

# LE PROBLÈME DE L'INTERPRÉTATION DES ESSAIS DE PUIITS

Ch. Lajaunie

Juin 94

## 1 Introduction.

Les essais de puits constituent de puissants moyens de diagnostics, et d'analyse des réservoirs d'hydrocarbures. Ils permettent une auscultation non limitée au voisinage immédiat du puits, puisque la zone reconnue peut couvrir des distances de plusieurs centaines de mètres. Cependant cet usage est très vite limité du fait que le problème inverse que l'on doit résoudre lors de l'interprétation, c'est à dire la détermination de la répartition spatiale de la perméabilité à partir de l'historique de pression, est un problème mal posé. De fait cette interprétation est classiquement réalisé dans le cadre de modèles homogènes, de perméabilité constante dans l'espace. Les seules exceptions à cette homogénéité semblent être de trois types. Il s'agit essentiellement:

- De grands accidents, tels que des failles imperméables, qui joueront le rôle de conditions limites
- De l'endommagement du puits, que l'on modélise par un seul paramètre (skin).
- Et des milieux à perméabilité de fissure.

Dans les deux premiers cas, il s'agit d'accidents dont la localisation est préalablement connue, tandis que le dernier fait l'objet d'une modélisation spatialement homogène. On suspecte donc que les possibilités d'analyse spatiale (régionalisée dans la terminologie de la géostatistique) offertes par ce type d'essais ne sont pas complètement exploitées. Cela est évidemment encore plus vrai dans le cas de tests d'interférences, puisque ces tests permettent de lever l'ambiguïté liée à l'orientation, et que les potentialités sont donc sensiblement plus élevées.

Le but de ce rapport est d'investiguer les potentialités d'améliorations offertes par des méthodes intégrant l'aspect régionalisé du problème: il s'agira d'estimer la dépendance spatiale de la perméabilité et non de la considérer comme constante. Dans cette optique, l'endommagement n'est qu'une altération localisée au voisinage immédiat du puits, et est estimé comme tel, et non comme paramètre supplémentaire. S'agissant d'une étude préliminaire, on a simplifié délibérément le problème, sans prétendre à une modélisation réaliste. Tendre vers un meilleur réalisme fera l'objet de travaux ultérieurs. A cette étape, on a privilégié la simplicité de programmation et la rapidité de calcul, de manière à pouvoir multiplier les expérimentations à moindre coût.

Ainsi, nous ne considérerons qu'un modèle à écoulement radial, avec une perméabilité constante sur des couronnes  $r = \text{cte}$ . Le flux (débit au puits), sera considéré comme imposé et connu, mais variant dans le temps selon un schéma quelconque (il n'est pas nécessaire de le considérer comme constant par morceaux). Les effets de capacité de puits, qui se traduisent par un décalage entre le flux observé et le flux à la limite du puits, ne seront donc pas pris en compte. Enfin, les calculs ont été menés dans le cas de frontière imperméable à distance  $r = R = \text{cte}$ .

La plupart de ces limitations ne sont pas des limites de la méthodologie, mais des simplifications de calcul. La plus grande difficulté d'extension concerne bien sur le passage à deux ou trois dimensions, et cela plus en raison de la plus grande indétermination du problème inverse que pour des raisons informatiques ou calculatoires. L'hypothèse de symétrie radiale à l'avantage de lever une partie de l'indétermination. Dans le cas général, et à moins d'envisager des tests d'interférence, il sera nécessaire de recourir à des informations supplémentaires telles que celles données par la reconnaissance sismique, ou par la géologie, ou bien encore, en étant très optimiste, par des mesures spatialement réparties, pour lever une partie de l'indétermination angulaire. Ces informations pourront être traduites sous la forme de modèle à priori (moyenne et variance à priori, pour une forme donnée d'anamorphose) de manière à guider la procédure d'inversion dans sa recherche.

L'inversion proprement dite fera appel à des techniques connues par ailleurs, et une partie du rapport est consacrée à leur description, et à l'indication de détails de mise en oeuvre propres à l'application considérée.

Une part importante est faite à l'expérimentation. Il s'agit essentiellement de donner une idée sur les questions suivantes:

- Sensibilité de la méthode vis à vis de choix plus ou moins arbitraires concernant le modèle à priori. Cet arbitraire provenant essentiellement du manque de donnée de perméabilité. La spécification d'un modèle à priori comprend le type de loi marginale (par exemple log-normale), l'espérance, et la matrice de variances-covariances.
- Possibilité de conditionner l'estimation par des mesures ponctuelles.
- Possibilité d'imposer des hétérogénéités de localisation connue à priori (frontières

reconnues par sismique par exemple).

Dans la conclusion, on envisagera les perspectives de travail en vue de rendre la modélisation plus réaliste, et donc plus utilisable. Cela semble nécessiter les directions suivantes:

- Distributions de perméabilité sans symétrie radiale.
- Passage à des écoulements tridimensionnels, et donc par exemple possibilité d'application à des puits non verticaux, ou ne traversant pas complètement la formation.
- Tests d'interférence.
- Prise en compte de la capacité des puits.

Les problèmes soulevés par la simulation conditionnelle (comment conditionner une simulation de perméabilité sur l'ensemble du réservoir lorsque les données sont constituées d'essais de puits) ne seront pas envisagés dans ce rapport.

## 2 Généralités

### 3 Problèmes inverses généraux.

Considérons un système dont l'état est identifié à un élément  $y$  dans un certain espace d'états admissibles, noté  $\mathcal{Y}$ . De ce système, on observe une réponse, notée  $z$ , liée à l'état par une certaine transformation  $T$ , supposée connue:

$$z = T(y)$$

La détermination, ou l'estimation de  $y$  sur la base de l'observation  $z$ , est un problème inverse. Plus généralement, on peut dire que l'interprétation de toute expérience physique constitue un problème inverse, mais ici le problème est grandement simplifié, du fait que l'espace des états ainsi que la transformation  $T$  sont supposés donnés du problème.

Cela étant, le problème est dit **bien posé** si les conditions suivantes sont satisfaites:

- La transformation  $T$  doit être bijective de l'espace des états sur l'espace des observations  $\mathcal{Z}$ , ce qui rend l'inversion toujours possible. Ainsi, à une observation donnée correspond un et un seul état compatible.
- L'inverse de  $T$  doit être continu de  $\mathcal{Z}$  dans  $\mathcal{Y}$ , ce qui garantit la stabilité du problème inverse. En dehors d'une telle condition, les estimations de  $y$  sur la base d'une observation bruitée,  $z_\epsilon = z + \epsilon$ , peuvent être arbitrairement éloignées de l'état  $y$ , même lorsque l'erreur de mesure est très petite.

Les problèmes inverses, dans une majorité des cas, ne satisfont pas à ces conditions.

## 4 Un exemple en hydrogéologie

Considérons d'abord un problème direct en régime permanent en dimension deux, et pour une perméabilité isotrope. Soit à déterminer la charge  $h$  correspondant à une perméabilité  $k$  donnée, à une recharge  $q$  fixée, satisfaisant à l'équation:

$$\nabla(k \nabla h) = q$$

et à des conditions limites qui assurent existence et unicité de  $h$  (que l'on ne précise pas). L'opérateur  $T$  précédent est donc  $T(k) = h$ , les conditions limites et la recharge étant supposées fixées une fois pour toutes.

Le problème inverse correspondant ne satisfait à aucun des deux critères mentionnés:

### 4.1 unicité.

Pour un champ de charge  $h$  différentiable donné, il est facile de construire une fonction  $k_1$  telle que  $k_1 \nabla h$  soit à divergence nulle:

$$\nabla(k_1 \nabla h) = 0$$

En effet, si nous considérons le domaine limité par deux lignes de courant proches (figure ??), et fermé par des petites portions de courbes  $h = cte$ , nous avons:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(k_1 \nabla h) dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (k_1 \nabla h) d\gamma \\ &= [k_1 | \nabla h | \delta s]_x^y = 0 \end{aligned}$$

Donc,  $k(y)$  peut être déterminé le long d'une ligne de courant passant par  $x$  dès que  $k(x)$  est connu. Un tel champ peut donc être déterminé à partir de ses valeurs (quelconques) sur une courbe coupant une seule fois toutes les lignes de courant.

Alors, à partir de tout champ de perméabilité  $k_0$  compatible avec l'écoulement observé (charge  $h$  et recharge  $q$ ), nous obtenons un nouveau champ également compatible en prenant  $k = k_0 + k_1$ , puisque:

$$\nabla[(k_0 + k_1) \nabla h] = q .$$

Telle est l'indétermination du problème inverse, qui ne peut être levée sans informations supplémentaires (valeurs de  $k$  sur une courbe sécante par rapport aux lignes de courant, comme précédemment, ou connaissance d'un autre régime permanent complémentaire et une valeur ponctuelle de  $k$ , par exemple).

### 4.2 Stabilité.

Dans l'hypothèse où une telle information est disponible, qui assure unicité du problème inverse, la solution ne dépend pas continûment des données, lorsque l'espace des observables est muni d'une métrique "réaliste" compte tenu des conditions de l'expérimentation.

Par exemple, à une dimension, le problème suivant, posé sur le segment  $]0, 1[$ :

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{d}{dx} h \right) = q$$

avec les conditions limites  $k(0)h'(0) = \alpha$ , et  $k(1)h'(1) = \beta$ , admet une solution unique.

La solution du problème inverse est alors explicite si on suppose  $h$  connue:

$$k(x) = \frac{1}{h'(x)} \left\{ \int_0^x q(u) du + \alpha \right\}$$

Cette solution est donc unique. Cette unicité ne contredit pas ce qui vient d'être dit, puisque la condition limite, jointe à la connaissance de  $h$ , détermine  $k(0)$  et  $k(1)$ . Maintenant, cette solution est-elle stable par rapport à des perturbations de  $h$  ?

Pour  $k_\epsilon$ , solution associée à la charge perturbée  $h_\epsilon = h + \epsilon$ , nous avons:

$$k_\epsilon(x) - k(x) = -\frac{\epsilon'(x)}{h'(x)h'_\epsilon(x)} \left\{ \int_0^x q(u) du + \alpha \right\}$$

Ainsi, il n'y aura continuité de l'inverse que si l'espace des observables (des charges  $h$ ) est muni d'une norme qui assure la convergence des dérivées.

Cela n'est le cas, par exemple ni avec la norme quadratique, ni avec la norme du max, et nous obligerait à considérer des normes plus fortes. Or, d'un point de vue pratique, si nous pouvons espérer contrôler la précision des mesures de charge (et donc la norme du maximum), il est irréaliste d'espérer contrôler celle des dérivées (à moins de restreindre l'espace des observables de manière à éliminer les irrégularités).

Ainsi, ce problème inverse est mal posé et le reste même après levée de l'indétermination indiquée. Ce type de problème peut néanmoins être abordé en privilégiant les solutions régulières. Nous allons décrire rapidement deux méthodes classiques, cette description est utile, car elle éclairera les solutions effectivement testées dans ce rapport.

## 5 Methode de régularisation.

Cette méthode a été proposée par Tikhonov et Arsénine [?]. Pour l'introduire, il est commode de considérer la (ou les) solution(s) minimisant la norme du résidu, pour une observation  $z_\epsilon$ :

$$\min_{\hat{y} \in \mathcal{Y}} \|T(\hat{y}) - z_\epsilon\|$$

En l'absence d'unicité et de stabilité du problème inverse, cela ne peut donner d'approximation acceptable de  $y$ . Mais si nous savons que  $y$  possède une certaine régularité, nous pouvons pénaliser les solutions  $\hat{y}$  irréalistes par l'introduction d'une fonctionnelle lissante  $\Omega$ , telle que  $\Omega(\hat{y})$  prenne justement des valeurs élevées pour  $\hat{y}$  irrégulier. Cela conduit à choisir pour estimation de  $y$  un élément  $\hat{y}$  qui minimise la quantité:

$$\|T(\hat{y}) - z_\epsilon\|^2 + \lambda \Omega(\hat{y})$$

Cette estimation  $\hat{y}$  est dite solution régularisée. Le paramètre  $\lambda$  introduit ci-dessus équilibre le prix que l'on attache au respect des valeurs expérimentales  $z_\epsilon$  avec l'exigence de régularité. Il est appelé *paramètre de régularisation*. Moyennant certaines hypothèses<sup>1</sup> facilement vérifiables sur  $\Omega$ , il est possible de choisir  $\lambda(\epsilon)$  de façon à assurer la convergence de la solution régularisée  $\hat{y}_\epsilon \rightarrow y$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , dans les situations où  $T^{-1}(z_\epsilon)$  ne converge pas vers  $y$ .

Dans la pratique, le choix de  $\lambda$  n'est pas immédiat. Il suppose en particulier que nous connaissions la précision des mesures  $\|\epsilon\|$ .

## 6 Approche probabiliste.

Dans cette approche, les termes  $y$ ,  $z$  et  $\epsilon$  sont probabilisés, ce que l'on note par l'usage de lettres majuscules:

$$\begin{aligned} y &\longrightarrow Y \\ z &\longrightarrow Z \\ \epsilon &\longrightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Cette probabilisation doit être compatible avec l'équation fonctionnelle  $Z = T(Y) + \varepsilon$ , ce qui suppose le plus souvent que  $T$  soit linéaire.

Lorsque  $y$  et  $z$  sont des variables régionalisées modélisées par des fonctions aléatoires stationnaires, l'estimateur de  $Y$  par cokrigage simple est défini à partir des moments d'ordre deux:

$$\begin{aligned} m_Y &= E[Y] \\ \Sigma_Y &= E[(Y - m_Y)(Y - m_Y)^t] \end{aligned}$$

par  $Y^* = m_Y + \Lambda^t(Z - m_Z)$ , pour des pondérateurs donnés par  $\Lambda = \Sigma_Z^{-1}\Sigma_{ZY}$ .

## 7 Exemple illustratif

Un exemple simple de problème illustrant les méthodes précédentes est celui de l'interpolation d'une fonction  $y$  connue en un certain nombre de points:

$$z_i = y(x_i) + \varepsilon_i \quad i = 1 \dots N$$

L'espace des états est alors constitué d'un ensemble (hilbertien) de fonctions, muni d'une norme  $\|y\|$  suffisamment forte pour que l'opération qui consiste à prendre la valeur numérique en un point puisse être réalisée continument (un tel espace est dit auto-reproduisant). L'espace des observations, de dimension finie, est un sous-espace de  $\mathbf{R}^N$ ,

---

<sup>1</sup>On suppose essentiellement  $\Omega$  définie sur un sous-ensemble dense de  $\mathcal{Y}$ , auquel la solution doit appartenir, continue, positive ( $\forall y \Omega(y) \geq 0$ ), les ensembles de niveau  $\mathcal{Y}_d = \{y : \Omega(y) \leq d\}$  devant être compacts.

que nous munirons d'une norme quadratique  $\|z\|^2 = Z^t A Z$ . La solution régularisée au problème inverse est alors obtenue par la minimisation en  $y$  de:

$$\sum_{i,j} (y(x_i) - z_i)^t a_{ij} (y(x_j) - z_j) + \lambda \Omega(y)$$

Si nous prenons pour fonctionnelle lissante  $\Omega(y) = \|\Pi_N(y)\|^2$ , où  $\Pi_N$  représente la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie  $N$ , et si la matrice  $A$  est la matrice identité, alors la solution régularisée est une spline de lissage, puisqu'elle est obtenue par minimisation de:

$$\sum_i (y(x_i) - z_i)^2 + \lambda \|\Pi_N(y)\|^2$$

Le traitement de ce problème par probabilisation conduit au krigeage avec terme d'erreur. Il est connu ([?] et [?]) que ces deux techniques sont formellement équivalentes: à un espace auto-reproduisant dans lequel le problème de spline est posé, est associé une fonction aléatoire, dont la covariance est le noyau reproduisant  $K(x, y)$  de l'espace fonctionnel. Le sous-espace  $N$  correspond à l'espace des fonctions de dérives de la fonction aléatoire, et la valeur de la spline de lissage en un point donné est égale au krigeage de la fonction aléatoire en ce point.

## 8 Cas d'équivalence entre régularisation et cokrigeage.

Cette équivalence persiste pour les problèmes inverses plus généraux ([?]), pourvu que l'opérateur  $T$  soit linéaire et continu, que l'espace fonctionnel des états soit autoreproduisant, et que la fonctionnelle lissante soit quadratique (elle est non négative dans le cas général). La vérification de cette équivalence étant élémentaire dans le cas d'espaces de dimension finie, nous la donnons brièvement. Cette vérification est faite pour un modèle stationnaire, ce qui correspond à une fonctionnelle lissante quadratique définie positive.

La solution régularisée est obtenue par minimisation de (notation vectorielle):

$$J(Y) = (TY - Z)^t A (TY - Z) + Y^t B Y$$

Le gradient de cette quantité est:

$$\nabla J(Y) \cdot \delta Y = 2(TY - Z)^t A T \delta Y + 2Y^t B \delta Y$$

l'annulation pour tout accroissement  $\delta Y$  conduit donc à:

$$(T^t A T + B) Y^* = T^t A Z$$

et donc à l'estimation  $Y^* = (T^t A T + B)^{-1} T^t A Z$ .

Dans le cokrigeage, pour un terme d'erreur  $\varepsilon$  non corrélé à  $Y$ , les matrices de variances-covariances s'obtiennent facilement:

$$Z = TY + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Sigma_{ZY} = T \Sigma_Y \\ \Sigma_Z = T \Sigma_Y T^t + \Sigma_\varepsilon \end{cases}$$

d'où les pondérateurs de cokrigeage simple:

$$\Lambda = \left( T \Sigma_Y T^t + \Sigma_\varepsilon \right)^{-1} T \Sigma_Y$$

et l'estimateur de cokrigeage simple:

$$Y^{ks} = \Sigma_Y T^t \left( T \Sigma_Y T^t + \Sigma_\varepsilon \right)^{-1} Z$$

L'équivalence est obtenue pour les matrices  $A$  (norme du résidu) et  $B$  (fonctionnelle régularisante) suivantes:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma_\varepsilon^{-1} \\ B &= \Sigma_Y^{-1} \end{aligned}$$

En effet, on vérifie facilement l'identité matricielle:

$$\left( T^t \Sigma_\varepsilon^{-1} T + \Sigma_Y^{-1} \right)^{-1} T^t \Sigma_\varepsilon^{-1} = \Sigma_Y T^t \left( T \Sigma_Y T^t + \Sigma_\varepsilon \right)^{-1}$$

Cette identité est équivalente à:

$$T^t \Sigma_\varepsilon^{-1} \left( T \Sigma_Y T^t + \Sigma_\varepsilon \right) = \left( T^t \Sigma_\varepsilon^{-1} T + \Sigma_Y^{-1} \right) \Sigma_Y T^t$$

qui est trivialement satisfaite, de telle sorte que  $Y^{ks} = Y^*$  comme annoncé. Sous ce angle, le point de vue du krigeage s'impose lorsque l'existence de données permet une analyse structurale, et donc une estimation des matrices  $\Sigma_Z$  et  $\Sigma_{ZY}$ . Cette analyse structurale lève alors l'arbitraire qui préside en général au choix de la norme du résidu, de la fonctionnelle lissante  $\Omega$ , et résoud de manière naturelle le problème du choix du paramètre de régularisation.

## 9 Applications hydrogéologiques

Commençons par rappeler une application géostatistique basée sur une linéarisation de la transformation  $T$ .

## 10 Linéarisation.

La référence que nous utilisons est la thèse d'Anne Dong [?], on se borne ici à un rappel très schématique de la partie concernant un problème inverse. L'équation considérée est celle d'un écoulement en régime permanent:

$$\nabla(k \nabla h) = q$$

et on suppose que l'on dispose d'un certain nombre de mesures de charge et de perméabilité de manière à permettre une estimation par cokrigage de ces deux variables.

Si nous disposons d'un couple  $(k_0, h_0)$  satisfaisant à cette équation, (mais non compatible avec les mesures  $h(x_i)$  et  $k(x_j)$ , bien sûr, ni même avec les conditions limites):

$$\nabla(k_0 \nabla h_0) = q$$

La probabilisation concerne alors les perturbations de charge  $H_1$  et de perméabilité  $K_1$ :

$$\begin{aligned} K &= k_0 + K_1 \\ H &= h_0 + H_1 \end{aligned}$$

Si l'on suppose ces perturbation petites, de telle sorte que les termes produits soient négligeables, elles satisfont alors à:

$$\nabla(K_1 \nabla h_0) = -\nabla(k_0 \nabla H_1)$$

Le problème à cette étape est de trouver un modèle probabiliste pour les perturbations  $(K_1, H_1)$  compatible avec cette équation. Pour pouvoir utiliser la théorie des Fai-k au couple  $(H_1, K_1)$ , il faut supposer que la linéarisation a été effectuée au voisinage d'une solution à perméabilité  $k_0$  constante. En l'absence de recharge, on a un écoulement unidirectionnel, par exemple de direction  $x$ . Alors l'équation se simplifie en:

$$\Delta H_1 = -C \frac{\partial}{\partial x} K_1$$

Pour cette équation, un certain nombre de modèles de référence ont été proposés dans [?], qui permettent donc un cokrigage.

Remarque concernant cette méthode:

- Soulignons en la simplicité, puisque l'équation est prise en compte dans la modélisation elle même, et les interpolateurs obtenus la respectent automatiquement:

$$\Delta H_1^* = -C \frac{\partial}{\partial x} K_1^*$$

et cela sans que l'utilisateur ait besoin de la résoudre explicitement (la résolution effective ayant été faite lors de la détermination des modèles).

En effet, pour une fonction aléatoire  $Z$  admettant par exemple une dérivée partielle en moyenne quadratique en  $x$ , la convergence suivante a lieu en tout point:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \left\{ \frac{Z(x+dx) - Z(x)}{dx} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} Z(x)$$

Le krigeage étant linéaire et continu <sup>2</sup> on en déduit:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \left\{ \frac{Z^k(x+dx) - Z^k(x)}{dx} \right\} = \left( \frac{\partial}{\partial x} Z(x) \right)^k$$

Le krigeage admet donc une dérivée partielle selon  $x$ , et:

$$\frac{\partial}{\partial x} (Z^k(x)) = \left( \frac{\partial}{\partial x} Z(x) \right)^k$$

Ainsi, pour une fonction différentiable, le krigeage commute avec la différentiation. Il en résulte que les estimateurs  $H_1^*$  et  $K_1^*$  vérifient bien l'équation de départ.

- Cette modélisation n'incorpore pas de condition limite à distance finie. Cela constitue plutôt un avantage lorsqu'il n'existe pas de condition limite naturelle, puisque l'utilisateur est dispensé d'en fixer arbitrairement. Dans le cas contraire l'expérience montre que celles-ci peuvent être introduites de manière satisfaisante comme points de données supplémentaires.

Un inconvénient certain est le manque de liberté dans le choix de la linéarisation. Très souvent le point de linéarisation sera réaliste, mais cela n'a aucune raison d'être toujours le cas.

## 11 Méthode non linéaire.

Puisque pour un champ de perméabilité donné, les conditions limites et la recharge étant toujours fixées, la charge est déterminée par résolution du système d'équations direct, la distribution conditionnelle des observations (mesures de charges) ne dépend plus que des erreurs de mesures. Notons  $\phi$  l'opérateur non linéaire qui à un champ de perméabilité associe la solution du problème direct ( $h = \phi(k)$ ), et  $\tau$  l'opérateur associé aux fonctionnelles de mesures ( $\tau(h)$  est le vecteur constitué des observations en l'absence d'erreurs de mesures). Avec ces notations, l'opérateur  $T$  des paragraphes précédents est

---

<sup>2</sup>Cela est évidemment vrai pour le krigeage simple. Pour le krigeage universel l'argumentation est un peu plus compliquée: reprenant les notations de [?], on note  $S$  le sous-espace engendré par les données,  $N$  l'espace des dérivées.  $N^\perp$  est alors l'espace des combinaisons linéaires autorisées, et  $V_0 = S \cap N^\perp$  l'espace des combinaisons linéaires autorisées formées sur les données. On note aussi  $S' = V_0 \oplus N$ , et on fait l'hypothèse habituelle que  $N \cap S^\perp = \{0\}$ . Alors l'espace de travail admet la décomposition en sous-espaces fermés  $H = S \oplus (S')^\perp$ . Le krigeage universel d'un élément quelconque  $Z \in H$  est alors la projection de  $Z$  sur  $S$ , parallèlement à  $(S')^\perp$ . Une telle projection est continue. Cela reste vrai pour un krigeage intrinsèque en considérant une représentation donnée.

$T = \tau \circ \phi$ . Alors, si les erreurs sont normales, d'espérance nulle et de matrice de variances-covariances  $\Sigma_\varepsilon$ , la distribution conditionnelle des mesures de charge à perméabilité fixée, qui est notée  $g_K$  est donnée à une constante près par:

$$g_K(Z) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \tau \circ \phi(K))^t \Sigma_\varepsilon^{-1} (Z - \tau \circ \phi(K)) \right\}$$

Pour aller plus loin il faut supposer que le champ de perméabilité ne dépend que d'un nombre fini de paramètres que l'on note  $\Theta$ :

$$K(x) = K(x, \Theta)$$

et que ces paramètres obéissent eux-mêmes à une distribution normale:

$$g(\Theta) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\Theta - m_\Theta)^t \Sigma_\Theta^{-1} (\Theta - m_\Theta) \right\}$$

Par exemple  $\Theta$  pourra être le logarithme de la perméabilité en un certain nombre de points prédéfinis, et l'interpolation pourra être de type éléments finis, ou encore plus simplement par polygones d'influence. Par la suite, on identifie un peu abusivement  $K$  et  $\Theta$  pour limiter la multiplication des notations.

Dans ces conditions, la loi conjointe de  $K$  et  $H$  est donc, toujours à une constante près:

$$\begin{aligned} g(Z, K) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - T(K))^t \Sigma_\varepsilon^{-1} (Z - T(K)) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (K - m_K)^t \Sigma_K^{-1} (K - m_K) \right\} \end{aligned}$$

La loi conditionnelle intéressante dans ce contexte est la loi à  $Z$  fixé. Elle peut en principe être obtenue par intégration:

$$g_Z(K) = \frac{g(Z, K)}{\int g(Z, K') dK'}$$

En pratique cette intégration est évidemment rendue hypothétique par la complexité du problème direct. Aussi, une estimation de  $K$  par espérance conditionnelle semble t'elle hors de portée. Pour la même raison, une simulation conditionnelle par des techniques de champs markoviens est irréaliste.

Par contre il est tout à fait envisageable de prendre pour estimateur de  $K$  le mode de la distribution conditionnelle:

$$\max_K g_Z(K)$$

En effet, la loi marginale de  $Z$  ne dépendant pas de  $K$ , cela revient à maximiser  $g(Z, K)$  par rapport à  $K$ , et donc à minimiser:

$$(Z - T(K))^t \Sigma_\varepsilon^{-1} (Z - T(K)) + (K - m_K)^t \Sigma_K^{-1} (K - m_K)$$

Sous cette forme, on voit que l'estimateur du maximum à posteriori, auquel conduit la maximisation de  $g_Z(K)$ , est une méthode de régularisation de Tikhonov et Arsénine. Notons aussi, dans le prolongement de la discussion précédente, que si  $T = \tau \circ \phi$  est l'inéarisée, c'est à dire si le développement:

$$T(u) = T(u_0) + \nabla T(u_0) \cdot (u - u_0) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla^t [T(u_0)](u - u_0, u - u_0) + ..$$

est stopé à l'ordre un, l'estimation précédente est un cokrigeage de  $K$  à partir de  $Z$ .

L'utilisation d'une méthode de type gradient ou gradient conjugué pour minimiser la fonction objectif précédente, et donc pour le calcul effectif de l'estimateur  $K^*$  est simplifiée par la méthode classique de l'état adjoint. Nous en donnons rapidement le principe dans le paragraphe suivant.

## 12 Méthode de l'état adjoint.

Cette méthode est utilisée depuis longtemps par les automaticiens pour résoudre des problèmes de contrôle optimal. Les travaux de G. Chavent [?] sont à l'origine de son application à l'hydrogéologie. Nous exposons de manière sommaire le principe de cette méthode. Le but est donc de calculer le gradient d'une quantité:

$$J(k) = \|\tau \circ \phi(k) - z\|^2$$

où la définition explicite de  $\phi$  fait intervenir un système d'équations aux dérivées partielles. On suppose que ce système, avec ses conditions aux limites et conditions initiales peut être mis sous la forme:

$$h = \phi(k) \quad \iff \quad \psi(k, h) = F$$

où  $F$  désigne les données du problème (second membre + valeurs limites). Dans cette écriture, les deux membres  $\psi$  et  $F$  appartiennent en fait au dual de l'espace  $V$  des solutions, de telle sorte que ce système est encore équivalent à:

$$\forall v \in V \quad \langle \psi(k, h) - F, v \rangle_{V', V} = 0$$

Dans ces conditions, on introduit le lagrangien suivant:

$$\mathcal{L}(k, h, v) = \|\tau(h) - z\|^2 + \langle \psi(k, h) - F, v \rangle$$

Sous hypothèse de différentiabilité, les valeurs  $\hat{k}$ ,  $\hat{h}$ , et  $\hat{v}$  qui rendent le lagrangien extrê-mum satisfont aux trois conditions suivantes:

$$\begin{aligned} (\forall \delta k) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial k} \mathcal{L}\right) \delta k = \langle \left(\frac{\partial}{\partial k} \psi\right) \delta k, v \rangle = 0 \\ (\forall \delta h) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial h} \mathcal{L}\right) \delta h = 2 \langle \tau(h) - z, \tau' \cdot \delta h \rangle + \langle \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi\right) \delta h, v \rangle = 0 \\ (\forall \delta v) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}\right) \delta v = \langle \psi(\hat{k}, \hat{h}) - F, \delta v \rangle = 0 \end{aligned}$$

La troisième équation de ce système n'exprime rien d'autre que le système d'équations direct:  $\hat{h} = \phi(\hat{k})$ . La seconde, qui peut être réécrite:

$$\forall \delta h \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial h} \psi^* \cdot v + 2\tau'^*(\tau(h) - z), \delta h \right\rangle = 0$$

exprime que le multiplicateur  $v$  est solution d'un système d'équations dans lequel le résidu  $\tau(h) - z$  intervient en second membre, et en terme de conditions limites (la forme exacte dépend de la nature des mesures  $\tau$ ). Ce système, dit système adjoint, définit  $v$  en tant que fonction de  $k$  et  $h$ , donc en tant que fonction de  $k$  seul, lorsque  $h = \phi(k)$ , ce que l'on note  $v = v(k)$ .

En résumé, à l'optimum,  $\hat{h} = \phi(\hat{k})$  et  $\hat{v} = v(\hat{k})$ , et nous pouvons considérer une minimisation le long d'un chemin particulier où  $h$  et  $v$  sont fonctions de  $k$  déterminées par ces systèmes. Alors:

$$\mathcal{L}(k, \phi(k), v(k)) = J(v)$$

puisque le terme dû à la contrainte est identiquement nul dans ce cas. En ce qui concerne le gradient, on a:

$$\nabla J(k) \cdot \delta k = \left( \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{L} \right) \cdot \delta k + \left( \frac{\partial}{\partial h} \mathcal{L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial k} \phi \cdot \delta k + \left( \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial k} v \cdot \delta k$$

Les deux derniers termes de cette somme étant nuls par construction de  $\phi$  et de  $v(k)$ , il reste:

$$\nabla J(k) \cdot \delta k = \left( \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{L}(k, \phi(k), v(k)) \right) \cdot \delta k$$

Terme que nous avons évalué (première condition d'optimalité):

$$\nabla J(k) \cdot \delta k = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial k} \psi(k, \phi(k)) \right) \cdot \delta k, v(k) \right\rangle$$

Ainsi, en résolvant le système direct, puis le système adjoint, nous pouvons évaluer le gradient de  $J$ . Des exemples permettant de clarifier cette présentation, nous en donnons un ci-dessous, et nous préciserons cela aussi dans le cas de l'essai de puits.

### 13 Exemple: problème elliptique d'ordre deux.

Nous considérerons des conditions limites mêlées. Le formalisme utilisé est celui de la théorie élémentaire des équations aux dérivées partielles (voir par exemple [?]). On en donne un résumé très succinct ci-dessous:

Soit donc  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^2$  (ou aussi bien  $\mathbf{R}^3$ ), de frontière  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. on note  $\Gamma$  cette frontière, et on suppose que  $\Gamma_0$  est un sous ensemble de  $\Gamma$ , de mesure (surfique) strictement positive, et on note  $\Gamma_1$  son complémentaire dans  $\Gamma$ . Les espaces de travail classiquement utilisés sont les suivants:

$$H = \mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \|u\|_2^2 = \int_{\Omega} u^2 dx < \infty \right\}$$

et on désigne par  $H^1(\Omega)$  le sous-espace de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  des fonctions dont les dérivées d'ordre un au sens des distributions sont dans  $\mathbf{L}^2$ . Muni de la norme de Sobolev  $\|u\|_1^2 = \|u\|_2^2 + \sum_i \|\partial_i u\|_2^2$ , c'est un espace de Hilbert. La valeur sur la frontière d'une telle fonction  $u_\Gamma$  peut être définie, et elle dépend continûment de  $u$ . L'espace des solutions sera alors le sous-espace suivant de  $H^1(\Omega)$ :

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$$

$H$  en tant qu'espace de Hilbert est identifié à son dual, et la situation est alors la suivante:

$$V \subset H \subset V'$$

Toutes les injections étant continues, et les inclusions denses. On définit alors la forme bilinéaire:

$$a_k(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|i,j|=1} k_{ij}(x) \partial_i u \partial_j v \, dx$$

où les  $k_{ij}$  sont des fonctions bornées sur  $\Omega$ . (cette forme fait intervenir uniquement des dérivées d'ordre un de  $u$  et  $v$ ). Elle est continue sur  $V \times V$ . Pour  $u$  fixé, l'application:

$$v \rightarrow a_k(u, v)$$

est dans  $V'$ , et définit donc un élément de  $V'$ , noté  $\psi(k, u)$ , qui vérifie:

$$\langle \psi(k, u), v \rangle = a_k(u, v)$$

Soient alors<sup>3</sup>  $q \in H = \mathbf{L}^2$  et  $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ .  $q$  sera le second membre du problème (terme de recharge), et  $g$  jouera le rôle d'un flux à la frontière  $\Gamma_1$ . Alors l'application:

$$v \rightarrow \int_{\Omega} q v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, ds$$

est linéaire continue sur  $V$ , et on la note  $F$ :

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} q v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, ds$$

Dans ces conditions, le problème variationnel: trouver  $u \in V$  tel que  $\forall v \in V$ , on ait:

$$a_k(u, v) = \int_{\Omega} q v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, ds$$

s'écrit tout aussi bien:  $\psi(k, u) = F$ .

Supposons ensuite que les coefficients  $k_{ij}$  vérifient une inégalité du type:

$$\forall \xi, \quad \sum_{ij} k_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

---

<sup>3</sup>L'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  est le dual de l'espace des traces des fonctions de  $H^1(\Omega)$  ("valeurs" sur  $\Gamma$ )

pour un certain  $\alpha > 0$ . Alors l'inégalité de Poincaré entraîne que  $a_k(u, v)$  est  $V$ -elliptique (c'est à dire  $\forall u \in V$ , on a  $a_k(u, u) \geq \alpha \|u\|_1^2$ ). Dans ces conditions, le lemme de Lax-Milgram montre l'existence et unicité de la solution du problème variationnel  $\psi(k, u) = F$ .

Il faut donc se placer dans l'ensemble des coefficients tels que l'inégalité sur  $k$  soit satisfaite.

### 13.1 Interprétation du problème direct

Disons quelques mots sur l'interprétation du problème variationnel:

$$\forall v \in V \quad a_k(u, v) = \int_{\Omega} q v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, ds$$

L'espace des fonctions tests (fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$ ) est un sous espace de  $V$ :  $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$ , et l'égalité précédente est vraie pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Pour un tel  $v$ :

$$\int_{\Gamma_1} g v \, ds = 0$$

et :<sup>4</sup>

$$a_k(u, v) = \int_{\Omega} \sum k_{ij}(x) \partial_i u \partial_j v \, dx = - \langle \sum_{i,j} \partial_j (k_{ij} \partial_i u) , v \rangle$$

(Le crochet dans le terme de droite désigne la dualité entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$ ). Ainsi, la solution variationnelle vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$\nabla \bar{k} \nabla u = -q$$

au sens des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . On a désigné par  $\bar{k}$  le transposé de  $k$ , soit explicitement  $\bar{k}_{ij} = k_{ji}$ . Comme  $q \in \mathbf{L}^2$ , l'égalité précédente est en fait vraie pour presque tout  $x \in \Omega$ .

En ce qui concerne les conditions limites, par substitution de l'expression de  $q$  ainsi obtenue, on a:

$$\int_{\Omega} \sum k_{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla \bar{k} \nabla u) v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, ds$$

On ne peut poursuivre l'interprétation qu'avec des hypothèses de régularité qui légitiment l'emploi de la formule de Green suivante pour la solution  $u$ :

$$\int_{\Omega} \sum k_{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla \bar{k} \nabla u) v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_k} u v \, ds$$

dans laquelle  $\frac{\partial}{\partial \nu_k}$  désigne la dérivée normale  $\sum n_i k_{ij} \partial_j$  soit  $\frac{\partial}{\partial \nu_k} u = \bar{n} \cdot [k \cdot \nabla u]$ . Comme  $v = 0$  sur  $\Gamma_0$ , cela entraîne:

$$\forall v \in V \quad \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} u - g \right) v \, ds = 0$$

---

<sup>4</sup>On rappelle que la dérivée d'une distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'$  est définie par  $\langle T', v \rangle = - \langle T, v' \rangle$

et nous trouvons donc une condition de flux imposé sur  $\Gamma_1$ . Cependant, sans hypothèse de régularité (concernant  $\Gamma$  et  $k$ , et donc la solution  $h$ ), la condition de Neumann non homogène sur  $\Gamma_1$  n'est que formelle.

### 13.2 Identification du problème adjoint.

Commençons par observer que la linéarité de  $\psi$  par rapport à  $h$  entraîne:

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial h} \psi(k, h) \right) \cdot \delta h, v \right\rangle &= \langle \psi(k, \delta h), v \rangle = a_k(\delta h, v) \\ &= \overline{a_k}(v, \delta h) = \langle \psi(\overline{k}, v), \delta h \rangle \end{aligned}$$

Pour poursuivre l'identification du problème adjoint, il faut expliciter:

$$\langle \tau'^*(\tau(h) - z), \delta h \rangle$$

Supposons par exemple les mesures en nombre fini  $\tau : V \rightarrow \mathbf{R}^p$ , et notons  $\tau_\alpha(h)$  le résultat d'une de ces mesures. Il faut supposer  $\tau$  continue, ce qui, pour  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  et  $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$  exclut les informations ponctuelles<sup>5</sup>. Cependant, dans la pratique, les informations sont toujours des régularisées, et donc du type  $\int \phi_\alpha h dx$ , quantités qui ne posent pas de problème. On pose donc:

$$\tau_\alpha(h) = \langle t_\alpha, h \rangle$$

et on considère que la norme de mesure du résidu est quadratique, et définie par une matrice  $M$  symétrique définie positive:

$$\|\tau(h) - z\|^2 = \sum_{\alpha, \beta} (\tau_\alpha(h) - z_\alpha) M_{\alpha\beta} (\tau_\beta(h) - z_\beta)$$

Le gradient de cette quantité est le vecteur:

$$2 \sum_{\alpha} (\tau_\alpha(h) - z_\alpha) M_{\alpha\beta} t_\beta(\delta h)$$

D'où:

$$\langle \tau'^*(\tau(h) - z), \delta h \rangle = \langle 2 \sum_{\alpha, \beta} (\tau_\alpha(h) - z_\alpha) M_{\alpha\beta} t_\beta, \delta h \rangle$$

Le problème variationnel adjoint s'écrit donc:

$$\psi(\overline{k}, v) = 2 \sum_{\alpha, \beta} (\tau_\alpha(h) - z_\alpha) M_{\alpha\beta} t_\beta$$

Par exemple, si  $\langle t_\beta, v \rangle = \int_{\Omega} \phi_\beta v dx$ , cela donne:

$$\forall w \in V \quad \int_{\Omega} \sum k_{ji}(x) \partial_i v \partial_j w dx = 2 \int_{\Omega} \sum (\tau_\alpha(h) - z_\alpha) M_{\alpha\beta} \phi_\beta w dx$$

<sup>5</sup>On rappelle que l'application  $u \rightarrow u(x)$  est continue sur  $H^m(\Omega)$  pour  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  si  $m > n/2$ , condition qui n'est donc pas remplie ici.

Soit, avec les mêmes réserves que pour le problème direct en ce qui concerne l'interprétation de la condition limite:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum \partial_j(k_{ji} \partial_i v) = 2 \sum_{\alpha} (\tau_{\alpha}(h) - z_{\alpha}) M_{\alpha\beta} \phi_{\beta} \quad (\Omega) \\ v = 0 \quad (\Gamma_0) \\ \frac{\partial}{\partial \nu_k} v = 0 \quad (\Gamma_1) \end{array} \right.$$

### 13.3 Gradient

Ayant résolu le problème direct (détermination de  $h(k)$ ) et le problème adjoint (de  $v(k)$ ), le calcul explicite du gradient est immédiat:

$$\begin{aligned} \nabla J(k) \cdot \delta k &= \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial k} \psi(k, h) \right) \cdot \delta k, v \right\rangle = \left\langle \psi(\delta k, h), v \right\rangle = a_{\delta k}(h, v) \\ &= \int_{\Omega} \sum \delta k_{ij} \partial_i h \partial_j v \, dx \end{aligned}$$

## 14 Bilan de la méthode non-linéaire.

Cette méthode présente l'avantage de s'accommoder des équations du problème direct, sans nécessiter de linéarisation de  $T(k)$ . Cependant, elle soulève un certain nombre de questions:

- Elle suppose une discrétisation du champ de perméabilité. Quelle est l'influence du choix de cette discrétisation ?
- Elle suppose la normalité à une anamorphose près des perméabilités. Quelle est l'influence du choix de l'anamorphose ?
- La distribution du champ de perméabilité, après discrétisation et transformation normalisante, est spécifiée par sa moyenne et sa matrice de variances-covariances. Quelle est l'influence de ce choix ?
- La méthode suppose unimodalité de la distribution à postériori (loi conditionnelle à observations de charge fixées). Dans le cas contraire, le minimum atteint dépend de la valeur initiale. Ce fait est-il observé pour des valeurs initiales raisonnables ?
- La méthode suppose aussi normalité des erreurs. La solution dépend-elle de manière sensible du choix de la matrice  $\Sigma_{\epsilon}$  ?
- Est-il possible, en jouant sur les paramètres de la distribution de perméabilité à priori d'imposer un conditionnement par des mesures de perméabilité ?
- Est-il possible, d'imposer des points des discontinuités.

En outre, compte tenu de la lourdeur de la méthode de calcul, il convient de ne pas raffiner plus que nécessaire la discrétisation.

## 15 Essais de puits

Sera considéré dans ce chapitre l'application de la méthode non-linéaire décrite dans le chapitre précédent au problème comportant les simplifications suivantes

- Ecoulement radial ( $h = cte$  sur une verticale).
- Perméabilité constante par couronne  $r = cte$ , et isotrope plane, donc  $k = k(r)$ .
- Débit connu et imposé au puits, sans effet de capacité.
- Limite étanche (flux nul) en  $r = R$ .
- Fluide de compressibilité  $\beta$  constante.
- Roche de porosité  $\omega$  constante.

Nous détaillons le calcul menant à l'établissement de l'équation de base traitée, pour rendre les hypothèses plus apparentes.

## 16 Position du problème.

Dans ces conditions, le flux massique traversant un cylindre de rayon  $r$ , et de hauteur  $dz$ , pour un fluide de masse volumique  $\rho$ , et une vitesse de filtration radiale  $v_r$  est:

$$\text{flux massique} = 2\pi r v_r \rho dz$$

Pour une couronne d'épaisseur  $dr$ , ce flux est donc:

$$\text{flux massique} = \frac{\partial}{\partial r}(2\pi r v_r \rho) dz dr$$

Pour un écoulement suivant la loi de Darcy, la vitesse de filtration radiale est:

$$v_r = \frac{k\rho g}{\mu} \frac{\partial h}{\partial r}$$

avec une charge définie, dans le cas compressible qui nous occupe par:

$$h = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g}$$

et donc:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial r}$$

D'où la vitesse de filtration:

$$v_r = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$$

finalemt, le flux massique est:

$$d\phi = 2\pi \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k\rho r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] dz dr$$

D'autre part, la variation de masse dans ce même volume, pendant l'intervalle de temps  $dt$  est, si  $\omega$  désigne la porosité:

$$dM = dV\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

pour un volume  $dV = 2\pi r dr dz$ . En utilisant l'équation de compressibilité:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t}$$

on trouve finalement:

$$dM = 2\pi r \omega \rho \beta \frac{\partial p}{\partial t} dt dz dr$$

La conservation de la masse dans la couronne, c'est à dire  $dM = d\phi dt$  donne alors:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k\rho r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \omega \beta \rho \frac{\partial p}{\partial t}$$

Cette équation est non linéaire en pression, puisque la masse volumique  $\rho$  est une fonction de la pression. L'hypothèse classiquement faite<sup>6</sup> pour la linéariser consiste à supposer le carré du gradient de pression négligeable:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial r} \right]^2 \approx 0$$

par rapport aux autres termes dans l'équation. Alors:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k\rho r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right]$$

Avec la loi de compressibilité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \rho \beta \frac{\partial p}{\partial r}$$

le premier terme est donc:

$$\frac{k\rho\beta}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2$$

et est négligé, de telle sorte que  $\rho$  disparaît. Il reste donc l'équation linéarisée:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \omega \beta \frac{\partial p}{\partial t}$$

---

<sup>6</sup>Voir par exemple [?]. Il est néanmoins permis de s'interroger sur sa validité au voisinage du puits.

## 16.1 Conditions limites.

On considérera deux type:

1. Frontière étanche en  $r = R$ , et donc  $v_r(R) = 0$ , soit

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} p \right)_R = 0$$

2. Débit massique imposé au puits.

La deuxième condition limite mérite une analyse détaillée. Si  $q(z) dz$  désigne le débit de la tranche de hauteur  $dz$ , le débit connu est:

$$Q_t = \int_{z_{inf}}^{z_{sup}} q(z) dz$$

avec:

$$q(z) = 2\pi r_0 \rho \frac{k}{\mu} \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r_0}$$

Pour résoudre, on utilise l'hypothèse d'écoulement radial, et donc  $h = cte$  sur une verticale:

$$0 = \frac{\partial h}{\partial z} = 1 + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z}$$

et donc  $dp = -\rho g dz$ . Avec l'équation d'état:

$$dp = -\rho_0 g e^{\beta(p-p_0)} dz$$

En notant  $p_0$  et  $\rho_0$  la pression et masse volumique au toit, pour  $r = r_0$ . Par intégration, on en déduit:

$$e^{-\beta(p-p_0)} - 1 = \beta \rho_0 g (z - z_0)$$

D'où:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \beta g (z - z_0)$$

La masse par unité de volume est donc une fonction explicite de la cote  $z$ , que l'on note  $\rho = \rho(z)$ .

Ensuite:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho g \frac{\partial h}{\partial r}$$

de telle sorte que:

$$Q_t = 2\pi r_0 \frac{k}{\mu} \frac{\partial h}{\partial r} g \int_{z_{inf}}^{z_0} \rho(z)^2 dz$$

Finalement, cette condition aux limites se met bien sous la forme:

$$Q_t = A \left[ k r \frac{\partial h}{\partial r} \right]_{r_0}$$

Pour un coefficient  $A$ :

$$A = 2\pi \frac{k}{\mu} g \int_{z_{inf}}^{z_0} \rho(z)^2 dz$$

## 16.2 Bilan.

En changeant un peu les notations, pour alléger les écritures <sup>7</sup>, nous sommes parvenus au système suivant, exprimé en terme de pression:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ kr \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{\partial p}{\partial t} \\ \text{Conditions limites:} \\ kr \frac{\partial p}{\partial r} = Q(t) \quad (r = r_0) \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (r = R) \\ \text{Condition initiale:} \\ p = p_i \quad t = 0 \end{array} \right.$$

## 16.3 Solution exacte d'un problème simplifié.

Cette solution sera utile pour le contrôle de la précision de l'approximation par éléments finis. Elle suppose les conditions suivantes réalisées:

Perméabilité	$k(x)$	= cte
Pression initiale	$p_i$	= cte
Flux	$Q(t)$	= cte
Rayon du puits	$r_0$	$\rightarrow 0$
Frontière étanche	$R$	$\rightarrow \infty$

L'équation du système:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

est transformée par le changement de variables suivant (voir figure ??):

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{r^2}{t} \\ \xi = \frac{1}{2} r^2 + t^2 \end{array} \right.$$

Dans un tel système de coordonnées, la condition initiale correspond à  $s = \infty$ . Il est facile de trouver alors une solution qui ne dépend que de  $s$ :

$$p(s) - p(\infty) = -\frac{Qk}{2} \int_{\frac{kr^2}{4t}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{1}{2} k Q. \text{Ei} \left( -\frac{kr^2}{4t} \right)$$

en utilisant la définition de l'exponentielle intégrale:

$$\text{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

---

<sup>7</sup> à savoir que nous notons maintenant  $k$  la quantité  $k/\nu\omega\beta$ , (on suppose que la viscosité  $\nu$ , la porosité  $\omega$  et la compressibilité  $\beta$  ne dépendent pas de  $r$ )

## 17 Résolution approchée du problème direct.

La formulation variationnelle du problème sert de base à la résolution approchée par une méthode d'éléments finis. Dans ce travail, la formulation suivante a été utilisée. On se donne les espaces  $V$  et  $H$  définis de la manière suivante:

$$H = \mathbf{L}^2(]r_0, R[) \quad \text{Avec le produit scalaire:} \quad (u, v)_H = \int_{r_0}^R u(r) v(r) r \, dr$$

$$V = \{u \in H : u' \in H\} \quad \text{Avec le produit scalaire:} \quad (u, v)_V = (u, v)_H + (u', v')_H$$

puisque  $0 < r_0$  et  $R < \infty$ , ces normes ne changent rien des propriétés topologiques habituelles, mais sont imposées par la géométrie du problème (la pondération provenant du volume d'une couronne élémentaire).

L'espace des solutions sera l'espace des fonctions définies sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $V$ , dont la dérivée est à valeurs dans  $V'$ :

$$X = \left\{ u \in \mathbf{L}^2[0, T; V] : \frac{d}{dt}u \in \mathbf{L}^2[0, T; V'] \right\}$$

cadre habituel pour la formulation variationnelle des problèmes paraboliques. On utilise la forme bilinéaire suivante:

$$a_k(u, v) = \int_{r_0}^R k(r) u'(r) v'(r) r \, dr$$

qui est continue et coercive sur  $V \times V$ . Alors la formulation variationnelle du problème consiste à trouver  $p_t \in X$  tel que:

$$\forall v \in V \quad \frac{d}{dt}(p_t, v)_H + a_k(p_t, v) = -Q(t)v(r_0)$$

Ce problème admet une solution unique dans  $X$ , d'après la théorie habituelle.

Pour l'interprétation de la solution, on procède comme dans l'exemple elliptique du chapitre précédent. En prenant  $v \in \mathcal{D}]r_0, R[$ , on vérifie que:

$$\forall t \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial}{\partial r} p_t \right) = r \frac{d}{dt}(p_t)$$

Pour les conditions limites, nous avons donc:

$$a_k(p_t, v) + \int_{r_0}^R r \frac{\partial}{\partial t} p_t v \, dr = -Q(t)v(r_0)$$

et donc:

$$a_k(p_t, v) + \int_{r_0}^R \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial}{\partial r} p_t \right) v \, dr = -Q(t)v(r_0)$$

Mais, si  $p_t$  possède la régularité justifiant l'intégration par parties suivante:

$$\int_{r_0}^R \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial}{\partial r} p_t \right) v dr = -a_k(p_t, v) - \left[ kvr \frac{\partial}{\partial r} p_t \right]_{r_0}^R$$

on retrouve bien la relation de flux:

$$\left( kr \frac{\partial}{\partial r} u \right)_{r_0} = Q(t)$$

Cette formulation variationnelle est la base de la méthode numérique utilisée, que nous décrivons en détails dans le paragraphe suivant:

### 17.1 Méthode d'éléments finis utilisée.

On suppose qu'un espace de dimension finie  $V_n$  a été choisi pour approximer l'espace  $V$  du paragraphe précédent. Soit  $w_i; i = 1, \dots, N$  une base de cet espace. La solution approchée sera cherchée sous la forme du développement:

$$p_t^* = \sum_i \alpha_i(t) w_i$$

On note alors  $A$  et  $B$  les matrices suivantes:

$$\begin{aligned} a_k^{ij} &= \int_{r_0}^R k(r) w_i'(r) w_j'(r) r dr \\ b^{ij} &= \int_{r_0}^R w_i(r) w_j(r) r dr \end{aligned}$$

Le problème variationnel restreint à  $V_n$  est donc:

$$\forall j \quad \sum_i \alpha_i'(t) b^{ij} + \alpha_i(t) a_k^{ij} = -Q(t)w_j(0)$$

En pratique, nous nous sommes limités à une approximation de type  $P_1$ , c'est à dire par des fonctions polynômiales de degré 1 par morceaux. Les noeuds de discrétisation:

$$r_0 < r_1 < \dots < r_N = R$$

sont donc choisis, et  $w_i$  est donc la fonction linéaire par morceaux telle que  $w_i(r_j) = \delta_{ij}$ . Avec un tel choix,  $p_t^*(r_i) = \alpha_i(t)$ . En particulier, les conditions initiales déterminent:

$$\alpha_i(0) = p_i(r_i)$$

## 17.2 Discrétisation du champ de perméabilité.

La méthode d'inversion envisagée suppose une discrétisation du champ de perméabilité. Par souci de simplicité, nous avons pris le même espace de discrétisation  $V_n$  que précédemment:

$$k(r) = \sum_{\alpha} k_{\alpha} w_{\alpha}(r)$$

ce qui entraîne:

$$a_k^{ij} = \sum_{\alpha} k_{\alpha} a_{w_{\alpha}}^{ij}$$

Les termes  $b^{ij}$  et  $a_{w_{\alpha}}^{ij}$  se calculent explicitement. On trouve d'abord pour  $b$ :

$$\begin{aligned} b^{ij} &= 0 && \text{si } |i - j| > 1 \\ b^{00} &= \frac{1}{12}(r_1^2 - 3r_0^2 + 2r_0r_1) \\ b^{ii} &= \frac{1}{12}(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} + r_{i-1} + 2r_i) && 0 < i < N \\ b^{NN} &= \frac{1}{12}(3r_N^2 - r_{N-1}^2 - 2r_Nr_{N-1}) \\ b^{i,i-1} &= \frac{1}{12}(r_i^2 - r_{i-1}^2) && i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Enfin, pour les coefficients  $a$ , on a d'abord:

$$a_{w_{\alpha}}^{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i - j| \vee |i - \alpha| \vee |j - \alpha| > 1$$

dans les autres cas:

$$a_{w_{\alpha}}^{ij} = S_1 \frac{2r_{\alpha} + r_{\alpha-1}}{6(r_{\alpha} - r_{\alpha-1})} + S_2 \frac{2r_{\alpha} + r_{\alpha+1}}{6(r_{\alpha+1} - r_{\alpha})}$$

avec des coefficients  $S_1$  et  $S_2$  donnés par le tableau:

$i$	$j$	$S_1$	$S_2$
$\alpha - 1$	$\alpha - 1$	1	0
$\alpha - 1$	$\alpha$	-1	0
$\alpha - 1$	$\alpha + 1$	0	0
$\alpha$	$\alpha$	1	1
$\alpha$	$\alpha + 1$	0	-1
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	0	1

Ces formules permettent un calcul très rapide des matrices sans aucune intégration numérique.

## 17.3 Résolution de l'équation différentielle.

La méthode des éléments finis nous laisse donc avec une équation différentielle ordinaire à résoudre. Ce type d'équation présente une difficulté particulière due au contraste de dynamique entre les modes propres extrêmes (equations "stiff"). Il en résulte une

instabilité liée à la propagation des erreurs de calcul au cours de l'intégration dans le temps, qui fait que l'on recommande l'usage de méthodes inconditionnellement stables dans ce contexte. Une première tentative avec une méthode de Gear proposée dans la librairie IMSL s'étant soldée par un échec, nous avons essayé le changement de fonction suivant:

$$p_t = u_t e^{\alpha t}$$

La fonction  $u_t$  satisfait alors à l'équation:

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) + a'_k(u_t, v) = -Q(t)e^{-\alpha t}v(0)$$

pour la forme bilinéaire:

$$a'_k(u, v) = a_k(u, v) + \alpha (u, v)_H$$

L'avantage de ce changement de fonction est que les éléments propres du problème, c'est à dire les couples  $(\chi, \lambda)$  tels que:

$$\forall v \quad a_k(\chi, v) = \lambda(\chi, v)$$

sont transformés en  $(\chi, \lambda + \alpha)$ , ce qui permet d'éliminer le problème lié à la valeur propre nulle de  $a_k$ , et donc de rendre  $a'_k$  V-elliptique et non plus seulement coercive. La situation est alors améliorée par rapport au problème de stabilité mentionné, mais non complètement résolue.

En définitive, les meilleurs résultats ont été obtenus par une méthode de décomposition sur les modes propres. On note  $\chi_n$  et  $\lambda_n$  les éléments propres du problème discrétisé par éléments finis:

$$\forall i \quad \sum_j a_k^{ij} \chi_n^j = \lambda_n \sum_j b^{ij} \chi_n^j$$

Ils vérifient les relations d'orthogonalité:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} b^{ij} \chi_n^i \chi_m^j &= \delta_{nm} \\ \sum_{ij} a_k^{ij} \chi_n^i \chi_m^j &= \delta_{nm} \lambda_n \end{aligned}$$

On décompose alors les fonctions coefficients  $\alpha_i(t)$  sur les vecteurs propres:

$$\alpha_i(t) = \sum_n c_n(t) \chi_n^i$$

Ce qui donne le système différentiel:

$$\sum_{n,i} c'_n(t) \chi_n^i b^{ij} + \sum_{n,i} c_n(t) \chi_n^i a_k^{ij} = -Q(t) \delta_{i0}$$

Figure 1: Comparaison de la solution exponentielle intégrale (traits pleins) avec la solution éléments finis (traits tiretés) pour des temps en progression géométrique  $t = 0.01, 0.1, \dots, 1000$ . La solution éléments finis suppose un rayon de puits de  $r = 0.3$  mètres, et une frontière étanche à  $r = 200$  mètres. Les cercles représentent les points de discrétisation.

Figure 2: Pourcentage des différences sur les pression données par la méthode des éléments finis, et par la solution exponentielle intégrale, dans les conditions de la figure précédente. L'écart n'est sensible que sur la première courbe  $t = 0.01$  près de l'origine, et sur l'ensemble de la courbe obtenue en  $t = 1000$ . Dans ce dernier cas, l'effet de la frontière (en  $r = 200$  mètres) se fait sentir, et la solution exponentielle intégrale n'est plus acceptable.

En multipliant par  $\chi_n^j$ , et en sommant sur  $j$ , les relations d'orthogonalité entraînent le découplage des équations:

$$c_n'(t) + c_n(t) \lambda_n = -Q(t) \chi_n^0$$

D'où la forme explicite des coefficients:

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-\lambda_n(t-t_0)} - \chi_n^0 \int_{t_0}^t Q(s) e^{\lambda_n(s-t)} ds$$

Le coefficient  $c_n(0)$  est déterminé par la décomposition de la condition initiale:

$$c_n(0) = \sum_{ij} \alpha_i(0) b^{ij} \chi_n^j$$

La qualité de l'approximation donnée par cette méthode a été contrôlée en référence à la solution exponentielle intégrale, pour un rayon  $r_0 = 0.3$ , et  $R = 200$ , de telle sorte que les conditions de validité de la solution analytique sont à peu près satisfaites. Pour une discrétisation basée sur 50 noeuds, la comparaison graphique à divers stades de l'évolution du système (figure 1) montre que les deux solutions sont très comparables (les courbes sont pratiquement confondues pour l'épaisseur de trait du graphique). Un chiffrage plus précis de l'erreur est représenté en figure 2. Ce chiffrage reste très indicatif, puisque la solution exponentielle intégrale n'est elle-même obtenue que moyennant des approximations non vérifiées au voisinage du puits, et lorsque l'influence de la frontière étanche se fait sentir. On retiendra seulement la cohérence des résultats donnés par ces deux méthodes.

La supériorité de la méthode des modes propres sur la méthode de Gear pour ce problème particulier, tient sans doutes à la plus grande généralité de cette dernière méthode, puisqu'elle s'applique à des problèmes différentiels  $P' = F(P, t)$  dans lesquels aucune hypothèse de linéarité n'est faite sur  $F$ .

## 18 Identification du système adjoint.

Le problème variationnel direct:

$$\begin{cases} a_k(p_t, v) + \frac{d}{dt}(p_t, v) = -Q(t)v_{r_0} \\ p(t=0) = p_i \end{cases}$$

doit être mis sous la forme:  $\psi(k, p) = F$ . On introduit l'opérateur  $A_k : V \rightarrow V'$  linéaire et continu, défini par:

$$a_k(p, v) = \langle A_k p, v \rangle$$

Alors, le problème se réécrit:

$$\begin{cases} A_k p_t + \frac{d}{dt} p_t = -Q(t)L_{r_0} \\ p(t=0) = p_i \end{cases}$$

( $L_{r_0}$  étant la fonctionnelle d'évaluation en  $r_0$ , continue par le théorème de trace). Ainsi, pour l'espace fonctionnel  $X = \{p \in \mathbf{L}^2[0, T; V]; dp/dt \in \mathbf{L}^2[0, t; V']\}$ , en définissant:

$$\begin{aligned} \psi(k, p) &= \left( (A_k + \frac{d}{dt})p, p(t=0) \right) \\ F &= (-Q(t)L_{r_0}, p_i) \end{aligned}$$

le problème variationnel se met bien sous la forme  $\psi(k, p) = F$ . Par la suite, on utilisera la forme suivante:

$$\forall v \in X \quad \int_0^T \langle A_k p + \frac{d}{dt} p + Q(t)L_{r_0}, v \rangle dt + \langle p(t_0) - p_i, v(t_0) \rangle = 0$$

### 18.1 Evaluation du terme $\langle \frac{\partial}{\partial p} \psi(k, p) \delta p, v \rangle$

du fait de la linéarité de  $\psi$  par rapport à  $p$ , on a:

$$\frac{\partial}{\partial p} \psi(k, p) \delta p = \left( (A_k + \frac{d}{dt})\delta p, \delta p(t=0) \right)$$

et:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \psi}{\partial p} \delta p, v \rangle &= \int_0^T \langle (A_k + \frac{d}{dt})\delta p, v \rangle dt + \langle \delta p(t=0), v(t=0) \rangle \\ &= \int_0^T a_k(\delta p, v) - \int_0^T \langle \delta p, \frac{d}{dt} v \rangle dt + [\langle \delta p, v \rangle]_0^T + \langle \delta p(t=0), v(t=0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle (A_k - \frac{d}{dt})v, \delta p \rangle dt + \langle v_T, \delta p_T \rangle \end{aligned}$$

## 18.2 Pour des mesures en continu, et une erreur quadratique.

Pour un terme d'erreur du type:

$$\|\tau(p) - z\|^2 = \int_0^T (p_{r_0} - z)^2 dt$$

l'accoissement est:

$$2 \int_0^T (p_{r_0} - z) \langle L_{r_0}, \delta p_t \rangle dt = 2 \int_0^T \langle r(t) L_{r_0}, \delta p_t \rangle dt$$

avec  $r(t) = p_{r_0} - z$ , résidu. Dans ce cas, le problème adjoint est donné par:

$$\begin{cases} a_{\bar{k}}(v_t, w) - \frac{d}{dt}(v_t, w) = -2r(t)w_{r_0} & \forall t \in [0, T], \forall w \in V \\ v_T = 0 \end{cases}$$

qui est un problème à temps inversé<sup>8</sup>. Ce problème sera résolu par le solveur éléments finis décrit précédemment. Si  $v$  est approché par la somme finie:

$$v_n = \sum \alpha_i(t) w_i$$

et  $\alpha_i(t) = \sum_{\beta} c_{\beta}(t) \chi_{\beta}^i$ , on trouve pour les coefficients  $c_{\beta}$ :

$$c_{\beta}(t) = c_{\beta}(T) e^{\lambda_{\beta}(t-T)} + 2\chi_{\beta}^0 \int_T^t r(s) e^{\lambda_{\beta}(t-s)} ds$$

Le gradient se calcule alors:

$$\nabla J \delta k = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial k} \delta k, v \right\rangle$$

Or  $\partial \psi / \partial k \cdot \delta k = A_{\delta k} p_t$ , et:

$$\nabla J \delta k = \int_0^T \langle A_{\delta k} p_t, v_t \rangle dt = \int_0^T a_{\delta k}(p_t, v_t) dt$$

Avec les décompositions  $p_t = \sum \alpha_i(t) w_i$  et  $v_t = \sum \beta_j(t) w_j$  cela donne:

$$\nabla J \delta k = \sum_{ij} a_{\delta k}^{ij} \int_0^T \alpha_i(t) \beta_j(t) dt$$

Remarque: Le calcul explicite de toutes ces quantités fait intervenir des intégrations sur  $[0, T]$  que l'on devra effectuer numériquement dans la plupart des cas. Cela risque de constituer une cause d'imprécision dans le calcul du gradient, et donc d'arrêt prématuré d'une procédure itérative. Les mesures étant à temps discrets, il est possible d'éviter cette source d'erreur.

<sup>8</sup>Condition initiale en  $t = T$ , écoulement du temps dans le sens des  $t$  décroissants. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un problème rétrograde puisque  $\partial/\partial t$  apparait avec un signe  $-$ . De ce fait la stabilité est la même que celle du problème direct. Le véritable problème rétrograde, à savoir la détermination du passé sur la base du présent, est lui redoutablement instable

### 18.3 Cas d'un critère discret.

Nous considérons ici le cas de mesures de pression à temps discret, et d'une norme quadratique:

$$\int_0^T (p(r_0, t) - z)^2 dt \text{ est remplacé par } \sum_{i,j} (p_0^i - z^i) W^{ij} (p_0^j - z^j)$$

en notant  $p_0^i = p(r_0, t_i)$ . Le gradient de cette quantité est:

$$G^j = 2 \sum_i (p_0^i - z^i) W^{ij} \delta p_0^j$$

Cela conduit au problème variationnel:

$$a_k(v_t, w) - \frac{d}{dt}(v_t, w) = -2 \sum_{ij} r_i W^{ij} \delta_{t_j}(dt) w(r_0)$$

Après une décomposition sur les modes propres, on trouve des coefficients  $c_\nu(t)$ :

$$c_\nu(t) = \sum_i \sum_{t_j \in [t, T]} 2 \chi_\nu^0 r_i W^{ij} e^{\lambda_\nu(t-t_j)}$$

et donc pour valeur de l'état adjoint aux noeuds de la discrétisation spatiale:

$$v_j(t) = \sum_\nu 2 \chi_\nu^j \chi_\nu^0 \sum_{t_k \geq t} r_l W^{lk} e^{\lambda_\nu(t-t_k)}$$

Dans ce cas, il est possible d'obtenir les valeurs exactes des termes:

$$S_{ij} = \int_0^T p_i(t) v_j(t) dt$$

Par exemple, pour un débit constant par morceaux:

$$Q(t) = \sum_i q_i 1_{t \in [t_i, t_{i+1}[}$$

on trouve explicitement:

$$p_i(t) = \sum c_n(t) \chi_n^i$$

avec pour  $n \neq 0$ :

$$c_n(t) = \sum_i 1_{t \in [t_i, t_{i+1}[} (A_i^n e^{-\lambda_n(t-t_i)} + B_i^n)$$

et des coefficients:

$$\begin{aligned} B_i^n &= -\chi_n^0 q_i / \lambda_n \\ A_0^n &= c_n(0) + \chi_n^0 q_0 / \lambda_n \\ A_i^n &= A_{i-1}^n \exp\{\lambda_n(t_{i-1} - t_i)\} + (q_i - q_{i-1}) \chi_n^0 / \lambda_n \end{aligned}$$

et, pour  $n = 0$  (valeur propre  $\lambda_0 = 0$ ):

$$C_0(t) = \sum_i 1_{t \in [t_i, t_{i+1}[} (A_i^0 + B_i^0 t)$$

et:

$$\begin{aligned} B_i^0 &= -q_i \chi_0^0 \\ A_i^0 &= c_0(t) + \chi_0^0 \{ q_0 t_0 + (q_1 - q_0) t_1 + \\ &\quad \dots + (q_i - q_{i-1}) t_i \} \end{aligned}$$

Ainsi, l'approximation par éléments finis est connue en tout  $t$  exactement. De la même manière, l'état adjoint exact associé au système des éléments finis est donné explicitement (on considère le cas d'une matrice de poids  $W$  diagonale pour alléger les écritures et les calculs):

$$v_i(t) = \sum_n d_n(t) \chi_n^i$$

avec:

$$d_n(t) = \sum_i 1_{t \in [t_i, t_{i+1}[} D_{i+1}^n e^{\lambda_n(t-t_{i+1})}$$

les coefficients  $D$  se calculant par:

$$\begin{aligned} D_N^n &= 2\chi_n^0 r_N W^N \\ D_i^n &= D_{i+1}^n e^{\lambda_n(t_i-t_{i+1})} + 2\chi_n^0 r_i W^i \end{aligned}$$

Ensuite, en désignant par  $T_{nm}^i$  les quantités:

$$T_{nm}^i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} c_n(t) d_m(t) dt$$

nous avons les expressions exactes suivantes:

$n$ et $m$	$T_{nm}^i$
$n = m = 0$	$D_{i+1}^0(t_{i+1} - t_i) \left\{ (B_i^0/2)(t_{i+1} + t_i) + A_i^0 \right\}$
$n = 0, m \neq 0$	$(D_{i+1}^m/\lambda_m) \left\{ A_i^0(1 - e^{\lambda_m(t_{i+1}-t_i)}) + (B_i^0/\lambda_m) \left( (\lambda_m t_{i+1} - 1) - (\lambda_m t_i - 1)e^{\lambda_m(t_i-t_{i+1})} \right) \right\}$
$n \neq 0, m = 0$	$D_{i+1}^0 \left\{ (A_i^n/\lambda_n)(1 - e^{\lambda_n(t_i-t_{i+1})}) + B_i^n(t_{i+1} - t_i) \right\}$
$n = m \neq 0$	$D_{i+1}^n \left\{ A_i^n(t_{i+1} - t_i)e^{\lambda_n(t_i-t_{i+1})} + (B_i^n/\lambda_m)(1 - e^{\lambda_m(t_i-t_{i+1})}) \right\}$
$0 \neq n \neq m \neq 0$	$D_{i+1}^m \left\{ (A_i^n/(\lambda_m - \lambda_n)) (e^{\lambda_n(t_i-t_{i+1})} - e^{\lambda_m(t_i-t_{i+1})}) + (B_i^n/\lambda_m)(1 - e^{\lambda_m(t_i-t_{i+1})}) \right\}$

Figure 3: Validation de la procédure de l'état adjoint. Les résultats du calcul sont pratiquement les mêmes que ceux obtenus par le schéma numérique.

Ensuite, on calcule successivement:

$$T_{nm} = \sum_i T_{nm}^i$$

$$t(n, i) = \sum_m T_{nm} \chi_m^i$$

$$S_{ij} = \sum_n \chi_n^i t(n, j)$$

pour obtenir enfin le gradient:

$$G_k = \sum_{ij} a_k^{ij} S_{ij}$$

Tous les calculs ci dessus sont exacts pour le problème différentiel obtenu après usage de la méthode des éléments finis, de telle sorte que l'on obtient rigoureusement, sans aucune intégration numérique, le gradient de:

$$\sum_{i,j} (p_0^*(i) - z^i) W^{ij} (p_0^*(j) - z^j)$$

Les seules erreurs proviennent du calcul des vecteurs propres, et bien sûr de la précision limitée de l'arithmétique. Cela est intéressant dans la mesure où l'expérience a montrée que la méthode de minimisation par gradient conjugué pouvait s'arrêter prématurément lorsque le gradient est calculé avec une précision limitée.

A titre d'exemple, la figure 3 superpose les gradients obtenus par la méthode de l'état adjoint, et celui obtenu par un schéma de différentiation numérique:

$$\nabla[J(k)].(i) \approx \frac{1}{d_i} (J(k + e_i d_i) - J(k))$$

où  $e_i$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique. Le pas de calcul  $d_i$  a été choisi arbitrairement ( $d_i = 0.0001$ ), mais il a été vérifié que le résultat était insensible par rapport à ce choix, ce qui confirme la qualité de l'approximation numérique (valeurs pratiquement inchangées pour  $d_i = 0.1$ )

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Généralités</b>	<b>3</b>

<b>3</b>	<b>Problèmes inverses généraux.</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Un exemple en hydrogéologie</b>	<b>4</b>
4.1	unicité. . . . .	4
4.2	Stabilité. . . . .	4
<b>5</b>	<b>Methode de régularisation.</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Approche probabiliste.</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Exemple illustratif</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Cas d'équivalence entre régularisation et cokrigeage.</b>	<b>7</b>
<b>9</b>	<b>Applications hydrogéologiques</b>	<b>8</b>
<b>10</b>	<b>Linéarisation.</b>	<b>9</b>
<b>11</b>	<b>Méthode non linéaire.</b>	<b>10</b>
<b>12</b>	<b>Méthode de l'état adjoint.</b>	<b>12</b>
<b>13</b>	<b>Exemple: problème elliptique d'ordre deux.</b>	<b>13</b>
13.1	Interprétation du problème direct . . . . .	15
13.2	Identification du problème adjoint. . . . .	16
13.3	Gradient . . . . .	17
<b>14</b>	<b>Bilan de la méthode non-linéaire.</b>	<b>17</b>
<b>15</b>	<b>Essais de puits</b>	<b>18</b>
<b>16</b>	<b>Position du problème.</b>	<b>18</b>
16.1	Conditions limites. . . . .	20
16.2	Bilan. . . . .	21
16.3	Solution exacte d'un problème simplifié. . . . .	21
<b>17</b>	<b>Résolution approchée du problème direct.</b>	<b>22</b>
17.1	Méthode d'éléments finis utilisée. . . . .	23
17.2	Discrétisation du champ de perméabilité. . . . .	24
17.3	Résolution de l'équation différentielle. . . . .	24
<b>18</b>	<b>Identification du système adjoint.</b>	<b>27</b>
18.1	Evaluation du terme $\langle \frac{\partial}{\partial p} \psi(k, p) \delta p, v \rangle$ . . . . .	27
18.2	Pour des mesures en continu, et une erreur quadratique. . . . .	28
18.3	Cas d'un critère discret. . . . .	29