studies using the geometrical optics approximation have tried to calculate the velocity heterogeneity by analysing traveltimes in random media (Müller, Roth and Korn 1992, Roth 1997). Müller et al. (1992) derive an inversion formula between the correlation function of the traveltimes fluctuations of a plane wave and the correlation function of an isotropic velocity field. In numerical experiments, they can obtain the correlation length and the standard deviation of the velocity, provided that the wavelength is less than half the correlation length. Shapiro and Kneib (1993) extend their formula to the parabolic and Rytov approximations, in order to study the contribution of scattering to apparent attenuation, rather than for traveltimes tomography.

Most of these works demonstrate the usefulness of studying the statistics of traveltimes fluctuations for the inversion of medium statistics. In this paper we develop a statistical analysis procedure for seismic reflection data, and study several problems from a theoretical point of view. First, following the approach used by Touati (1996) we separate the downgoing and upgoing waves in order to take account of the reflection. We assume that this reflection follows Snell-Descartes' law and that the reflector is horizontal, making it easy to define the reflected wave from the incident wave. Secondly, in seismic reflection experiments, we must consider the relative positions of the source and receiver. The plane wave approximation is not valid for small propagation distances. For a spherical wave, Ishimaru (1978) and Rytov, Kravtsov and Tatarskii (1987) extend Chernov's theory of wave propagation in random media by introducing spectral expansion. We use their approach to derive a formula relating the second order moments of the traveltimes and velocity for a 2-D spherical wave. Contrary to most other studies, our methodology is valid in the general case of statistically anisotropic random media.

Thirdly, we present a theoretical procedure for obtaining the statistical medium parameters from seismic reflection traveltimes by taking into account their frequency dependence. This is a generalization of the work of Touati (1996) in the framework of geometrical optics which does not take into account the scattering phenomenon. This extension is important because the measurable traveltimes of seismic events depend on the seismic wavelength, the propagation distance and the heterogeneity scale (Mukerji et al. 1995). In seismic media, all scales of heterogeneity are present, and scattering can occur. From scattering theory, we know that only heterogeneities at scales greater than the wavelength need to be taken into consideration for traveltimes calculations (Chernov 1960, Aki and Richards 1980, Sato 1982). Heterogeneities of wavelength scales generate codas and backscattering phenomena, while short scale

heterogeneities are replaced by an equivalent homogeneous medium. Therefore, the distribution of forward scattering from small scale heterogeneities is negligible, and the parabolic approximation can be used for this problem.

The paper proceeds as follows. First we present our velocity random models and obtain a theoretical formula which relates the second order moments of the traveltime and the velocity field. Then we apply this formula in the seismic reflection case limited to a single layer with a horizontal interface. Finally, we simulate realizations of the random media and the wave propagation (computed with an acoustic finite-difference algorithm) in order to compare theoretical predictions and experimental results. Our theoretical formulas allow us to retrieve the statistical parameters of the original random velocity media. We then discuss the results for different validity domains. When validity conditions are respected, our inversion extracts the lateral statistical structure of the velocity heterogeneities.

Wave propagation in a random medium

The random medium

Let us consider a 2-D medium with velocity $v(\mathbf{r})$ (where $\mathbf{r} = (x, z)$ is the position vector in space) and let

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})], \quad (\text{G.1})$$

be a perturbation of the square of the slowness, where v_0 is the average velocity and $\epsilon(\mathbf{r})$ a weak random field with zero mean ($|\epsilon| \ll 1$, $\langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle = 0$). So we can linearize equation (G.1) to get

$$v(\mathbf{r}) = v_0 \left[1 - \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2} \right]. \quad (\text{G.2})$$

In practice, we have to replace ensemble averaging by spatial averaging of a single realization of the random medium. To make this meaningful, we assume that the random field is ergodic and that the wave crosses many heterogeneities.

From a statistical point of view (Chernov 1960), a heterogeneous medium can be characterized by the first two statistical moments of the sound velocity distribution, *i.e.* its mean value and its correlation function. Often, random velocity fields are assumed to be second order stationary (this is most commonly called stationary) (Aki and Richards 1980). This greatly simplifies the problem because then the mean and the correlation function (called the covariance $C_\epsilon(\mathbf{h})$) are invariant under translation. The covariance describes the magnitude, the scales and the structure (*e.g.* smooth, rough, fractal, ...) of the fluctuations of $\epsilon(\mathbf{r})$:

$$C_\epsilon(\mathbf{h}) = \langle \epsilon(\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{h}) \rangle \quad \text{and} \quad \sigma_\epsilon^2 = \text{Var}[\epsilon(\mathbf{r})] = C_\epsilon(0), \quad (\text{G.3})$$

where σ_ϵ^2 is the variance of $\epsilon(\mathbf{r})$.

Like Chernov (1960), we assume that the correlation lengths of $\epsilon(\mathbf{r})$ are measures of the heterogeneity scales. For an isotropic stationary random medium, the correlation length of $\epsilon(\mathbf{r})$ is the same in all directions, so we get

$$C_\epsilon(\mathbf{h}) = C_\epsilon(h), \quad \text{with} \quad h = \|\mathbf{h}\|. \quad (\text{G.4})$$

Here we want to consider anisotropic random media because sedimentary basins are often strongly anisotropic. An anisotropic random medium is defined by its horizontal correlation length a , its vertical correlation length b and its anisotropy angle θ (*i.e.* its stratification angle). We limit ourselves to horizontally stratified media ($\theta = 0$) with C_ϵ in the form

$$C_\epsilon(\mathbf{r}) = C_\epsilon(x, z) = C_0 \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}} \right), \quad (\text{G.5})$$

where C_0 is an isotropic covariance with a specified structure (*e.g.* gaussian, exponential, ...). Lastly, we assume that the density is constant.

The approximations of the wave equation

We consider the propagation of 2-D monochromatic waves in the random media defined in the previous section. From equation (G.1), the wave equation in the spectral domain may be written

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2[1 + \epsilon(\mathbf{r})]u(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{G.6})$$

where u describes a scalar wavefield, k is the wavenumber and ϵ is the squared slowness perturbation.

In appendix A, we solve (G.6) for 2-D anisotropic stationary random media and obtain the equation (G.44) for the phase fluctuations. The conditions of validity are those of the Rytov approximation (G.29) and those of the parabolic approximation (G.32) and (G.36).

We also consider two asymptotic regions of the parabolic approximation. In the geometrical optics approximation (GO), we disregard diffractions by assuming that the first Fresnel zone ($\sqrt{\lambda z}$) is smaller than the horizontal scale length of heterogeneities : $\sqrt{\lambda z} \ll a$, where z is the propagation distance and λ the dominant wavelength. The traveltime equation is then reduced to the eikonal equation which describes Fermat's principle. When $\sqrt{\lambda z} \gg a$, the Fraunhofer approximation (FA) holds. The first Fresnel zone is much larger than the horizontal scale length of heterogeneities. Thus, in this case, the phenomenon of wavefront healing, which describes a smoothing process of the wavefront due to diffractions (Wielandt 1987), is maximum. All these approximations and validity conditions are summarized in Table 1.

The covariance of the traveltimes

The details of the derivation of the traveltime correlation function in the Rytov and parabolic approximations are given in appendix A. Here we summarize the results. From now we define these two approximations as the parabolic approximation. To simplify the calculations, we assume that the vertical correlation length b and the half horizontal separation between the two receivers are small in relation to the depth z :

$$b \ll z, \quad \frac{x}{2} \ll z, \quad (\text{G.7})$$

where x is the horizontal separation of the receivers. The first condition is always necessary when dealing with random media, because the wave has to meet many inhomogeneities during its propagation. The second condition is necessary to simplify the covariance integrals. It means that the angle between the rays joining the source and the receivers is small.

We denote the covariance of the spherical wave traveltimes by

$$\text{Cov}[T(x_1, z), T(x_2, z)] = C_T(x, z) \quad (\text{with } x = |x_1 - x_2|), \quad (\text{G.8})$$

and will now discuss its evaluation for each approximation domain.

Parabolic approximation

Equation (G.49) gives the covariance of the arrival times of a spherical wave in the parabolic approximation (PA) :

$$\begin{cases} C_T^{PA}(x, z) &= \frac{\pi}{2v_0^2} \frac{z}{x} \int_0^x \int_0^\infty e^{i\kappa u} \cos^2\left[\frac{\kappa^2 z}{2k} \frac{u}{x} \left(1 - \frac{u}{x}\right)\right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa du, \\ C_T^{PA}(0, z) &= \frac{\pi}{4v_0^2} z \int_0^\infty \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{k}\right)\right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa, \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

where z is the propagation depth, x the horizontal distance between two receivers, v_0 the average velocity, Φ_ϵ the spectral density of the fluctuations defined by (G.23) and k the wavenumber.

Geometrical optics approximation

For this approximation, $\sqrt{\lambda z} \ll a$, therefore the ratio $\kappa^2 z/2k$ is negligible and the \cos^2 function in (G.9) turns to one. Then by (G.24), (G.9) becomes in the spatial domain

RYTOV $\sigma_\epsilon \ll 1$ and $\langle \nabla_\perp \Psi ^2 \rangle \ll k^2 \sigma_\epsilon$	
PARABOLIC - Large-Scale Heterogeneities $a \gg \lambda, b \gg \lambda$ and $\sqrt{\lambda z} \ll \frac{a^2}{\lambda}$	
GEOMETRICAL OPTICS $\sqrt{\lambda z} \ll a$	FRAUNHOFER $\sqrt{\lambda z} \gg a$

TAB. G.1 – Recapitulation of the different approximations and their validity conditions. a and b are the horizontal and vertical correlation lengths, σ_ϵ^2 , λ and z are the velocity variance, the wavelength and the propagation distance.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T^{GO}(x, z) = \frac{1}{2v_0^2} \frac{z}{x} \int_0^x \int_0^\infty C_\epsilon(u, z') dz' du, \\ C_T^{GO}(0, z) = \frac{1}{2v_0^2} z \int_0^\infty C_\epsilon(0, z') dz', \end{array} \right. \quad (\text{G.10})$$

where C_ϵ is the covariance of the velocity perturbations. As $\lambda \ll a$ and $\sqrt{\lambda z} \ll a$, condition $\sqrt{\lambda z} \ll a(a/\lambda)$ of parabolic approximation is always verified.

Fraunhofer approximation

Here $\sqrt{\lambda z} \gg a$, then $\kappa^2 z / 2k \gg 1$. For a plane wave, we find from (G.51) that

$$Cov[T(x_1, z), T(x_2, z)] = \frac{\pi}{4v_0^2} z \int_0^\infty e^{i\kappa x} \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa. \quad (\text{G.11})$$

Correlations of traveltimes are half the values in the geometrical optics plane wave case ($\kappa^2 z / 2k \ll 1$). We deduce that the spherical wave traveltime covariance is half that in the geometrical optics case :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T^{FA}(x, z) = \frac{1}{4v_0^2} \frac{z}{x} \int_0^x \int_0^\infty C_\epsilon(u, z') dz' du, \\ C_T^{FA}(0, z) = \frac{1}{4v_0^2} z \int_0^\infty C_\epsilon(0, z') dz'. \end{array} \right. \quad (\text{G.12})$$

In fact, we can obtain this result from (G.9), seeing intuitively that the \cos^2 function regularizes the integrand at $1/2$ because it fluctuates rapidly between 0 and 1.

Application to the seismic reflection geometry

Statement of the problem

In order to compute the correlations of traveltimes after reflection at an interface, we have to decompose the time $T(SR)$ into a downgoing time $T(SM)$ and an upgoing time $T(MR)$, where S is the source, R the receiver and M the point of reflection of the wave on the interface (Fig. G.1 (a)).

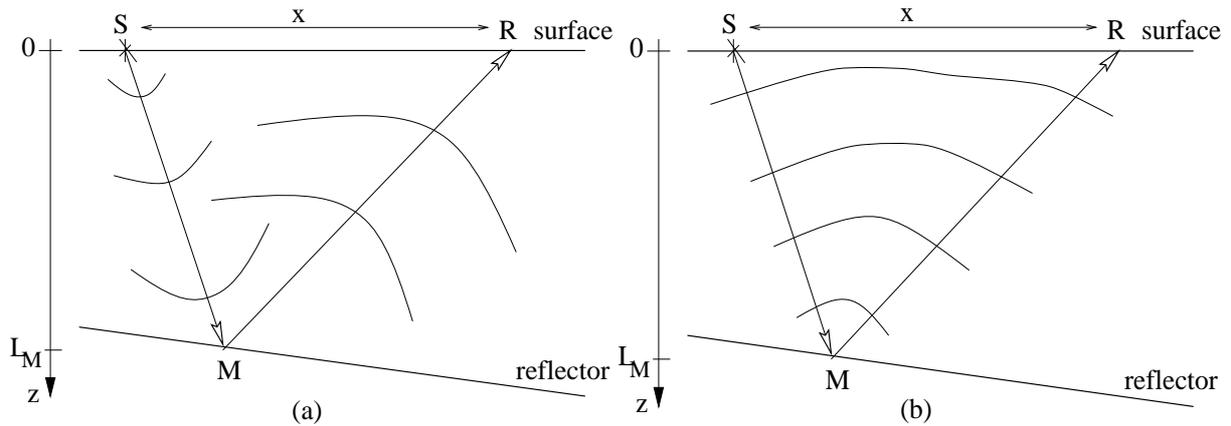


FIG. G.1 – (a) Reflection at M of a spherical wave radiated from source S and recorded at receiver R . (b) Transmission of a spherical wave from M to the surface.

Let $T_M(x)$ be the arrival time at R , where x is the distance between source and receiver (offset). We write

$$T_M(x) = T(SM) + T(MR) . \quad (\text{G.13})$$

We are interested in correlations of arrival times. The general covariance of all traveltimes could be calculated but it requires complex analysis. Moreover, we have to use a sufficient number of traveltimes for each covariance calculation to obtain a good averaging of the phenomenon. Thus, we just calculate their variance for a constant offset. Working with the traveltime variance at constant offset enables us to have enough data and is sufficient to characterize statistics of the velocity field. We obtain from (G.13)

$$\text{Var}[T_M(x)] = \text{Var}[T(SM)] + \text{Var}[T(MR)] + 2\text{Cov}[T(SM), T(MR)] , \quad (\text{G.14})$$

using the principle of reciprocity, $T(SM) = T(MS)$. Thus, we reduce the problem to a spherical wave propagating from M to the surface (Fig. G.1 (b)).

If we consider a quasi-horizontal reflector at depth L , the coordinates of M are $(x/2, L)$. Then from (G.8) we obtain

$$\begin{cases} \text{Cov}[T(SM), T(MR)] = C_T(x, L) , \\ \text{Var}[T(SM)] = \text{Var}[T(MR)] = C_T(0, L) . \end{cases} \quad (\text{G.15})$$

From (G.14) and (G.15) we deduce that the traveltime variance does not depend on the particular reflection point M of each shot. Therefore, we let $T(x)$ be the traveltime at offset x . The variance of $T(x)$ is independent of the position in the field and becomes

$$\text{Var}[T(x)] = 2C_T(0, L) + 2C_T(x, L) , \quad (\text{G.16})$$

where the functional C_T is given by (G.9) for the parabolic approximation (PA), by (G.10) for the geometrical optics approximation (GO) and by (G.12) for the Fraunhofer approximation (FA).

We will now study two types of random media in detail : gaussian (Fig. G.2 (b)) and exponential (Fig. G.2 (a)). In their isotropic forms they are often used in the scattering theory (Chernov 1960, Frankel and Clayton 1986). Here we use their anisotropic forms.

The zero-offset traveltime variance

First, we consider only the traveltime variance at zero-offset. In the PA case :

$$\text{Var}[T(0)] = \frac{\pi L}{v_0^2} \int_0^\infty \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin\left(\frac{\kappa^2 L}{k}\right) \right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa . \quad (\text{G.17})$$

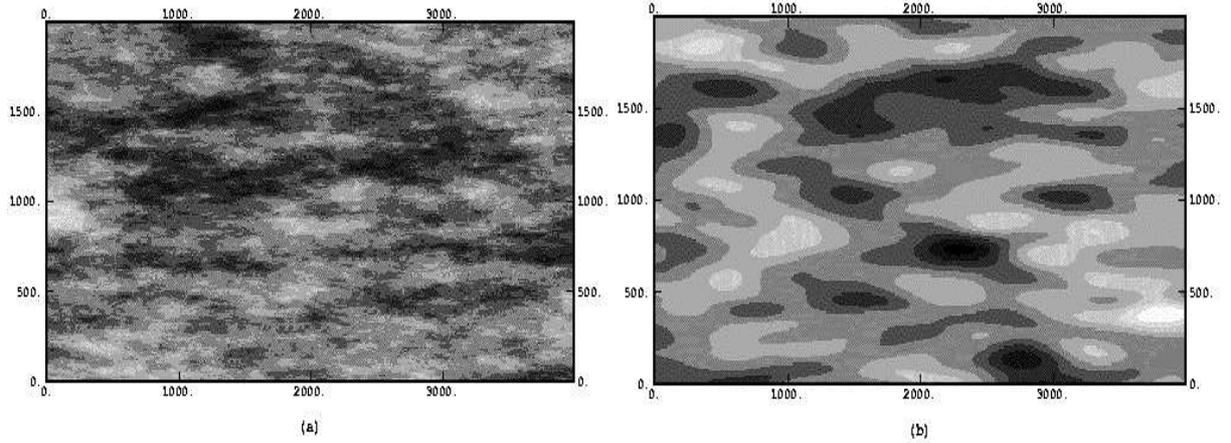


FIG. G.2 – Random velocity fluctuations $\epsilon(x, z)$ (distance x and depth z in meters); (a) exponential covariance, (b) gaussian covariance; both with horizontal range $a = 400m$, vertical range $b = 100m$, standard deviation $\sigma_\epsilon = 3.5\%$.

In the GO, this expression reduces to

$$Var[T(0)] = \frac{2L}{v_0^2} \int_0^\infty C_\epsilon(0, z') dz' . \quad (G.18)$$

Table 2 gives the equations for the anisotropic gaussian and exponential covariances, the spectral densities and the corresponding zero-offset variances (in the GO). $Var[T(0)]$ depends on the vertical correlation length b , the variance of slowness fluctuations σ_ϵ^2 and the reflector depth L .

The decrease of the normalized travelttime variance

For a general anisotropic random medium, Touati (1996) showed in the GO that the normalized variance, i.e the ratio $Var[T(x)]/Var[T(0)]$, only depends on the horizontal correlation length a and the structure of the velocity covariance. It does not depend on the vertical correlation length b . This result is also valid in the FA. In the PA, it is easy to prove it for gaussian and exponential media : $\Phi_\epsilon(\kappa, 0)$

	Gaussian	Exponential
Covariance $C_\epsilon(x, z)$	$\sigma_\epsilon^2 e^{-(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2})}$	$\sigma_\epsilon^2 e^{-\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}}$
Spectral density $\Phi_\epsilon(\kappa, \kappa_z)$	$\frac{\sigma_\epsilon^2 ab}{2\pi} e^{-\frac{a^2 \kappa^2 + b^2 \kappa_z^2}{4}}$	$\frac{\sigma_\epsilon^2 ab}{\pi(1 + a^2 \kappa^2 + b^2 \kappa_z^2)^{\frac{3}{2}}}$
$Var[T(0)]_{GO}$	$\sqrt{\pi} b \frac{\sigma_\epsilon^2 L}{v_0^2}$	$2b \frac{\sigma_\epsilon^2 L}{v_0^2}$

TAB. G.2 – Variance at zero-offset for two types of 2-D random media in the geometrical optics approximation.

depends linearly on b (see Table 2); then the vertical correlation length b cancels out when we divide $C_T^{PA}(x, z)$ by $C_T^{PA}(0, z)$ (equation (G.9)).

In the GO and in the FA, the ratio of the variances is

$$\left\{ \frac{Var[T(x)]}{Var[T(0)]} \right\} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{x} \frac{\int_0^x \int_0^\infty C_\epsilon(u, z') dz' du}{\int_0^\infty C_\epsilon(0, z') dz'} \right]. \quad (G.19)$$

It is clear that it is a decreasing function of offset x . When $x < a$ the decrease is slow and when $x > a$ the decrease is in the form of $1/x$. This result is valid in the domain $x \ll 2L$. Outside this limit, $Var[T(x)]$ does not depend linearly on L and (G.19) is no longer valid.

Fig. G.3 shows $Var[T(x)]/Var[T(0)]$ for exponential and gaussian media, and for two horizontal correlation lengths ($a = 400m$ and $a = 100m$). For these two types of medium, the PA variance is close to the GO variance when $a = 400m$. In this case, the GO condition on the size of the Fresnel zone is respected : $\sqrt{\lambda z} < a$ for all the propagation distances (z varies from 0 to $2L$, $L = 1700m$ and $\lambda = 50m$).

The inversion of the horizontal correlation length

Theoretically, the type of decrease of the variance characterizes the structure of the covariance model. With a good estimation of this structure, we can find the horizontal correlation length a : the ratio $Var[T(x=a)]/Var[T(0)]$ is independent of a and is known from theory (Touati 1996). Indeed, when $x = a$, (G.19) becomes

$$\left\{ \frac{Var[T(a)]}{Var[T(0)]} \right\} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\int_0^1 \int_0^\infty C_\epsilon(av, z') dz' dv}{\int_0^\infty C_\epsilon(0, z') dz'} \right]. \quad (G.20)$$

From equation (G.5), $C_\epsilon(x, z) = C_\epsilon(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}})$. Then, the variance ratio (G.20) does not depend on the horizontal correlation length a , but only on the type of covariance. Moreover, as the PA and GO ratios are close to each other when the offsets are less than (or of the order of) the horizontal correlation length, we can use the GO to determine the horizontal correlation length. For gaussian media, the ratio is

$$\frac{Var[T(a)]}{Var[T(0)]} = 0.875, \quad (G.21)$$

and for exponential media,

$$\frac{Var[T(a)]}{Var[T(0)]} = 0.911. \quad (G.22)$$

In practice, it would be difficult to estimate the covariance structure from the shape of the curve $Var[T(x)]/Var[T(0)]$. However, the difference between the ratios $Var[T(a)]/Var[T(0)]$ for exponential and gaussian media is small, and we can obtain a quite good estimation by using a value of 0.9. With a poor estimation of the type of model, Touati (1996) shows that we can have at worst an inaccuracy of 20% on the estimation of a .

Numerical experiments

For the numerical experiments, we performed 2-D wave modeling using a finite-difference algorithm developed by Virieux (1986). The advantages of this code are that all types of waves can be modeled, amplitude values are correct and the seismograms are realistic. The drawbacks are that it is time consuming and trace picking is necessary to obtain arrival times. The aim of our analysis is to extract arrival times and to calculate their variance as a function of the offset. First, for specific statistical velocity models (the parameters being the type of covariance, standard deviation and correlation lengths), we produce

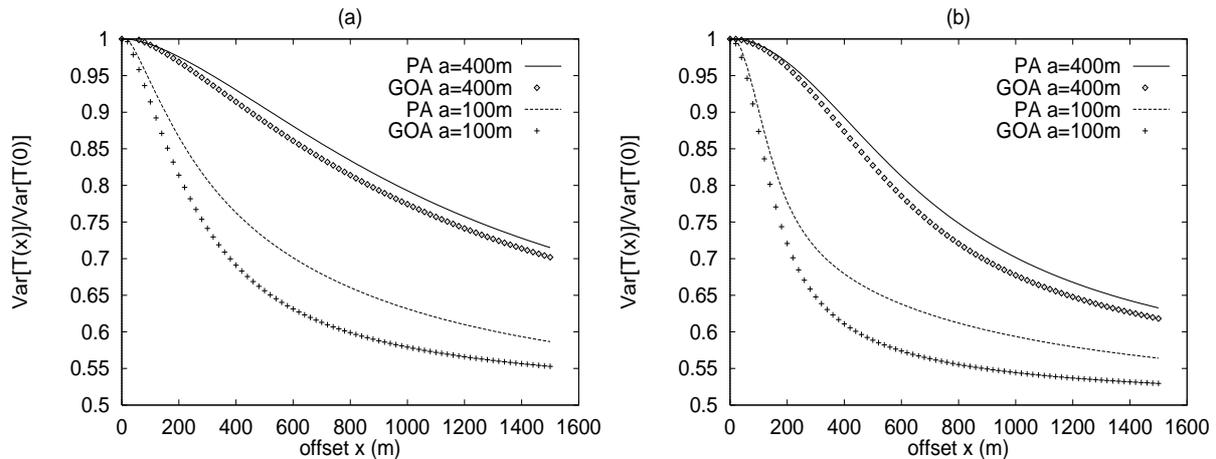


FIG. G.3 – Normalized variances of traveltimes in the PA (parabolic approximation) and the GO (geometrical optics approximation), for (a) exponential medium and (b) gaussian medium, with ranges $a = 400m$ and $a = 100m$. For the PA, we choose a reflector depth $L = 1700m$ and a wavelength $\lambda = 50m$.

several realizations. Next, we compute several shot records for each realization. Finally, we extract the traveltimes of the first peak of each trace.

Before that, we compute a shot in a homogeneous medium, and determine precisely the difference δ_t^{pick} between the maximum of the first wavelet and the theoretical arrival times. Then, for the data computed in the random media, our picking procedure consists in taking the time of the first wavelet maximum and deducing arrival times by subtracting δ_t^{pick} . In fact, a systematic bias in the picked traveltime is not a problem for our analysis method. It will be simply removed when computing the variance. Williamson and Worthington (1993) described the difficulties in producing a picking procedure, sufficiently accurate to use ray tomography. Even a small time shift causes perturbations in the inverted velocity model. We do not have these problems, and just have to respect the consistency of the wavelets. However, our picking times have the inaccuracy of the recording time interval ($1.5ms$) which produces errors on the variance of the order of $0.0015^2 \sim 2.10^{-6}s^2$.

The model parameters

We compute synthetic shot records of spherical wave propagating through a 2-D acoustic random velocity medium. We put a horizontal reflector at depth $L = 1700m$. The seismic interface is represented by a high contrast in density. The receivers are buried at a depth of $10m$ while the source is at the surface. Each shot record consists of 81 traces with offset ranging from $-800m$ to $800m$ with a $20m$ spacing (see Fig. G.4).

The random media are simulated via the turning bands technique (Matheron 1973). Velocity fluctuations of our random models are characterized by a gaussian distribution function with mean $v_0 = 3000m/s$, relative standard deviation $\sigma_\epsilon = 3.5$ per cent and a gaussian covariance. In fact, we take $\sigma_\epsilon = 0.07$ for the square of the slowness perturbations; the linearization (G.2) leads to $\sigma_\epsilon = 0.035$ for the velocity perturbations. The source signature is the first derivative of a gaussian pulse, with a characteristic frequency $f = 40Hz$. The dominant wavelength is of the order of $\lambda = 50m$. To be in the parabolic approximation zone, we take several horizontal and vertical correlation lengths larger than λ : $a = 100m, 200m, 400m, 2000m$ and $b = 100m$. We limit the vertical correlation length to $b = 100m$ because it is a good compromise between several constraints: $b \ll L$, $b \gg \lambda$ and a realistic anisotropic model ($b \leq a$, horizontal layering). Moreover, the vertical correlation length does not play a role in the fluctuations of the traveltime variance. The total field of each model covers $4000m \times 2000m$ with a grid spacing of $2.5m$.

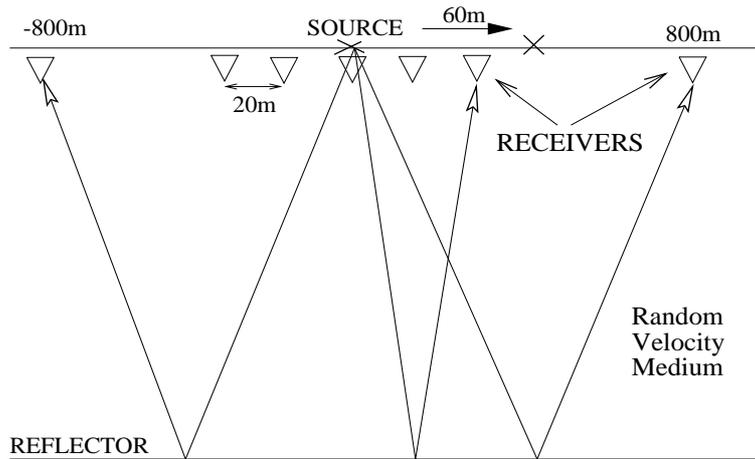


FIG. G.4 – Geometry of the seismic reflection numerical experiments.

So the model contains 1600×800 grid points. It is well known that the grid step in a finite-difference simulation has to be less than one tenth of the wavelength. It is rigorously respected here because the ratio between the wavelength and the grid step is about twenty.

The weak fluctuation conditions (G.29) and (G.30) are also respected : $\sigma_\epsilon = 0.035 \ll 1$ and $\sigma_\epsilon^2 k^2 (2L) \max(a, b) \sim 0.2 \ll 1$. Moreover, the conditions of the parabolic approximation (G.32) are valid ($\lambda \ll a, \lambda \ll b$). Difficulties appear with condition (G.36) : the size of the Fresnel zone $\sqrt{\lambda z} \sim 300, 400m$ has to be much smaller than a^2/λ to be in the PA zone, much smaller than a to be in the GO zone, or much larger than a to be in the FA zone (see Table 1).

Examples of typical seismograms are given in Fig. G.5. Wavefield scattering appears in the medium with small heterogeneities ($a = 100m, b = 100m$), but not in the one with large heterogeneities ($a = 400m, b = 100m$). In the two cases, there is no break in the forward wavefront and it is easy to pick traveltimes by following the first wavelets.

FIG. G.5 – Simulated seismic reflection seismograms for one shot and two random gaussian velocity media with standard deviation $\sigma_\epsilon = 3.5\%$. Left : velocity ranges $a = 100m, b = 100m$. Right : velocity ranges $a = 400m, b = 100m$. A horizontal reflector is placed at depth $1700m$. To show only the reflected wavefront, time is taken between $t = 1.1s$ and $t = 1.25s$. The source is placed at $z = 0m$ and receivers at $z = 10m$, then we see a second reflection which comes from the surface. Trace spacing is $20m$ and zero-offset trace is placed at the center.

For each model, we plot the traveltime variance $Var[T(x)]$ and the normalized variance as a function of offset. We compare the results with the theoretical predictions (G.16) in the parabolic approximation (PA) (G.9), geometrical optics approximation (GO) (G.10) and Fraunhofer approximation (FA) (G.12). The difficulty is to make the traveltime variance converge well enough. So, if we increase the number n of realizations of the medium progressively, we visualize the behaviour of the traveltime variance as n increases. In Fig. G.6, we plot these traveltime variances for different values of n for our first model $a = 100m, b = 100m$. We stop when successive curves are close to each other, and we consider that this result is good.

The zero-offset traveltime variance

The left of Fig. G.7, G.8 and G.9 shows the offset dependence of the traveltime variance. The vertical correlation length b of the velocity model is the same in the three cases : $b = 100m$. We see as predicted

that the Fraunhofer approximation variance is half the geometrical optics variance, and that the parabolic approximation variance is between the GO and FA variances. This also confirms the independence of $Var[T(0)]$ on the horizontal correlation length a in the GO and FA cases (see Table 2) : the values are the same between Fig. G.7, G.8 and G.9. However, in the PA case, the increase in a leads to an increase of $Var[T(0)]$.

Good agreement is found between the experimental zero-offset variance and the parabolic approximation zero-offset variance when the horizontal correlation length is $a = 200m$ (Fig. G.8) and $a = 400m$ (Fig. G.9). Indeed, these models respect all the PA validity conditions : for $a = 200m$, $a(a/\lambda) = 400m > \sqrt{\lambda z}$ and for $a = 400m$, $a(a/\lambda) = 3200m \gg \sqrt{\lambda z}$. For $a = 200m$, neither the GO nor the FA are valid because the size of the Fresnel zone $\sqrt{\lambda z}$ is of the same order as the horizontal correlation length a . However for $a = 400m$, $a > \sqrt{\lambda z}$ and we are close to the GO domain.

For the case of $a = 100m$ (Fig. G.7), the experimental $Var[T(0)]$ is 20 per cent less than the PA theoretical prediction. This model ($a = b = 100m$) is an isotropic medium, in which the condition $\sqrt{\lambda z} \ll a(a/\lambda)$ is violated because $a(a/\lambda) = 200m$. This is the reason why the experimental $Var[T(0)]$ is smaller than the PA $Var[T(0)]$. In the PA, we have omitted important contributions from the Fresnel zone to the wavefront healing. Then theoretical traveltimes are not regularized enough, and PA variance is too large. However, as the FA condition is verified ($\sqrt{\lambda z} \gg a$), good agreement is found between experimental values and the FA theoretical prediction.

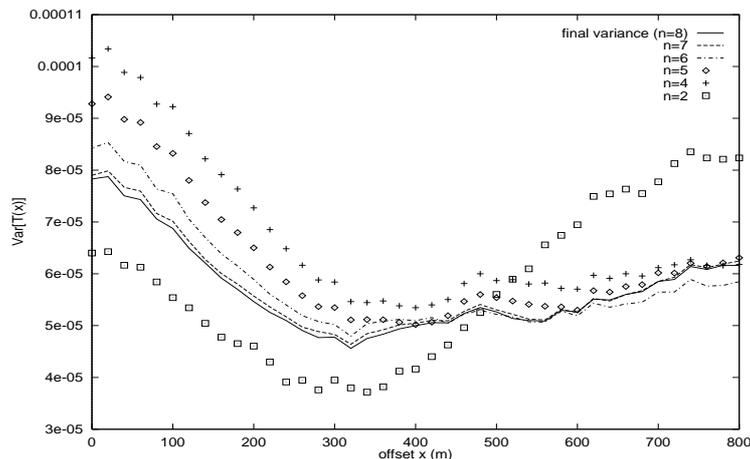


FIG. G.6 – Visualisation of the convergence of the experimental variance when the number n of realizations increases from $n = 2$ to $n = 8$. For each realization, we have 14 shots, so 28 additional arrival times per offset. The velocity random model has a gaussian covariance, $\sigma_\epsilon = 3.5\%$, $a = 100m$, $b = 100m$.

The decrease in the normalized variance and the inversion of the horizontal correlation length

The right of Fig. G.7, G.8 and G.9 shows the offset dependence of the normalized traveltime variance. By dividing $Var[T(x)]$ by $Var[T(0)]$, we can concentrate on the decrease in the variance with the offset. This curve allows us to obtain the horizontal correlation length a .

For small offsets, the first model gives the same decrease as the GO-FA prediction (right of Fig. G.7) because FA is valid. Therefore, we estimate the horizontal correlation length a by Formula (G.21), and we find the correct value : $\hat{a} \sim 100m$. For larger offsets, the traveltime variance is more erratic. For the second and third models (right of Fig. G.8 and G.9), the normalized variances do not fit the PA prediction precisely. For small offsets, the decrease is slower for $a = 200m$ and faster for $a = 400m$. From Formula (G.21), we obtain an estimate of $\hat{a} \sim 250m$ instead of $a = 200m$, and an estimate of $\hat{a} \sim 360m$ instead

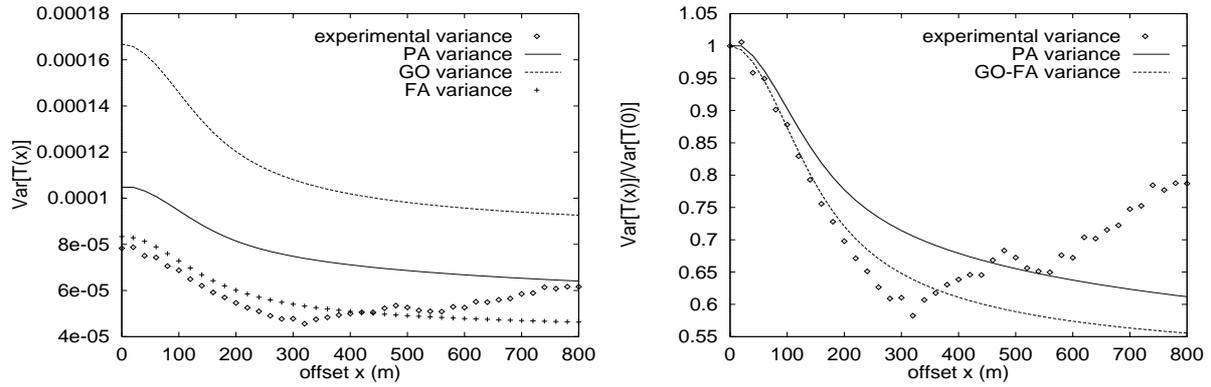


FIG. G.7 – Left : experimental and theoretical variance functions of offset x . Right : normalized experimental and theoretical variances. The velocity random model has a gaussian covariance, $\sigma_\epsilon = 3.5\%$, $a = 100m$, $b = 100m$. The simulation has been done on 8 realizations.

of $a = 400m$. So this procedure is not accurate, the errors are of the order of 20%, but it gives a certain idea on the horizontal correlation length.

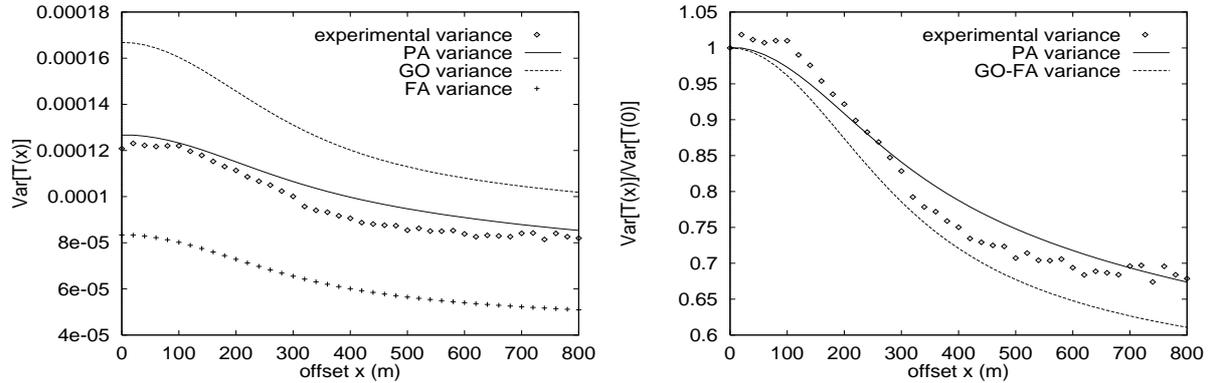


FIG. G.8 – Left : experimental and theoretical variance functions of offset x . Right : normalized experimental and theoretical variances. The velocity random model has a gaussian covariance, $\sigma_\epsilon = 3.5\%$, $a = 200m$, $b = 100m$. The simulation has been done on 12 realizations.

We see that the experimental curves do not fit the theoretical curves precisely. Why is this? Errors in grid dispersion probably do not play an important role because the spatial sampling seems to be small enough. As stated previously, a bias in the time picking is not a problem, but non correlated errors in the picking procedure can cause problems. For example, the recording time interval provides errors of the order of $2 \cdot 10^{-6} s^2$. We think that the most important problem is the convergence of the traveltime variance. It is clear from Fig. G.6 that convergence has not been exactly obtained. In Fig. G.9, the model with $a = 400m$ requires many realizations and the traveltime variance curve has not reached its limit. Finally, our theoretical formulas have been derived under several approximations, not fully verified. For example, the parabolic approximation supposes a monochromatic wave but our seismograms were generated using a band limited source function. All these simplifications introduce inaccuracies but our goal is to show the overall behaviour of seismic reflection traveltimes.

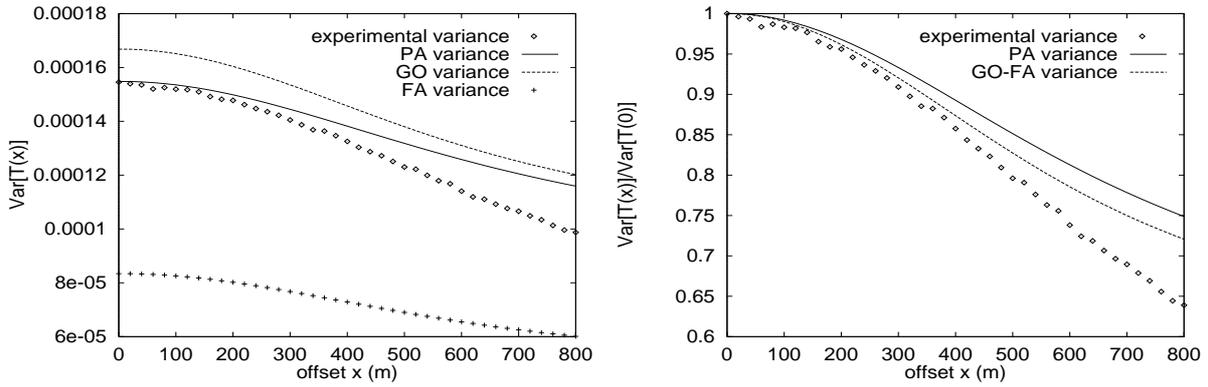


FIG. G.9 – Left : experimental and theoretical variance functions of offset x . Right : normalized experimental and theoretical variances. The velocity random model has a gaussian covariance, $\sigma_\epsilon = 3.5\%$, $a = 400m$, $b = 100m$. The simulation has been done on 16 realizations.

A quasi-horizontally homogeneous model

Last, we carry out tests on a quasi-horizontally homogeneous model. Keeping the vertical correlation length at $b = 100m$, we choose a very large horizontal correlation length $a = 2000m$. This is almost the case of a horizontally layered model with no lateral velocity variations. In order to obtain statistics on the model, we have to make repeated realizations, because each realization characterizes one traveltime hyperbola. So, it is unnecessary to compute several shots for one realization, and we make a single shot per medium. Since we only want to visualize the traveltime variance decrease, we average the results of 14 realizations and we do not discuss the absolute values of the variance because we know that the convergence cannot be obtained so rapidly.

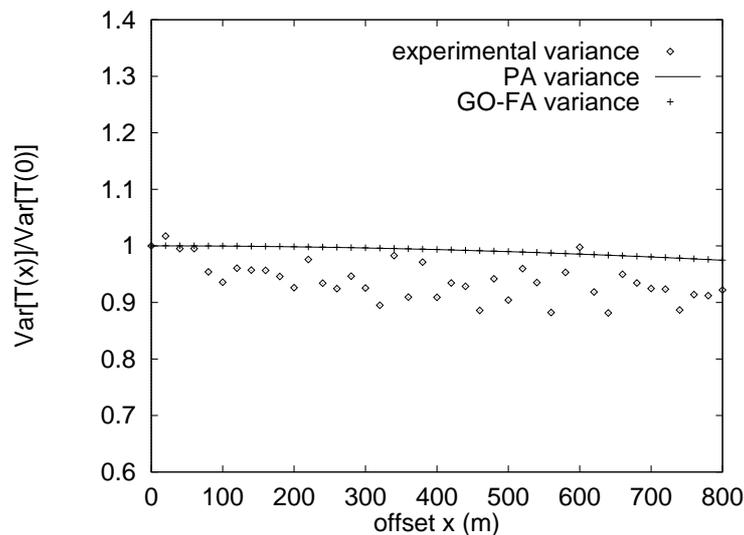


FIG. G.10 – Normalized experimental and theoretical variance functions of offset x . The velocity random model has a gaussian covariance, $\sigma_\epsilon = 3.5\%$, $a = 2000m$, $b = 100m$. The simulation has been done on 14 realizations.

In this medium, $\sqrt{\lambda z} \ll a$ and GO holds; so PA prediction is exactly the same as the GO one.

Theoretically, with a horizontal correlation length a larger than all offsets x , the normalized traveltime variance should be constant. In formula (G.10), $C_\varepsilon(u, z')$ is constant with $u \in [0, x]$, and so $C_T^{GO}(x, z) = C_T^{GO}(0, z)$. This is confirmed by Fig. G.10. In spite of the little fluctuations caused by averaging so few traveltimes, we see that the experimental normalized variance is globally constant. It is impossible in this case to obtain the horizontal correlation length a because the offsets are smaller than a and we do not see a clear decrease in the variance. We conclude that this model is horizontally homogeneous at a scale larger than our maximum offset 800m.

Conclusion

In this paper, we show that statistical velocity heterogeneities can produce interpretable traveltime fluctuations on seismic reflection profiles. Usually, work on seismic random media concerns transmission data and plane waves in isotropic media. Following the approach developed by Touati (1996), we extend previous results on wave propagation in random media to the 2-D case of seismic reflection geometry. This implies considering spherical waves, one simple reflector and weak velocity fluctuations with possible statistical anisotropy. Particular attention has been paid to the validity conditions of our approximations. Our results show that the traveltime fluctuations decrease as the offset increases. We prove that it is possible to obtain the order of the characteristic size of the horizontal heterogeneities. We also obtain information on the magnitude of velocity fluctuations and their vertical correlation length.

Of course, the horizontal reflector considerably limits our analysis. At the present time, we are working on an integration of the low reflector perturbations with a deterministic method and the fast perturbations in a probabilistic manner. Furthermore, we disregard phenomena due to absorption, elasticity, variations of density, etc. In practice, real data are contaminated by correlated or uncorrelated noise. To be applicable, this analysis would require many traveltimes. One advantage is that, as we work with traveltime variance, we do not need an accurate picking procedure : a constant bias on the picking times is removed and does not modify the precision of the analysis. Moreover the extension to 3-D is easy and would enable us to use many more traveltimes for the same number of unknowns. We can also use well data or wide angle seismic reflection data, in order to estimate the vertical correlation length and the standard-deviation of the fluctuations. Finally, our stationary velocity model could be extended to a multi-layer geometry or to a locally stationary model which could take into account a linear increase of the mean velocity with depth.

The problem addressed here is one of the key points in many applications of probabilistic models in seismics. Extracting horizontal statistical structure from seismic data rather than from well data would be much more practical. Possible uses of the velocity model covariance and lateral correlation include a more rigorous determination of the migration velocity model, the simulation of migration errors (Touati 1996, Touati and Galli 1996), tomographic seismic inversion with statistical a priori models of the velocity field, and a better knowledge of some geostatistical variables that are generally related to the velocities (e.g. porosities, geological facies, impedances).

Acknowledgments

I would like to thank A. Galli and M. Touati who have guided me in this research. I am also grateful to P. Thore, P. Podvin, M. Noble and Y. Samuelides for many helpful discussions. I am indebted to S. Shapiro and to an anonymous reviewer for their constructive reviews. Finally, great thanks to M. Armstrong, J. Talbot and F. Poirier for their help with the English.

References

- Aki, K., 1973. Scattering of P waves under the Montana LASA, *J. geophys. Res.*, **78**, 1334-1346.
- Aki, K. & Chouet, B., 1975. Origin of coda waves : source, attenuation and scattering effects, *J. geophys. Res.*, **80**, 3322-3342.

- Aki, K. & Richards, P., 1980. *Quantitative seismology*, Freeman, San Francisco.
- Chernov, L. A., 1960. *Wave propagation in a random medium*, Mc-Graw Hill, New York.
- Chevret, P., 1994. *Simulation numérique des effets de la turbulence sur la propagation du son dans l'atmosphère*, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon.
- Frankel, A. & Clayton, R., W., 1986. Finite difference simulations of seismic scattering : implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity, *J. geophys. Res.*, **91**, 6465-6489.
- Ishimaru, A., 1978. *Wave propagation and scattering in random media*, Vol 2, Academic Press, New York.
- Jannaud, L., R., Adler, P., M. & Jacquin, C., G., 1991. Spectral analysis and inversion of codas, *J. geophys. Res.*, **96**, 18215-18231.
- Matheron, G., 1973. The intrinsic random functions and their application, *Advances in Applied Probability*, **5**, 439-468.
- Matheron, G., 1991. Géodésiques aléatoires, *Compte-Rendu des Journées de Géostatistique*, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.
- Mukerji, T., Mavko, G., Mujica, D. & Lucet, N., 1995. Scale-dependent seismic velocity in heterogeneous media, *Geophysics*, **60**, 1222-1233.
- Müller, G., Roth, M. & Korn, M., 1992. Seismic-wave traveltimes in random media, *Geophys. J. Int.*, **110**, 29-41.
- Roth, M., 1997. Statistical interpretation of travelttime fluctuations, *Phys. Earth Planet. Interiors*, **104**, 213-228.
- Rytov, S., M., Kravtsov, Y., A. & Tatarskii, V., I., 1987. *Wave propagation through random media*, Vol 4 of *Principles of Statistical Radiophysics*, Springer-Verlag, New York.
- Sato, H., 1982. Attenuation of S waves in the lithosphere due to scattering by its random velocity structure, *J. geophys. Res.*, **87**, 7779-7785.
- Shapiro, S., A. & Kneib, G., 1993. Seismic attenuation by scattering : theory and numerical results, *Geophys. J. Int.*, **114**, 373-391.
- Shapiro, S., A., Schwarz, R. & Gold, N., 1996. The effect of random isotropic inhomogeneities on the phase velocity of seismic waves, *Geophys. J. Int.*, **127**, 783-794.
- Thore, P., D. & Juliard, C., 1996. Fresnel-zone effect on seismic velocity resolution, *66th SEG Meeting Expanded Abstracts*, Denver.
- Touati, M., 1996. *Contribution géostatistique au traitement des données sismiques*, Thèse de l'Ecole des Mines de Paris.
- Touati, M., Galli, A., Ruffo, P. & Della Rossa, E., 1996. Migration uncertainties : a probabilistic approach, in Baafi (ed.), *Geostatistics Wollongong '96*, **2**, 719-730.
- Virieux, J., 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**, 889-901.
- Wielandt, J., 1987. On the validity of the ray approximation for interpreting delay times, in *Seismic tomography*, pp 85-98, G. Nolet, ed., G. Reidel, Dordrecht.
- Williamson P., R. & Worthington, M., H., 1993. Resolution limits in ray tomography due to wave behavior : numerical experiments, *Geophysics*, **58**, 727-735.

Wu, R., S., 1982. Attenuation of short period seismic waves due to scattering, *Geophys. Res. Letters*, **9**, 9-12.

Wu, R., S. & Flatté, S., M., 1990, Transmission fluctuations across an array and heterogeneities in the crust and upper mantle, *Pure and Applied Geophysics*, **132**, 175-196.

Appendix - Traveltime covariance of a 2-D spherical wave

The traveltime covariance was derived for isotropic random media by Ishimaru (1978) for a 3-D spherical wave, by Shapiro and Kneib (1993) for a 2-D plane wave and by Chevret (1994) for a 2-D spherical wave. In this appendix, we derive the traveltime covariance of a 2-D spherical wave in anisotropic random media. Special attention is paid to its validity conditions by taking into account the statistical anisotropy of velocity inhomogeneities.

We work with the spectral representations of the spatial random fields. The 2-D spectral density Φ_ϵ of ϵ is the 2-D Fourier transform of C_ϵ :

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C_\epsilon(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} , \quad (\text{G.23})$$

where \mathbf{k} is the vectorial wavenumber. We define the horizontal spectral density $F_\epsilon(\kappa, z)$ as the 1-D Fourier transform of C_ϵ , with κ being the horizontal wavenumber. The relations between Φ_ϵ , F_ϵ and C_ϵ are given by

$$\begin{aligned} 2\pi\Phi_\epsilon(\kappa, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_\epsilon(\kappa, z) dz , \\ \int_0^{\infty} \Phi_\epsilon(\kappa, 0) e^{i\kappa x} d\kappa &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_\epsilon(x, z) dz . \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

Rytov approximation

The propagation of 2-D monochromatic scalar waves is governed by equation (G.6). Let u_0 be the solution of (G.6) in the absence of fluctuations ϵ . We define the perturbation quantity Ψ by

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) e^{\Psi(\mathbf{r})} . \quad (\text{G.25})$$

Combining (G.6) and (G.25), and assuming that $|\nabla\Psi|$ is small, we obtain a first order solution known as the Rytov approximation :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{u_0(\mathbf{r})} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') dV' , \quad (\text{G.26})$$

where ϵ is the square of the slowness perturbation, k is the wavenumber, V is the volume containing scatterers, and $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ is the 2-D Green's function defined by

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) , \quad (\text{G.27})$$

where $H_0^{(1)}$ is a Hankel function of the first kind. In the far field of the scattering volume, we use the following approximation for the Green's function :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) . \quad (\text{G.28})$$

More precisely, the two conditions of validity of the Rytov approximation are

$$|\epsilon| \ll 1 , \quad \langle |\nabla_\perp \Psi|^2 \rangle \ll k^2 \sigma_\epsilon , \quad (\text{G.29})$$

where $\nabla_{\perp} = \partial/\partial x$ is the transverse gradient. The first condition is equivalent to $\sigma_{\epsilon} \ll 1$ (σ_{ϵ} is the standard deviation of ϵ) and enables us to develop a perturbative series. The second condition allows us to ignore the second order terms in ϵ . It means that Ψ has small changes over distances of the order of a wavelength. This is called the smooth wavefield approximation (Rytov et al. 1987). When this approximation is no longer valid, the incoherent part of the wavefield is dominant and the notion of arrival time is undefined. For an isotropic random medium and neglecting backscattering, Shapiro et al. (1996) give a more explicit limit of the smooth wavefield fluctuations region :

$$\sigma_{\epsilon}^2 k^2 z a \ll 1, \quad (\text{G.30})$$

where z is the propagation distance and a is the correlation length.

Parabolic approximation

We consider a 2-D spherical wave radiated from the origin $z' = 0$ to $z' = z$. In the absence of the random medium, the incident wave is given by

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\mathbf{kr}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad (\text{G.31})$$

where $r = \|\mathbf{r}\|$ and $k = \|\mathbf{k}\|$.

We assume that the wavelength is shorter than the scales of velocity heterogeneities :

$$\lambda \ll a, \quad \lambda \ll b, \quad (\text{G.32})$$

where a and b are, respectively, the horizontal and vertical correlation lengths. This limits the study to heterogeneity scales larger than the wavelength. These heterogeneities dominate in the calculation of arrival times (Aki and Richards 1980). Under the assumptions (G.32), the scattered energy from an inhomogeneity is mainly confined within a forward angle of the order of λ/a (Ishimaru 1978). As the ratio of the transverse component $x - x'$ of $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ to its longitudinal component $z - z'$ is about the scattering angle of the order of λ/a , Green's function $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in (G.28) and $u_0(\mathbf{r})$ in (G.31) can be approximated by parabolic functions :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k(z-z')}} \exp[ik(z-z') + ik \frac{(x-x')^2}{2(z-z')}], \quad (\text{G.33})$$

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k z}} \exp[ik(z + \frac{x^2}{2z})]. \quad (\text{G.34})$$

These approximations are valid if the following term in the asymptotic series is small compared to 1, *i.e.*

$$\frac{k(x-x')^4}{8(z-z')^3} \ll 1. \quad (\text{G.35})$$

Then, we obtain a condition which restricts the width of the first Fresnel zone $\sqrt{\lambda z}$:

$$\sqrt{\lambda z} \ll a \frac{a}{\lambda}. \quad (\text{G.36})$$

Moreover, by neglecting backscattering, we reduce the integration domain in (G.26) from $z' = 0$ to $z' = z$. This approximation limits the magnitude of the fluctuations σ_{ϵ}^2 and the propagation distance z to be not too large. For this problem, Rytov et al. (1987) derive an explicit condition for isotropic media by looking at the effective backscattered cross-section. For a gaussian medium, it gives $\sigma_{\epsilon}^2 k^2 z a \ll e^{k^2 a^2 / 2}$. However, as $a > \lambda$, it is clear that the Rytov approximation condition (G.30) includes this condition : the backscattering is neglected when we deal with smooth wavefield fluctuations.

From (G.33) and (G.34), (G.26) becomes

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x', z-z') \epsilon(x', z') dx' dz', \quad (\text{G.37})$$

where

$$h(x - x', z - z') = -i \frac{k^2}{4} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k \eta (z - z')}} \exp\left[\frac{ik}{2} \frac{(\eta x - x')^2}{\eta (z - z')}\right], \quad (\text{G.38})$$

with $\eta = z'/z$. If $\eta = 1$, equation (G.38) corresponds to the plane wave case (Ishimaru 1978).

Instead of (G.38), we use the relationship relating the Fourier transforms to the horizontal coordinate,

$$\epsilon(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} \epsilon(\kappa, z) d\kappa, \quad (\text{G.39})$$

where κ is the horizontal wavenumber coordinate. The Fourier transform of h with respect to $x - x'$ and κ is (Chevret 1994)

$$\mathcal{F}[\langle (\xi - \xi', \ddagger - \ddagger') \rangle] = \frac{\|}{\epsilon} \exp[-] \frac{\kappa \in \eta (\ddagger - \ddagger')}{\epsilon \|}. \quad (\text{G.40})$$

Substituting (G.39) for (G.37) and using (G.40) gives the following equation in the spectral domain

$$\Psi(\kappa, z) = -i \frac{k}{2} \int_0^z \exp\left[-i \frac{\kappa^2 \eta (z - z')}{2k}\right] \epsilon(\kappa, z') dz'. \quad (\text{G.41})$$

This is the general solution of the spherical wave equation using the Rytov and parabolic approximations.

The real part of Ψ contains the wave amplitude and the imaginary part contains the traveltime. Amplitude considerations are used by Shapiro and Kneib (1993) to study scattering attenuation caused by random seismic media. Here, we are only interested in traveltime fluctuations.

Stochastic expressions of traveltimes

We know from (G.25)

$$\Psi(\mathbf{r}) = \log\left(\frac{A(\mathbf{r})}{A_0(\mathbf{r})}\right) + iS'(\mathbf{r}), \quad (\text{G.42})$$

where A and $S' = S - S_0$ are the amplitude and the deviation of the phase of the total field, A_0 and S_0 the amplitude and the phase of the incident field. We define the arrival time T as

$$T(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r})}{kv_0}. \quad (\text{G.43})$$

Taking the imaginary part of (G.41), in the spectral domain we get

$$S'(\kappa, z) = -\frac{k}{2} \int_0^z \cos\left[\frac{\kappa^2 \eta (z - z')}{2k}\right] \epsilon(\kappa, z') dz'. \quad (\text{G.44})$$

We now derive the second order moment of arrival times. The covariance of the spectral components of $\epsilon(\kappa, z)$ is (Ishimaru 1978)

$$\text{Cov}[\epsilon(\kappa_1, z_1), \epsilon(\kappa_2, z_2)] = \delta(\kappa_1 - \kappa_2) F_\epsilon(\kappa_1, z_1 - z_2), \quad (\text{G.45})$$

where the horizontal spectral density F_ϵ defined by (G.24) is concentrated in the region $|\kappa_1| |z_1 - z_2| < 2\pi$.

We study the covariance of spherical wave arrival times at (x_1, z) and (x_2, z) . From (G.44) and (G.45), we deduce

$$F_S(\kappa, 0) = \frac{k^2}{4} \iint_0^z \cos\left[\frac{\kappa^2 (z - z'_1)}{2k(z/z'_1)}\right] \cos\left[\frac{\kappa^2 (z - z'_2)}{2k(z/z'_2)}\right] F_\epsilon(\kappa, z'_1 - z'_2) dz'_1 dz'_2. \quad (\text{G.46})$$

Let $\zeta = z'_1 - z'_2$ and $z' = (z'_1 + z'_2)/2$. F_ϵ is concentrated in the region $|\kappa| |z'_1 - z'_2| < 2\pi$. Thus the largest contribution of the integrand is in the region $z' = z'_1 = z'_2$. As the cosine is a slowly varying function of z' , we can approximate $(z - z'_i)z'_i$ by $(z - z')z'$. Moreover, if we assume that the vertical correlation length b is small in relation to the depth z , we get $z \gg |\zeta|$ and we can extend the integration over ζ from $[-z, z]$ to $]-\infty, \infty[$. In the geometrical optics case, Touati (1996) proves that this approximation is valid if the

angle between the two rays is not too large, *i.e.* $|x_1 - x_2| \ll 2z$. Here, we also assume that the incident angles are small and we approximate the path length $\sqrt{z^2 + x_i^2}$ by z . We get

$$F_S(\kappa, 0) = \frac{k^2}{4} \int_0^z \cos^2\left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k} \frac{z'}{z}\right] dz' \int_{-\infty}^{\infty} F_\epsilon(\kappa, \zeta) d\zeta. \quad (\text{G.47})$$

By replacing (G.24) in this equation, and taking its inverse Fourier transform to return to the spatial domain, we finally obtain

$$\text{Cov}[S(x_1, z), S(x_2, z)] = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^z \int_0^\infty \exp(i\kappa x \frac{z'}{z}) \cos^2\left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k} \frac{z'}{z}\right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa dz' \quad (\text{G.48})$$

where $x = |x_1 - x_2|$.

By a last change of variables $u = xz'/z$ and from (G.43), the covariance between the traveltimes of a spherical wave is

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cov}[T(x_1, z), T(x_2, z)] = \frac{\pi}{2v_0^2} \frac{z}{x} \int_0^x \int_0^\infty e^{i\kappa u} \cos^2\left[\frac{\kappa^2 z}{2k} \frac{u}{x} \left(1 - \frac{u}{x}\right)\right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa du, \\ \text{Var}[T(x_1, z)] = \frac{\pi}{4v_0^2} z \int_0^\infty \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{k}\right)\right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa, \end{array} \right. \quad (\text{G.49})$$

because

$$\int_0^z \cos^2\left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right] dz' = \frac{z}{2} \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{k}\right)\right]. \quad (\text{G.50})$$

For the plane wave case, we deduce from (G.48) with $z'/z = 1$ and (G.50) :

$$\text{Cov}[T(x_1, z), T(x_2, z)] = \frac{\pi}{4v_0^2} z \int_0^\infty e^{i\kappa x} \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{k}\right)\right] \Phi_\epsilon(\kappa, 0) d\kappa. \quad (\text{G.51})$$

Annexe H

Probabilisation des réflecteurs

Caractérisation probabiliste de réflecteurs en sismique réflexion

Bertrand Iooss

[Les Cahiers de Géostatistique, Fascicule 6, Ecole des Mines de Paris, 1998]

Résumé

La modélisation usuelle en sismique réflexion consiste à diviser le sous-sol en différentes couches de vitesse séparées par des interfaces lisses à faibles variations verticales. Elles représentent en fait des contrastes d'impédance provoquant la réflexion des ondes incidentes. Actuellement, des travaux sont développés pour tenir compte des perturbations de vitesse lors du traitement des temps d'arrivée des ondes sismiques [Touati 1996 [89] et Iooss 1998 [39]]. Or les fluctuations des temps d'arrivée ne résultent pas uniquement des hétérogénéités des champs de vitesse, mais peuvent aussi être dues aux petites perturbations des réflecteurs. Dans ce papier, l'incertitude sur les temps d'arrivée associée aux perturbations d'interfaces est quantifiée en modélisant chaque réflecteur sismique par une fonction aléatoire stationnaire ou intrinsèque. En considérant des champs de vitesse homogènes par couche, les paramètres statistiques des temps d'arrivée sont liés à ceux des interfaces et des formules d'inversion des moments d'ordre deux des réflecteurs sont établies. Celles-ci sont validées sur des modèles synthétiques par simulation numérique de la propagation des ondes. Un phénomène d'ordre deux est également mis en évidence : la moyenne des temps d'arrivée simulés est toujours plus petite que le temps correspondant à la moyenne du réflecteur.

Introduction

La représentation correcte du sous-sol à partir des données sismiques est réalisée à l'aide d'une procédure nommée migration. La principale difficulté pour son utilisation repose sur le fait qu'elle utilise un modèle précis du sous-sol (champs de vitesse séparés par des réflecteurs). Celui-ci peut-être obtenu à l'aide de techniques d'inversion qui nécessitent dans un premier temps un pointé des temps d'arrivée pour positionner les réflecteurs. Les interfaces sont le plus souvent modélisées par des fonctions \mathcal{C}^∞ très lisses, sur lesquelles peut s'appliquer la loi de Snell-Descartes (angles des ondes incidentes et réfléchies égaux). Elles sont représentées usuellement par des fonctions $z = f(x, y)$ car le sous-sol est plus ou moins stratifié. Dans la pratique, il n'est pas évident que l'on puisse obtenir une idée précise de la fonction suivie par l'interface. Les incertitudes rencontrées en sismique peuvent avoir un impact sur le pointé des temps d'arrivée et donc sur la localisation des réflecteurs. De plus, les réflecteurs sismiques peuvent être assez chahutés et donc difficiles à interpoler et à modéliser par une fonction déterministe.

Déterminer la géométrie d'un réflecteur précisément semble donc difficile. Or dans notre travail sur la modélisation stochastique des hétérogénéités de vitesse [Touati 1996 [89], Iooss 1998 [39]], une connaissance assez précise du réflecteur est nécessaire pour étudier les fluctuations de temps d'arrivée. De plus, de rapides perturbations d'interface, même faibles, pourraient avoir autant (voire plus) d'effet sur les temps d'arrivée que des perturbations de vitesse. Introduire une perturbation aléatoire dans la caractérisation

de la profondeur du réflecteur permettra alors de prendre en compte cette incertitude. Les hétérogénéités d'interface sont séparées en deux catégories : une fonction déterministe représentant sa variation globale autour de laquelle fluctue une fonction aléatoire. Ici, on ne s'occupe pas de la détermination du macro-modèle et on prend comme référence des réflecteurs horizontaux. C'est le but des méthodes sismiques classiques de prendre en compte les variations lentes des réflecteurs.

Dans un champ de vitesse hétérogène, la trajectoire de l'onde n'est pas droite. Quand le réflecteur est plan et la vitesse stationnaire, Matheron 1991 [62] et Touati et al. 1996 [90] ont montré que pour le calcul des temps de trajet, les perturbations de vitesse sont intégrées au premier ordre le long du rayon droit (joignant la source au récepteur). Le point de réflexion à considérer est donc celui du rayon droit. Celui-ci est déterminé en symétrisant les rayons par rapport au réflecteur (cf Fig. 1). Quand le réflecteur est irrégulier, le problème de la symétrisation est plus complexe. Iooss 1996 [37] a montré qu'il suffit de symétriser les rayons par rapport à la tangente au réflecteur au point de réflexion M du rai. On détermine alors le rayon droit et son point de réflexion H qui se trouve sur cette tangente. Les perturbations de vitesse sont intégrées le long de ce rayon.

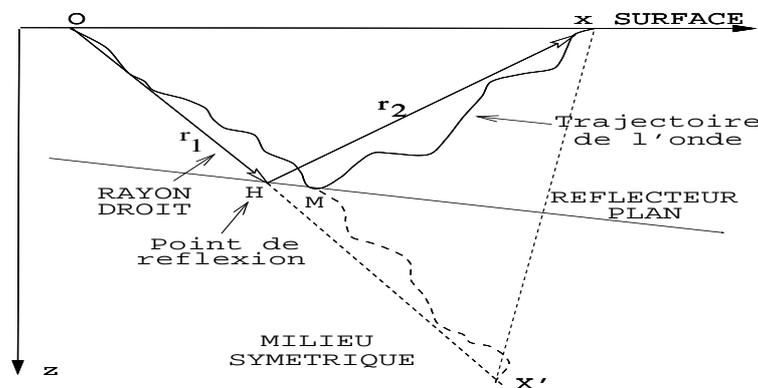


FIG. H.1 – Géométrie des rayons avec un réflecteur plan.

On se consacre ici à la détermination des moments des rayons droits et donc des temps d'arrivée dans un milieu homogène. Le travail de Iooss 1996 [37] sur les moments des rayons droits est ainsi étendu à une géométrie 3D et multicouche. On présente tout d'abord notre modélisation, on détermine ensuite la géométrie et les moments des rayons dans les cas d'un réflecteur simple et d'un modèle multicouche. On conclut par des tests synthétiques de validité, faisant apparaître notamment un décalage entre la moyenne expérimentale des temps et la moyenne théorique : les rais se réfléchissent préférentiellement sur les parties hautes des réflecteurs.

Modélisation du problème

En tomographie sismique, modéliser un réflecteur de manière probabiliste a été fait par Jannaud 1995 [46], pour prendre en compte l'incertitude des temps de trajet pointés sur les sections avant sommation. En effet, le pointé est un obstacle majeur à l'utilisation des temps d'arrivée pour imager les structures complexes. Jannaud modélise les faibles fluctuations du réflecteur par une fonction aléatoire très lisse (cf Fig. 2), et il lie les corrélations des positions des points d'émergence des rayons réfléchis et de leur temps de trajet avec les propriétés statistiques du réflecteur. Cette approche perturbative, basée sur une linéarisation des équations de la théorie des rais, permet de donner une mesure de confiance sur les points d'émergence et sur les temps de trajet. Des tests synthétiques et réels la valident pour des perturbations à covariance gaussienne.

Si le réflecteur est une fonction présentant trop de rugosité (par exemple une fonction à corrélation exponentielle), l'onde ne se réfléchit pas dessus, mais diffuse dans toutes les directions. Il est alors impossible de définir une trajectoire du rayon réfléchi. De plus, le champ d'onde risque d'être sévèrement déformé et il est difficile d'en déduire un temps d'arrivée.

On choisit donc de suivre l'approche de Jannaud car elle fait apparaître explicitement les temps d'arrivée et la réflexion est prise en compte d'un point de vue uniquement géométrique. Le problème est traité en 3D dans un repère (ρ, z) , les vecteurs sont notés en gras. Les hypothèses et les notations sont les suivantes :

- ★ La profondeur du réflecteur est notée $L(\rho) = L_0 + \zeta(\rho)$, où L_0 est une profondeur constante, ζ la perturbation d'interface et $\rho = (x, y)$.
- ★ Pour ζ stationnaire, la covariance est C_ζ , la variance σ_ζ^2 , l'espérance 0.
- ★ Le cadre intrinsèque prend en compte des géométries de réflecteur plus adaptées à la sismique que le cas stationnaire : des dérivées linéaires de la moyenne et de la variance. Si ζ est intrinsèque, le variogramme est $\gamma_\zeta(\mathbf{h}) = \text{Var}[\zeta(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \zeta(\mathbf{r})]$ et la dérivée $m_\zeta(\mathbf{h}) = \mathbf{E}[\zeta(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \zeta(\mathbf{r})]$.
- ★ σ_ζ est la "taille" caractéristique des perturbations de hauteur.
- ★ Perturbations d'interface faibles devant la profondeur : $\sigma_\zeta \ll L_0$.
- ★ c et d sont les portées en abscisse et en azimut. $l_\zeta = \min(c, d)$ est la taille caractéristique latérale des hétérogénéités .
- ★ La pente des perturbations d'interface est le vecteur $\zeta' = (\zeta'_x, \zeta'_y)$. Si ζ est stationnaire ou intrinsèque, ζ'_x et ζ'_y sont stationnaires avec $\gamma_{\zeta'_i}(\mathbf{h}) = -\nabla_i^2 \gamma_\zeta(\mathbf{h})$, pour $i = x, y$ [Matheron 1970 [59] p 59].
- ★ La fonction de corrélation gaussienne $C_\zeta(\mathbf{h}) = \sigma_\zeta^2 \exp(-x^2/c^2 - y^2/d^2)$ est bien adaptée pour modéliser le cas de réflecteurs lisses. De plus, elle possède la propriété $\nabla_x C_\zeta(0, 0) = \nabla_y C_\zeta(0, 0) = \nabla_x \nabla_y C_\zeta(0, 0) = 0$ qui permet d'avoir l'orthogonalité deux à deux entre $\zeta(\rho)$ et $\zeta'_x(\rho)$, $\zeta(\rho)$ et $\zeta'_y(\rho)$ et $\zeta'_x(\rho)$, $\zeta'_y(\rho)$. On a en particulier $\sigma_{\zeta'}^2 = \frac{2\sigma_\zeta^2}{c^2} + \frac{2\sigma_\zeta^2}{d^2}$.
- ★ Soit $\zeta' = \|\zeta'\|$. Le réflecteur est lisse et faiblement penté : $\sigma_{\zeta'} \sim \frac{\sigma_\zeta}{l_\zeta} \ll 1$.
- ★ Les offsets \mathbf{x} (vecteurs source-récepteur) ont des longueurs faibles devant la distance de propagation : $x = \|\mathbf{x}\| \ll 2L_0$, donc les angles d'incidence α des rayons sont faibles.
- ★ Les relations d'ordre sont alors les suivantes :

$$\zeta' \sim \sigma_{\zeta'} \ll 1 ; \zeta \sim \sigma_\zeta \ll l_\zeta, L_0 ; x \ll 2L_0 . \quad (\text{H.1})$$

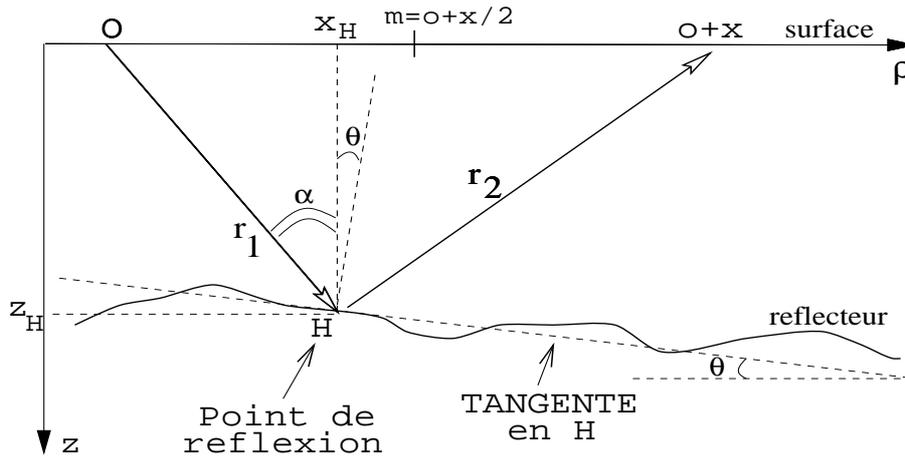


FIG. H.2 – Géométrie des rayons en milieu homogène avec un réflecteur perturbé.

Réflecteur unique

Soit $T_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ le temps d'arrivée de l'onde s'étant réfléchi sur le réflecteur, issues du point \mathbf{o} et de point milieu $\mathbf{m} = \mathbf{o} + \mathbf{x}/2$:

$$T_{\mathbf{m}\mathbf{x}} = \frac{r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}}{v_0} , \quad (\text{H.2})$$

où $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ est la longueur du rayon droit joignant la source au récepteur et v_0 est la vitesse constante du milieu. $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ se décompose en deux rayons \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 (cf Fig. 2). On exprime d'abord la longueur de ces rayons, pour calculer ensuite leurs moments.

Détermination des rayons droits

La relation qui lie les longueurs des côtés d'un triangle et un de ses angles permet de calculer les coordonnées du point de réflexion $H(\mathbf{x}_H, z_H)$ (où $z_H = L(\mathbf{x}_H) = L_0 + \zeta(\mathbf{x}_H)$) en fonction de $O(\mathbf{o}, 0)$, de $X(\mathbf{o} + \mathbf{x}, 0)$, de la perturbation d'interface et de sa dérivée. En appliquant la loi de Snell-Descartes (angle incident=angle réfléchi), l'angle OHX peut être déterminé si on définit l'angle entre le rayon incident \mathbf{r}_1 et la normale à la tangente du réflecteur. En 2D, le calcul est simple [Iooss 1996 [37]], l'angle vaut $\alpha + \theta = \arctan \frac{x_H - o}{z_H} + \arctan \zeta'(x_H)$ (cf Fig. 2).

En 3D, le problème est plus complexe car on doit décomposer l'angle d'incidence α en (α_x, α_y) pour tenir compte de la déviation du rayon due à la pente du réflecteur (ζ'_x, ζ'_y) . Par un calcul géométrique (Fig. 3), on voit que si un angle θ est tel que $\theta \ll 1$, on a $\theta \simeq \tan \theta = AC/AO = \sqrt{AB^2 + AD^2}/AO$. Si θ_x et θ_y sont les projections orthogonales de l'angle θ sur les plans orthogonaux (AOB) et (AOD) , on a donc $\theta \simeq \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$.

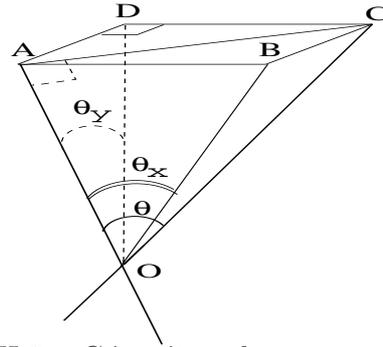


FIG. H.3 – Géométrie des rayons en 3D.

Dans notre problème, α et θ sont petits ($\theta = \arctan \zeta' \simeq \zeta'$), l'angle entre le rayon incident \mathbf{r}_1 et la normale au réflecteur se note donc $\sqrt{(\alpha_x + \zeta'_x)^2 + (\alpha_y + \zeta'_y)^2}$. On applique à présent au triangle OHX (cf Fig. 2) la relation qui lie les côtés d'un triangle et l'angle OHX . On a $\alpha_x \simeq (x_H - o_x)/z_H$, $\alpha_y \simeq (y_H - o_y)/z_H$, r_1 et r_2 longueurs de \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . On en déduit

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos[2\sqrt{(\alpha_x + \zeta'_x)^2 + (\alpha_y + \zeta'_y)^2}] = x^2. \quad (\text{H.3})$$

Avec des développements limités sur les termes \cos et r_1r_2 de (H.3) et les relations d'ordre de (H.1), cette équation se simplifie (en 2D cf Iooss 1996 [37]) et donne l'équation du second degré

$$(\mathbf{x}_H - \mathbf{o})^2 + 2z_H \zeta'(\mathbf{x}_H) \cdot (\mathbf{x}_H - \mathbf{o}) + z_H^2 \zeta'^2(\mathbf{x}_H) - \frac{x^2}{4} = 0. \quad (\text{H.4})$$

Cette équation admet deux solutions, mais une seule est à retenir :

$$\mathbf{x}_H = \mathbf{m} - [L_0 + \zeta(\mathbf{x}_H)] \zeta'(\mathbf{x}_H). \quad (\text{H.5})$$

La longueur du rayon se note $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}} = r_1 + r_2$, $r_1 = \sqrt{z_H^2 + (\mathbf{x}_H - \mathbf{o})^2}$, $r_2 = \sqrt{z_H^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{o} - \mathbf{x}_H)^2}$. En utilisant $\|\mathbf{x}_H - \mathbf{o}\| \ll L_0$, des développements limités sur cette expression sont possibles, et on obtient $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ en fonction de L_0 , \mathbf{x} , \mathbf{o} , ζ , ζ' et \mathbf{x}_H [Iooss 1996 [37]].

Moments des rayons

On suppose que les perturbations de réflecteur sont intrinsèques et on calcule le variogramme entre deux rayons de même offset et de points milieux différents. Le variogramme entre les longueurs $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ et $r_{\mathbf{m}'\mathbf{x}}$ s'écrit $\gamma_{r_{\mathbf{x}}}(\mathbf{m} - \mathbf{m}') = \gamma(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}, r_{\mathbf{m}'\mathbf{x}}) = \text{Var}(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}} - r_{\mathbf{m}'\mathbf{x}})$. Dans $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$, les termes d'ordre supérieur à un sont négligés. On obtient [Iooss 1996 [37]]

$$\gamma_{r_{\mathbf{x}}}(\mathbf{m} - \mathbf{m}') = 4\gamma_{\zeta}(\mathbf{x}_H - \mathbf{x}'_H) \simeq 4\gamma_{\zeta}(\mathbf{m} - \mathbf{m}'), \quad \gamma_{T_{\mathbf{x}}}(\mathbf{m} - \mathbf{m}') \simeq 4\gamma_{\zeta}(\mathbf{m} - \mathbf{m}')/v_0^2, \quad (\text{H.6})$$

où le temps d'arrivée $T_{\mathbf{x}}$ est défini par (H.2).

L'approximation $\gamma_\zeta(\mathbf{x}_H - \mathbf{x}'_H) \simeq \gamma_\zeta(\mathbf{m} - \mathbf{m}')$ est nécessaire car $\mathbf{x}_H - \mathbf{x}'_H$ est inconnu. Elle se justifie si le terme négligé n'a pas de contribution dans γ_ζ . Une condition de validité de cette approximation sera donnée dans le cadre stationnaire où la portée est une mesure de la taille des hétérogénéités apportant une contribution à γ_ζ .

Si le réflecteur est stationnaire, l'espérance de $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ s'écrit au premier ordre [Iooss 1996 [37]] :

$$\mathbf{E}(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}) \simeq 2L_0 + \frac{\mathbf{x}^2}{4L_0}. \quad (\text{H.7})$$

C'est le terme déterministe que l'on aurait obtenu si le réflecteur avait été déterministe, horizontal et situé à la profondeur moyenne L_0 . Pour le moment d'ordre deux, on déduit de (H.6) la covariance de $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$ et $r_{\mathbf{m}'\mathbf{x}}$:

$$C_{r_{\mathbf{x}}(\mathbf{m} - \mathbf{m}')} = 4C_\zeta(\mathbf{x}_H - \mathbf{x}'_H) \simeq 4C_\zeta(\mathbf{m} - \mathbf{m}'), \quad C_{T_{\mathbf{x}}(\mathbf{m} - \mathbf{m}')} \simeq \frac{4}{v_0^2} C_\zeta(\mathbf{m} - \mathbf{m}'). \quad (\text{H.8})$$

L'approximation de $\mathbf{x}_H - \mathbf{x}'_H$ par $\mathbf{m} - \mathbf{m}'$ se justifie si le terme négligé de l'ordre de $L_0[\zeta'(\mathbf{x}_H) - \zeta'(\mathbf{x}'_H)]$ (cf équation (H.5)) n'apporte pas de contribution dans la covariance C_ζ . Ceci équivaut à supposer qu'il est nettement inférieur à la portée l_ζ de C_ζ : $L_0\zeta' \ll l_\zeta$. Ceci est équivalent à

$$L_0\sigma_\zeta \ll l_\zeta^2. \quad (\text{H.9})$$

Pour la variance des rayons à offset constant, cette approximation n'est pas nécessaire car $\mathbf{x}_H - \mathbf{x}'_H = 0$. On a

$$\text{Var}(r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}) = \text{Var}(r_{\mathbf{x}}) = 4\sigma_\zeta^2, \quad \text{Var}(T_{\mathbf{x}}) = \frac{4}{v_0^2}\sigma_\zeta^2. \quad (\text{H.10})$$

Remarque H.0.1 *Ni le variogramme, ni la covariance ne dépendent de l'offset. On pourra donc estimer l'un ou l'autre pour chaque offset, puis les moyenner pour obtenir un résultat plus robuste. Mais dans le cadre intrinsèque, ceci n'est valide que pour de faibles pentes de la dérive du réflecteur. Si la dérive est trop forte, on ne peut pas négliger l'influence de l'offset.*

Modèles multicouches

L'usage de modèles multicouches est classique dans la pratique des géophysiciens. On traite donc dans cette section la généralisation de notre approche pour ce type de modèles, mais sans prendre en compte les réflexions multiples. Notre problème revient à lier les moments des temps d'arrivée à ceux des interfaces dans un modèle où la vitesse est constante dans chaque couche.

La géométrie est représentée en Fig. 4. On note n le nombre de réflecteurs, $v_0^{(i)}$ la vitesse dans la $i^{\text{ème}}$ couche, $L^{(i)} = L_0^{(i)} + \zeta^{(i)}$ la profondeur de la $i^{\text{ème}}$ interface, $T_{\mathbf{m}\mathbf{x}}^{(n)}$ le temps d'arrivée du rayon d'offset \mathbf{x} et de point milieu \mathbf{m} s'étant réfléchi sur la $n^{\text{ème}}$ interface, $\mathbf{r}_{\mathbf{m}\mathbf{x}}^{(i)}$ le rayon dans la $i^{\text{ème}}$ couche de rayon descendant $\mathbf{r}_1^{(i)}$ et montant $\mathbf{r}_2^{(i)}$. Les offsets intermédiaires $\mathbf{x}^{(i)}$ sont les écarts entre les rayons à l'interface de la $i^{\text{ème}}$ et $(i+1)^{\text{ème}}$ couches. Soient les hypothèses :

- ◇ Les perturbations de l'interface i sont faibles devant l'épaisseur des couches supérieure et inférieure : $\forall i = 1, \dots, n, \sigma_\zeta^{(i)} \ll L_0^{(i)} - L_0^{(i-1)}$ et $\sigma_\zeta^{(i)} \ll L_0^{(i+1)} - L_0^{(i)}$.
- ◇ Les perturbations d'interface sont centrées : $\forall i = 1, \dots, n, \mathbf{E}[\zeta^{(i)}(\boldsymbol{\rho})] = 0$.
- ◇ Elles sont lisses et de pentes faibles : $\forall i = 1, \dots, n, \sigma_{\zeta'}^{(i)} \sim \sigma_\zeta^{(i)}/l_\zeta^{(i)} \ll 1$.
- ◇ $\forall i = 1, \dots, n, \zeta^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ et $\zeta'^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ ne sont pas corrélés.
- ◇ Les réflecteurs ne sont pas corrélés entre eux : $\forall i \neq j, \forall \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \zeta^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \perp \zeta^{(j)}(\boldsymbol{\rho}')$.
- ◇ Si $\zeta^{(i)}$ est intrinsèque, le variogramme est $\gamma_\zeta^{(i)}(\mathbf{h})$ et la dérive $m_\zeta^{(i)}(\mathbf{h})$.
- ◇ Si $\zeta^{(i)}$ est stationnaire, la covariance est $C_\zeta^{(i)}(\mathbf{h})$ et l'espérance nulle.
- ◇ Les angles d'incidence $\alpha^{(i)}$ sont faibles, *i.e.* $\forall i = 1, \dots, n, \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}\| \ll L_0^{(i)} - L_0^{(i-1)}$.

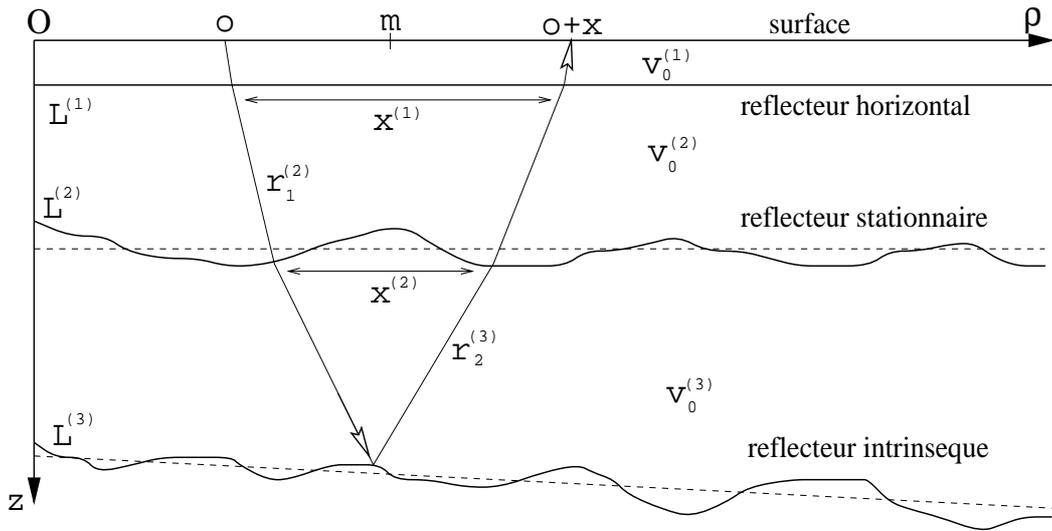


FIG. H.4 – Exemple d'un modèle multicouche 2D.

◇ On a $L_0^{(0)} = 0$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$ et $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}$.

Il est nécessaire de connaître les écarts des rayons sur chaque réflecteur pour étudier leurs corrélations. Ces offsets intermédiaires sont difficiles à calculer car ils dépendent des angles d'incidence et des perturbations d'interface. Dans le paragraphe précédent, lorsque l'on prend en compte la distance entre les points de réflexion à l'intérieur de C_ζ ou de γ_ζ , on l'approxime par sa moyenne. Ici, on utilise la même approximation pour chaque réflecteur ($L_0^{(i)} \sigma_\zeta^{(i)} \ll l_\zeta^{(i)2}$); on détermine les offsets intermédiaires sans prendre en compte les perturbations de réflecteurs, donc en considérant des réflecteurs horizontaux. Les angles d'incidence, les vitesses et les épaisseurs des couches sont liés par la loi de Snell-Descartes : $\sin \alpha^{(i)}/v_0^{(i)} = Cte \simeq \alpha^{(i)}/v_0^{(i)}$, $\forall i = 1, \dots, n$, et par la relation $\sum_{j=i+1}^n (L_0^{(j)} - L_0^{(j-1)}) \tan \alpha^{(j)} = x^{(i)}/2 \simeq \sum_{j=i+1}^n (L_0^{(j)} - L_0^{(j-1)}) \alpha^{(j)}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Un calcul rapide permet d'en déduire l'expression des offsets intermédiaires :

$$\mathbf{x}^{(i)(n)} = \mathbf{x} \left[1 - \sum_{j=1}^i \frac{L_0^{(j)} - L_0^{(j-1)}}{\sum_{k=1}^n \frac{(L_0^{(k)} - L_0^{(k-1)}) v_0^{(k)}}{v_0^{(j)}}} \right]. \quad (\text{H.11})$$

Cette formule a été obtenue avec des réflecteurs horizontaux. Dans le cas intrinsèque, il faudrait prendre en compte la dérive des réflecteurs. $\mathbf{x}^{(i)}$ dépendrait alors de \mathbf{m} et l'hypothèse intrinsèque ne serait plus adaptée (variogramme ne dépendant pas uniquement de $\mathbf{m} - \mathbf{m}'$). Mais les réflecteurs sont peu pentés, et on peut considérer que la dérive n'introduit pas de biais significatifs dans l'estimation des $\mathbf{x}^{(i)}$, que l'on établit donc par la formule (H.11).

Soient $\mathbf{x}_{1H}^{(i)}$ et $\mathbf{x}_{2H}^{(i)}$ positions des points d'intersection entre le $i^{\text{ème}}$ réflecteur et les rayons. La longueur du rayon $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}^{(i)}$ s'écrit au premier ordre

$$r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}^{(i)} = 2(L_0^{(i)} - L_0^{(i-1)}) + [\zeta^{(i)}(\mathbf{x}_{1H}^{(i)}) - \zeta^{(i-1)}(\mathbf{x}_{1H}^{(i-1)})] + [\zeta^{(i)}(\mathbf{x}_{2H}^{(i)}) - \zeta^{(i-1)}(\mathbf{x}_{2H}^{(i-1)})]. \quad (\text{H.12})$$

On cherche à exprimer le variogramme des temps d'arrivée $\gamma(T_{\mathbf{x}})(\mathbf{m} - \mathbf{m}') = Var(T_{\mathbf{m}\mathbf{x}} - T_{\mathbf{m}'\mathbf{x}})$, en fonction des variogrammes des perturbations d'interface. On décompose chaque rayon de chaque couche par ses rayons descendant r_1 et montant r_2 . Après moults calculs que l'on ne détaillera pas ici, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma(T_{\mathbf{x}}^{(n)})(\mathbf{m} - \mathbf{m}') &\simeq \frac{4\gamma_\zeta^{(n)}(\mathbf{m} - \mathbf{m}')}{v_0^{(n)2}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{v_0^{(i)}} - \frac{1}{v_0^{(i+1)}} \right)^2 \\ &\cdot \left[\gamma_\zeta^{(i)}(\mathbf{m} - \mathbf{m}') - \gamma_\zeta^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)}) + \frac{\gamma_\zeta^{(i)}(\mathbf{m} - \mathbf{m}' - \mathbf{x}^{(i)}) + \gamma_\zeta^{(i)}(\mathbf{m} - \mathbf{m}' + \mathbf{x}^{(i)})}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

Si les fluctuations d'interface $\zeta^{(i)}$ sont stationnaires, on trouve par analogie à la formule (H.13)

$$\text{Var}(T_{\mathbf{x}}^{(n)}) \simeq 2 \sum_{i=1}^{n-1} [\sigma_{\zeta}^{(i)2} + C_{\zeta}^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)})] \left(\frac{1}{v_0^{(i)}} - \frac{1}{v_0^{(i+1)}} \right)^2 + 4 \frac{\sigma_{\zeta}^{(n)2}}{v_0^{(n)2}}. \quad (\text{H.14})$$

Expériences numériques

On met en oeuvre dans cette section des expériences synthétiques visant à confirmer nos résultats théoriques et à préciser les domaines de validité de nos différentes approximations. On se limite au cas 2D car il est suffisant pour tester nos formules et les temps de calcul sont trop longs en 3D. Les expériences de sismique réflexion consistent à effectuer pour chaque milieu 14 tirs en surface espacés chacun de $\delta m = 100m$. 51 récepteurs enregistrent en surface les temps d'arrivée pour des offsets allant de $0m$ à $1000m$ (espacés de $20m$).

La méthode de calcul des temps

Pour faire propager les ondes, on utilise un code aux différences finies sur l'eikonale [Podvin et Lecomte 1991 [71]]. Celui-ci est basé sur le principe de Huygens : chaque point d'un front d'onde est considéré comme une nouvelle source qui crée un front d'onde secondaire. L'algorithme évalue pour un noeud donné tous les temps de trajet possibles et garde le temps le plus court. L'intérêt de ce code est qu'il est beaucoup plus rapide que les différences finies sur l'équation des ondes acoustiques et que l'on obtient directement les temps sans recourir aux procédures compliquées de pointé des temps d'arrivée. Son inconvénient est qu'il suppose les fréquences infinies et donc qu'il ne prend pas en compte les phénomènes de diffraction par les zones de Fresnel. Mais nos modèles sont homogènes par couche, il n'y a donc pas de problème de diffractions dues aux hétérogénéités de vitesse. Le seul problème repose sur les diffractions à la surface du réflecteur, qui sont prises en compte indépendamment de la fréquence. Ceci équivaut en fait à se placer dans l'approximation de Kirchhoff, formulation mathématique du principe de Huygens : chaque point de l'interface est un point diffractant. Ogilvy [68] en donne une condition de validité :

$$\sqrt{\lambda \sigma_{\zeta}} \ll \frac{l_{\zeta}}{2}, \quad (\text{H.15})$$

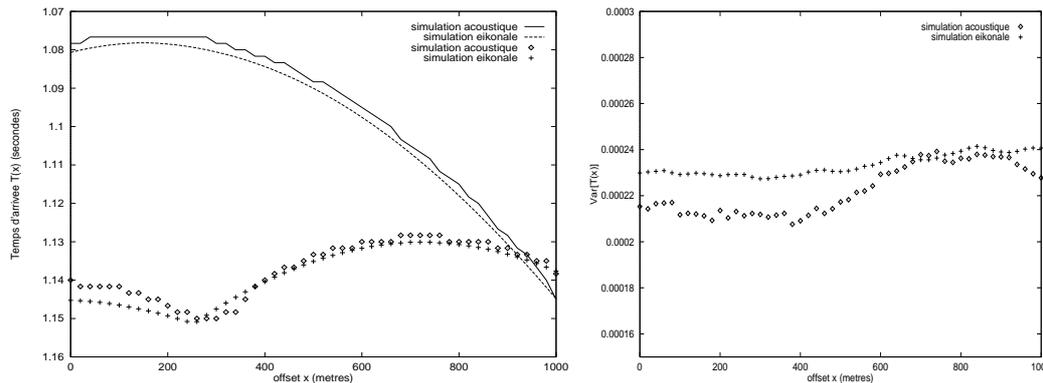
où λ est la longueur d'onde, σ_{ζ} et l_{ζ} étant les dimensions caractéristiques verticale et latérale des perturbations d'interface. Cette condition signifie que la longueur d'onde est nettement inférieure aux rayons de courbure du réflecteur. Elle est beaucoup plus faible que la condition (H.9) car la longueur d'onde λ est nettement inférieure aux profondeurs investiguées L_0 .

Pour s'assurer des performances de l'algorithme eikonale pour nos modèles, on effectue des tests de comparaison avec des simulations de l'équation acoustique par différences finies modélisant exactement le champ d'onde. Le modèle de réflecteur aléatoire est lisse (gaussien), très chahuté, de profondeur moyenne $1700m$, de portée $l_{\zeta} = 200m$ et d'écart-type $\sigma_{\zeta} = 100m$. La condition (H.15) est valide car $\sqrt{\lambda \sigma_{\zeta}} = 50$. En Fig. 5, deux courbes de temps d'arrivée, calculées avec chaque méthode, montrent une bonne concordance. En Fig. 6, on trace la variance des temps en fonction de l'offset et l'erreur entre les deux résultats est de l'ordre de 5%. Ce résultat nous satisfait, on peut donc utiliser l'algorithme eikonale dans notre contexte.

Nos tests suivants sont effectués sur des réflecteurs stationnaires à covariance gaussienne, de champ $\Delta X = 4000m$, de profondeur moyenne $L_0 = 1700m$, de portées $l_{\zeta} = 100m, 200m$ ou $400m$ et d'écart-type $\sigma_{\zeta} = 5m, 10m$ ou $20m$. Les temps d'arrivée sont calculés dans 10 réalisations de chaque modèle. On vérifie la bonne convergence des courbes de variance des temps en fonction du nombre de réalisations utilisées. Pour assurer une bonne discrétisation de l'interface, le modèle est constitué de 1600×2000 noeuds de dimension $2.5m \times 1m$.

La déviation de la moyenne des temps

L'équation (H.7) exprime la moyenne des temps d'arrivée au premier ordre, qui correspond au temps obtenu en prenant comme réflecteur sa moyenne. En Fig. 7, on trace les hyperboles de la moyenne des



Comparaison entre les simulations par l’acoustique et les simulations par l’eikonale.

FIG. H.5 – 2 courbes des temps (2 tirs).

FIG. H.6 – Variances des temps (800 temps/offset).

temps en fonction de l’offset : la moyenne théorique (points) et les moyennes expérimentales (traits continus) pour différentes valeurs des portées l_ζ et écart-types σ_ζ des réflecteurs. Sur nos expériences, la moyenne des temps est toujours plus petite que la moyenne théorique. Il s’agit du même effet que lors de la propagation des ondes en milieu aléatoire : quand le champ de vitesse est hétérogène, l’onde choisit le trajet le plus court en temps. Des simulations géophysiques dans des milieux de vitesse aléatoire ont montré ce “shift” entre la moyenne des temps et le temps correspondant à la vitesse moyenne [Müller et al. 1992 [66]].

Ici, pour quantifier ce décalage, il faudrait prendre en compte, dans le développement perturbatif de $r_{\mathbf{m}\mathbf{x}}$, les termes d’ordre deux car l’espérance du terme au premier ordre est nulle. Mais cela n’aurait pas de sens, car dans le calcul de \mathbf{x}_H , des termes du deuxième ordre ont été négligés en supposant que les angles sont faibles. Cette effet ne sera donc constaté ici qu’expérimentalement. Ainsi, quand le rapport de l’écart-type sur la portée σ_ζ/l_ζ augmente, la déviation augmente : pour $\sigma_\zeta/l_\zeta = 5/200 = 0.025$, elle est de l’ordre de $5 \cdot 10^{-4}$, et pour $\sigma_\zeta/l_\zeta = 10/100 = 0.1$, elle est dix fois plus grande. Ce phénomène est intuitif car plus les fluctuations sont fortes et fréquentes, plus il y a de possibilités pour les rayons de trouver des trajectoires courtes.

Validité de l’approche perturbative

Pour la moyenne, le terme d’ordre un s’annule et il apparaît alors des termes d’ordre deux provoquant le décalage expliqué précédemment. Par contre, pour la variance, le terme d’ordre un est le terme dominant, et on peut donc étudier la validité de l’approximation au premier ordre en comparant variances théoriques et variances expérimentales. On utilise différents modèles : $(l_\zeta, \sigma_\zeta) = (100, 5)$, $(100, 10)$, $(200, 5)$, $(200, 10)$, $(400, 10)$ et $(400, 20)$. La condition $\sigma_\zeta \ll L_0$ est toujours vérifiée, et on étudie la validité de la condition $\sigma_\zeta \ll l_\zeta$. Le rapport de la variance des temps expérimentale sur la variance des temps théorique est un indicateur de l’ajustement entre théorie et expérience. On le visualise en Fig. 8 avec les temps à offset 0. On constate que plus σ_ζ/l_ζ augmente, plus le rapport des variances s’éloigne de 1 (moins la théorie est valide). Pour rester dans une borne d’erreur de 10%, il faut que $\sigma_\zeta/l_\zeta \lesssim 0.025$.

Remarque H.0.2 Par la formule théorique (H.10), on devrait obtenir des écart-types des temps suivants : $\sigma_T(\sigma_\zeta = 5) = 3.3\text{ms}$, $\sigma_T(\sigma_\zeta = 10) = 6.7\text{ms}$ et $\sigma_T(\sigma_\zeta = 20) = 13.3\text{ms}$. De telles perturbations de temps sont donc du même ordre que celles dues aux erreurs de pointé (5ms) et aux faibles hétérogénéités de vitesse [Iooss 1998 [39]].

Variogrammes des temps d’arrivée

Les modèles $(l_\zeta, \sigma_\zeta) = (100, 5)$, $(100, 10)$, $(200, 5)$, $(200, 10)$ sont choisis pour tester la formule (H.6) des variogrammes des temps. Pour l’obtenir, l’approximation supplémentaire (H.9) a été nécessaire :

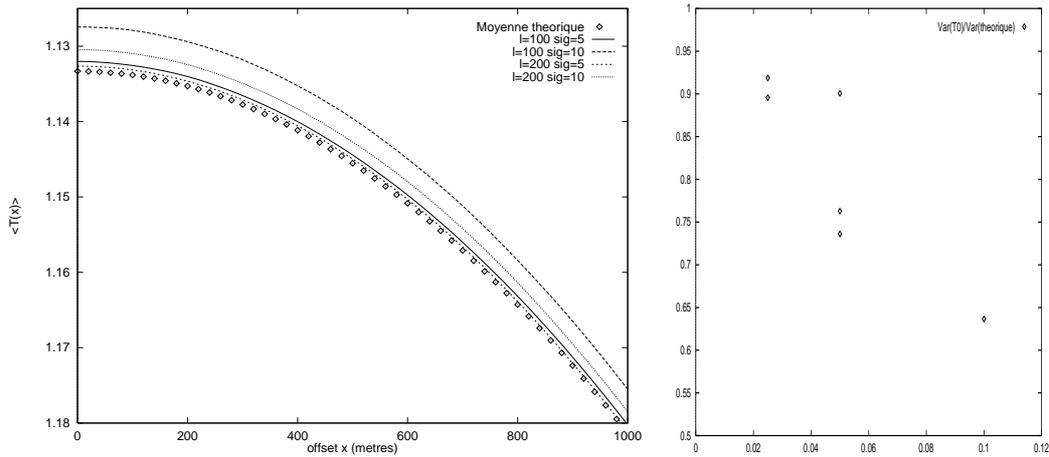
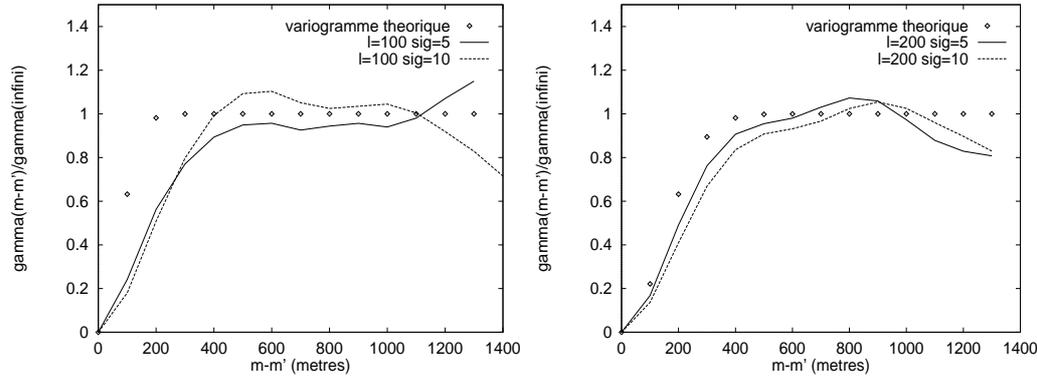


FIG. H.7 – Moyenne des temps d'arrivée.

FIG. H.8 – Var. expérimentales/Var. théoriques à l'offset 0 en fonction du rapport σ_ζ/l_ζ (en abscisse).FIG. H.9 – Variogrammes normalisées des temps d'arrivée $T(m - m')$, $l_\zeta = 100m$.FIG. H.10 – Variogrammes normalisées des temps d'arrivée $T(m - m')$, $l_\zeta = 200m$.

$L_0\sigma_\zeta \ll l_\zeta^2$. En Fig. 9 et 10, on compare les variogrammes théoriques et expérimentaux normalisés à 1. Le pas d'échantillonnage est celui de la distance entre points milieux $m - m'$, c'est-à-dire entre tirs (100m). Pour $l_\zeta = 200m$ (Fig. 10), les courbes théorique et expérimentales s'ajustent assez bien (avec une amélioration quand on diminue σ_ζ). En effet, $L_0\sigma_\zeta/l_\zeta^2 = 0.425$ pour $\sigma_\zeta = 10$: la condition $L_0\sigma_\zeta \ll l_\zeta^2$ est valide. Par contre, pour $l_\zeta = 100m$ (Fig. 9), l'ajustement est mauvais, même quand $\sigma_\zeta/l_\zeta = 0.05$. Ceci s'explique par le fait que l'approximation $L_0\sigma_\zeta \ll l_\zeta^2$ n'est pas valide (pour $\sigma_\zeta = 5$, $L_0\sigma_\zeta/l_\zeta^2 = 0.85$).

Tests multicouches

Un modèle multicouche est mis en oeuvre, il s'agit de 5 couches superposées (cf Fig. 11) :

- ▷ $L_0^{(1)} = 200m$, réflecteur horizontal, $v_0^{(1)} = 1500m/s$.
- ▷ $L_0^{(2)} = 400m$, réflecteur horizontal, $v_0^{(2)} = 2000m/s$.
- ▷ $L_0^{(3)} = 600m$, réflecteur horizontal, $v_0^{(3)} = 2500m/s$.
- ▷ $L_0^{(4)} = 1200m$, gaussien stationnaire, $v_0^{(4)} = 3000m/s$, $l_\zeta^{(4)} = 500m$, $\sigma_\zeta^{(4)} = 20m$.
- ▷ $L_0^{(5)} = 1900m$, gaussien stationnaire, $v_0^{(5)} = 3500m/s$, $l_\zeta^{(5)} = 200m$, $\sigma_\zeta^{(5)} = 10m$.

On en simule 7 réalisations dans lesquelles sont calculés les temps d'arrivée avec la configuration précédente. On s'attache à retrouver les variogrammes de la 4^{ème} et 5^{ème} interfaces qui sont irrégulières. On étudie

donc les temps d'arrivée qui s'y sont réfléchis. Les variogrammes expérimentaux et théoriques de ces réflecteurs sont représentés en Fig. 12. les résultats sont satisfaisants : les modèles gaussiens sont clairement mis en évidence, les portées sont bien respectées et les paliers ne sont pas exactement retrouvés mais sont du même ordre.

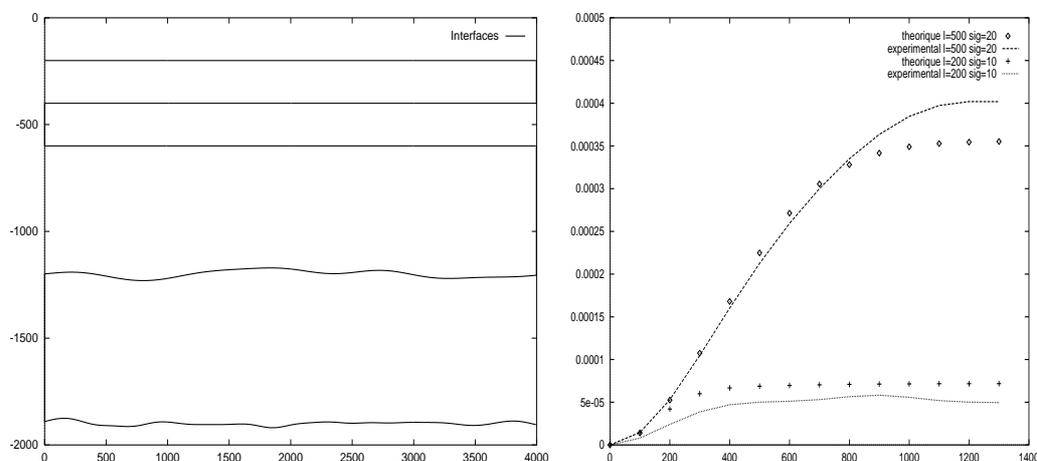


FIG. H.11 – Une réalisation du modèle.

FIG. H.12 – Variogrammes des temps (réfl. 4 et 5).

Conclusion

Ce travail concerne l'incertitude liée la détermination de la position des réflecteurs sismiques et de leurs variations possibles. Une modélisation probabiliste des interfaces permet ainsi de formuler les moments des temps d'arrivée en fonction ceux des réflecteurs dans des couches de vitesse homogènes. Une extension ultérieure devra être réalisée pour prendre en compte l'hétérogénéité de la vitesse comme dans Jannaud 1995 [46].

Le modèle multicouche et l'hypothèse intrinsèque sont réalistes et représentent une grande part de l'originalité de ce travail. Un phénomène intéressant a également été mis en évidence sur des simulations : les rayons sismiques se réfléchissent prioritairement sur les parties les plus hautes des réflecteurs. Ceci entraîne un décalage entre la moyenne des temps et la moyenne théorique au premier ordre correspondant à la profondeur moyenne des réflecteurs.

Cette approche, originale en géophysique, nous a semblé nécessaire dans le cadre de l'étude des fluctuations des temps d'arrivée en sismique réflexion. Tenter de retrouver les paramètres statistiques des champs de vitesse à partir des temps d'arrivée nécessite la modélisation de chaque source d'erreurs influant sur les temps d'arrivée. Cette méthode pourra ensuite être couplée à celle prenant en compte l'hétérogénéité des champs de vitesse [Iooss 1996 [37]]. Un autre intérêt concerne la quantification des incertitudes liées aux perturbations d'interface en imagerie sismique [Jannaud 1995 [46]].

Bibliographie

- [1] P. Abrahamsen. Bayesian kriging for seismic depth conversion of a multi-layer reservoir. In A. Soares, editor, *Geostat Tróia 1992*, pages 385–398. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [2] K. Aki. Scattering of P waves under the Montana LASA. *Journal of Geophysical Research*, 78(8) :1334–1346, 1973.
- [3] K. Aki and B. Chouet. Origin of coda waves : source, attenuation and scattering effects. *Journal of Geophysical Research*, 80 :3322–3342, 1975.
- [4] K. Aki and P. Richards. *Quantitative Seismology*. Freeman, San Francisco, 1980.
- [5] M. Al-Chalabi. An analysis of stacking, RMS, average, and interval velocities over a horizontally layered ground. *Geophysical Prospecting*, 22 :458–475, 1974.
- [6] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1985.
- [7] G. E. Backus. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67 :4427–4440, 1962.
- [8] F. Bailly, J. F. Clouet, and J. P. Fouque. Parabolic and white noise approximation for waves in random media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 5 :1445–1470, 1996.
- [9] R. M. Baina. *Tomographie Sismique entre Puits*. Thèse de l’Université de Rennes I, 1998.
- [10] R. M. Baina and P. Podvin. Ray+Born vs. Ray+Rytov modeling for forward-scattering simulation. In SPIE, editor, *Mathematical Methods in Geophysical Imaging IV*, pages 150–167, 1996.
- [11] K. Bataille and S. M. Flatté. Inhomogeneities near the core-mantle boundary inferred from short-period scattered PKP waves recorded at the global digital seismograph network. *Journal of Geophysical Research*, 93(B12) :15057–15064, 1988.
- [12] W. B. Beydoun and A. Tarantola. First Born and Rytov approximations : Modeling and inversion conditions in a canonical example. *Journal of Acoustical Society of America*, 83 :1045–1055, 1988.
- [13] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics - Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Pergamon Press, sixth edition, 1980.
- [14] W. Boyse and J. K. Keller. Short acoustic, electromagnetic, and elastic waves in random media. *Journal of Optical Society of America*, 12 :380–389, 1995.
- [15] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. Mc Graw-Hill International Editions, second edition, 1986.

- [16] P. Chauvet. *Aide-Mémoire de Géostatistique Linéaire*. Les Cahiers de Géostatistique, Fascicule 2. Ecole des Mines de Paris, 1994.
- [17] L. A. Chernov. *Wave Propagation in a Random Medium*. Mc Graw-Hill, New York, 1960.
- [18] P. Chevret. *Simulation Numérique des Effets de la Turbulence sur la Propagation du Son dans l'Atmosphère*. Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [19] J. P. Chilès. *La dérive à la dérive*. Rapport N-591, Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, 1979.
- [20] J. F. Claerbout. *Imaging the Earth's Interior*. Blackwell Science Pub., 1985.
- [21] F. Coppens. First arrival picking on common-offset trace collections for automatic estimation of static corrections. *Geophysical Prospecting*, 33 :1212–1231, 1985.
- [22] J. P. Cordier. *Les Vitesses en Sismique Réflexion*. Tec & Doc, Paris, 1983.
- [23] F. Delprat-Jannaud. *Tomographie de Réflexion. Quelle est l'Information Contenue dans les Temps d'Arrivée ?* Thèse de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 1991.
- [24] P. B. Dillon and V. A. Collyer. On timing the VSP first arrival. *Geophysical Prospecting*, 33 :1174–1194, 1985.
- [25] E. Doerflinger. *Propagation des ondes élastiques en milieu hétérogène bidimensionnel : Modélisation par différences finies*. Rapport de D.E.A., Université de Montpellier, 1991.
- [26] M. Faily-Berthet. *Etude Quantitative de la Résolution Sismique par la Réponse Impulsionnelle*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 1996.
- [27] V. Farra. *Aproche Hamiltonienne de la Théorie des Rais : Application à l'Etude de Perturbations. Inversion des Temps de Parcours en Sismique Réflexion*. Thèse de l'Université Paris 7, 1987.
- [28] D. Fiorina. *Application de la Méthode de Sommation de Faisceaux Gaussiens à l'Etude de la Propagation Ultrasonore en Milieu Turbulent*. Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [29] J. P. Fouque, G. Papanicolaou, and Y. Samuelides. Forward and Markov approximation : the strong intensity fluctuations regime revisited. *Waves in Random Media*, 8 :303–314, 1998.
- [30] A. Frankel and R. W. Clayton. Finite difference simulations of seismic scattering : implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 91(B6) :6465–6489, 1986.
- [31] U. Frisch. *Wave Propagation in Random Media*, volume 1 of *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, pages 75–198. Academic Press, New York, A. T. Bharucha-Reid edition, 1968.
- [32] B. S. Gibson and A. R. Levander. Apparent layering in common-midpoint stacked images of two-dimensionally heterogeneous targets. *Geophysics*, 55 :1466–1477, 1990.
- [33] O. Gudmundsson. On the effect of diffraction on traveltime measurements. *Geophysical Journal International*, 124 :304–314, 1996.

- [34] A. G. Haas and C. Jousselin. Geostatistics in the petroleum industry. In *NATO-ASI "Geostat 75"*, pages 13–25, Rome, Italy, 1976.
- [35] A. G. Haas and J. R. Viallix. Krigeage applied to geophysics, the answer to the problem of estimates and contouring. *Geophysical Prospecting*, 26 :49–69, 1975.
- [36] L. T. Ikelle, S. K. Yung, and F. Daube. 2-D random media with ellipsoidal auto-correlation functions. *Geophysics*, 58 :1359–1372, 1993.
- [37] B. Iooss. *Approche Probabiliste du Traitement des Données Sismiques (champ de vitesse et réflecteur aléatoires)*. Rapport N-27/96/G, Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, 1996.
- [38] B. Iooss. Caractérisation probabiliste de réflecteurs en sismique réflexion. In *Les Cahiers de Géostatistique*, volume 6, pages 61–73. Ecole des Mines de Paris, 1998.
- [39] B. Iooss. Seismic reflection traveltimes in two-dimensional statistically anisotropic random media. *Geophysical Journal International*, 135 :999–1010, 1998.
- [40] B. Iooss, P. Blanc-Benon, and C. Lhuillier. Statistical moments of travel times at second order in isotropic and anisotropic random media. *Waves in Random Media*, 10 :381–394, 2000.
- [41] B. Iooss, A. Galli, and M. Touati. Velocity correlation function estimation from seismic reflection traveltimes. In *68th SEG expanded abstract*, pages 1724–1727, New-Orleans, 1998.
- [42] B. Iooss and Y. Samuelides. Inversion of velocity statistical parameters from traveltimes. In *Proceedings of 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America*, pages 2319–2320, Seattle, 1998.
- [43] A. Ishimaru. *Multiple Scattering, Turbulence, Rough Surfaces, and Remote Sensing*, volume 2 of *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. Academic Press, Inc, 1978.
- [44] M. Jannane, W. Beydoun, E. Crase, D. Cao, Z. Koren, E. Landa, M. Mendes, A. Pica, M. Noble, G. Roeth, S. Singh, R. Snieder, A. Tarantola, and D. Trezeguet. Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data. *Geophysics*, 54(7) :906–910, 1989.
- [45] L. Jannaud. *Propagation d'Onde en Milieu Aléatoire*. Thèse de l'Université Paris Sud-Orsay, 1991.
- [46] L. Jannaud. Reliability of travel time data computed from interpreted migrated events. *Journal of Geophysical Research*, 100 :2135–2149, 1995.
- [47] L. Jannaud, P. M. Adler, and C. G. Jacquin. Frequency dependence of the Q factor in random media. *Journal of Geophysical Research*, 96 :18233–18243, 1991.
- [48] L. Jannaud, P. M. Adler, and C. G. Jacquin. Spectral analysis and inversion of codas. *Journal of Geophysical Research*, 96 :18215–18231, 1991.
- [49] L. Jannaud, P. M. Adler, and C. G. Jacquin. Wave propagation in random anisotropic media. *Journal of Geophysical Research*, 97 :15277–15289, 1992.
- [50] C. Juliard. *Incertitudes Associées aux Champs de Vitesse Sismiques*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 1997.

- [51] J. B. Keller. Stochastic equations and wave propagation in random media. In *Symposia in Applied Mathematics*, volume 16, pages 145–170. Amer. Math. Soc., 1964.
- [52] V. I. Klyatskin. *Ondes et Equations Stochastiques dans les Milieux Aléatoirement non Homogènes*. Editions de Physique, 1985.
- [53] G. Kneib. The statistical nature of the upper continental crystalline crust derived from *in situ* seismic measurements. *Geophysical Journal International*, 122 :594–616, 1995.
- [54] Y. A. Kravtsov and Yu. I. Orlov. *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*. Wave Phenomena. Springer-Verlag, 1990.
- [55] G. Lambaré. *Inversion Linéarisée de Données de Sismique Réflexion par une Méthode Quasi-Newtonienne*. Thèse de l'Université Paris 7, 1991.
- [56] M. Lavergne. *Méthodes Sismiques*. Editions Technip, Paris, 1986.
- [57] C. Lhuillier, D. Fiorina, and D. Juvé. Simulation of ultrasound propagation in a thermally turbulent fluid using gaussian beam summation and Fourier modes superposition techniques. In *Proceedings of 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America*, pages 1963–1964, Seattle, 1998.
- [58] C. MacBeth. How can anisotropy be used for reservoir characterisation? *First Break* 13, pages 31–37, 1995.
- [59] G. Matheron. *La Théorie des Variables Régionalisées, et ses Applications*. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule 5. Ecole des Mines de Paris, 1970.
- [60] G. Matheron. The intrinsic random functions and their application. *Advances in Applied Probability*, 5 :439–468, 1973.
- [61] G. Matheron. *Estimer et Choisir*. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule 7. Ecole des Mines de Paris, 1978.
- [62] G. Matheron. Géodésiques aléatoires. In *Les Cahiers de Géostatistique*, volume 1, pages 1–18. Ecole des Mines de Paris, 1991.
- [63] G. Matheron, H. Beucher, C. de Fouquet, A. Galli, D. Guerillot, and C. Ravenne. Conditional simulation of geometry of fluvio-deltaic reservoirs. In *SPE 1987 Annual Technical Conference and Exhibition*, pages 591–599, Dallas, 1987.
- [64] D. Moulière. *Intégration d'Informations Sismiques pour la Simulation de Réservoirs*. Thèse de l'Ecole des Mines de Paris, 1998.
- [65] T. Mukerji, G. Mavko, D. Mujica, and N. Lucet. Scale-dependent seismic velocity in heterogeneous media. *Geophysics*, 60 :1222–1233, 1995.
- [66] G. Müller, M. Roth, and M. Korn. Seismic-wave traveltimes in random media. *Geophysical Journal International*, 110 :29–41, 1992.
- [67] R. F. O'Doherty and N. A. Anstey. Reflections on amplitudes. *Geophysical Prospecting*, 19 :430–458, 1971.
- [68] J. A. Ogilvy. *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*. Hilger, 1991.

- [69] G. Papanicolaou. Mathematical problems in geophysical wave propagation. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Extra Volume*, Documenta Mathematica, pages 241–265, Berlin, 1998.
- [70] N. V. Petersen. Inverse kinematic problem for a random medium in geometric optics approximation. *Pure and Applied Geophysics*, 132 :417–437, 1990.
- [71] P. Podvin and I. Lecomte. Finite difference computation of travel-times in very contrasted velocity models : a massively parallel approach and its associated. *Geophysical Journal International*, 105 :271–284, 1991.
- [72] N. Ricker. The form and laws of seismic wavelets. *Geophysics*, 18 :10–40, 1953.
- [73] M. Roth. Statistical interpretation of travelttime fluctuations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 104 :213–228, 1997.
- [74] M. Roth, G. Müller, and R. Snieder. Velocity shift in random media. *Geophysical Journal International*, 115 :552–563, 1993.
- [75] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii. *Elements of Random Fields*, volume 3 of *Principles of Statistical Radiophysics*. Springer-Verlag, 1987.
- [76] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii. *Wave Propagation Through Random Media*, volume 4 of *Principles of Statistical Radiophysics*. Springer-Verlag, 1987.
- [77] Y. Samuelides. *Propagation d’onde en milieu aléatoire, Etude des temps d’arrivée en sismique*. Rapport S-357, Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, 1997.
- [78] Y. Samuelides. Velocity shift using the Rytov approximation. *Journal of Acoustical Society of America*, 104 :2596–2603, 1998.
- [79] Y. Samuelides and T. Mukerji. Velocity shift in heterogeneous media with anisotropic spatial correlation. In *67th SEG expanded abstract*, pages 964–967, Dallas, 1997.
- [80] Y. Samuelides and T. Mukerji. Velocity shift in heterogeneous media with anisotropic spatial correlation. *Geophysical Journal International*, 134 :778–786, 1998.
- [81] H. Sato. Attenuation of S waves in the lithosphere due to scattering by its random velocity structure. *Journal of Geophysical Research*, 87 :7779–7785, 1982.
- [82] H. Sato and M. C. Fehler. *Seismic Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth*. Springer, 1998.
- [83] S. A. Shapiro and G. Kneib. Seismic attenuation by scattering : theory and numerical results. *Geophysical Journal International*, 114 :373–391, 1993.
- [84] S. A. Shapiro, R. Schwarz, and N. Gold. The effect of random isotropic inhomogeneities on the phase velocity of seismic waves. *Geophysical Journal International*, 127 :783–794, 1996.
- [85] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory : Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Elsevier, 1987.
- [86] V. I. Tatarskii. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. Dover Publications, New-York, 1961.

- [87] W. M. Telford, L. P. Geldart, R. E. Sheriff, and D. A. Keys. *Prospection Sismique*, volume 1 of *Prospection Géophysique*. ERG Editions, 1981.
- [88] P. D. Thore and C. Juliard. Fresnel-zone effect on seismic velocity resolution. *Geophysics*, 64 :593–603, 1999.
- [89] M. Touati. *Contribution Géostatistique au Traitement des Données Sismiques*. Thèse de l’Ecole des Mines de Paris, 1996.
- [90] M. Touati, A. Galli, P. Ruffo, and E. Della Rossa. Migration uncertainties : a probabilistic approach. In Baafi, editor, *Geostatistics Wollongong ’96*, volume 1, pages 597–608, 1996.
- [91] M. Touati, B. Iooss, and A. Galli. Quantitative control of migration : a geostatistical attempt. *Mathematical Geology*, 31 :277–295, 1999.
- [92] R. J. Versteeg. *Analyse du Problème de la Détermination du Modèle de Vitesse pour l’Imagerie Sismique*. Thèse de l’Université Paris 7, 1991.
- [93] D. Vidale. Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78 :2062–2076, 1988.
- [94] J. Virieux. P-SV-wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51 :889–901, 1986.
- [95] J. Virieux, V. Farra, and R. Madariaga. Ray tracing for earthquake location in laterally heterogeneous media. *Journal of Geophysical Research*, 93 :6585–6599, 1988.
- [96] H. Wackernagel. *Multivariate Geostatistics*. Springer, 1995.
- [97] J. Wielandt. On the validity of the ray approximation for interpreting delay times. In G. Nolet, editor, *Seismic Tomography*, pages 85–98. D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [98] P. R. Williamson and M. H. Worthington. Resolution limits in ray tomography due to wave behavior : Numerical experiments. *Geophysics*, 58 :727–735, 1993.
- [99] O. Witte, M. Roth, and G. Müller. Ray tracing in random media. *Geophysical Journal International*, 124 :159–169, 1996.
- [100] R. S. Wu. Attenuation of short period seismic waves due to scattering. *Geophysical Research Letters*, 9(1) :9–12, 1982.
- [101] R. S. Wu and K. Aki. Elastic wave scattering by a random medium and the small-scale inhomogeneities in the lithosphere. *Journal of Geophysical Research*, 90(B12) :10261–10273, 1985.
- [102] R. S. Wu and S. M. Flatté. Transmission fluctuations across an array and heterogeneities in the crust and upper mantle. *Pure and Applied Geophysics*, 132 :175–196, 1990.
- [103] R. S. Wu and X. B. Xie. Numerical tests of stochastic tomography. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 67 :180–193, 1991.
- [104] R. S. Wu, Z. Xu, and X. P. Li. Heterogeneity spectrum and scale-anisotropy in the upper crust revealed by the German Continental Deep-Drilling (KTB) holes. *Geophysical Research Letters*, 21(10) :911–914, 1994.
- [105] O. Yilmaz. *Seismic Data Processing*, volume 2 of *Investigations in Geophysics*. Society of Exploration Geophysics, 1987.

Résumé

Pour permettre la localisation des réservoirs pétroliers et donner une image des interfaces d'un milieu sédimentaire, la sismique réflexion consiste à y propager des ondes et à enregistrer les champs d'onde réfléchis. Le problème majeur revient à estimer le champ de vitesse du sous-sol. Ses grandes structures sont retrouvées, grâce aux temps de trajet des ondes, par les méthodes sismiques classiques. Néanmoins, celles-ci négligent des hétérogénéités de dimension plus petite (d'échelle hectométrique) qui ont un impact important sur les temps d'arrivée.

Notre travail a pour but de quantifier les effets de cette hétérogénéité et, en la modélisant par un champ aléatoire anisotrope, d'en estimer les paramètres géostatistiques. Une procédure (la tomographie statistique) est développée pour estimer la covariance du champ de vitesse à partir des temps d'arrivée. Elle s'appuie sur l'étude des fluctuations des temps, qui est un domaine de la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire. Nous l'avons étendue au cas d'une anisotropie géométrique, mieux adaptée aux situations réelles de sismique d'exploration. Sous l'hypothèse de réflecteurs faiblement perturbés, nous avons adapté ces résultats à la géométrie particulière de la sismique réflexion.

Nos résultats sont validés sur données synthétiques 2D, simulées *via* les différences finies sur l'équation d'onde acoustique. Un premier essai sur données réelles prouve aussi la pertinence de cette nouvelle approche, qui permet de quantifier le degré d'hétérogénéité d'un sous-sol.

Mots Clés : Sismique Réflexion, Propagation d'Ondes, Vitesse, Temps de Trajet, Inversion, Milieu Aléatoire, Covariance.

Abstract

Petroleum exploration works require the imaging of the subsurface. The seismic reflection method used for this purpose consists in propagating seismic waves and in recording the reflected wavefields. Velocity estimation remains one of its main problems, and deterministic techniques make it possible to retrieve the large scale heterogeneities from seismic traveltimes. However, the finest scale structure also have an impact on the traveltimes.

To quantify the effects of these small heterogeneities, we characterize the velocity field as a random anisotropic field. This reduces the problem to the determination of its geostatistical parameters. Then, we develop a statistical tomography process to invert velocity covariance from traveltimes fluctuations. The theory of wave propagation in random media is studied with attention, and adapted to the seismic reflection geometry under the hypothesis of small reflector perturbations.

Synthetic tests validate our results by simulating 2D scalar wave propagation *via* finite difference algorithm. Moreover, a small application on real data shows the utility of this new method.

Key Words : Seismic Reflection, Wave Propagation, Velocity, Traveltimes, Inversion, Random Medium, Covariance.