

# BIBLIOTHEQUE

## I - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT PUR

Soit  $X$  une V.A. positive,  $F(x)$  sa fonction de répartition, nulle pour  $x$  négatif; pour simplifier les notations, nous supposons que  $F$  admet une densité de probabilité  $f(x)$  (nulle pour  $x < 0$ ). Mais les résultats qui suivent ne sont pas liés à cette hypothèse. (Le lecteur qui connaît la théorie de la mesure remplacera partout  $f(x) dx$  par  $F(dx)$  pour obtenir des énoncés généraux; il faut cependant supposer que la loi  $F$  n'est pas concentrée sur les multiples entiers de d'un même nombre  $a$ , encore que la théorie se transpose sans peine à ce cas "arithmétique").



Soient alors  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  une suite de V.A. Indépendantes de même loi  $F$ , et, sur la demi-droite  $(0, \infty)$ , les points :

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= X_1 \\
 Y_2 &= X_1 + X_2 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 Y_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \leftarrow \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Ces points définissent une partition aléatoire de la demi-droite en segments dont les longueurs  $X_i$  sont indépendantes et obéissent à la même loi  $F$ .

Plus généralement, au lieu de partir du point (fixe) 0, on peut partir d'une origine aléatoire  $Y_0$ , indépendante des  $X_i$ , et dont la loi  $F_0$  (de densité  $f_0$ ) est différente de celle des  $X_i$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= Y_0 + X_1 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 Y_n &= Y_0 + X_1 + \dots + X_n \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

La suite  $Y_1, Y_2 \dots$  de ces points de discontinuités définit un processus de renouvellement. On s'interroge sur la possibilité de rejeter l'origine de ce processus à  $-\infty$ , de manière à obtenir une partition aléatoire stationnaire de la droite entière, en segments de longueurs indépendantes obéissant toujours à la même loi  $F$ . Précisons :

Soit  $B_0$  un événement, dont la définition met en jeu un nombre (fini ou non) de points  $x_i$  de la demi-droite. Le translaté  $B_x$  par  $x > 0$  de  $B_0$  est le même événement rapporté à l'origine  $x$  (défini de la même manière que  $B_0$ , mais à partir des points  $x + x_i$ ).  $P(B_0)$  et  $P(B_x)$  se calculent à partir des lois  $F$  et  $F_0$ , mais, en général, ne coïncident pas. Pour que l'on puisse rejeter l'origine à  $-\infty$ , et définir une partition aléatoire stationnaire de la droite entière, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une loi initiale  $F_0 = R_0$  telle que :

$$(1) \quad \forall x > 0, \forall B_0, \quad P(B_0) = P(B_x)$$

Cette loi, si elle existe, est unique. Son existence est liée à la propriété suivante (ergodicité) : quelle que soit la loi initiale  $F_0$ , et pour tout événement  $B_0$ ,  $P(B_x)$  tend vers une limite  $P(B_\infty)$  pour  $x \rightarrow \infty$  et cette limite est une probabilité vis à vis de  $B_0$ :

$$(2) \quad \lim P(B_x) = P(B_\infty)$$

Cette propriété d'ergodicité ne dépend donc que de la loi  $F$ .

En particulier, considérons l'événement  $B_0 = "Y_0 < h"$ . On a  $P(B_0) = F_0(h)$  par définition.  $B_x$  est l'événement : "il y a un point de discontinuité au moins dans l'intervalle  $(x, x+h)$ ". Nous poserons :

$$P(B_x) = R(h; x)$$

$R(h; x)$  est la fonction de répartition de  $Y_N - X$ ,  $Y_N$  désignant le premier point de discontinuité postérieur à  $x$ . C'est la granulométrie résiduelle, en  $x$ , ou la loi du temps d'attente résiduel en ce point.

Si l'on connaît  $R(h;x)$ , on peut transporter l'origine en  $x$ , et le processus à droite de cette origine se définit à partir de la loi initiale  $R(h;x)$  exactement comme le processus rapporté à 0 se définissait à partir de  $F_0$ . Autrement dit, pour tout événement  $B_x$ , on calcule  $P(B_x)$  à partir de  $R(h;x)$  de la même manière que  $P(B_0)$  à partir de  $F_0$ . Ainsi, pour qu'il existe un processus stationnaire sur la droite entière il faut et il suffit que l'on puisse trouver une loi initiale  $R_0$  telle que l'on ait pour tout  $x$

$$(1') \quad R_0(h) = R(h;x)$$

De même, pour que le processus soit ergodique, il faut et il suffit que, quelle que soit la loi initiale  $F_0$ , la limite :

$$(2') \quad \lim_{x \rightarrow \infty} R(h;x) = R(h;\infty)$$

existe, soit une fonction de répartition, et ne dépende pas de la loi initiale  $F_0$ .

Si le processus est à la fois ergodique (vérifie (2')) et stationnaire (vérifie (1') pour une loi  $R_0(h)$ ) on a évidemment  $R_0(h) = R(h;\infty)$ . Inversement, nous verrons que, si le processus est ergodique, il est également stationnaire pour la loi  $R_0(h) = R(h;\infty)$ . La condition nécessaire et suffisante très simple pour que le processus possède ces deux propriétés est que la loi  $F$  admette une espérance finie  $\mu = \int_0^{\infty} x f(x) dx$

### Le théorème de renouvellement

Le premier point de discontinuité  $Y_0$  a pour loi  $F_0$  (densité  $f_0$ ). Le second point  $Y_1 = Y_0 + X_1$ , somme de deux variables indépendantes, admet la densité  $f_0 * f$  et la fonction de répartition  $F_0 * f$ . De même,  $Y_n = Y_0 + X_1 + \dots + X_n$  admet la densité =

$$f_0 * f^{*(n)} = f_0 * \underbrace{f * f * \dots * f}_{n \text{ fois}}$$

et la fonction de répartition  $F_0 * f^{*(n)}$ . La valeur en  $x$  de  $F_0 * f^{*(n)}$  est donc  $P(Y_n < x)$ . L'espérance mathématique du nombre aléatoire  $N_x$

des points de discontinuités tombés entre 0 et  $x$  est donc :

$$(3) \quad E(N_x) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_0 * f^{(n)}$$

On voit que la fonction  $g(x) = E(N_x)$  vérifie l'équation de convolution :

$$(4) \quad g = F_0 + g * f$$

Plus généralement, considérons une fonction  $V(x)$  bornée et nulle pour  $x$  négatif, et l'équation de convolution :

$$(4') \quad g = V + g * f$$

Appliquons la transformation de Laplace  $g \rightarrow \gamma$ ,  $V \rightarrow \psi$ ,  $f \rightarrow \Phi$

(4') se transforme en :

$$\gamma = \psi + \gamma \Phi$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\psi}{1 - \Phi}$$

On démontre que cette fonction  $\gamma$  est effectivement la transformée de Laplace d'une solution  $g$  de (4'), et que  $g$  est l'unique solution de (4') nulle pour  $x < 0$  et bornée sur tout intervalle fini.

Pourvu que la fonction  $V(x)$  vérifie certaines conditions assez larges de régularité ( l'intégrale  $\int_0^{\infty} V(x) dx$  doit être absolument convergente, et, de plus,  $V$  doit vérifier une condition exprimant que ses oscillations s'amortissent à l'infini) on a le théorème suivant :

Théorème du renouvellement. Lorsque  $x$  tend vers  $\infty$ , la solution  $g$  de (4') vérifie :

$$g(x) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} V(x) dx$$

$\mu = \int_0^{\infty} x f(x) dx$  désignant l'espérance associée à la loi  $F$  de densité (si  $\mu = \infty$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ ).

Exemple. Prenons la fonction :

$$g_h(x) = \begin{cases} E[N_x] - E[N_{x-h}] & \text{pour } x \geq h \\ E[N_x] & \text{pour } x < h \end{cases}$$

représentant l'espérance du nombre des points de discontinuités tombant dans l'intervalle  $(x-h, x)$  (étant entendu qu'il n'y en a pas à gauche de 0 : pour  $h > x$ , il s'agit en réalité du nombre des points tombés dans  $(0, x)$ ). Cette fonction vérifie :

$$g_h(x) = F_0(x) - F_0(x-h) + g_h * f$$

et la fonction  $V(x) = F_0(x) - F_0(x-h)$  vérifie bien les conditions de régularité voulues. Le théorème donne donc :

$$g_h(x) \longrightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [F_0(x) - F_0(x-h)] dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1 - F_0(x) - 1 + F_0(x-h)] dx$$

On remarque que  $F_0(x-h) = 0$  pour  $x < h$ , et

$$\int_0^{\infty} [1 - F_0(x-h)] dx = h + \int_h^{\infty} [1 - F_0(x-h)] dx = h + \int_0^{\infty} [1 - F_0(x)] dx$$

D'où :

$$g_h(x) = E(N_x) - E(N_{x-h}) \longrightarrow \frac{h}{\mu}$$

Le nombre moyen de points de discontinuité tombant dans un intervalle de longueur  $h$  assez éloigné de l'origine est  $h/\mu$  ( $\mu = E(X)$ , longueur moyenne d'un segment de la partition). Autrement dit, le nombre spécifique est égal à l'inverse  $1/\mu$  de cette longueur moyenne.

Existence d'une limite ergodique. Considérons la granulométrie résiduelle  $R(h;x)$  au point  $x$  comme une fonction  $R_h(x)$  de  $x$ .

a/ Plaçons nous d'abord dans le cas  $Y_0 = 0$  (origine en 0). L'évènement "il y a un point de discontinuité entre  $x$  et  $x+h$ " se réalise de deux façons incompatibles :

- ou bien le premier point de discontinuité  $Y_1$  tombe dans  $(x, x+h)$ , ce qui a lieu avec la probabilité  $F(x+h) - F(x)$  ;

- ou bien  $Y_1$  tombe en  $y < x$ , et la probabilité conditionnelle de l'évènement qui nous intéresse est alors  $R_h(x-y)$  (le processus recommence à zéro à partir de l'origine  $y$ ). Par suite on a

$$R_h(x) = F(x+h) - F(x) + \int_0^x R_h(x-y) f(y) dy$$

ou encore :

$$(5) \quad R_h = V + R_h * f$$

avec  $V(x) = F(x+h) - F(x)$ . D'après le théorème, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} R_h(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [F(x+h) - F(x)] dx = \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [(1-F(x+h)) - (1-F(x))] dx = \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)] dx \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$R(h; \infty) = \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)] dx$$

Comme  $\int_0^{\infty} [1-F(x)] dx = \mu$ ,  $R(h; \infty)$  est la fonction de répartition de la loi de probabilité de densité  $\frac{1-F(x)}{\mu}$  (pourvu seulement que  $\mu < \infty$ )

b/ Supposons maintenant que la loi initiale soit  $F_0$ , et désignons par  $\bar{R}_h(x)$  la granulométrie résiduelle pour cet état initial. On a cette fois :

$$\bar{R}_h(x) = F_0(x+h) - F_0(x) + \int_0^x f_0(y) R_h(x-y) dy$$

$R_h$  désignant toujours la granulométrie résiduelle du cas a/ ( $Y_0 = 0$ ).

Or  $F_0(x+h) - F_0(x)$  tend vers 0, et la fonction  $f_0 * R_h$  vérifie (5) avec  $f_0 * V$  au lieu de  $V$ . On vérifie sans peine que  $V$  et  $f_0 * V$  ont même intégrale.

On a donc :

$$\bar{R}_h(x) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)] dx$$

Ainsi, le processus est ergodique si, et seulement si,  $\mu = \mathbb{E}(X) < \infty$

Existence du processus stationnaire. Prenons comme loi initiale la loi limite que nous avons obtenue ci-dessus :

$$(6) \quad R_0(h) = \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)] dx$$

et montrons qu'on a alors pour tout  $x$  :  $R_0(h) = \bar{R}(h; x)$ . D'après b/, on a :

$$\bar{R}(h; x) = R_0(x+h) - R_0(x) + \frac{1}{\mu} \int_0^x [1-F(y)] R_h(x-y) dy$$

Mais  $(1-F) * R_h$  est l'intégrale de  $R_h - R_h * f$ , et, d'après (5), cette fonction est  $V(x) = F(x+h) - F(x)$ . Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} \bar{R}(h; x) &= \frac{1}{\mu} \int_x^{x+h} [1-F(y)] dy + \frac{1}{\mu} \int_0^x [1-F(y) - 1 + F(y+h)] dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)] dx = R_0(h) \end{aligned}$$

Avec cette loi initiale, le processus est donc bien stationnaire.

Remarque. On pouvait prévoir à l'avance la forme de cette loi initiale  $R_0$ . S'il y a un régime stationnaire, en effet, un point  $x_0$  arbitraire appartient à un segment de longueur comprise entre  $y$  et  $y + dy$  avec la probabilité  $dC(y) = \frac{1}{\mu} y f(y) dy$  (granulométries en longueur). Il occupe alors une position quelconque sur ce segment; en particulier, il a la probabilité  $\frac{y-h}{y}$  (pour  $y > h$ , et 0 autrement) d'être situé à une distance supérieure à  $h$  de son extrémité droite. On doit donc avoir :

$$1 - R_0(h) = \int_h^{\infty} \frac{y f(y)}{\mu} \frac{y-h}{y} dy = \frac{1}{\mu} \int_h^{\infty} (y-h) f(y) dy$$

et, en dérivant en  $h$

$$R'_0(h) = \int_h^{\infty} \frac{f(y)}{\mu} dy = \frac{1-F(h)}{\mu}$$

Application. Soit  $N_x$  le nombre des points de discontinuité tombés dans  $(0, x)$ . Cherchons la loi de cette variable, et, en particulier, la valeur asymptotique pour  $x$  grand de son espérance et de sa variance.

On remarque que  $N_x < n + 1$  équivaut à  $Y_n > x$ , événement de probabilité  $f^{x(n)} * [1 - F_0]$  (ou  $1 - F_0(x)$  pour  $n = 0$ ). Par suite, les probabilités  $p_n(x) = P(N_x = n)$  sont données par :

$$\begin{cases} h_n(x) = P(N < n+1) - P(N < n) = F_0 * (f^{x(n-1)} - f^{x(n)}) \\ h_0(x) = 1 - F_0(x) \end{cases}$$

Introduisons la fonction génératrice  $G(s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) s^n$  et sa transformée de Laplace en  $x$  :

$$\Gamma(s; \lambda) = \int_0^{\infty} G(s; x) e^{-\lambda x} dx$$

Il vient :

$$\Gamma(s; \lambda) = \frac{1 - \Phi_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \Phi_0 (\Phi^{n-1} - \Phi^n) s^n$$

soit :

$$\Gamma(s; \lambda) = \frac{1 - \Phi_0}{\lambda} + \Phi_0 \frac{1 - \Phi}{\lambda} \frac{s}{1 - s\Phi}$$

Les dérivées  $G'_j(1; x)$  et  $G''_{j^2}(1; x)$  donnent les espérances  $E(N_x)$  et  $E[N_x(N_x - 1)]$  qui sont des fonctions de  $x$ . Les dérivées de  $\Gamma$ , soient :

$$\begin{aligned} \Gamma'_0(1; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \frac{\Phi_0}{1 - \Phi} \\ \Gamma''_{0^2}(1; \lambda) &= \frac{2}{\lambda} \frac{\Phi_0 \Phi}{(1 - \Phi)^2} \end{aligned}$$

sont donc les transformées de Laplace de  $E(N_x)$  et  $E[N_x(N_x - 1)]$ . Evaluons, par exemple,  $E(N_x)$ .  $\Gamma'(1; \lambda)$  vérifie l'équation

$$\Gamma'(1; \lambda) [1 - \Phi(\lambda)] = \frac{1}{\lambda} \Phi_0(\lambda)$$



qui est la transformée d'une équation de renouvellement de type (4').

Au second membre,  $\frac{1}{\lambda} \Phi_0(\lambda)$  est la transformée de Laplace de  $F_0(x)$  qui n'est pas sommable. Pour appliquer le théorème de renouvellement,

introduisons la fonction  $\Gamma'(r; \lambda) = \frac{1}{\lambda^2 \mu}$ , transformée de  $E(N_x) = x/\mu$

Elle vérifie :

$$\left[ \Gamma'(r; \lambda) - \frac{1}{\lambda^2 \mu} \right] [1 - \Phi(\lambda)] = \frac{1}{\lambda} \left[ \Phi_0(\lambda) - \frac{1 - \Phi(\lambda)}{\lambda \mu} \right]$$

Le deuxième membre prend en  $\lambda = 0$  la valeur finie :  $\frac{1}{2} \left( \mu + \frac{\sigma^2}{\mu} \right) - m_0$  ( $m_0$  espérance de  $F_0$ ) pourvu seulement que  $F$  admette une variance  $\sigma^2$  finie. Le théorème de renouvellement donne alors :

$$E(N_x) = \frac{x}{\mu} \rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \right) = \frac{m_0}{\mu}$$

Remarque. Si l'on prend pour  $F_0$  la loi stationnaire  $R_0$  dont la transformée est  $\frac{1 - \Phi}{\lambda \mu}$ , on trouve :

$$\Gamma'(r; \lambda) = \frac{1}{\lambda^2 \mu} \quad \text{soit} \quad E(N_x) = \frac{x}{\mu}$$

et l'estimation asymptotique ci-dessus donne dans ce cas la valeur exacte.

Le nombre spécifique  $\nu = x/\mu$  du processus stationnaire vérifie

donc :  $\nu \approx E(N_x)/\sigma$

Un raisonnement semblable sur  $\Gamma''(r; \lambda)$  montre que la partie principale de  $E[N_x(N_x - 1)]$  est :

$$E[N_x(N_x - 1)] \approx \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{2x}{\mu} \left( \frac{\sigma^2}{\mu^2} - \frac{m_0}{\mu} \right)$$

D'où :

$$E[(N_x)^2] \approx \frac{x^2}{\mu^2} + 2 \frac{x}{\mu} \left( \frac{\sigma^2}{\mu^2} - \frac{m_0}{\mu} \right) + \frac{x}{\mu}$$

$$[E(N_x)]^2 \approx \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{2x}{\mu} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\mu^2} - \frac{m_0}{\mu} \right]$$

et par différence on obtient la variance :

$$D^2(N_x) = \frac{x}{\mu} \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

ou, sous forme de variance relative :

$$(7) \quad \frac{D^2(N_x)}{[E(N_x)]^2} = \frac{1}{E(N_x)} \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Cette formule permet de calculer la précision de l'estimation du nombre spécifique  $\nu = 1/\mu$ . On notera qu'elle s'applique quelle que soit la loi initiale  $F_0$ .

Remarque. Au lieu de compter le nombre  $N_x$  de points de discontinuité dans un segment de longueur donnée  $x$ , on peut aussi estimer  $\nu$  en prenant le rapport  $n/Y_n$  pour  $n$  grand (dans le premier cas, on rapporte le nombre aléatoire  $N_x$  à la longueur donnée  $x$ ; dans le second, on rapporte le nombre donné  $n$  à la longueur aléatoire  $Y_n$ ). Pour  $n$  assez grand, la variance <sup>relative</sup> de  $n/Y_n$  est  $\frac{1}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ , ce qui signifie, d'après (7), que les deux procédés d'estimation sont asymptotiquement équivalents.

Démontrons le dans le cas  $Y_n = 0$  (le cas général s'en déduit sans peine). La loi de  $Y_n$  admet la transformée  $[\Phi(\lambda)]^n$ , celle de  $Y_n/n$  :  $[\Phi(\frac{\lambda}{n})]^n$ . Pour calculer les espérances de  $n/Y_n$  et de son carré, notons la règle :

$$E\left[\frac{1}{Z^k}\right] = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty \lambda^{k-1} \psi(\lambda) d\lambda$$

avec  $\psi(\lambda) = E(e^{-\lambda Z})$ . Ici, on trouve :

$$E\left(\frac{n}{Y_n}\right) = \int_0^\infty [\Phi(\frac{\lambda}{n})]^n d\lambda$$

Mais :

$$[\Phi(\frac{\lambda}{n})]^n = e^{n \log \Phi(\frac{\lambda}{n})} = e^{-\lambda \mu + \frac{1}{2n} \sigma^2 \lambda^2 + o(\frac{1}{n})}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 en  $1/n$ , on aura donc :

$$E\left[\frac{n}{Y_n}\right] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \mu} \left[1 + \frac{1}{2n} \sigma^2 \lambda^2\right] d\lambda = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

De la même manière, on trouve :

$$E\left[\left(\frac{n}{Y_n}\right)^2\right] = \int_0^{\infty} \lambda^2 [\Phi(\frac{\lambda}{n})]^n d\lambda = \frac{1}{\mu^2} + \frac{3}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^4}$$

D'où la variance :

$$D^2\left(\frac{n}{Y_n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^4}$$

et la variance relative annoncée  $\frac{1}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^2}$

#### Processus de poisson.

Le processus de Poisson correspond au cas particulier où la loi  $F$  est une loi exponentielle de densité  $a e^{-ax}$ . La loi initiale stationnaire  $R_0$  est alors identique à la loi ~~XXXXXX~~  $F$  : en effet, on a ici :

$$1 - F(x) = e^{-ax}, \quad \mu = \int_0^{\infty} a e^{-ax} x dx = \frac{1}{a}$$

et la densité  $\frac{1-F}{\mu}$  de la loi  $R_0$  est  $a e^{-ax} = f$

Cette circonstance est liée à une propriété caractéristique de la loi exponentielle, qui est de représenter un phénomène exempt de vieillissement. Interprétons, en effet, la loi  $F(x)$  comme la loi de la durée de vie d'un certain phénomène. Sachant que ce phénomène a déjà duré le temps  $x$ , cherchons la loi de sa durée de vie résiduelle  $Y$ . On a :

$$P(Y > y) = P(X > x+y \mid X > x)$$

soit, d'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$P(X > y) = \frac{P(X > x+y \text{ et } X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)}$$

Soit alors  $F_x(y)$  la fonction de répartition de la durée de vie résiduelle. On a :

$$1 - F_x(y) = \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}$$

Pour  $1 - F(x) = e^{-ax}$  (loi exponentielle), il vient

$$1 - F_x(y) = \frac{e^{-a(x+y)}}{e^{-ax}} = e^{-ay} = 1 - F(y)$$

La durée de vie résiduelle obéit à la même loi F que la durée de vie totale. Inversement, on montre facilement que la loi exponentielle est la seule loi qui possède cette propriété.

Ainsi, dans le processus de Poisson, on peut prendre comme origine un point quelconque ou un point de discontinuité sans modifier la loi du processus. Plus précisément,  $x$  désignant un point quelconque, il y a indépendance entre tout événement antérieur à  $x$  et tout événement postérieur à  $x$ . Parmi les processus de renouvellement, le processus de Poisson est le seul qui vérifie cette propriété markovienne (puisque la loi exponentielle est la seule loi exempte de vieillissement).

Loi des points de discontinuité.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \dots$  : ce sont les itérées  $f, f * f, f^{*(n)}$  de la loi exponentielle, c'est à dire les lois gamma :

$$f^{*(n)}(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}$$

La transformée de Laplace de  $f$  est  $\frac{a}{a+\lambda}$ . Celle de  $f^{*(n)}$  est donc :

$$[\Phi(\lambda)]^n = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n$$

Loi de  $N_x$ . On peut partir de la transformée de Laplace  $\Gamma(\gamma, \lambda)$  de la fonction génératrice  $G(s, x)$  de  $N_x$ . On a vu que l'on a :

$$\Gamma(s; \lambda) = \frac{1 - \phi_0}{\lambda} + \phi_0 \frac{1 - \phi}{\lambda} \frac{s}{1 - s\phi}$$

Ici,  $\phi = \phi_0 = \frac{a}{a + \lambda}$ , et on trouve :

$$\Gamma(s; \lambda) = \frac{1 - \phi}{\lambda} \frac{1}{1 - s\phi} = \frac{1}{a(1-s) + \lambda}$$

D'où

$$G(s; x) = e^{-ax(1-s)}$$

c'est à dire (loi de Poisson) :  $h_n(x) = \frac{(ax)^n}{n!} e^{-ax}$

(On peut aussi faire un calcul direct :  $p_0(x) = 1 - F(x) = e^{-ax}$ , puis :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \int_0^x \left[ \frac{d}{dy} \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{y^n}{n!} \right] e^{-ay} dy = \\ &= \int_0^x \left[ \frac{ay^n}{(n-1)!} - \frac{ay^n}{n!} \right] e^{-ay} dy = \int_0^x \frac{d}{dy} \left( \frac{ay^n}{n!} e^{-ay} \right) dy = \\ &= \frac{(ax)^n}{n!} e^{-ax} \end{aligned}$$

On notera que les nombres  $N_x$  et  $N_{x+t} - N_x$  ont la même loi, et que les nombres :

$N_b - N_a$  des points tombés dans  $(a, b)$ , et

$N_{b'} - N_{a'}$  des points tombés dans  $(a', b')$

sont indépendants dès que les intervalles  $(a, b)$  et  $(a', b')$  sont disjoints.

II - PROCESUS CYCLIQUES A DEUX ETATS

Nous allons maintenant considérer un processus dans lequel chaque point  $x > 0$  est susceptible d'appartenir à l'un ou l'autre des états  $e_0, e_1, e_2 \dots$  (en nombre fini ou infini dénombrable) : si  $x$  est interprété comme un temps, les  $e_i$  représentent les états par lesquels passe un système physique dans son évolution aléatoire. Si au contraire, on s'intéresse à un milieu à une dimension, les  $e_i$  sont les constituants de ce milieu. On a donc sur la demi-droite une succession de segments de longueurs aléatoires affectés, de manière également aléatoire, aux différents états. Mais ni ces longueurs ni ces états ne sont indépendants les uns des autres.

Nous dirons qu'un état  $e_0$  est récurrent si le processus repart à zéro chaque fois que le système entre dans l'état  $e_0$  : si  $Y_1, Y_2, \dots$  désignent les époques successives où le système entre dans  $e_0$ , ces époques constituent un processus de renouvellement, et, sur chacun des tronçons  $(Y_i, Y_{i+1})$ , l'évolution du système est indépendante de tout événement antérieur à  $Y_i$  ou postérieur à  $Y_{i+1}$ , et cette évolution est régie par la même loi pour tous ces tronçons. (On suppose  $P(Y_1 < \infty) = 1$ ).

En ce qui concerne le début du processus, on peut admettre que l'origine  $0 = Y_0$  est elle-même le début d'un état  $e_0$ , et, dans ce cas, la loi d'évolution sur  $(0, Y_1)$  est la même que sur les autres tronçons. On peut aussi supposer que l'on a un état initial et une loi d'évolution différente sur  $(0, Y_1)$ , pourvu seulement que  $P(Y_1 < \infty) = 1$ .

Désignons par  $P_k(x)$  la probabilité pour que le point  $x$  appartienne à  $e_k$  l'état  $e_k$ . On a le résultat fondamental suivant :

Théorème des états récurrents. Les limites  $\lim_{x \rightarrow \infty} P_k(x) = p_k$  existent, vérifient  $\sum_k p_k = 1$ , et ne dépendent pas du choix de la loi d'évolution choisie sur le tronçon  $(0, Y_1)$  initial, pourvu seulement que l'espérance  $\mu$  de la durée du cycle soit finie

a/ Supposons d'abord que 0 soit le début d'un état  $e_0$ . Considérons l'évènement " $Y_1 > x$  et  $x$  est dans l'état  $e_k$ ". Soit  $R_k(x)$  sa probabilité. On a :

$$\sum_k R_k(x) = P(Y_1 > x) = 1 - F(x)$$

( $F$  est la fonction de répartition des longueurs des tronçons successifs, c'est à dire la loi de la durée d'un cycle complet). L'évènement " $x \in e_k$ " se réalise de deux manières incompatibles :

- ou bien  $x \in e_k$  et  $Y_1 > x$ , avec la probabilité  $R_k(x)$
- ou bien  $Y_1$  a pris une valeur  $y \leq x$  : dans ce dernier cas, la probabilité conditionnelle de l'évènement qui nous intéresse est  $P_k(y-x)$ , puisque  $e_0$  est récurrent. D'où :

$$P_k(x) = R_k(x) + \int_0^x P_k(y-x) f(y) dy$$

Le théorème de renouvellement donne ensuite :

$$P_k(x) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^\infty R_k(x) dx = h_k$$

Enfin  $\sum_k R_k(x) = 1 - F(x)$  entraîne  $\sum_k p_k = 1$ .

b/ Si l'on a une loi d'évolution différente sur le premier tronçon, posons :

$$F_0(y) = P(Y_1 < y) ; \quad \bar{R}_k(x) = P(Y_1 > y \text{ et } x \in e_k)$$

et  $\bar{P}_k(x) = P(x \in e_k)$ . On a cette fois :

$$\bar{P}_k(x) = \bar{R}_k(x) + \int_0^x \bar{P}_k(x-y) f_0(y) dy$$

Mais  $\bar{R}_k(x) \leq 1 - F_0(x)$  tend vers 0, et le produit de convolution  $\bar{P}_k * f_0$  a même limite à l'infini que  $\bar{P}_k$ , d'où à nouveau :

$$\bar{P}_k(x) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \bar{R}_k(x) dx = h_k$$

Ainsi, pourvu seulement que la loi  $F$  du temps de retour de l'état récurrent admette une espérance  $\mu$  finie, le processus est ergodique, et, en particulier, on peut trouver une loi initiale pour laquelle il est stationnaire.

Exemples - 1/ Processus de renouvellement à deux états. On fait alterner sur la droite des segments de  $e_0$  et de  $e_1$ , dont les longueurs sont indépendantes et obéissent aux lois  $F_0$  et  $F_1$ . Chacun des deux états est récurrent. La loi  $F$  de la durée du cycle admet la densité  $f_0 * f_1$  (somme de deux longueurs indépendantes de lois  $f_0$  et  $f_1$ ). On a ici :  
 $R_0(x) = 1 - F_0(x)$ , d'où :

$$h_0 = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1 - F_0(x)] dx$$

Soient  $m_0$  et  $m_1$  les espérances des lois  $F_0$  et  $F_1$ . On a  $m_0 = \int_0^{\infty} [1 - F_0(x)] dx$   
 et  $\mu = m_0 + m_1$ , d'où :

$$(8) \quad h_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad h_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$$

2/ Processus cyclique à deux états. Soit un processus à deux états  $e_0, e_1$  tel que l'état  $e_0$  soit récurrent. La longueur d'un segment  $e_0$  est donc indépendante des événements antérieurs à l'origine de ce segment. Par contre, la longueur d'un segment  $e_1$  n'est plus indépendante de la longueur du segment  $e_0$  qui le précède. Nous désignerons par  $F(x_0; x_1)$  la loi à deux variables des longueurs  $X_0$  et  $X_1$  des deux segments  $e_0$  et  $e_1$  d'un cycle. La granulométrie (en nombre) des segments  $e_0$  est la loi marginale  $F_0(x) = F(x, \infty)$ , et celle des segments  $e_1$  est  $F_1(x) = F(\infty, x)$ . La granulométrie conditionnelle  $f_1(x|x_0)$  de la longueur d'un segment  $e_1$  précédé d'un segment  $e_0$  de longueur  $x_0$  admet la densité :

$$f_1(x|x_0) = \frac{f(x_0, x)}{f(x_0)}$$



La durée  $L$  d'un cycle, somme des deux variables  $X_0$  et  $X_1$ , non indépendantes, admet la loi  $F(p)$  de densité :

$$f(p) = \int_0^p f(x, p-x) dx$$

Posons :  $\Phi(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x_0 - \mu x_1} f(x_0, x_1) dx_0 dx_1$

On a les transformations de Laplace suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} p_0 \rightarrow \Phi_0(\lambda) = \Phi(\lambda, 0) \\ p_1 \rightarrow \Phi_1(\lambda) = \Phi(0, \lambda) \\ f \rightarrow \Psi(\lambda) = \Phi(\lambda, \lambda) \end{cases}$$

C'est à l'étude de ce processus cyclique que nous consacrons ce chapitre.

Le processus de renouvellement à deux états de l'exemple 1/ en est un cas particulier (cas où  $F(x_0, x_1) = F_1(x_1) F_0(x_0)$ )

Les limites ergodiques  $p_0$  et  $p_1$  sont encore :

$$(8) \quad p_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \quad p_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$$

(même démonstration que dans l'exemple 1/ à partir du théorème sur les états récurrents). On formera sans difficulté la loi initiale pour laquelle le processus est stationnaire.

Nombre spécifique. Désignons par  $N_x$  le nombre de segments  $e_0$  rencontrés de 0 à  $x$  (plus précisément : le nombre des extrémités gauches de tels segments contenues dans  $(0, x)$ ). Comme ces extrémités gauches constituent un processus de renouvellement de loi  $F$ , on peut appliquer les résultats du chapitre précédent. En particulier :

$$(10) \quad \begin{cases} \nu = \frac{1}{x} E(N_x) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_0 + m_1} \\ \frac{D^2(N_x)}{[E(N_x)]^2} = \frac{1}{E(N_x)} \frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{1}{E(N_x)} \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_1}{(m_0 + m_1)^2} \end{cases}$$

( $\mu$  et  $\sigma^2$  moyenne et variance de la durée du cycle,  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_{01}$  variances et covariance des durées des deux constituants du cycle)

### La Covariance.

Proposons nous de calculer les fonctions de covariance du processus cyclique stationnaire à deux états :

$$C_{ij}(h) = P(x \in e_i, x+h \in e_j)$$

Les relations

$$\begin{cases} C_{11}(h) = h_1 - C_{10}(h) \\ C_{00}(h) = h_0 - C_{01}(h) \\ C_{10}(h) = C_{01}(h) \end{cases}$$

montrent qu'il suffit, par exemple, de calculer  $C_{10}(h)$ .

a/ Calculons d'abord la probabilité conditionnelle  $H_0(h)$  d'avoir  $x+h \in e_0$  sachant que  $x$  est l'origine d'un segment  $e_0$ . Cet événement se réalise de deux façons : ou bien ce segment  $e_0$  a une longueur  $\gg h$  ; ou bien le cycle inauguré en  $x$  s'achève en  $x+y$ ,  $y < h$ , et la probabilité conditionnelle de l'évènement qui nous intéresse est alors  $H_0(h-y)$ . D'où :

$$H_0(h) = 1 - F_0(h) + \int_0^h f(y) H_0(h-y) dy$$

Appliquons la transformation de Laplace :

$$H_0 \rightarrow \mathcal{D}_0, \quad f_0 \rightarrow \Phi_0, \quad f \rightarrow \Psi$$

Il vient :

$$\mathcal{D}_0 = \frac{1 - \Phi_0}{\lambda} + \mathcal{D}_0 \Psi$$

c'est à dire :

$$(14) \quad \mathcal{D}_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{1 - \Phi_0}{1 - \Psi}$$

b/ Calculons maintenant  $C_{10}(h)$ , ou plutôt sa transformée de Laplace  $\chi_{10}$ .  
 L'évènement " $x \in e_1$  et  $x+h \in e_0$ " se décompose comme suit :  $x \in e_1$   
 (probabilité  $p_1 = \frac{m_1}{m_1+m_0}$ ) ; le segment  $e_1$  auquel appartient  $x$   
 s'arrête en  $x+y$ ,  $y \leq h$  (probabilité  $\int_0^h \frac{1-F_1(y)}{m_1} dy$  : granulométrie  
 résiduelle du cas stationnaire); enfin, ce point  $x+y$  étant l'origine  
 d'un nouveau cycle indépendant du passé, on a alors  $x+h \in e_0$  avec la  
 probabilité conditionnelle  $H_0(h-y)$ , d'où :

$$C_{10}(h) = h_1 \int_0^h \frac{1-F_1(y)}{m_1} H_0(h-y) dy$$

Prenons la transformée de Laplace, en remarquant de plus que  $\frac{h_1}{m_1} = \frac{1}{m_0+m_1}$

$$\chi_{10}(\lambda) = \frac{1}{m_0+m_1} \frac{1-\phi_1}{\lambda} \psi_0$$

Compte tenu de (11), on trouve donc :

$$(12) \quad \chi_{10} = \frac{1}{m_0+m_1} \frac{(1-\Phi_1)(1-\Phi_0)}{\lambda^2(1-\psi)}$$

Cette formule capitale permet de calculer la covariance à partir des  
 deux granulométries en nombre  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  et de la loi  $\psi$  du cycle :  
 on n'oubliera pas qu'elle ne s'applique qu'aux processus cycliques.

Remarque. La formule (12) montre que la covariance  $C_{10}(h)$  vérifie l'  
 équation de convolution :

$$(12') \quad C_{10}(h) = h_1 \frac{1-F_1}{m_1} * (1-F_0) + \psi * C_{10}$$

On peut obtenir directement (12') par le raisonnement plus subtil suivant :  
 l'évènement " $0 \in e_1$  et  $h \in e_0$ " se réalise comme suit :

- ou bien le segment  $e_1$  contenant 0 s'arrête en  $y < h$ ,  
 et le segment  $e_0$  suivant contient  $h$  : probabilité

$$h_1 \int_0^h \frac{1-F_1(y)}{m_1} (1-F_0(h-y)) dy = h_1 \frac{1-F_1}{m_1} * (1-F_0)$$

- ou bien un cycle complet ( $e_0, e_1$ ) s'intercale entre 0.

et  $h$ . Soient  $\ell$  la longueur de ce cycle ( $\ell < h$ ), et  $a$  et  $a+\ell$  ses deux extrémités. La position  $a$  de son origine ne joue aucun rôle : comme  $a+\ell$  est l'origine d'un nouveau cycle indépendant de ce qui précède, tout se passe comme si l'on avait retranché la longueur  $\ell$  au segment  $(0, h)$  en recollant les deux extrémités  $a$  et  $a+\ell$  du cycle intermédiaire. La probabilité conditionnelle de notre événement est donc  $C_{10}(h-\ell)$  lorsque  $\ell$  est fixé, d'où :

$$C_{10}(h) = h \int_0^h \frac{1-F_1(x)}{m_1} [1-F_0(h-x)] dx + \int_0^h f(e) C_{10}(h-e) de$$

c'est à dire (12'). On notera que ce raisonnement direct ne s'appliquerait pas à  $C_{01}(h)$ , puisque  $e_0$  seul est récurrent. Mais  $C_{01}(h) = C_{10}(h)$  et, de fait, la formule (12) est symétrique en  $e_0, e_1$ .

Exemple 1/ Pseudo-périodicité. Considérons le processus de renouvellement à deux états, où les longueurs successives des segments  $e_0, e_1$  sont indépendantes et obéissent à la même loi gamma de densité =

$$f_0(x) = f_1(x) = a^2 x e^{-ax}$$

On a

$$\Phi_0 = \Phi_1 = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^2 ; \quad \psi = \Phi_0 \Phi_1 = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^4$$

et la formule (12) donne :

$$\chi_{10} = \frac{a}{4\lambda^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^2} = \frac{a}{4\lambda^2} \cdot \frac{(\lambda+a)^2 - a^2}{(\lambda+a)^2 + a^2}$$

La fonction  $C_{11}(h) - (p_1)^2 = p_1 p_0 - C_{10}(h) = \frac{1}{4} - C_{10}(h)$  admet donc la transformée :

$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{a}{4\lambda^2} \cdot \frac{(\lambda+a)^2 - a^2}{(\lambda+a)^2 + a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+\lambda}{(a+\lambda)^2 + a^2}$$

Or, l'exponentielle-cosinus  $e^{-ax} \cos(bx)$  a pour transformée  $\frac{a+\lambda}{(a+\lambda)^2 + b^2}$

On a donc :

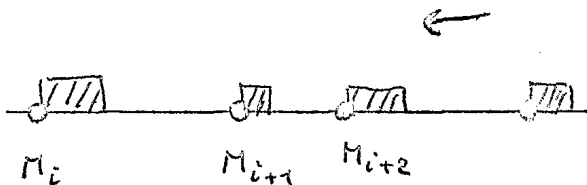
$$C_{11}(h) = C_{00}(h) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-ax} \cos ax$$

Bien qu'il s'agisse d'un pur processus de renouvellement, avec indépendance de l'avenir et du passé en tout point de changement d'état, le phénomène présente une périodicité apparente. L'origine de cette pseudo-périodicité vient du fait que les granulométries  $F_0$  et  $F_1$  sont déjà assez resserrées autour de leurs modes : si la longueur du cycle varie peu autour de son mode, on observe une périodicité dont la période est de l'ordre de ce mode, et qui s'amortit d'autant plus lentement que la loi du cycle est plus concentrée autour de son mode.

Cet exemple doit mettre en garde contre une interprétation génétique trop hâtive des périodicités que l'on observe expérimentalement. Elles n'impliquent en aucune manière que le phénomène résulte de la déformation d'un réseau périodique parfait qui aurait préexister à l'état actuel.

Exemple 2/ Schéma de migration. Soit un milieu à une dimension présentant

une teneur initiale  $p_0$  constante en un certain élément migrant  $e_e$ . On met en place des germes aléatoires  $M_i$  selon un processus de Poisson de paramètre  $a$ , et chaque germe  $M_i$  rassemble sur sa ~~droite~~ <sup>droite</sup> la totalité de la substance migrante présente entre  $M_i$  et  $M_{i+1}$  : si  $L$  est la distance



intergermes, on observe les segments  $p_0 L$  et  $p_1 L$  de  $e_0$  et  $e_1$  ( $p_0 + p_1 = 1$ )

La longueur  $L$  du cycle obéit à la loi exponentielle  $1 - F(L) = e^{-aL}$ .

Les granulométries en nombre sont encore exponentielle, avec des paramètres modifiés :

$$1 - F_0(\rho) = e^{-\frac{a}{r_0} \rho} \quad ; \quad 1 - F_1(\rho) = e^{-\frac{a}{r_1} \rho}$$

On a donc :

$$\psi = \frac{a}{a + \lambda} \quad , \quad \bar{\Phi}_0 = \frac{a}{a + r_0 \lambda} \quad , \quad \bar{\Phi}_1 = \frac{a}{a + r_1 \lambda}$$

La formule (12) donne ensuite :

$$\chi_{10} = \frac{a h_0 h_1}{\lambda} \frac{a + \lambda}{(a + h_0 \lambda)(a + h_1 \lambda)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \chi_{11} - \frac{h_1^2}{\lambda} &= \frac{h_1 h_0}{\lambda} - \chi_{10} = \frac{(h_0 h_1)^2 \lambda}{(a + h_0 \lambda)(a + h_1 \lambda)} \\ &= \frac{(h_0 h_1)^2}{h_1 - h_0} \left[ \frac{1}{a + h_0 \lambda} - \frac{1}{a + h_1 \lambda} \right] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$C_{11}(h) - h_1^2 = \frac{h_0 h_1}{h_1 - h_0} \left[ h_1 e^{-\frac{a}{h_0} h} - h_0 e^{-\frac{a}{h_1} h} \right]$$

### La Portée.

Dans un processus stationnaire à deux états, on appelle portée le nombre :

$$a = \frac{2}{h_0 h_1} \int_0^{\infty} [C_{11}(h) - h_1^2] dh = \frac{2}{h_0 h_1} \int_0^{\infty} [C_{00}(h) - h_0^2] dh$$

L'intérêt de cette notion est le suivant : sur l'intervalle  $(0, l)$ , la longueur cumulée  $L_0(l)$  occupée par les segments  $e_0$  est une variable aléatoire d'espérance  $p_0 l$ . Le rapport  $\frac{L_0(l)}{l}$  (teneur moyenne en  $e_0$  du segment  $l$ ) a pour espérance  $p_0$  et sa variance, pour  $l$  grand, a pour partie principale :

$$(13) \quad \frac{D^2 [L_0(l)]}{l^2} = \frac{a}{l} h_0 h_1$$

L'échantillon de longueur  $l$  est donc équivalent à un nombre  $n = l/a$  de prélèvements ponctuels indépendants de variance  $p_0 p_1$ . Ainsi, la portée donne une mesure de la dimension des structures du phénomène, et permet de plus de résoudre le problème de l'estimation de la teneur  $p_0$  en  $e_0$  à partir de la longueur  $L_0(l)$  occupée sur un segment de longueur  $l$ .

Calculons la portée  $a$  dans le cas d'un cycle à deux états. Nous désignerons par  $m_0$  et  $m_1$ ,  $\sigma_0^2$ ,  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_{01}$  les espérances, les variances et la covariance des longueurs des deux segments  $e_0$ ,  $e_1$  d'un cycle :

$$\Phi_0(\lambda) = 1 - \lambda m_0 + \frac{1}{2} \lambda^2 (m_0^2 + \sigma_0^2) + \dots$$

$$\Phi_1(\lambda) = 1 - \lambda m_1 + \frac{1}{2} \lambda^2 (m_1^2 + \sigma_1^2) + \dots$$

$$\psi(\lambda) = 1 - \lambda(m_0 + m_1) + \frac{1}{2} \lambda^2 [(m_0 + m_1)^2 + \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + 2\sigma_{01}] + \dots$$

On a :

$$a = \frac{2}{h_1 h_0} \int_0^{\infty} [h_1 h_0 - c_{01}(h)] dh = \frac{2}{h_1 h_0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{h_1 h_0}{\lambda} - \chi_{01}(\lambda) \right]$$

Or (12) conduit au développement limité :

$$\begin{aligned} \chi_{10}(\lambda) &= \frac{m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^2} \frac{1 - \frac{\lambda}{2} \left( m_0 + \frac{\sigma_0^2}{m_0} + m_1 + \frac{\sigma_1^2}{m_1} \right)}{\lambda \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \left( m_0 + m_1 + \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + 2\sigma_{01}}{m_0 + m_1} \right) \right]} = \\ &= \frac{h_0 h_1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\sigma_0^2}{m_0} + \frac{\sigma_1^2}{m_1} - \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + 2\sigma_{01}}{m_0 + m_1} \right) \right] \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_0^2}{m_0} + \frac{\sigma_1^2}{m_1} - \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + 2\sigma_{01}}{m_0 + m_1} = \\ &= \frac{1}{m_0 m_1 (m_0 + m_1)} [m_1 \sigma_0^2 + m_0 \sigma_1^2 - 2m_1 m_0 \sigma_{01}] = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \left[ \frac{\sigma_0^2}{m_0^2} + \frac{\sigma_1^2}{m_1^2} - \frac{2\sigma_{01}}{m_0 m_1} \right] \end{aligned}$$

L'expression entre crochets est la variance de  $\frac{X_0}{m_0} - \frac{X_1}{m_1}$ ,  $X_0$  et  $X_1$  désignant les longueurs des états  $e_0$  et  $e_1$  d'un même cycle. On a donc :

$$(14) \quad a = h_0 h_1 (m_0 + m_1) D^2 \left[ \frac{X_0}{m_0} - \frac{X_1}{m_1} \right]$$

formule valable pour tout processus cyclique. Dans le cas d'un processus de renouvellement à deux états, on a  $\sigma_{01} = 0$ , et la formule se réduit à :

$$a = h_0 h_1 (m_0 + m_1) \left[ \frac{\sigma_0^2}{m_0^2} + \frac{\sigma_1^2}{m_1^2} \right]$$

soit :

$$a = h_1 \frac{\sigma_0^2}{m_0} + h_0 \frac{\sigma_1^2}{m_1}$$

remarque. On peut aussi estimer la teneur en  $e_0(p_0)$  en prenant un nombre donné  $n$  de cycles entiers, en mesurant les longueurs totales  $L_0(n)$  et  $L_1(n)$  qui reviennent à chacun des deux états dans ces  $n$  cycles, et en prenant le rapport  $\frac{L_0(n)}{L_0(n)+L_1(n)}$ . On démontre que cet estimateur a une variance relative asymptotiquement égale à celle de l'estimateur précédent (rapport  $L_0(l) / \bar{L}$ , où la longueur totale  $\bar{L}$  est choisie d'avance.

### Processus de Markov à deux états.

Considérons le cas particulier du processus de renouvellement à deux états dont les granulométries sont exponentielles :

$$1 - F_0(x) = e^{-a_0 x} \quad , \quad 1 - F_1(x) = e^{-a_1 x}$$

D'après la propriété caractéristique de la loi exponentielle, les granulométries résiduelles sont identiques aux granulométries en nombre  $F_0$  et  $F_1$ . Cela signifie que, si l'on sait, par exemple, que le point  $x$  appartient à l'état  $e_0$ , le processus se déroule à droite de  $x$  comme si  $x$  était l'origine d'un segment  $e_0$ . Il y a donc indépendance conditionnelle entre tout événement antérieur et tout événement postérieur à  $x$  dès que l'on connaît l'état du point  $x$ . Nous dirons que le processus est markovien chaque fois que cette indépendance conditionnelle sera réalisée.

La covariance  $C_{ij}(h)$  se calcule à partir de (12) avec

$$\Phi_0 = \frac{a_0}{a_0 + \lambda} \quad , \quad \Phi_1 = \frac{a_1}{a_1 + \lambda} \quad , \quad \psi = \frac{a_0 a_1}{(a_0 + \lambda)(a_1 + \lambda)}$$

On trouve :

$$\chi_{10}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{a_0 a_1}{a_0 + a_1} \frac{1}{a_0 + a_1 + \lambda}$$

D'où :

$$C_{10}(h) = \frac{a_0 a_1}{a_0 + a_1} \int_0^h e^{-(a_0 + a_1)x} dx = \frac{a_0 a_1}{(a_0 + a_1)^2} [1 - e^{-(a_0 + a_1)h}]$$



D'ailleurs :

$$m_0 = \frac{1}{a_0}, \quad m_1 = \frac{1}{a_1}, \quad m_0 + m_1 = \frac{a_0 + a_1}{a_0 a_1}$$

$$h_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} = \frac{a_1}{a_0 + a_1}, \quad h_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} = \frac{a_0}{a_0 + a_1}$$

D'où :

$$C_{10}(h) = h_0 h_1 [1 - e^{-(a_0 + a_1)h}]$$

et par suite :

$$\begin{cases} C_{00}(h) = h_0 [h_0 + h_1 e^{-(a_0 + a_1)h}] \\ C_{11}(h) = h_1 [h_1 + h_0 e^{-(a_0 + a_1)h}] \end{cases}$$

Probabilités de transition. D'après la propriété markovienne, le processus est défini par les probabilités de transition  $P_{ij}(h) = \frac{1}{h_i} C_{ij}(h)$  (probabilité conditionnelle d'avoir  $x+h \in e_j$  si  $x \in e_i$ ). Elles constituent la matrice de transition :

$$P(h) = \begin{pmatrix} h_0 + h_1 e^{-a_0 h} & h_1 - h_1 e^{-a_0 h} \\ h_0 - h_0 e^{-a_1 h} & h_1 + h_0 e^{-a_1 h} \end{pmatrix}$$

(avec  $a = a_0 + a_1$ ). Cette matrice vérifie la relation de Markov :

~~$$P(R_1 + R_2) = P(R_1) P(R_2)$$~~

$$P(R_1 + R_2) = P(R_1) P(R_2)$$

CHAINES DE MARKOV (homogènes, à temps discret)

Nous considérons un système physique susceptible de prendre l'un ou l'autre des états  $e_1, e_2, \dots$  en nombre fini ou infini dénombrable. Nous observons ce phénomène aux instants discrets  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Nous supposons :

a/ (Homogénéité dans le temps) Les probabilités de transition sont stationnaires : autrement dit, la probabilité conditionnelle d'avoir l'état  $e_j$  au temps  $m+1$  sachant qu'on avait l'état  $e_i$  au temps  $m$  ne dépend pas de l'instant considéré  $m$ . Nous désignerons cette probabilité de transition par  $\pi_{ij}$

b/ (Propriété markovienne) Conditionnellement lorsque l'on connaît l'état pris par le système à un instant  $m$ , il y a indépendance entre tout événement antérieur et tout événement postérieur à  $m$  : ou encore, lorsque le présent est connu, l'avenir ne dépend plus du passé.

Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées, on dit que le processus est une chaîne de Markov homogène (à temps discret).

Probabilités de transition d'ordre n. Sachant qu'on a  $e_i$  au temps  $m$ , la probabilité d'avoir  $e_j$  au temps  $m+2$  est :

$$\pi_{ij}^{(2)} = \sum_k \pi_{ik} \pi_{kj}$$

Cela résulte du fait que l'on doit passer par un état quelconque  $e_k$  au temps intermédiaire  $m+1$ , et que la probabilité conditionnelle d'avoir  $e_j$  au temps  $m+2$  est alors  $\pi_{kj}$  d'après la propriété de Markov.

Plus généralement, si  $\pi_{ij}^{(n)}$  est la probabilité de transition de  $e_i$  au temps  $m$  à  $e_j$  au temps  $m+n$ , on a de la même façon :

$$(M) \quad \pi_{ij}^{(m+n)} = \sum_k \pi_{ik}^{(m)} \pi_{kj}^{(n)}$$

(relation de Markov)

Sous forme matricielle, la relation de Markov exprime que la matrice de transition d'ordre  $n$  est la puissance  $n^{\text{ème}}$  de la matrice  $\Pi$  :

$$(M') \quad \Pi^{(n)} = \Pi^n$$

### Classification des états.

Etats essentiels et chaînes irréductibles. Nous dirons qu'il existe un chemin de l'état  $e_i$  à l'état  $e_j$  (ou que  $e_j$  peut être atteint à partir de  $e_i$ ) si une transition de  $e_i$  à  $e_j$  est possible avec une probabilité non nulle, c'est à dire s'il existe un entier  $n > 0$  avec  $\Pi_{ij}^{(n)} > 0$

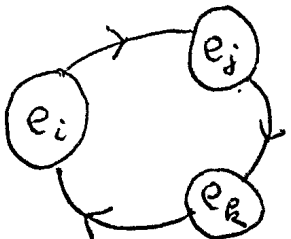
Un état  $e_i$  est non-essentiel s'il existe un état  $e_j$  accessible à partir de  $e_i$  sans chemin de retour de  $e_j$  à  $e_i$ . Un état  $e_i$  est essentiel si pour tout  $e_j$  accessible à partir de  $e_i$  il existe un chemin de retour de  $e_j$  à  $e_i$ .

A partir d'un état essentiel, on ne peut atteindre que des états essentiels.

En effet, soit  $e_i$  un état essentiel et  $e_j$  un état accessible à partir de  $e_i$ . Montrons que  $e_j$  est essentiel. Si  $e_k$  est atteint à partir de  $e_j$ , il existe un chemin joignant  $e_i$  à  $e_k$  (puisque l'on va de  $e_i$  à  $e_j$  puis de  $e_j$  à  $e_k$  avec des probabilités non nulles). Comme  $e_i$  est essentiel,

il existe un chemin de retour de  $e_k$  à  $e_i$ , et par suite on peut aller de  $e_k$  à  $e_j$  (en passant par  $e_i$ ) :  $e_j$  est donc essentiel.

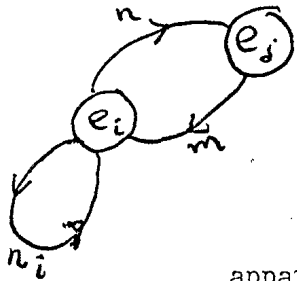
Entre états essentiels, la relation "il existe un chemin de  $e_i$  à  $e_j$ " est réflexive (on peut aller de  $e_i$  à  $e_i$ , puisque l'on peut revenir à  $e_i$  à partir de tout état que l'on a atteint en partant de  $e_i$ ); elle est symétrique (s'il y a un chemin de  $e_i$  à  $e_j$ , il y a un chemin de retour de  $e_j$  à  $e_i$  d'après la définition des états essentiels); elle est transitive enfin (si on peut aller de  $e_i$  à  $e_j$  puis de  $e_j$  à  $e_k$ , on peut aussi aller de  $e_i$  à  $e_k$  avec une probabilité non nulle). Cette relation est donc une équivalence. La classe d'un état essentiel  $e_i$  selon cette



équivalence est constituée de tous les états  $e_j$  (nécessairement essentiels) que l'on peut atteindre à partir de  $e_i$ . Si donc à un instant donné le système est dans un état essentiel  $e_i$ , il y a une probabilité unité pour qu'il ne prenne plus par la suite que des états appartenant à la classe de  $e_i$ .

Nous dirons qu'une chaîne est irréductible si elle ne comporte que des états essentiels constituant une classe unique, autrement dit si tout état peut être atteint à partir de tout autre état. Nous ne considérerons plus, dans ce qui suit, que des chaînes irréductibles.

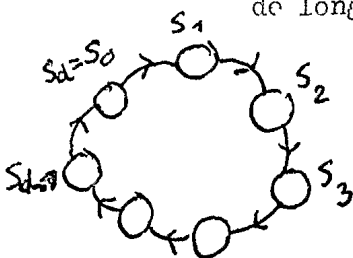
Périodicité d'une chaîne irréductible. Soit  $e_i$  un état d'une chaîne irréductible,  $N_i$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $\prod_{i,i}^{(n)} > 0$  (longueurs des boucles d'origine  $e_i$ ) et soit  $d_i$  le P.G.C.D. de  $N_i$ . On dit que  $d_i$  est la période de l'état  $e_i$  (en effet, toute boucle allant de  $e_i$  à  $e_i$  a une longueur multiple de  $d_i$ ). Soit de même  $e_j$  un autre état, et  $d_j$  sa période, qui est le P.G.C.D. de  $N_j$ .



Montrons que l'on a  $d_i = d_j$ . Comme la chaîne est irréductible, il y a un chemin  $e_i \rightarrow e_j$  de longueur  $n$ , et un chemin  $e_j \rightarrow e_i$  de longueur  $m$ .  $n+m$ , longueur de la boucle  $e_i \rightarrow e_j \rightarrow e_i$ , ou aussi bien de  $e_j \rightarrow e_i \rightarrow e_j$ , appartient à la fois à  $N_i$  et à  $N_j$ . Si  $n_i$  est un entier de  $N_i$ , il existe une boucle  $e_i \rightarrow e_i$  de longueur  $n_i$ , donc aussi un chemin  $e_j \rightarrow e_i \rightarrow$  (boucle  $e_i \rightarrow e_i$ )  $\rightarrow e_j$  de longueur  $n_i + n + m$ . Donc  $n_i + n + m \in N_j$ . Comme  $d_j$  divise  $n+m$  et  $n_i+n+m$ , il divise  $n_i$ . Divisant tout  $n_i \in N_i$ ,  $d_j$  divise  $d_i$ , et par suite  $d_j \leq d_i$ . On montre de la même façon  $d_i \leq d_j$ , d'où l'égalité  $d_i = d_j$ :

Dans une chaîne irréductible, tous les états ont la même période  $d$ . On dit que  $d$  est la période de la chaîne. Si  $d = 1$ , on dit que la chaîne est apériodique.

Remarque. Si l'on a un chemin  $e_i \rightarrow e_j$  de longueur  $n$  et un chemin  $e_j \rightarrow e_i$  de longueur  $m$ ,  $n+m$  est un multiple de  $d$  : tout chemin joignant  $e_i$  à  $e_j$



a donc une longueur congrue à  $-m$  modulo  $d$ , c'est à dire une longueur de la forme  $kd - m$  ( $m$  fixe,  $k$  entier) Il en résulte que la relation : "il existe un chemin de  $e_i$  à  $e_j$  dont la longueur est un multiple de  $d$ " (qui entraîne que tout chemin joignant  $e_i$  et  $e_j$  a une longueur multiple de  $d$ ) est une relation d'équivalence. Cette équivalence admet des classes  $S_0, S_1, \dots, S_{d-1}$  :

partant d'un état de  $S_0$  au temps 0, on passe forcément par un état de  $S_1$  au temps 1, puis par un état de  $S_2$  au temps 2, ... par un état de  $S_{d-1}$  au temps  $d-1$  et enfin par un état de  $S_d = S_0$  au temps  $d$ . Après quoi, le cycle recommence. En particulier, si l'on se restreint aux seuls instants  $kd$  multiples entiers de la période  $d$ , on n'observera jamais que des états de la classe  $S_0$  de l'état initial, et, avec  $k$  comme temps, tout se passera comme si l'on avait affaire à une chaîne apériodique (dont les états seraient ceux de  $S_0$ )

Etats transitoires, états persistants. Partant de  $e_i$  au temps  $t=0$ , le système retourne en  $e_i$  au temps  $n$  avec la probabilité  $\pi_{ii}^{(n)}$ . On dira que ce retour en  $e_i$  est un premier retour si les états que prend le système aux temps intermédiaires  $t = 1, 2 \dots n-1$  sont tous différents de  $e_i$ . On désignera par  $R_i(n)$  la probabilité pour que ce premier retour ait lieu au temps  $n$ , et par :

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} R_i(n).$$

la probabilité pour que le système repasse au moins une fois par l'état  $e_i$ . Si  $R_i = 1$ , on dit que l'état  $e_i$  est persistant (il y a une probabilité unité pour que le système repasse au moins une fois par  $e_i$ , donc aussi une probabilité unité pour qu'il repasse une infinité de fois par  $e_i$ ).

Si de plus le temps de retour moyen :

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n R_i(n)$$

est fini,  $e_i$  est un état persistant positif. Si  $e_i$  est persistant, mais de temps de retour moyen  $\mu_i$  infini, on dit que  $e_i$  est un état nul.

Enfin, si  $R_i < 1$  on dit que l'état  $e_i$  est transitoire : il y a une probabilité non nulle pour que le système ne repasse plus jamais par  $e_i$ , donc aussi une probabilité unité pour que le système ne repasse par  $e_i$  qu'un nombre fini (aléatoire) de fois.

Remarque. Un état non essentiel est nécessairement transitoire. La réciproque est fautive en général (pour les chaînes infinies, il peut y avoir des états essentiels transitoires) mais vraie cependant dans le cas des chaînes finies (voir ci-dessous).

Voici deux théorèmes importants, que nous énonçons sans démonstration :

Th. 1. Un état  $e_i$  est transitoire ou persistant selon que la série  $\sum_n \pi_{ii}^{(n)}$  converge ou diverge. C'est un état nul si la série diverge et si l'on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ .

Th. 2. Dans une chaîne irréductible et aperiodique, les limites :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{ij}^{(n)} = \omega_j$$

existent, et ne dépendent pas de l'état initial  $e_i$  mais seulement de l'état terminal  $e_j$ . Si cet état  $e_j$  est transitoire ou persistant et nul, on a  $\omega_j = 0$ . Si  $e_j$  est persistant positif, cette limite est égale à l'inverse du temps de retour moyen :  $\omega_j = 1/\mu_j$ , et les états sont tous positifs..

Les  $\omega_j$  constituent alors un système de probabilités stationnaires, nécessairement unique, vérifiant les relations :

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_j \omega_j = 1 \\ \sum_j \omega_j \pi_{jk} = \omega_k \end{cases}$$

Inversement, si l'on trouve une solution  $\omega_j$  du système (2), les états du système sont tous persistants positifs, et l'on a :  $\pi_{ij}^{(n)} \rightarrow \omega_j = \frac{1}{\mu_j}$

Le Th. 2 exprime les conditions d'ergodicité de la chaîne irréductible. On peut le déduire d'une version discrète du théorème sur les états récurrents. On notera surtout que la limite (1) est indépendante de l'état initial : l'influence de ces conditions initiales s'estompe avec le temps, et finit par s'effacer complètement.

Dans les applications, c'est surtout la réci-proque du Th. 2 qui est intéressante : si l'on peut trouver une solution  $\bar{w}_j$  du système (2), (ce qui est facile dans le cas fini : (2) est alors un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues), ces  $\bar{w}_j$  coïncident avec les limites des  $\pi_{ij}^{(n)}$  que l'on peut ainsi déterminer sans itérer explicitement la matrice  $\Pi$  et de plus l'inverse de  $\bar{w}_j$  est le temps de retour moyen de l'état  $e_j$ .

Notons quelques conséquences :

1/ Dans une chaîne irréductible et apériodique, tous les états sont de même nature. En effet, si  $e_i$  est un état transitoire, montrons que tout état  $e_j$  est transitoire : soient  $m$  et  $m'$  des entiers avec  $\pi_{ij}^{(m)} > 0$  et  $\pi_{ji}^{(m')} > 0$ . On a :

$$\pi_{ij}^{(m)} \pi_{jj}^{(n)} \pi_{ji}^{(m')} \leq \pi_{ii}^{(m+m'+n)}$$

et par suite la série  $\sum_n \pi_{jj}^{(n)}$  converge si  $\sum_i \pi_{ii}^{(n)} < \infty$

Si maintenant  $e_i$  est persistant ~~XXXXXX~~ tout  $e_j$  est persistant (sinon  $e_i$  serait transitoire d'après ce qui précède). Si de plus  $e_i$  est nul,  $\mu_i = \infty$  entraîne  $\mu_j = \infty$  (puisque l'on va de  $e_i$  à  $e_j$  avec une probabilité non nulle). Enfin, si  $e_i$  est persistant et positif, il en est de même de tout  $e_j$  (si  $e_j$  était transitoire ou nul, il en serait de même de  $e_i$ )

2/ Dans une chaîne irréductible finie, tous les états sont persistants

et positifs. D'après 1/, en effet, tous les états sont de même nature.

S'ils étaient tous transitoires, et puisque le nombre  $N$  des états est fini, il y aurait une probabilité non nulle pour que, partant d'un état donné, le système ne repasse plus jamais par aucun des états du système au delà d'un temps fini, ce qui est absurde. Si  $e_i$  était un état nul, tous les états seraient nuls, et on aurait  $\pi_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$  quelque soit  $j$  : mais

on a toujours  $\sum_{j=1}^N \pi_{ij}^{(n)} = 1$ , et cette relation passe à la limite  $n \rightarrow \infty$ , puisque  $N$  est fini, et il n'est pas possible que tous les

$\pi_{ij}^{(n)}$  tendent vers 0.

IV - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT A n ETATS

Nous appellerons processus de renouvellement à n états  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , le processus obtenu en faisant se succéder sur la droite des segments de longueurs aléatoires affectés à des états aléatoires (choisis parmi les  $e_i$ ) et vérifiant les deux conditions suivantes :

1/ La succession des états le long de la droite est indépendante des longueurs qui leur sont affectées, et constitue une chaîne de Markov à temps discret (homogène et irréductible). Nous désignerons par  $\pi_{ij}$  la matrice de transition de cette chaîne, et par  $\omega_j$  le système de probabilités stationnaires (qui existe, d'après le ch. III) vérifiant :

$$\omega_k = \sum_j \omega_j \pi_{jk}$$

2/ La longueur d'un segment affecté à un état  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) est indépendante des événements antérieurs à son origine ou postérieurs à son extrémité, et obéit à une loi  $F_i$  (granulométrie en nombre de l'état  $e_i$ ) qui ne dépend que de l'état  $e_i$ .

On notera que chacun des états  $e_i$  est récurrent, au sens de la définition du ch. II. Il ne s'agit cependant plus tout à fait d'un processus de renouvellement au sens ordinaire, car, si les longueurs des segments successifs restent indépendantes, il n'en est pas de même de leurs états, qui sont en dépendance markovienne.

Si l'on s'intéresse à un seul état  $e_{i_0}$ , on peut grouper dans un état unique  $e'_1 = \bigcup_{i \neq i_0} \{e_i\}$  tous les autres états. On obtient ainsi un processus de renouvellement à deux états :  $e'_0 = e_{i_0}$  et  $e'_1$ , auquel on peut appliquer tous les résultats du ch. II (concernant, notamment, le nombre spécifique  $\nu_{i_0}$  de l'état  $e_{i_0}$ , et le calcul de la covariance  $C_{i_0 i_0}$  à partir de  $F_{i_0}$  et de la loi du cycle  $(e_{i_0}, e_{i_0})$ ).



Pour  $n > 2$ , les covariances rectangles  $C_{ij}(h)$  ( $i \neq j$ ) contiennent d'avantage d'information que les seules covariances directes  $C_{ii}$  (en particulier, ces covariances rectangles ne sont plus nécessairement symétriques, et permettent de déceler un retard d'une composante  $i$  sur une autre composante  $j$ ). Il est donc bon de pouvoir les calculer.

A partir de  $C_{ij}(h)$ , on peut aussi former la co-portée

$$a_{ij} = -\frac{2}{h_i h_j} \int_0^{\infty} [C_{ij}(h) - h_i h_j] dh \quad (i \neq j)$$

que l'on mettra sans peine en rapport avec la covariance des longueurs cumulées  $L_i(\rho)$  et  $L_j(\rho)$  occupées par  $e_i$  et  $e_j$  dans un segment de longueur  $\rho$ .

Notations. Nous désignerons par :

$F_{ij}$  la loi de la longueur séparant l'origine d'un segment  $e_i$  de l'origine du premier segment  $e_j$  qui le suit. En particulier,  $F_{ii}$  est la loi d'un cycle complet, allant de l'origine d'un  $e_i$  à l'origine du premier  $e_i$  qui le suit.

$\mu_{ij}$  et  $\sigma_{ij}^2$  l'espérance et la variance de la loi  $F_{ij}$

$F_i$  la granulométrie en nombre de l'état  $e_i$ ,  $m_i$  son espérance et  $\sigma_i^2$  sa variance.

$H_{ij}(h)$ , la probabilité conditionnelle d'avoir  $x+h \in e_j$  sachant que  $x$  est l'origine d'un état  $e_i$ .

$p_i$  la probabilité (stationnaire) de " $x \in e_i$ "

En ce qui concerne les transformées de Laplace, nous utiliserons les notations :

$$F_i \rightarrow \Phi_i, \quad F_{ij} \rightarrow \Psi_{ij}, \quad H_{ij} \rightarrow D_{ij}, \quad C_{ij} \rightarrow \chi_{ij}$$

Nous allons examiner les relations liant ces différentes fonctions : des raisonnements probabilistes simples vont nous conduire à des équations de convolution que nous transposerons directement sous forme de relations entre transformées de Laplace.

a/ Equation des  $\psi_{ij}$

La longueur séparant l'origine d'un  $e_i$  de l'origine du  $e_j$  qui le suit est la somme  $X_i + Y$  de deux variables indépendantes :  $X_i$  de loi  $F_i$ , est la longueur du segment  $e_i$ ;  $Y$  est nulle avec la probabilité  $\pi_{ij}$  (si un état  $e_j$  succède directement à  $e_i$ ) ou obéit à la loi  $F_k$  ( $k \neq j$ ), conditionnellement si un  $e_k$  succède à  $e_i$  (probabilité  $\pi_{ik}$ ) D'où :

$$(a) \quad \psi_{ij} = \Phi_i \left[ \pi_{ij} + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} \psi_{kj} \right]$$

b/ Equation des covariances conditionnelles  $D_{ij}$

Pour  $i \neq j$ , et lorsque l'on sait que 0 est l'origine d'un  $e_i$ , on a  $h \in e_j$  si le segment dont 0 est l'origine se termine en un point  $y < h$  avec la probabilité conditionnelle  $\sum_k \pi_{ik} H_{kj}(h-y)$

Si  $i = j$ , on doit tenir compte, en outre, de la probabilité  $1 - F_i(h)$  pour que le segment  $e_i$  inauguré en 0 se prolonge jusqu'à  $h$ . Posant  $\delta_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$  et  $\delta_{ii} = 1$ , on a donc :

$$(b) \quad D_{ij} = \frac{1 - \Phi_i}{\lambda} \delta_{ij} + \Phi_i \sum_k \pi_{ik} D_{kj}$$

c/ Relations entre les  $\psi_{ij}$  et les  $D_{ij}$

Pour  $i \neq j$ , et sachant que 0 est l'origine d'un  $e_i$ ,  $h \in e_j$  implique que l'origine du premier état  $e_j$  situé à droite de 0 tombe en un point  $y < h$ , après quoi on a la probabilité conditionnelle  $H_{jj}(h-y)$  d'avoir  $h \in e_j$ . D'où :

$$(c_1) \quad D_{ij} = \psi_{ij} D_{jj} \quad (i \neq j)$$

Pour  $i = j$ , on note que l'on peut avoir  $h \in e_j$  de deux manières

différentes lorsque l'on sait que 0 est l'origine d'un  $e_j$  : ou bien le segment  $e_j$  commencé en 0 atteint  $h$  (probabilité  $1 - F_j(h)$ ); ou bien le cycle  $(e_j, e_j)$  commencé en 0 s'achève en  $y < h$ , et l'on a alors la probabilité conditionnelle  $H_{jj}(h-y)$  d'avoir  $h \in e_j$ . D'où :

$$D_{jj} = \frac{1 - \Phi_j}{\lambda} + \Psi_{jj} D_{jj}$$

et

$$(c_2) \quad D_{jj} = \frac{1 - \Phi_j}{\lambda (1 - \Psi_{jj})}$$

d/ Equations des covariances  $\chi_{ij}$

Pour  $i \neq j$ , l'évènement " $h \in e_j$  et  $0 \in e_i$ " implique que le segment  $e_i$  auquel appartient 0 se termine en un point  $y < h$  (probabilité conditionnelle  $\frac{1 - F_i(y)}{m_i} dy$  : granulométrie résiduelle), après quoi, on a  $h \in e_j$  avec la probabilité conditionnelle  $\sum_k \pi_{ik} H_{kj}(h-y)$ . D'où :

$$(d_1) \quad \chi_{ij} = h_i \frac{1 - \Phi_i}{\lambda m_i} \sum_k \pi_{ik} D_{kj} \quad (i \neq j)$$

ou encore, compte tenu de (b) :

$$(d'_1) \quad \chi_{ij} = \frac{h_i}{\lambda m_i} \frac{1 - \Phi_i}{\Phi_i} D_{ij} \quad (i \neq j)$$

Pour  $i = j$ , on doit tenir compte en outre de la possibilité que le segment  $e_j$  auquel appartient 0 se prolonge jusqu'en  $h$ , d'où :

$$(d'_2) \quad \chi_{jj} = \frac{h_j}{\lambda} \left[ 1 - \frac{1 - \Phi_j}{\lambda m_j} \right] + h_j \frac{1 - \Phi_j}{\lambda m_j} \sum_k \pi_{jk} D_{kj}$$

ou encore, toujours compte tenu de (b) :

$$(d'_2) \quad \chi_{jj} = \frac{h_j}{\lambda} \left[ 1 - \frac{1 - \Phi_j}{\lambda m_j} \right] + h_j \frac{1 - \Phi_j}{\lambda m_j \Phi_j} \left[ D_{jj} - \frac{1 - \Phi_j}{\lambda} \right]$$

Remarque. Les équations (a) déterminent les  $\psi_{ij}$  et les équations (b) les  $D_{ij}$ . On peut donc montrer que les équations (c) résultent de (a) et de (b). Le nombre  $n$  des états étant fini, le calcul explicite des  $\psi_{ij}$  et des  $D_{ij}$  est toujours possible. Les  $\chi_{ij}$  se calculent ensuite à partir des  $D_{ij}$  et de (d). On peut aussi exprimer directement les  $\chi_{ij}$  en fonction des  $\psi_{ij}$ . Par exemple, (d'), (c<sub>1</sub>) et (c<sub>2</sub>) donnent :

$$(d''_1) \quad \chi_{ij} = \frac{h_i}{\lambda^2} \frac{1 - \Phi_i}{m_i \Phi_i} \psi_{ij} \frac{1 - \Phi_j}{1 - \psi_{jj}} \quad (i \neq j)$$

e/ Calcul de la durée moyenne  $\mu_{ij}$  d'un cycle ( $e_j, e_j$ )

Pour calculer  $\mu_{ij}$  (durée moyenne séparant l'origine d'un  $e_i$  de l'origine du premier  $e_j$  qui le suit) on peut dériver (a) en  $\lambda$  et faire  $\lambda = 0$ , ou, aussi bien, faire un raisonnement direct qui donne :

$$(e_1) \quad \mu_{ij} = m_i + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} \mu_{kj}$$

Ces équations permettent le calcul effectif de tous les  $\mu_{ij}$ . Si l'on se contente des seuls  $\mu_{jj}$  (durée moyenne des cycles complets ( $e_j, e_j$ )), on peut parvenir directement au résultat sans résoudre le système précédent : multiplions le par  $\omega_i$  (probabilités stationnaires) et sommons en  $i$ . Il vient :

$$\sum_i \omega_i \mu_{ij} = \sum_i \omega_i m_i + \sum_{k \neq j} \omega_k \mu_{kj}$$

Par conséquent :

$$(e_2) \quad \omega_j \mu_{jj} = \sum_i \omega_i m_i$$

f/ Calcul des probabilités  $p$

Comme  $e_j$  est un état récurrent, on a, d'après le ch.II, :

$$(f) \quad h_j = \frac{m_j}{\mu_{jj}}$$

soit encore, compte tenu de (e<sub>2</sub>)

(f<sub>2</sub>)

$$(f') \quad h_j = \frac{\bar{\omega}_j m_j}{\sum_i \bar{\omega}_i m_i}$$

On notera l'aspect très intuitif de ce résultat : dans le passage des probabilités "en nombre"  $\bar{\omega}_j$  aux probabilités "en longueurs"  $p_j$ , la probabilité  $\bar{\omega}_j$  de l'état  $e_j$  est pondérée par la longueur moyenne  $m_j$  de cet état.

g/ Calcul de la variance  $\sigma_{jj}^2$  d'un cycle  $(e_j, e_j)$

En dérivant (a) deux fois en  $\lambda$  avant de faire  $\lambda = 0$ , on obtient :

$$\mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 = m_i^2 + \sigma_i^2 + 2m_i \sum_{k \neq j} \pi_{ik} \mu_{kj} + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} (\mu_{kj}^2 + \sigma_{kj}^2)$$

Compte tenu de (e<sub>1</sub>), cette équation se simplifie un peu :

$$\mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 = m_i^2 + \sigma_i^2 + 2m_i(\mu_{ij} - m_i) + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} (\mu_{kj}^2 + \sigma_{kj}^2)$$

soit :

$$(g_1) \quad \mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 - m_i^2 + 2m_i \mu_{ij} + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} (\mu_{kj}^2 + \sigma_{kj}^2)$$

Ce système permet de calculer effectivement, si on le désire, les  $\mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2$ .  
Si l'on multiplie par  $\bar{\omega}_i$  avant de sommer en  $i$ , compte tenu de  $\sum_i \bar{\omega}_i \pi_{ik} = \bar{\omega}_k$ , on trouve :

$$(g_2) \quad \bar{\omega}_j (\mu_{jj}^2 + \sigma_{jj}^2) = \sum_i \bar{\omega}_i [\sigma_i^2 - m_i^2 + 2m_i \mu_{ij}]$$

Ainsi, la variance  $\sigma_{jj}^2$  du cycle  $(e_j, e_j)$  se déduit simplement des  $\mu_{ij}$  (mais son calcul nécessite la résolution effective du système (e<sub>1</sub>)).

D'après le ch. II, on déduit directement de  $\sigma_{jj}^2$  la valeur de la portée  $a_{jj}$ .  
On notera que le calcul effectif de la portée  $a_{ij}$  nécessite, par contre, la résolution effective du système (g<sub>1</sub>).

Processus de Markov à n états.

Considérons le cas particulier d'un processus de renouvellement à n états dont toutes les granulométries en nombre sont exponentielles :

$$1 - F_i(x) = e^{-a_i x}$$

La propriété caractéristique de la loi exponentielle (d'être exempte de vieillissement) entraîne les conséquences suivantes :

- les granulométries résiduelles de densité  $\frac{1 - F_i(x)}{m_i}$  coïncident avec les granulométries en nombre
- il est donc indifférent de prendre comme origine des temps le début d'un état  $e_i$ , ou un point quelconque  $x \in e_i$
- par suite encore, il y a indépendance conditionnelle entre tout événement antérieur à  $x$  et tout événement postérieur à  $x$  dès que l'on connaît l'état auquel appartient le point  $x$ .

Il s'agit donc d'un processus markovien, et celui-ci est entièrement déterminé par la donnée des probabilités de transition  $P_{ij}(h)$  (probabilité conditionnelle d'avoir  $x+h \in e_j$  sachant que  $x \in e_i$ ). On a, d'après la propriété markovienne :

$$P_{ij}(h) = H_{ij}(h) = \frac{1}{h_i} C_{ij}(h)$$

Les transformées de Laplace des  $P_{ij}$  vérifient donc (b), et on a, par suite, l'équation de convolution :

$$(B) \quad P_{ij}(h) = e^{-a_i h} \delta_{ij} + \int_0^h a_i e^{-a_i y} \left[ \sum_k \pi_{ik} P_{kj}(h-y) \right] dy$$

Exercice : établir directement l'équation (B), compte tenu de la propriété markovienne.

Mettons (B) sous la forme équivalente :

$$P_{ij}(h) = e^{-a_i h} \delta_{ij} + \sum_k \pi_{ik} \int_0^h a_i e^{-a_i(h-y)} P_{kj}(y) dy$$

Sous cette forme, on voit que la dérivée  $P'(h)$  existe, et on trouve :

$$P'_{ij}(h) = -a_i e^{-a_i h} \delta_{ij} - a_i \sum_k \pi_{ik} \int_0^h a_i e^{-a_i(h-y)} P_{kj}(y) dy + a_i \sum_k \pi_{ik} P_{kj}(h)$$

Première équation de Kolmogorov. L'équation ci-dessus s'écrit aussi :

$$(K_1) \quad P'_{ij}(h) = -a_i P_{ij}(h) + a_i \sum_k \pi_{ik} P_{kj}(h)$$

Pour  $h = 0$ , on a  $P'_{ij}(0) = -\delta_{ij}$ , . D'où :

$$P'_{ij}(0) = -a_i \delta_{ij} + a_i \pi_{ij}$$

On peut donc mettre  $(K_1)$  sous la forme :

$$P'_{ij}(h) = \sum_k P'_{ik}(0) P_{kj}(h)$$

ou, sous forme matricielle :

$$(K'_1) \quad P'(h) = P'(0) P(h)$$

Equation de Markov. L'équation de Kolmogorov  $(K'_1)$  peut se déduire directement de la relation de Markov, en dérivant en  $h$  avant de faire  $h = 0$  (variation de l'instant initial):

$$(M) \quad P(h+h') = P(h) P(h')$$

Sous forme explicite,  $(M)$  s'écrit :

$$P_{ij}(h+h') = \sum_k P_{ik}(h) P_{kj}(h')$$

Elle exprime simplement que le passage de  $e_i$  en  $x = 0$  à  $e_j$  en  $x+h+h'$

implique le passage par un état  $e_k$  quelconque au temps intermédiaire  $x+h$  : la probabilité conditionnelle de  $x+h+h' \in e_j$  est alors  $P_{kj}(h')$  d'après la propriété markovienne.

Deuxième équation de Kolmogorov. Si nous dérivons en  $h$  l'équation de Markov (M) avant de faire  $h' = 0$  (variation de l'instant terminal) il vient :

$$(K'_2) \quad P'(h) = P(h) P'(0)$$

ou, explicitement :

$$(K_2) \quad P'_{ij}(h) = -P_{ij}(h) a_j + \sum_k P_{ik}(h) a_k \pi_{kj}$$

La dérivation (par rapport à l'instant terminal) qui conduit de (M) à  $(K_2)$  ou  $(K'_2)$  est toujours légitime si le nombre  $n$  des états est fini, et  $(K_2)$  est donc toujours valable dans ce cas. (Il peut en être autrement s'il y a une infinité dénombrable d'états; par contre, la première équation de Kolmogorov est valable dans tous les cas,  $n$  fini ou infini).

Remarque. 1/ Pour  $h \rightarrow \infty$ , on doit avoir  $P_{ij}(h) \rightarrow p_j$  et  $P'_{ij}(h) \rightarrow 0$ . D'après  $(K_2)$ , les probabilités  $p_j$  doivent vérifier :

$$a_j p_j = \sum_k h_k a_k \pi_{kj}$$

comme  $a_j = 1/m_j$ , et  $h_j = \frac{m_j}{\mu_{jj}}$ , cette relation se réduit à :

$$\frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_k \frac{1}{\mu_{kk}} \pi_{kj}$$

Il résulte de  $(e_2)$  que cette relation est toujours identiquement vérifiée.

2/ On peut se demander s'il existe d'autres processus markoviens stationnaires à  $n$  états (ou à une infinité dénombrable d'états) que ceux que nous venons de décrire. Il n'en est rien. Désignons, en effet, par



*tant que*  
*x ∈ E<sub>i</sub>*  
 $Q_i(h)$  la probabilité conditionnelle pour que le segment  $(x, x+h)$  soit contenu tout entier dans l'état  $e_i$ . D'après la propriété markovienne, on a :

$$Q_i(h + h') = Q_i(h) Q_i(h')$$

D'où résulte que  $Q_i(h)$  est une exponentielle de la forme  $e^{-a_i h}$ , et que, par suite, la granulométrie  $F_i$  vérifie  $1 - F_i(h) = e^{-a_i h}$ . Ainsi, la description ci-dessus décrit la totalité des processus de Markov à  $n$  états.

3/ Remarquons, pour terminer, qu'un processus ne peut être markovien que si toutes les granulométries sont exponentielles. Cette condition nécessaire n'est d'ailleurs pas suffisante (exemple: le schéma de migration du ch.II présente des granulométries exponentielles, mais il n'est absolument pas markovien). Dans les applications expérimentales, c'est donc la première vérification à laquelle il convient de procéder. On s'aperçoit alors qu'il y a dans la nature beaucoup moins de phénomènes markoviens qu'on ne le croit généralement.