L-109

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОСТАТИСТИКИ

Traité de geostatistique appliqué

G. Matheron

PARIS
1967

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Фундаментальные труды зарубежных ученых по геологии, геофизике и геохимии

Ж. Матерон

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОСТАТИСТИКИ

Издательство
«МИР»
Москва
1968

УДК 517; 550.8; 622.1

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО

Ю. В. Рощина

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ПРЕДИСЛОВИЕМ

д-ра геол.-мин. наук ***Д. Я. Суражского*** *и канд. техн. наук* ***А. М. Марголина***

ПОСЛЕСЛОВИЕ

канд. техн. наук ***А. М. Марголина***

Предлагаемая читателю монография, специально подготовленная автором для русского издания, принадлежит перу одного из ведущих специалистов в области приложения математических методов к задачам геологической разведки. Книга посвящена актуальной проблеме геологической разведки — построению ее математической теории («геостатистики»). Автор вводит и развивает фундаментальные понятия, позволяющие подходить к изучению влияния формы и размеров проб, конфигурации разведочной сети, пространственной изменчивости признаков на надежность результатов геологической разведки. Значительное место отводится прикладным аспектам теории, в частности, рассматриваются задачи оценки надежности подсчета запасов и оптимального сглаживания геологических планов.

В одном из разделов рассматриваются экономические стороны оценки месторождений в свете надежности их разведки.

Книга представляет большой интерес для геологов и маркшейдеров, занимающихся разведкой, геометризацией, подсчетом запасов и экономической оценкой месторождений. Монография рассчитана также на инженеров, интересующихся математико-статистическими методами. Несмотря на большую насыщенность монографии математическими терминами и положениями, она вполне доступна для читателей, знакомых с математикой в объеме программы технического вуза.

Редакция литературы по вопросам геологических наук

Инд. 3-7-1; 2-9-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография представляет собой наиболее полное изложение основ геостатистики — оригинальной и стройной математической теории разведки и оценки месторождений полезных ископаемых, созданной Ж. Матероном в начале шестидесятых годов и в настоящее время получившей широкую известность в мировой геологической литературе [1].

В основе книги лежит двухтомный труд Ж. Матерона (M a t h e r o n G., Traité de geostatistique appliqué, 1, Mémoires 14 du BRGM, Technic, Paris, 1962; 2, Mémoires 24 du BRGM, Technic, Paris, 1963), значительно переработанный и дополненный автором в 1967 г. при подготовке к русскому изданию. Заново написана теоретическая часть монографии, введены новые, ранее не опубликованные разделы, посвященные теории транзитивных представлений, транзитивной схеме, эффекту самородков и приложению геостатистических методов к экономической оценке месторождений.

Главный предмет геостатистики и настоящей книги — оценка точности подсчета среднего содержания и запаса в разведуемом рудном теле или отдельных его частях (блоках, слоях, горизонтах, выработках) как функции геометрической формы тела и расположения проб, а также пространственной изменчивости геологических характеристик. Эта проблема давно занимает специалистов, связанных с опробованием и геометризацией месторождений, поскольку при выборе рациональной методики разведки, опробования, подсчета запасов и картирования объекта разведки следует учитывать сложность его пространственной формы и целесообразную точность получаемых о нем представлений. Однако ни в отечественной литературе, ни за рубежом до недавнего времени не было предложено развернутого математического решения подобных задач. Многочисленные попытки использовать для этой цели вариационную статистику дали материал, убедительно показывающий, что в рамках геологоразведочных задач случайная величина, как правило, не может рассматриваться в качестве математической модели геологических признаков.

Появление геостатистической теории не окажется для читателя неожиданностью. Она является логическим развитием традиционных для советских геологов-разведчиков и маркшейдеров исследований надежности подсчета запасов и средних значений геологических признаков. Надежность разведки по существу давно стала одним из главных вопросов, которым занимается геолого-маркшейдерская дисциплина — геометрия недр. Со времени ее основания выдающимся русским маркшейдером П. К. Соболевским эта дисциплина не ограничивалась только чисто геометрическими задачами и методами, она постоянно развивалась за счет привлечения математико-статистического аппарата. Сейчас та часть геометрии недр, которая по задачам и принципу их решения совпадает с настоящей монографией, столь тесно связана со статистическим анализом, что по праву может называться не геометрией, а статистикой недр, или геостатистикой.

При этом совершенно не важно, привьется ли это название в среде советских специалистов. Важно другое: как Матерон, так и авторы отечественных работ показали, что углубление одной из областей науки приводит к форми-

[1] Советский читатель уже имел возможность познакомиться с частным примером использования этой теории применительно к ограниченному кругу месторождений по книге Э. K a p л ь e, Методика количественной оценки месторождений урана, Атомиздат, 1966 г. и, естественно, убедился в целесообразности геостатистического подхода к решению практически важных задач методики разведки.

рованию, казалось бы, нового самостоятельного направления. Но геостатистика не противопоставляется, как можно было бы подумать, собственно геометрии недр как методике геометрического отображения рудных тел и месторождений (определения элементов залегания, картирования морфологических и качественных свойств, подсчета запасов и т. п.), а дополняет ее, позволяет определять точность приближенных горно-геометрических решений.

Хотя основные задачи геостатистики в концепции Матерона известны читателю, все же ему предстоит познакомиться с совершенно новой теорией, дающей стройное решение проблем, рассматривавшихся до сих пор преимущественно разрозненно. Так, например, оценка точности оконтуривания рудного тела обычно выделялась в самостоятельную задачу, не связанную непосредственно с задачей определения точности среднего значения признака в пределах нулевого контура залежи, а задача оценки среднего значения признака, или оценки запаса, не была по методу решения тесно увязана с задачей надежности картирования свойств залежи. Задача «сглаживания» при составлении горно-геометрических разрезов, карт и планов часто рассматривалась в отрыве от прочих проблем. Применительно к каждой задаче, разбираемой в отрыве от остальных, подбирались свои характеристики изменчивости, подчас мало эффективные при решении других задач.

Автор предлагает унифицированную трактовку вопросов, связанных с оконтуриванием, оценкой среднего в выделяемом блоке и оценкой размещения средних значений признаков по блокам, он использует при этом единый математико-статистический аппарат корреляционной теории случайных функций.

Монография разделена автором на три «книги», каждая из которых имеет свое назначение. В первой книге читателя заинтересует не только результат решения задачи надежности оконтуривания, но и метод ее решения, при котором погрешность подсчета объема оценивается принципиально так же, как погрешность определения среднего содержания по залежи.

Рассматривая вопрос об оптимальной линейной оценке среднего содержания или запаса в выделяемом блоке (крайгинг), Матерон как бы объединяет проблемы подсчета запасов с проблемами картирования пространственного размещения свойств залежи и сглаживания графиков.

В комплексе горно-геологических исследований, объединяемых общим названием «подсчет запасов», помимо определения суммарного количества запасов залежи, изучаются геологические и технологические свойства сырья, без знания которых запасы нельзя считать разведанными; необходимо также знать пространственное размещение запасов, т. е. нужно картировать такие признаки, как линейный запас и содержание. Но линейный запас или содержание не могут рассматриваться в отрыве от размеров блока (линейный запас, относимый к квадратному метру площади залежи,— пространственная переменная с иными свойствами, нежели линейный запас, относимый к гектару). Неопределенность картирования при подсчете запасов обусловлена тем, что неизвестна геометрическая база — размеры блока картируемой переменной. Если по исходным разведочным данным о содержаниях и линейных запасах в пробах малого объема строить карту признака, то полученная карта окажется излишне детальной и сложной и, с другой стороны, она будет выражать размещение признака в малых пробах, а не в каких-то более крупных объемах, способных представлять самостоятельный технологический интерес.

Поэтому на практике часто прибегают к тривиальной операции сглаживания исходной карты статистическим окном, включающим несколько соседних проб. Такое сглаживание по смыслу совпадает с крайгингом, разница лишь в том, что крайгинг — оптимальная вычислительная процедура, приводящая к нахождению среднего значения признака в пределах избранного блока (окна) с наименьшей случайной погрешностью.

В качестве характеристики пространственной изменчивости Матерон в основном использует «полувариограмму»— структурную функцию и реже обращается к «ковариограмме»— корреляционной функции. Эти статистики приобретают универсальное значение. Дело не только в том, что они представляют собой единственный инструмент для решения геостатистических задач: корреляционная и структурная функции отрываются от реальных проб, по которым они оцениваются, и рассматриваются применительно к пробам с исчезающе малым объемом. Таким образом, исходная характеристика изменчивости у Матерона, отнесенная к точечной пробе, оказывается свободной от влияния внешних факторов, т. е. от размеров проб и их ориентировки, и выражает объективные пространственные свойства разведуемых признаков. Выполняя над этой характеристикой операции восхождения, автор получает характеристики, соответствующие избираемой геометрии проб, т. е. делает возможным сопоставление изменчивости при различных системах опробования. Таким образом, удается принципиально решать вопросы влияния размеров проб на устойчивость разведочных оценок.

Во второй книге общие положения геостатистики конкретизируются в частном случае, когда стационарной случайной функции (в качестве реализации которой рассматривается пространственная переменная) приписывается структурная функция особого вида — собственная функция де Вейса. Здесь читатель встретится с незнакомой ему эффективной методологией применения общей теории в условиях, когда примерно известен тип пространственной изменчивости признака (аналитическое выражение корреляционной или структурной функций), и найдет набор таблиц и номограмм, выражающих связь искомых в геостатистике величин с параметром изменчивости и геометрическими размерами проб и блоков.

Принципиальное достоинство прикладной геостатистики заключено в использовании в качестве характеристики пространственной изменчивости разведуемых признаков не эмпирических статистик, а их теоретических выражений с оцененными по экспериментальным данным параметрами. Аппроксимируя эмпирическую характеристику сравнительно простым аналитическим выражением с ограниченным числом параметров, автор избавляет практика от громоздких расчетов по определению погрешностей результатов разведки, предлагая ему простые таблицы и графики. Показательно, что аппроксимация характеристики изменчивости аналитическим выражением не только желательна, но, как выясняется, и необходима из-за особенностей проблемы оценки изменчивости по дискретным разведанным данным.

Собственная функция де Вейса, в связи с которой излагается основной материал второй книги, весьма удобна и проста. Однако она обладает рядом исключительных свойств, по-видимому ограничивающих круг объектов, на которых оправдываются вытекающие из нее рецептурные выводы.

Избрание схемы де Вейса за основную при изложении прикладных сторон геостатистики наложило некоторый отпечаток на общую геостатистическую теорию и, в частности, потребовало допущения бесконечности математического ожидания и дисперсии случайной функции, в то время как реальные геологические переменные, вообще говоря, не имеют таких свойств. Специфика схемы де Вейса проявилась также и в способе практического решения задачи оптимальной линейной оценки среднего в блоке. Особенности собственной функции позволяют автору провести параллель между задачей крайгинга и некоторыми задачами электростатики. В результате найден остроумный, но применимый не при всяком виде изменчивости путь решения. Более универсальным представляется подход к проблеме крайгинга с позиций теории фильтрации стационарных случайных последовательностей.

Автор не ограничивается рассмотрением только изменчивости, отвечающей собственной функции де Вейса, а разбирает два других, более общих типа изменчивости. В одном из них предполагается присутствие случайной

признака, а другой (так называемая сферическая схема) связан с макронеоднородностью объекта разведки.

Выбор типа изменчивости, в сущности предопределяющий численные результаты геостатистических расчетов, — исключительно важный вопрос, ответ на который не может быть найден только путем анализа имеющихся в распоряжении геолога данных дискретного опробования. Не останавливая внимания читателя на этой новой для него проблеме, Матерон отмечает, что, избирая общее выражение для характеристики изменчивости, необходимо располагать дополнительной информацией о пространственных свойствах геологической переменной, почерпнутой из представлений о физической природе переменной или из опыта детального изучения сходных объектов.

Широта темы и сравнительно слабая ее разработанность до исследований автора — те вполне понятные причины, по которым вторая книга монографии не даст читателю исчерпывающего ответа на все интересующие его вопросы, но он получит практические рецепты, пригодные для использования в условиях, когда схема де Вейса может быть принята, найдет принципиально новый путь практического решения основных геостатистических задач и сумеет сформулировать сопряженные с этими задачами еще не ставившиеся ранее проблемы.

У читателя, воспринявшего идеи общей геостатистической теории и пожелавшего ею воспользоваться, возникнет естественное стремление теснее увязать положение транзитивной теории и теории собственных схем, выяснить математическую сущность и источники априорной информации, необходимой для выбора типа изменчивости пространственных переменных, применить на практике иные характеристики изменчивости, нежели те, что он найдет в монографии, решить вопрос, на какой стадии разведки статистические расчеты становятся целесообразными; наконец, он сможет попытаться упростить расчеты, иначе описав изменчивость пространственных переменных. Нам хотелось бы надеяться, что в этом отношении послесловие к монографии окажет известную помощь читателю.

Обособленное положение занимает третья, последняя, книга, которая имеет геолого-экономический характер. Она связана с двумя предыдущими лишь тем, что в ней автор использовал результаты геостатистических расчетов и показал, каким образом определение надежности результатов разведки может быть применено при экономическом обосновании стратегии разведки и разработки месторождения. В этой книге рассматривается вопрос выбора оптимального объема годовой добычи и минимального промышленного содержания на горнодобывающем предприятии в условиях конкурентной и плановой экономики, а также более близкий геологу вопрос о целесообразности перехода к следующей стадии разведки. Хотя экономические проблемы, казалось бы, и не имеют прямого отношения к геостатистической теории для экономических решений безразлично, каким образом установлены погрешности результатов разведки), однако введение в монографию экономического раздела представляется вполне оправданным не только в силу важности рассматриваемых в нем задач; автор тем самым подчеркивает актуальность геостатистических исследований как инструмента оптимизации процесса освоения месторождений.

По характеру рассматриваемых задач и плодотворности их решения монография, несомненно, вызовет большой интерес у широкого круга специалистов — геологов, маркшейдеров, горняков и экономистов.

Д. Суражский
А. Марголин

Введение

Понятие пространственной переменной

Исследователь, работающий в области естествознания, часто сталкивается с необходимостью изучения пространственного размещения некоторых величин, называемых *пространственными переменными*. Они могут иметь самую различную природу. К ним относятся, например, плотность населения в некоторой географической зоне, мощность геологической формации, содержание полезного компонента в руде и т. п.

Пространственные переменные интересуют производственника, как правило, только с практической точки зрения, для геолога они представляют интерес, например, в связи с необходимостью оценить запасы месторождения на основе результатов дискретного опробования и по мере возможности сопроводить эту оценку расчетом ошибок. Вместе с тем изучение пространственных переменных во многих случаях позволяет выяснить условия образования и структурные особенности исследуемого объекта.

Эти две задачи дополняют одна другую. Действительно, чтобы правильно решить столь важную практическую задачу, как определение случайной ошибки в оценке рудного месторождения, очень важно учесть такие структурные характеристики пространственных переменных, как, например, непрерывность их изменения.

Для наглядности приведем элементарный пример. Пусть измерения, произведенные через равные интервалы вдоль профиля, в одном случае дали последовательность A численных значений признака

A) 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1,

а в другом — последовательность B —

B) 1 — 4 — 3 — 6 — 1 — 5 — 4 — 3 — 2 — 5 — 2.

В последовательности A легко обнаружить ярко выраженную симметрию, характеризующуюся регулярным убыванием значений признака в обе стороны от максимума в середине профиля. Во втором случае подобной закономерности нет или она выражена очень слабо, и последовательность B производит впечатление полностью нерегулярной. Хотя обе последовательности состоят из одних и тех же цифр, ясно, что среднее значение для ряда A может быть оценено с более высокой точностью, чем для ряда B. Таким образом, точность зависит от степени непрерывности изменения переменной в пространстве.

Из рассмотренного примера видно также, что простое статистическое описание совершенно недостаточно. Статистик, который ограничится построением гистограмм для случаев A и B и будет исходить только из идентичности этих гистограмм без учета пространственных закономерностей, сделает неправильный вывод об идентичности наблюдаемых явлений. Очевидно, мало знать, с какой частотой повторяется данное значение содержания в месторождении. По крайней мере столь же важно знать, сколь велики и как расположены в пространстве соответствующие этим содержаниям участки месторождения, и в особенности зоны промышленного оруденения.

Ясно, что пространственные переменные не следует путать со случайными величинами, изучаемыми методами обычной статистики. Действительно, понятие случайной величины имеет конкретный смысл только при соблюдении следующих условий:

1) должна быть хотя бы теоретическая возможность бесконечного повторения испытания, в результате которого случайная величина приобретает численное значение;

2) результат каждого из этих испытаний должен быть независимым от результатов всех предыдущих испытаний.

Пространственная переменная не удовлетворяет этим условиям. Если, например, испытание состоит в отборе пробы в точке с координатами x, y, z, то содержание металла в такой пробе будет единственным, физически определенным и ни в коей мере не случайным. Нет никакой возможности повторения испытания, т. е. условие 1 не выполняется. Однако можно отобрать новую пробу не в точке x, y, z, а в непосредственной близости от нее. Это, конечно, не будет то же испытание, но с достаточной строгостью можно будет говорить о приблизительном выполнении условия 1. Но тогда нарушается условие 2: если первая проба отобрана в обогащенной зоне, то и вторая проба, расположенная в непосредственной близости от нее, как правило, будет в среднем иметь высокое содержание. Таким образом, испытания оказываются зависимыми, и эта зависимость будет тем ярче выражена, чем непрерывнее оруденение.

Качественные характеристики пространственных переменных

Пространственные переменные, изучаемые экспериментально, обладают рядом качественных характеристик, непосредственно связанных со структурой наблюдаемого явления.

Рассмотрим важнейшие из этих характеристик, которые не могут быть выражены в статистических терминах и должны учитываться в теории пространственных переменных.

О б л а с т ь о п р е д е л е н и я

Пространственная переменная всегда определена в конкретной области пространства, называемой ее *геометрическим полем*. Для геолога — это геологическая формация (например, рудное тело). Иногда по характеру конкретной задачи необходимо ограничиться изучением пространственной переменной в пределах некоторой части ее геометрического поля. Пространственную переменную можно рассматривать как функцию точки $f(M)$, однако чаще представляют интерес не точечные значения, а ее средние значения в пределах малой области, называемой *геометрической базой*. Для такого признака, как содержание, геометрической базой является объем v пробы. База v должна быть определена весьма точно: необходимо знать ее объем, форму и ориентацию в пространстве. Если изменяется геометрическая база, то получается новая пространственная переменная, близкая к предыдущей, но не совпадающая с ней. Так, например, содержания в блоках с объемом в несколько кубометров распределены в пространстве совсем не так, как содержания в керновых пробах весом в несколько килограммов. Теория пространственных переменных, которую мы будем называть *геостатистикой* (когда она применяется к задачам геологии), позволяет предсказать характеристики переменной на базе v в поле V по известным характеристикам точечной переменной в поле V', отличном от поля V, что составляет одно из преимуществ этой теории.

Н е п р е р ы в н о с т ь

Очень важная характеристика пространственной переменной — степень непрерывности ее изменения в пространстве. В некоторых случаях для переменных, обладающих чисто геометрическим смыслом (как, например, мощность), имеет место непрерывность в строгом математическом смысле в соответствии с определением Коши. Чаще наблюдается непрерывность в среднем: когда точка M стремится к M_0, лишь среднее значение $[f(M) - f(M_0)]^2$ стремится к нулю (изменение переменной в пространстве нерегулярно и обладает точками разрыва). Наконец, бывают случаи, когда практически не выполняется и условие непрерывности в среднем. Тогда мы имеем дело с крайне нерегулярной переменной и говорим об эффекте самородков, поскольку классическим примером такой нерегулярной изменчивости являются месторождения самородного золота.

А н и з о т р о п и я

Пространственная изменчивость переменной может обладать анизотропией. Например, в рудном теле может существовать направление, по которому тот или иной признак изменяется значительно медленнее, чем по другим направлениям. Явления такого типа называются *потоками*, *зональностью* и т. п. и обычно они отражают определенную геологическую структуру рудного тела.

Я в л е н и я п е р е х о д а

Могут встретиться и другие типы структур, связанные с наличием сети разрывов в геометрическом поле переменной. В таких случаях говорят о *явлениях перехода*. В качестве простого примера можно привести осадочное месторождение, осложненное кулисообразными складками. Случается, что переменная, постоянная или почти постоянная в пределах каждого слоя, будет скачкообразно меняться при переходе от слоя к слою. К этой вертикальной прерывистости, связанной с наличием безрудных пропластков, часто добавляется горизонтальная прерывистость, связанная с выклиниванием отдельных рудных линз. Сложная сеть таких разрывов делит месторождение на отдельные участки, соответствующие, например, древним микробассейнам, в пределах которых осадконакопление происходило относительно независимо.

Можно считать, что эффект самородков, обусловленный присутствием рудных и безрудных зерен, связан с подобными разрывами. При эффекте самородков сеть разрывов представляет собой границы раздела между рудными и безрудными зернами. Несмотря на меньший масштаб, природа явления та же: эффект самородков представляет собой эффект перехода, связанный с наличием микроструктур в геометрическом поле переменной.

Теоретические схемы и методологические вопросы

Чтобы построить математический аппарат теории пространственных переменных, учитывающий все перечисленные выше особенности последних, естественно обратиться к теории случайных функций. Однако здесь возникает серьезное осложнение, связанное с физической уникальностью изучаемых явлений и невозможностью чисто статистического подхода.

Повторим вкратце определение случайной функции. Исходя из понятия простой случайной величины X, определенной законом распределения вероятностей $F(x)$, математики вводят более широкое понятие многокомпонентной, или многомерной, случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, описываемой многомерным законом распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Естественным обобщением этого понятия служит понятие случайной функции как случайной величины с бесконечным числом компонент. В интересующем нас случае этими компонентами будут значения пространственной переменной во всех точках ее геометрического поля. Теперь ясна причина упомянутого осложнения. Значения переменной во всех точках поля должны рассматриваться как полученные в результате одного испытания, т. е. одного случайного выбора. Однако это испытание оказывается уникальным и не позволяет восстановить распределение случайной функции подобно тому, как знания одного значе-

ния случайной величины X недостаточно для определения ее распределения $F(x)$.

Таким образом, поскольку лишь численные значения пространственной переменной представляют собой физическую реализацию, всякая вероятностная интерпретация будет совершенно произвольной. Именно такая точка зрения лежит в основе теории транзитивных представлений, изложенной в первой части предлагаемой работы. При построении этой теории не делались никакие вероятностные или другие предположения о природе изучаемых явлений. Природа явления не задается a priori, а устанавливается в результате тщательного изучения, и полученные результаты распространяются только на объекты того же типа. Описательный и формальный подход, принятый в теории транзитивных представлений, близок к основной посылке кинематики, которая изучает общие законы движения, не вникая в причины и физический смысл этого движения. Основным инструментом теории транзитивных представлений служит транзитивная ковариограмма $g(h)$, связанная с пространственной переменной $f(x)$ и позволяющая не только выразить в обобщенном виде все перечисленные выше характеристики, но и сформулировать и решить важные практические задачи, возникающие при оценке пространственных переменных.

Но возможен частный случай, когда статистический подход к изучению пространственной изменчивости оказывается допустимым. Это тот случай, когда изучаемый объект имеет стационарный характер. Строго говоря, случайная функция называется *стационарной*, если закон распределения ее значений в k произвольных точках инвариантен относительно любого перемещения ансамбля этих точек, т. е. если изучаемый объект обладает пространственной однородностью. Если есть серьезные причины считать, например, что физико-химические условия осадконакопления или рудоотложения оставались однородными во всем месторождении, такая гипотеза может быть принята хотя бы в первом приближении. Объект, благодаря своему стационарному характеру, как бы повторяется в пространстве, и поэтому его можно изучать статистически, используя вероятностную интерпретацию, основанную на классической теории случайных функций. В этой теории важнейшую роль играет корреляционная функция $K(h)$, которая представляет ковариацию значений случайной функции в двух точках как неслучайную функцию расстояния между точками h. Функция $K(h)$ — вероятностный эквивалент ковариограммы $g(h)$, принятой в теории транзитивных представлений. Однако корреляционная теория применима только в том случае, когда изучаемая случайная функция обладает заведомо конечной дисперсией, в то время как в большинстве случаев природные объекты не удовлетворяют этому условию и не могут быть правильно описаны в рамках корреляционной теории. Но хотя дисперсию самой функции часто следует рассматривать как бесконечную, дисперсия ее приращений, или разностей значений функции в двух точках, конечна. Теория собственных схем, изложенная во второй части данной книги, посвящена изучению именно тех случайных функций, которые доступны для изучения лишь благодаря тому, что дисперсия их приращений конечна. Здесь роль транзитивной ковариограммы $g(h)$ или корреляционной функции $K(h)$ играет функция собственного рассеивания $\gamma(h)$, или полувариограмма, представляющая средний квадрат приращения функции между двумя точками, отстоящими одна от другой на расстоянии h.

Поскольку теория собственных схем основана на предположении о пространственной однородности изучаемого объекта и сформулирована в терминах теории вероятностей, она на первый взгляд противопоставляется теории транзитивных представлений. Эта теория одновременно является и менее общей и более строгой, чем транзитивная теория. Ограничения обусловлены тем, что широкий класс объектов, обладающих, например, зональностью, не удовлетворяет условию стационарности и, следовательно, не может быть описан в рамках теории собственных схем, будучи одновременно вполне доступным для исследования методами теории транзитивных представлений. В то же время по отношению к стационарным объектам теория собственных схем является более универсальной, чем транзитивная теория, так как позволяет выделить в наблюдаемой пространственной изменчивости элементы, связанные с самой пространственной переменной, и элементы, обусловленные геометрическими характеристиками ее поля. Таким образом, теория собственных схем в отличие от транзитивной теории позволяет более глубоко изучить изменчивость самой пространственной переменной. Однако несмотря на это противопоставление, обе эти теории приводят к очень близким результатам, и между их математическими аппаратами существует глубокое родство. Действительно, ковариограмма, корреляционная функция и функция собственного рассеивания обладают весьма близким физическим смыслом, так как все они характеризуют энергию рассеивания изучаемого явления. Можно предполагать, что транзитивные методы обладают скрытым вероятностным характером и что в теории собственных схем гипотеза стационарности необходима лишь формально.

Таким образом, можно говорить о глубоком диалектическом единстве этих двух подходов к изучению пространственных переменных. На самом деле, теория транзитивных представлений, казалось бы, рассматривает явление как оно есть, без принятия каких-либо предварительных и, в частности, вероятностных гипотез. При детальном же рассмотрении оказывается, что это не совсем так. Прежде всего, наличие элемента флуктуаций (см. гл. II, § 2 и гл. III, фиг. 2) может привести к тому, что незначительное и экспериментально неопределимое изменение начальных условий в конечном итоге радикально меняет наблюдаемое явление. Так, транзитивная ковариограмма $g(h)$ (если она известна абсолютно точно) характеризуется колебаниями и особыми точками, структура которых потенциально несет всю или почти всю информацию об изучаемой переменной. Но определить эту структуру достаточно детально экспериментальным путем невозможно. Имеющиеся экспериментальные точки мы интерполируем регулярной и непрерывной кривой, т. е. фактически мы принимаем гипотезу о поведении $g(h)$ вблизи нуля. Истинная ковариограмма совсем не обязательно должна вести себя достаточно просто вблизи нуля. С математической точки зрения операция сглаживания или регуляризации, проведенная нами, плохо поддается строгому анализу. Ясно, однако, что при ее выполнении оказываются неизбежными потери той информации, которая потенциально содержалась в детальной структуре $g(h)$. Но хотя математический характер этой операции неопределен, ее фактический смысл вполне очевиден: она представляет собой операцию, эквивалентную переходу к математическому ожиданию. Таким образом, теория транзитивных представлений, исходящая из чисто геометрических посылок, богата скрытым вероятностным содержанием.

С другой стороны, теория собственных схем, представляющая собой частный случай теории случайных функций, целиком построена на основе вероятностных гипотез. Но природные объекты могут быть описаны в рамках этой теории только при условии их стационарности. Иногда это условие кажется приемлемым, иногда — противоречащим экспериментальным данным, но предположение о его выполнении всегда будет произвольным и, строго говоря, недоказуемым. Представление о природном объекте, как о реализации случайной функции при невозможности установить закон ее распределения исходя из реального объекта, кажется сомнительным. Во всяком случае, несмотря на то что транзитивная теория обладает скрытым вероятностным смыслом, она не требует никакого предположения о стационарности. Ясно, что вероятностная интерпретация имеет смысл только в предположении о стационарности; транзитивная теория в таком предположении не нуждается.

Итак, необходимой является вероятностная интерпретация, но не гипотеза стационарности. Вообще говоря, пространственную переменную следует рассматривать как реализацию нестационарной случайной функции; основным инструментом теории должна быть ковариационная функция $K(x, y)$, зависящая от двух точек — x и y, а не только от расстояния между ними $(h = y - x)$. Статистический подход в этом случае невозможен в том смысле, что мы никогда не можем оценить закон распределения случайной функции, исходя из имеющихся данных. Но нам и не нужно его знать, и в этом как раз состоит причина успеха теории транзитивных представлений. Анализ задач, возникающих, например, при оценке пространственных переменных по результатам опробования, показывает, что для расчета дисперсии оценки не нужно знать ни закона распределения нестационарной случайной функции, ни ее ковариационной функции $K(x; y)$. Достаточно знать лишь среднее значение $K(x, x+h)$, когда точка x пробегает всю оцениваемую область. Это среднее значение выражается функцией $\overline{K}(h)$, которая в точности совпадает со стационарной ковариационной функцией, полученной в результате принятия гипотезы стационарности. Другими словами, мы ставим в соответствие реализации нестационарной случайной функции транзитивную ковариограмму $g(h)$, вычисленную для оцениваемой области; математическое ожидание $E[\overline{g}(h)]$ может быть оценено по экспериментальным данным. Так как среднее значение $\overline{K}(h)$ или ее точный эквивалент $E[g(h)]$ могут быть определены экспериментально, то стоящие перед нами задачи можно решить в рамках вероятностного подхода. Это положение является в некотором роде синтезом основных посылок теории собственных схем и теории транзитивных представлений.

В предлагаемой работе мы не пытаемся построить теорию пространственных переменных на такой основе. Это обусловлено недостатком времени, а также тем, что изложение неизбежно стало бы более абстрактным и насыщенным математикой. При разработке подобной теории недостаточно говорить о диалектическом единстве двух различных подходов к изучению пространственных переменных. Потребовалось бы создать соответствующий математический аппарат и дать строгое доказательство возможности оценить функции $K(h)$ и $E[g(h)]$. У читателя может создаться впечатление, что мы дважды (в теории транзитивных представлений и в теории собственных схем) разбираем одни и те же вопросы. С позиций новой точки зрения можно было бы избежать этих повторений. Однако такое «двойное» изложение имеет свой, может быть отчасти педагогический, смысл, так как тем самым мы помогаем читателю глубже понять близкое родство двух различных подходов к изучению пространственных явлений. Короче говоря, мы предоставляем читателю построить теорию, которая бы объединила основные посылки транзитивной теории и теории собственных схем.

Поставленные автором цели и план построения книги

Эта работа предназначена как для исследователей, так и для практических работников, которые по роду своей деятельности сталкиваются с пространственными объектами. Автор ставил перед собой двоякую цель. С одной стороны, он дает основные понятия и математический аппарат, что позволяет в обобщенном виде описывать основные структурные характеристики природного объекта, а с другой— описывает прикладные методы, позволяющие решить практические задачи, наиболее важные из которых касаются оценки пространственных переменных по результатам дискретного опробования. Отсюда возникает, как это часто бывает с математическими работами прикладного характера, некоторая неоднородность изложения и риск навлечь [illegible] практиков. Первые будут недовольны

недостаточной строгостью выводов, а вторые — чрезмерной абстрактностью изложения. Упреки и тех и других, без сомнения, справедливы, но полностью избежать их, к сожалению, невозможно.

Для понимания этой работы требуется лишь знание основ теории вероятностей. Желательно также знакомство с теорией случайных процессов. Однако в гл. VI читатель найдет краткое изложение вопросов из теории случайных функций, необходимых для понимания последующих глав. Следует упомянуть также о теории обобщенных функций. В принципе мы не пользуемся ими в этой работе, предназначенной для читателей хотя и со значительными математическими знаниями, но не обязательно с высшим математическим образованием. Но хотя обобщенным функциям не отводится никакого места в этой работе, их скрытое присутствие весьма чувствуется, поскольку природный объект редко изучается на точечном уровне. Как правило, мы имеем дело лишь с результатами доступных нам технических операций: с отбором проб, отработкой блоков, с различного рода взвешиваниями, т. е. со значениями переменной не в точке, а в некоторой области пространства, называемой *геометрической базой*. Идея представления этих величин посредством обобщенных функций подсказана практикой.

Первая книга посвящена теории транзитивных представлений и теории собственных схем, причем обе теории пространственных переменных излагаются параллельно. Сначала даются основные определения и общий математический аппарат (гл. I и V—VI соответственно), которые затем распространяются на случай совместного изучения нескольких переменных в одном геометрическом поле (гл. IV и X). После этих общих вопросов рассматриваются специальные вопросы прикладного характера. Весьма общее явление регуляризации переменной посредством взвешивания или отбора неточечных проб глубоко изучается в связи с операцией восхождения. Операция восхождения, которая позволяет перейти от переменной в n-мерном пространстве к переменной в $(n-1)$-мерном пространстве, есть абстрактный аналог таких широко известных технических операций, как бурение вертикальных скважин, изучение горизонтальных сечений и т. д. Она сопровождается регуляризацией переменной, что очень важно как в теоретическом, так и в практическом отношении (гл. I и VII). Наконец, формулируются общие проблемы оценки и разрабатываются приближенные методы, позволяющие вычислить дисперсию оценки для различных вариантов сети опробования (гл. II и VIII). Существует тесная связь между регулярностью переменной и поведением ее ковариограммы или собственной функции вблизи нуля. Это важное обстоятельство — одна из главных тем работы.

Вторая книга посвящена прикладной геостатистике, т. е. задачам, возникающим при оценке месторождений, и в особенности расчету дисперсии оценки, связанной с разведкой месторождения, причем общие формулы конкретизируются и представляются в виде простых диаграмм. После общего введения рассматривается схема де Вейса (гл. XI), дискретный (гл. XII) и непрерывный (гл. XIII) крайгинг в схеме де Вейса, а затем — явления перехода, начиная с эффекта самородков (гл. XIV). Далее разбираются схемы транзитивного типа, в частности сферическая схема. При исследовании крупных рудных залежей осадочного происхождения экспериментальная вариограмма часто имеет вид суммы нескольких вариограмм транзитивного типа с носителями различного размера, что связано с наложением нескольких компонент изменчивости, обладающих различными амплитудами и масштабами. В этих случаях геостатистические методы могут быть с успехом использованы для структурного анализа. Гл. XV посвящена статистическим законам распределения, выяснение которых иногда позволяет получить интересные дополнительные данные. В основном рассматривается логнормальный закон распределения и вкратце освещается довольно сложная проблема логнормальной теории собственных схем.

Наконец, третья, и последняя, книга посвящена экономике горнодобывающей промышленности. В ней излагаются в основном вопросы технической и экономической оптимизации добычи минерального сырья, которые, строго говоря, относятся к геостатистике лишь в той мере, в которой они могут быть сформулированы в сходных научных терминах. Затем дается решение этих вопросов обычными методами математической экономики и исследования операций. Однако точный анализ месторождения с помощью соотношения запас — содержание хотя и выходит из рамок собственно геостатистики относится к предмету математической геологии в широком смысле.

Книга первая

ГЕОСТАТИСТИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТРАНЗИТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ГЛАВА I

Основные понятия теории транзитивных представлений

Краткое содержание

В этой главе изложены основные понятия и дан математический аппарат теории транзитивных представлений, необходимый для понимания всей первой части.

В § 1 определяется геометрическое поле V пространственной переменной $f(x)$ и геометрическая переменная $k(x)$, связанная с $f(x)$; формулируются условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, описывается транзитивная ковариограмма $g(h)$ функции $f(x)$ и геометрическая ковариограмма $K(h)$ переменной $k(x)$; рассматриваются свойства ковариограммы, а также связь этих свойств с поведением $f(x)$ в пространстве.

В § 2 вводится понятие пространственной переменной на геометрической базе v и рассматривается регуляризация $f(x)$ посредством взвешивания на весовую функцию $p(x)$; описывается ковариограмма регуляризованной функции и рассматриваются ее свойства.

В § 3 дается общее определение операции восхождения, позволяющей перейти от n-мерной величины к величине $(n-1)$-мерной; рассматриваются операции восхождения и спуска (операция, обратная восхождению) над ковариограммами.

В § 4 рассматривается операция восхождения над ковариограммами в случае изотропной схемы. Несколько более сложный, чем предыдущие, этот параграф все же необходим для понимания механизма регуляризации, связанной с операцией восхождения.

§ 1. Ковариограмма и ее преобразование Фурье

Во введении показано, какой физический смысл следует придавать понятию пространственной переменной. Однако и пространственная переменная независимо от ее конкретного содержания определяется как функция $f(x)$, принимающая некоторые численные значения в каждой точке x n-мерного пространства с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Большая часть практических задач связана с 1-, 2- и 3-мерными случаями, но для удобства дальнейшего изложения мы не будем заранее уточнять размерности пространства. Иногда функция $f(x)$ оказывается регулярной (непрерывной и дифференцируемой во всех точках) и может быть удовлетворительно представлена с помощью элементарных функций (например, полиномов). Но чаще всего она крайне нерегулярна (дифференцируется не во всех точках, имеет точки разрыва) и графически выражается в виде прерывистой пилообразной кривой. В этих случаях непосредственное исследование самой функции $f(x)$ затруднительно. Поэтому первая задача теории пространственных переменных состоит в том, чтобы заменить собственно функцию $f(x)$ более простой функцией $g(h)$, отражающей в синтетическом виде основные черты пространственной изменчивости, что позволяет решать практические задачи, связанные с изучением пространственных переменных на основе фрагментарного опробования.

Геометрическое поле и геометрическая переменная

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $f(x)$ принимает значения, отличные от нуля, только в ограниченной области V, называемой *геометрическим полем* [1] *пространственной переменной* $f(x)$. Вне этого поля

[1] Понятие геометрического поля функции эквивалентно понятию носителя обобщенной функции.

функция предполагается тождественно равной нулю. Однако границы геометрического поля V не непреодолимы, и именно с выходом за эти границы связан *граничный эффект*, который проявляется тем сильнее, чем резче переход функции к нулевым значениям. Отсюда и название *транзитивные* [1] *представления*, данное методам, изложенным в первой части этой книги. В теории транзитивных представлений пространственная переменная рассматривается в неразрывной связи с ее геометрическим полем, и в общем случае нельзя отделить свойства самой переменной от свойств этого поля (см. гл. V, § 3 и 4).

Для характеристики поля V удобно ввести пространственную переменную $k(x)$, определяемую следующим образом:

$$k(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in V,\\ 0 & \text{при } x\notin V.\end{cases} \qquad \text{(I,1,1)}$$

Функция $k(x)$ называется *геометрической переменной* [2] *поля* V.

Встречаются, однако, случаи, когда геометрическое поле V можно рассматривать как бесконечное; при этом функция $f(x)$ должна быть суммируемой. Это возможно, например, когда пространственная переменная более или менее регулярно стремится к нулю при удалении от точки, в которой она имела максимальное значение.

Ограничения, налагаемые на $f(x)$

Во всех случаях мы будем предполагать, что функция $f(x)$ суммируема (или интегрируема по Лебегу), т. е. что все интегралы $\int f(x)dx$, взятые по любой области поля V, конечны. Это условие, отвечающее реальной природе изучаемых объектов,— единственно необходимое. Функцию $f(x)$ не предполагают ни дифференцируемой, ни даже непрерывной. Она может обладать сложной сетью разрывов, а также не принимать определенных значений в точках, образующих множество меры нуль (например, на профиле или на поверхности в трехмерном пространстве).

Более часто, однако, пространственные переменные относятся к типу кусочно-непрерывных функций, т. е. они непрерывны везде, кроме поверхностей, на которых $f(x)$ меняется скачкообразно. Эта сеть разрывов может быть очень сложной. Например, в рудном месторождении содержание полезного компонента $f(x)$ в каждой точке должно определяться как геометрическая переменная, равная единице, если точка x попадает внутрь рудной частицы, и равная нулю — в противном случае. Сеть разрывов образуется поверхностями всех рудных частиц. Заметим, кстати, что нет необходимости уточнять значения $f(x)$ на поверхностях разрыва, так как они образуют множество меры нуль.

Транзитивная ковариограмма $g(h)$

С пространственной переменной $f(x)$ мы связываем функцию $g(h)$, называемую *транзитивной ковариограммой функции* $f(x)$, или просто *ковариограммой* этой функции, которая определяется для векторного аргумента $h=\{h_1, \ldots, h_n\}$ выражением

$$g(h)=\int f(x)\,f(x+h)\,dx. \qquad \text{(I,1,2)}$$

[1] От transition (фр.) — переход.— *Прим. перев.*

[2] В теории множеств $k(x)$ называется характеристической функцией множества V. Мы используем другой термин, чтобы избежать кажущейся аналогии с характеристическими функциями теории вероятностей и подчеркнуть одинаковую природу функций $k(x)$ и $f(x)$.

В этой формуле и далее знак интеграла означает n-кратное интегрирование, а dx — элемент объема $dx_1dx_2\ldots dx_n$ n-мерного пространства. Правая часть формулы (I,1,2) напоминает выражение свертки двух функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$:

$$f_1 * f_2=\int f_1(y)\,f_2(h-y)\,dy.$$

Вводя функцию $\check{f}(y)=f(-y)$ и заменяя y на x—h, получим формулу (I,1,2) в эквивалентном виде:

$$g(h)=f*\check{f} \qquad \text{(I,1,3)}$$

Таким образом, ковариограмма $g(h)$ функции $f(x)$ равна свертке $f*\check{f}$ функций $f(x)$ и $\check{f}(x)=f(-x)$. Ковариограмма $g(h)$ определена, т. е. имеет конечные значения при всех значениях h, во всех случаях, когда геометрическое поле пространственной переменной ограничено.

Аналогично геометрическая переменная $k(x)$ характеризуется геометрической ковариограммой $K(h)$, определяемой соотношением

$$K(h)=\check{k}*k=\int k(x)\,k(x+h)\,dx. \qquad \text{(I,1,4)}$$

Произведение $k(x)k(x+h)$ равно единице на пересечении поля V и поля $\tau_{-h}V$, получаемого в результате смещения поля V на вектор $-h$, и равно нулю за пределами пересечения. Действительно, $k(x)$ и $k(x+h)$ одновременно равны единице, когда x и $x+h$ принадлежат полю V и, следовательно, x принадлежит как полю V, так и полю $\tau_{-h}V$.

Поэтому ковариограмма $K(h)$ представляет собой меру (объем для $n=3$, поверхность для $n=2$, длину для $n=1$) пересечения поля V и поля $\tau_{-h}V$. В обозначениях теории множеств можно записать:

$$K(h)=\mu V\cap\tau_{-h}V=\mu V\cap\tau_hV, \qquad \text{(I,1,5)}$$

где μ — символ «меры», а $\cap$ — пересечения множеств.

Свойства и физический смысл ковариограммы

Носитель функции $g(h)$

Когда модуль вектора h становится больше максимального диаметра поля V, $k(x)$ и $k(x+h)$ не могут одновременно быть отличными от нуля и тогда $g(h)=0$.

Вообще говоря, для каждого направления α существует величина b, такая, что $g(h)$ становится равной нулю, как только вектор h в этом направлении по модулю становится больше b. Величина b называется *носителем* [1] *функции $g(h)$ в направлении α*. Характер изменения b в зависимости от направления дает обобщенное представление о геометрии поля V.

Симметрия

Ковариограмма $g(h)$ — симметричная функция, т. е.

$$g(h)=g(-h). \qquad \text{(I,1,6)}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в формуле (I,1,2) заменить h на $-h$, а x на $x+h$.

Положительная определенность

Вообще не всякая функция может играть роль ковариограммы. Пусть даны k действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и k точек $x_1 \ldots, x_k$ ($-\infty<x_i<\infty$). Рассмотрим линейную комбинацию $f(x+x_i)$:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x+x_i).$$

[1] Более строго, носителем $g(h)$ является отрезок $[0, b]$.— *Прим. перев.*

Проинтегрировав $L^2(x)$ по x, получим

$$L^2(x)\,dx = \int \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j f(x+x_i) f(x+x_j)\,dx = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j g(x_i - x_j).$$

Это выражение неотрицательно при любых λ_i и x_i, т. е.

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j g(x_i - x_j) \geq 0.$$

Функция, удовлетворяющая этому условию, называется положительно определенной на интервале $-\infty < x < \infty$. Таким образом, ковариограмма $g(h)$ — положительно определенная функция. Условие положительной определенности $g(h)$ необходимо и достаточно для того, чтобы все вычисляемые дисперсии оценок (см. гл. II) были неотрицательными [1].

Неравенство Буняковского [2]

В известное неравенство Буняковского —

$$\left| \int \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int \varphi_1^2(x)\,dx} \sqrt{\int \varphi_2^2(x)\,dx},$$

справедливое для любой пары функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, — подставим $\varphi_1(x) = f(x)$ и $\varphi_2(x) = f(x+h)$ и получим, что

$$|g(h)| \leq g(0) = \int f^2(x)\,dx. \qquad \text{(I,1,7)}$$

Преобразование Фурье

Из теоремы Бохнера следует, что преобразование Фурье положительно определенной функции является положительной функцией (или мерой). Примем, что $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $(ux) = u_1x_1 + \ldots + u_nx_n$. Так как поле V ограничено, а функция $f(x)$ суммируема, то преобразование Фурье

$$\varphi(u) = F(f) \equiv \int f(x)\,e^{-2i\pi(ux)}\,dx \qquad \text{(I,1,8)}$$

существует и бесконечно дифференцируемо. Преобразование Фурье свертки двух функций есть произведение преобразований Фурье этих двух функций:

$$F(f_1 * f_2) = F(f_1)\,F(f_2).$$

С другой стороны, преобразование Фурье функции $\tilde{f}(x) = f(-x)$ является сопряженным по отношению к $\varphi(u)$. Отсюда следует, что преобразование Фурье $G(u)$ ковариограммы $g(h)$ равно

$$G(u) = F[g(h)] = \int e^{-2i\pi(uh)}\,g(h)\,dh = |\varphi(u)|^2. \qquad \text{(I,1,9)}$$

Замечание. Теоретически ковариограмма $g(h)$ и ее преобразование Фурье $G(u)$ эквивалентны, так как всегда можно перейти от $g(h)$ к $G(u)$ и обратно. Но практически функция $g(h)$ более удобна. Действительно, самые интересные свойства пространственной переменной (степень ее регулярности) характеризуются поведением $g(h)$ близ нуля. Между тем поведение $g(h)$ близ нуля находит отражение в большей или меньшей скорости стремления $G(u)$ к нулю при стремлении u к бесконечности. Но поведение функции на бесконечности очень трудно отобразить графически. Таким образом, гармонический анализ, для которого требуются, кстати, довольно сложные

[1] Свойства ковариограммы

$$g(h) = g(-h),\ g(0) \geq |g(h)| \text{ и } g(0) \geq 0$$

прямо следуют из ее положительной определенности.— *Прим. ред.*

[2] В оригинале это неравенство называется *неравенством Шварца.— Прим. перев.*

вычисления, не позволяет изучать регулярность переменной. Поэтому на практике используется в основном сама ковариограмма $g(h)$, а не ее преобразование Фурье.

Количество металла

Интеграл

$$Q = \int f(x)\,dx, \qquad \text{(I,1,10)}$$

взятый по всему геометрическому полю V, назовем *количеством металла*[1] Q, связанным с пространственной переменной $f(x)$. Подставив в формулах (I,1,8) и (I,1,9) $u = 0$, получим, что

$$Q = \varphi(0),\ G(0) = \int g(h)\,dh = |\varphi(0)|^2, \qquad \text{(I,1,11)}$$

откуда следует

$$Q^2 = \int g(h)\,dh, \qquad \text{(I,1,12)}$$

т. е. интеграл от ковариограммы по всему полю V равен квадрату количества металла.

Если мы применим полученный результат к геометрической переменной $k(x)$ и ее ковариограмме $K(h)$, то вместо количества металла получим естественную меру геометрического поля (объем, площадь или длину, в зависимости от размерности пространства), которую обозначим символом V:

$$\left.\begin{aligned} V &= \int k(x)\,dx = K(0), \\ V^2 &= \int K(h)\,dh. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,1,13)}$$

Интерпретация поведения $g(h)$ в окрестности $h = 0$.

Вообще говоря, чем регулярнее и непрерывнее изменение функции $f(x)$ в пространстве, тем регулярнее ковариограмма вблизи нуля. Чтобы показать это, проинтегрируем выражение $[f(x+h) - f(x)]^2$ по x:

$$\int [f(x+h) - f(x)]^2\,dx = 2[g(0) - g(h)]. \qquad \text{(I,1,14)}$$

Следовательно, если функция $f(x)$ непрерывна, т. е. $\lim f(x+h) = f(x)$, то $g(h)$ непрерывна при $h = 0$. Тогда в силу того, что $g(h)$ — положительно определенная функция, она будет непрерывной при всех h. Из непрерывности $g(h)$ при $h = 0$ следует только, что $\int [f(x+h) - f(x)]^2 dx$ стремится к нулю при $h \to 0$, т. е. что функция $f(x)$ непрерывна в среднем квадратичном.

Если функция $f(x)$ имеет первую производную, то $g(h)$ — дважды дифференцируема. А так как $g(h)$ — симметричная функция, то ее первые производные обращаются в нуль при $h = 0$ и, следовательно, изменение $g(h)$ в окрестности $h = 0$ неизбежно будет иметь параболический характер. Однако, если $g(h)$ дважды дифференцируема при $h = 0$, то из равенства

$$\int \frac{1}{h^2} [f(x+h) - f(x)]^2\,dx = \frac{2}{h^2}[g(0) - g(h)] \qquad \text{(I,1,15)}$$

следует только, что $f(x)$ дифференцируема в среднем квадратичном. Чтобы $f(x)$ была n раз дифференцируема в среднем квадратичном, для функции $g(h)$ необходимо и достаточно иметь $2n$ производных при $h = 0$.

[1] Этот термин имеет геологическое происхождение. Если V — объем месторождения, а $f(x)$ — содержание в точке x, то Q действительно представляет собой количество металла в объеме месторождения.

Пример. В одномерном пространстве функция $g(h) = e^{-\lambda h^2}$ бесконечно дифференцируема при $h = 0$. Такая ковариограмма характеризует непрерывную и дифференцируемую пространственную переменную. Напротив, функция $g(h) = e^{-\lambda|h|}$ непрерывна, но не дифференцируема при $h = 0$, где она имеет угловую точку. Соответствующая пространственная переменная непрерывна лишь в среднем квадратичном, но не дифференцируема и даже не обязательно должна быть непрерывной во всех точках пространства.

Из существования $g^{(n)}(0)$ следует только, что функция $f(x)$ непрерывна почти везде (кроме множества меры нуль).

Встречающиеся в практических задачах функции чаще всего относятся к классу кусочно-непрерывных функций, т. е. имеется конечное множество точек (поверхностей), в которых функции меняются скачкообразно. Легко видеть, что для функций этого типа интеграл (I,1,15) не может иметь предела и, следовательно, вторые производные $g(h)$ в нуле не существуют. Таким образом, ковариограмма, которая ведет себя параболически вблизи нуля, характеризует фактически функцию, непрерывную всюду.

Можно показать, что если функция $f(x)$ — кусочно-непрерывная, то функция $g(h)$ — непрерывная и, следовательно, выражение

$$\int [f(x+h) - f(x)]^2\, dx = 2\,[g(0) - g(h)] \qquad \text{(I,1,16)}$$

стремится к нулю, когда $|h|$ стремится к нулю. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в среднем квадратичном. Но если это так, то в формуле (I,1,16) функция $g(h)$ будет непрерывной в нуле и будучи положительно-определенной — непрерывной при всех значениях h.

Эффект самородков

На установленный выше факт, согласно которому ковариограмма всегда непрерывна, а функция $f(x)$ непрерывна в среднем квадратичном при условии суммируемости $|f(x)|$, не следует слишком полагаться. Иногда $g(h)$ непрерывна в нуле, т. е. для любого малого ε можно всегда найти такое η, при котором $|g(0) - g(h)| \leqslant \varepsilon$, если $|h| \leqslant \eta$; однако изменение этой функции в окрестности нуля столь резко, что практически (при экспериментальном исследовании) его можно принять за скачок в нуле. Подобная картина возможна, например, при изучении содержания в точечных пробах в рудном месторождении, когда значение η существенно превышает размер рудных зерен. Строго говоря, в данном случае будет наблюдаться не истинный разрыв функции $g(h)$ в нуле, а лишь ее резкое изменение в пределах очень узкой зоны, называемой *носителем эффекта самородков* [1], размер которого близок к среднему диаметру рудных зерен. За пределами этой зоны функция $g(h)$ убывает гораздо медленнее.

Ковариограммы подобного типа, характеризующие пространственные переменные с очень нерегулярной изменчивостью, играют важную роль в приложениях и называются *ковариограммами с эффектом самородков в нуле*. Практически ковариограмму с эффектом самородков допустимо представлять в виде:

$$g(h) = \begin{cases} g_1(h) & \text{при } h \neq 0, \\ g_1(0) + C & \text{при } h = 0, \end{cases} \qquad \text{(I,1,17)}$$

где $g_1(h)$ — регулярная кривая, аппроксимирующая функцию $g(h)$ в области ее плавного изменения, $g_1(0)$ — значение, полученное экстраполяцией

[1] Этот термин имеет геологическое происхождение: описанный эффект наиболее ярко проявляется на месторождениях самородного золота. Более строгое определение эффекта самородков читатель найдет в упражнениях 9 и 10.

$g_1(h)$ в точке $h = 0$, а C — константа эффекта самородков, определяемая как

$$C = g(0) - g_1(0),$$

где $g(0) = \int f^2(x)dx$ рассчитывается по экспериментальным данным.

Именно такое представление ковариограммы должно использоваться для расчета дисперсий оценок (см. гл. II) при наличии эффекта самородков.

Регулярная и нерегулярная части ковариограммы

Для характеристики поведения непрерывной ковариограммы $g(h)$ (непрерывной составляющей $g_1(h)$ в случае ковариограммы с эффектом самородков) при $h = 0$ можно использовать ограниченное разложение $g(h)$ в окрестности нуля:

$$g(h) = g(0) + A_2 r^2 + A_4 r^4 + \ldots + \sum_{\lambda} C_\lambda r^\lambda, \qquad \text{(I,1,18)}$$

где $r = |h|$, а коэффициенты A_{2n} и C_λ зависят, вообще говоря, от направления α вектора h. В этом разложении различают две части: регулярную часть, содержащую только члены вида r^{2n}, и нерегулярную часть, содержащую члены вида r^λ, где λ — нечетное или даже нецелое число (иногда в нерегулярную часть могут также входить логарифмические члены вида $r^{2n}\ln r$).

Если ковариограмма представлена только регулярной частью, то в силу бесконечной дифференцируемости всех членов вида r^{2n} в нуле сама ковариограмма $g(h)$ также бесконечно дифференцируема в нуле, а пространственная переменная $f(x)$ — регулярна. Таким образом, нерегулярность функции $f(x)$ находит свое отражение только в нерегулярной части ковариограммы. При этом наиболее важную роль играет член нерегулярной части с минимальным показателем степени λ_0. Так, если $\lambda_0 < 2$ (или имеется член $r^2 \ln r$), то ковариограмма $g(h)$ не имеет второй производной и $f(x)$ не будет дифференцируема даже в среднем квадратичном. Далее при $2 < \lambda_0 < 4$ ковариограмма $g(h)$ имеет вторую производную и не имеет четвертую, поэтому $f(x)$ дифференцируема только один раз в среднем квадратичном. Из сказанного видно, что показатель степени λ_0 младшего члена нерегулярной части характеризует степень нерегулярности пространственной переменной.

§ 2. Регуляризация пространственной переменной

Очень часто в экспериментальных исследованиях мы располагаем только средними значениями точечной пространственной переменной $f(x)$ в некоторых объемах v с центрами тяжести в точках x_i. Эти средние значения определяют новую пространственную переменную [не совпадающую с $f(x)$], зависящую от формы и объема проб v, которую мы будем называть *функцией* $f(x)$, *регуляризованной по объему* v, или *функцией на геометрической базе* v. Естественно ожидать, что регуляризованная пространственная переменная будет вести себя более регулярно, чем исходная переменная на точечной геометрической базе.

Можно определить две пространственные переменные на базе v:

$$\left.\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{v}\int_v f(x+h)\, dh, \\ q(x) &= \int_v f(x+h)\, dh, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,2,1)}$$

где интегрирование производится по объему v с центром в точке x. Переменная $t(x)$ представляет собой среднее значение $f(x)$ в объеме v или, применительно к геологии, среднее содержание полезного компонента в пробе v,

отобранной в точке x. Переменная $q(x)$ представляет собой количество металла в этой же пробе.

В более общем виде можно записать:

$$\left.\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{P_0}\int f(x+h)\,p(h)\,dh,\\ q(x) &= \int f(x+h)\,p(h)\,dh,\\ P_0 &= \int p(h)\,dh, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,2,2)}$$

где $p(h)$ — некоторая весовая функция. Тогда полученные функции $t(x)$ и $q(x)$ будем называть *функциями, регуляризованными посредством взвешивания на функцию* $p(h)$. Функция $p(h)$ может быть определена как на конечном, так и на бесконечном носителе; в последнем случае она должна быть суммируемой [1].

Если в качестве весовой функции использовать геометрическую переменную $k(x)$ объема v, то получим выражения

$$\left.\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{v}\int\limits_v f(x+h)\,k(h)\,dh,\\ q(x) &= \int\limits_v f(x+h)\,k(h)\,dh,\\ v &= \int\limits_v k(h)\,dh, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,2,3)}$$

которые эквивалентны выражениям (I,2,1). Таким образом, регуляризация по объему v является частным случаем регуляризации посредством взвешивания на весовую функцию. В этом частном случае $k(x)$ называется также *функцией опробования*.

Заменяя h на $h - x$ и вводя функцию $\check{p}(h) = p(-h)$, получим

$$\int f(x+h)\,p(h)\,dh = \int f(h)\,\check{p}(x-h)\,dh = f * \check{p}.$$

Тогда выражения (I,2,2) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} q(x) &= f * \check{p},\\ t(x) &= \frac{1}{P_0} f * \check{p}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,2,4)}$$

Сравнивая выражения (I,2,4) и (I,1,3), можно отметить, что ковариограмма $g(h)$ является регуляризованной функцией $f(x)$, когда в качестве весовой функции используется сама функция $f(x)$.

---

[1] Например, если $f(x)$ — содержание радиоактивного элемента в точке x, то интенсивность γ-излучения в точке x' (при условии, что поглощение излучения происходит по закону $\frac{1}{r^2}\,e^{-\mu r}$) пропорциональна выражению

$$\int \frac{e^{-\mu r}}{r^2} f(x)\,dx,$$

где $r = r(x)$ — расстояние между точками x и x'. Очевидно, что в данном случае весовая функция $p(x) = \frac{1}{r^2}\,e^{-\mu r}$ не имеет конечного носителя.

Ковариограмма регуляризованной переменной

Обозначим символом $g_q(h)$ ковариограмму регуляризованной переменной $q(x)$. Из формулы (I,1,3) и (I,2,4) имеем

$$g_q = f * \check{p} * \check{f} * p = f * \check{f} * p * \check{p}.$$

Учитывая свойства ассоциативности и коммутативности свертки функций и обозначая символом $P(h)$ ковариограмму весовой функции $p(h)$, получим следующий важный для нас результат:

$$g_q = g * P. \qquad \text{(I,2,5)}$$

Итак, ковариограмма количества металла $q(x)$ получается путем регуляризации ковариограммы $g(h)$ точечной функции $f(x)$ посредством взвешивания на ковариограмму весовой функции $p(h)$.

Аналогично для среднего содержания $t(x)$ получим ковариограмму

$$g_t = \frac{1}{P_0^2}\,g * P. \qquad \text{(I,2,6)}$$

Полученные результаты позволяют оценить влияние регуляризации на аналитические свойства пространственной переменной. Если, например, весовая функция $p(h)$ дифференцируема один раз (хотя бы в среднем квадратичном), то ее ковариограмма $P(h)$ дифференцируема уже дважды. И тогда, согласно правилу дифференцирования свертки, как g_q, так и g_t дифференцируемы дважды и, следовательно, $q(x)$ и $t(x)$ дифференцируемы в среднем квадратичном, даже если $f(x)$ не дифференцируема вовсе. В двух последних параграфах этой главы вопросы регуляризации пространственной переменной будут рассмотрены детально.

Значение $g_t(0)$ ковариограммы содержания $t(x)$ в начале координат запишется как

$$g_t(0) = \frac{1}{P_0^2}\int g(u)\,P(u)\,du. \qquad \text{(I,2,7)}$$

Подставив $p * \check{p}$ вместо $P(u)$ и заменив u на $u - v$, получим, что

$$g_t(0) = \frac{1}{P_0^2}\int\int g(u)\,p(v)\,p(u+v)\,du\,dv = \frac{1}{P_0^2}\int\int g(u-v)\,p(u)\,p(v)\,du\,dv.$$

Это выражение представляет собой среднее взвешенное на $p(u)$ и $p(v)$ значение $g(h)$, где $h = u - v$, а точки u и v занимают все возможные положения в области интегрирования. А так как $g(h) \leqslant g(0)$, то $g_t(0) \leqslant g(0)$, и в этом также проявляется эффект регуляризации.

Алгорифм Коши

В частном случае, когда весовой функцией является функция опробования $k(x)$, соответствующая пробе v объема $K(0) = v$ ($K(h)$ — геометрическая ковариограмма), предыдущее выражение запишется в виде

$$g_t(0) = \frac{1}{v^2}\int g(h)\,K(h)\,dh = \frac{1}{v^2}\int\int g(x-y)\,k(x)\,k(y)\,dx\,dy. \qquad \text{(I,2,8)}$$

Итак, $g_t(0)$ представляет собой среднее значение $g(h)$, когда концы x и y вектора h занимают все возможные положения в пробе v.

Это соотношение называется *алгорифмом Коши* и будет использовано нами в дальнейшем. Смысл алгорифма Коши по отношению к произвольной функции $F(h) = F(x - y)$ состоит в том, что интеграл кратности $2n$, дающий среднее значение $F(x - y)$ в области v, сводится к n-кратному интегралу с помощью геометрической ковариограммы $K(h)$, соответствующей этой

области:

$$\frac{1}{v^2}\int_v\int_v F(x-y)\,dx\,dy=\frac{1}{v^2}\int F(h)\,K(h)\,dh. \qquad (I,2,9)$$

Использовав этот алгорифм, получим следующее выражение для ковариограммы содержания $t(x)$:

$$g_t(h)=\frac{1}{v^2}\int g(h+u)\,K(u)\,du=\frac{1}{v^2}\int_v\int_v g(h+x-y)\,dx\,dy. \qquad (I,2,10)$$

Таким образом, $g_t(h)$ оказывается равной среднему значению $g(h')$, когда концы вектора h' занимают все возможные положения внутри областей v_1 и v_2, равных v и смещенных относительно друг друга на вектор h.

Регуляризация эффекта самородков

Пусть $g(h)$ — ковариограмма с эффектом самородков в нуле, т. е.

$$g(h)=C(h)+g_1(h), \qquad (I,2,11)$$

где функция $C(h)$ отлична от нуля только в очень узкой области вблизи начала координат. Если v — проба, размеры которой велики по сравнению с носителем эффекта самородков, а $k(x)$ — ее геометрическая переменная, то регуляризованная функция $t(x)=\frac{1}{v}\check{k}*f$ (содержание в пробе v, отобранной в точке x) имеет ковариограмму $\frac{1}{v^2}g*K$, которая содержит член, характеризующий эффект самородков $\frac{1}{v^2}C*K$. Значение последнего — в точке $h=0$, т. е. экспериментально наблюдаемый эффект самородков определяется в соответствии с формулой (I,2,8) выражением:

$$C_t(0)=\frac{1}{v^2}\int C(h)\,K(h)\,dh.$$

Так как $C(h)$ отлична от нуля только в очень узкой области, в пределах которой $K(h)$ незначительно отличается от $K(0)=v$, то

$$C_t(0)\approx\frac{1}{v}\int C(h)\,dh. \qquad (I,2,12)$$

Следовательно, для макроскопических проб наблюдаемый в нуле эффект самородков примерно обратно пропорционален объему пробы, что подчеркивает случайную природу эффекта самородков. Отметим также, что величина наблюдаемого эффекта определяется только значением интеграла (I,2,12) и не зависит от конкретного вида функции $C(h)$

Количество металла, связанное с регуляризованной переменной

Естественно ожидать, что количество металла $Q_t=\int t(x)dx$, определяемое по регуляризованной переменной $t(x)$, совпадает с количеством металла Q для точечной переменной. Покажем, что это действительно так. Пусть $\omega(u)$ и $\varphi(u)$ — преобразования Фурье весовой функции $p(x)$ и переменной $f(x)$ соответственно. Тогда

$$Q=\varphi(0),$$
$$Q_t=\frac{1}{p}\,\omega(0)\,\varphi(0).$$

Но так как $P=\int p(x)dx$, то $\omega(0)=p$ и, следовательно,

$$Q_t=Q. \qquad (I,2,13)$$

§ 3. Операции восхождения и спуска

Когда область v неограничена, содержание $t(x)=\frac{1}{v}f*\check{k}$ обращается в нуль, но количество металла $q(x)=f*\check{k}$ остается вполне определенным. В частных случаях неограниченная область v может представлять собой прямую, плоскость или гиперплоскость (в многомерном пространстве), поэтому можно определить пространственную переменную как количество металла, соответствующее параллельным прямым, плоскостям или гиперплоскостям. Обозначим символом $f_n(x_1,\ldots,x_n)$ значение пространственной переменной в точке $(x_1,\ldots,x_n)$ n-мерного пространства. Тогда новая пространственная переменная, которая представляет собой количество металла, соответствующее прямым, параллельным оси x_n, запишется в виде интеграла

$$f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})=\int f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n. \qquad (I,3,1)$$

Аналогично количество металла, соответствующее плоскостям, параллельным осям x_{n-1} и x_n, определится интегралом

$$f_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2})=\int f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\,dx_{n-1}=$$
$$=\int\int f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{n-1}\,dx_n. \qquad (I,3,2)$$

Операция (I,3,1), которая позволяет перейти от f_n к f_{n-1}, называется *восхождением первого порядка вдоль оси* x_n. Соответственно операцию (I,3,2) можно рассматривать как восхождение первого порядка вдоль оси x_{n-1} от функции f_{n-1} к функции f_{n-2} или как восхождение второго порядка вдоль плоскости (x_{n-1},x_n), при котором осуществляется переход от f_n к f_{n-2}. В n-мерном пространстве можно определить также восхождение третьего, четвертого и т. д. до $(n-1)$ порядков. Чтобы осуществить восхождение вдоль оси или плоскости, не параллельной оси или плоскости системы координат, достаточно произвести соответствующий поворот системы координат.

Операция восхождения наглядно иллюстрируется в случае трехмерного пространства. Пусть, например, $f_3(x,y,z)$ — содержание, выраженное в количестве металла на единицу объема месторождения. Тогда, если z — вертикальная ось, переменная

$$f_2(x,y)=\int f_3(x,y,z)\,dz$$

представляет собой количество металла на единицу площади, или «линейный запас» по вертикальной скважине, расположенной в точке (x,y). В свою очередь переменная

$$f_1(z)=\int\int f_3(x,y,z)\,dx\,dy$$

представляет собой количество металла на метр углубки, или «площадной запас».

Переход к «площадному запасу» приводит, в общем случае, к регуляризации исходной пространственной переменной. Таким образом, детальное исследование регуляризации с помощью операции восхождения, которое будет описано ниже, имеет определенное практическое значение. Кроме того, это исследование позволит на простых примерах показать общий смысл регуляризации.

Операция восхождения приобретает особенно простой вид в преобразованиях Фурье. Обозначим символами $\varphi_n(u_1,\ldots,u_n)$, $\varphi_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})$ и $\varphi_{n-2}(u_1,\ldots,u_{n-2})$ преобразования Фурье функций f_n, f_{n-1} и f_{n-2} соот-

ветственно. Тогда можем получить

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) &= \varphi_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0),\\ \varphi_{n-2}(u_1, \ldots, u_{n-2}) &= \varphi_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-2}, 0) = \varphi_n(u_1, \ldots, u_{n-2}, 0, 0).\end{aligned}\right\} \quad (\text{I},3,3)$$

Операция восхождения вдоль оси x_n выражается в приравнивании нулю координаты u_n в преобразовании Фурье. В общем виде восхождение вдоль произвольной прямой или произвольной плоскости осуществляется посредством линейного преобразования координат u_i. Мы не будем здесь рассматривать вопросы линейной алгебры, связанные с операцией восхождения. Отметим только, что из соотношения (I,3,2) следует, что восхождение вдоль двух взаимно перпендикулярных осей дает линейное преобразование, соответствующее восхождению второго порядка в плоскости этих осей. Наглядно это выражается в соотношениях (I,3,3).

Операция, обратная восхождению, называется *спуском*; она непосредственно связана с «задачей Радона» [1], которая заключается в отыскании функции по значениям ее интегралов на всех прямых, плоскостях или гиперплоскостях пространства. Мы рассмотрим эту задачу в следующем параграфе лишь для частного случая изотропных функций, впрочем, в объеме, достаточном как для практических приложений, так и для выявления основных свойств операций восхождения и спуска.

Операция восхождения для ковариограмм

Обозначим символами g_n, g_{n-1}, g_{n-2} ковариограммы переменных f_n, f_{n-1} и f_{n-2}, введенных из соотношений (I,3,1) и (I,3,2), а символами G_n, G_{n-1} и G_{n-2} — преобразования Фурье этих ковариограмм. Исходя из определений

$$g_n = f_n * \check{f}_n,$$
$$g_{n-1} = f_{n-1} * \check{f}_{n-1},$$
$$g_{n-2} = f_{n-2} * \check{f}_{n-2}$$

и учитывая выражение (I,3,3), получим

$$G_n(u_1, \ldots, u_n) = |\varphi_n(u_1, \ldots, u_n)|^2,$$
$$G_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = |\varphi_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})|^2 = |\varphi_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2,$$
$$G_{n-2}(u_1, \ldots, u_{n-2}) = |\varphi_{n-2}(u_1, \ldots, u_{n-2})|^2 = |\varphi_n(u_1, \ldots, u_{n-2}, 0, 0)|^2.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}G_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) &= G_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0),\\ C_{n-2}(u_1, \ldots, u_{n-2}) &= G_n(u_1, \ldots, u_{n-2}, 0, 0).\end{aligned}\right\} \quad (\text{I},3,4)$$

Из сравнения выражений (I,3,3) и (I,3,4) следует, что ковариограмма функции, полученной в результате операций восхождения, является результатом операции восхождения от ковариограммы исходной функции. Таким образом, восхождение и переход к ковариограмме — коммутативные операции.

§ 4. Операции восхождения и спуска в изотропной схеме

Мы будем говорить, что пространственная переменная $f_n(x)$ следует изотропной транзитивной схеме в том случае, когда связанная с ней транзитивная ковариограмма $g_n(h)$ зависит не от направления

[1] Задача Радона рассматривается в монографиях: И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, М. И. Граев, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., Физматгиз, 1962; И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, М., Физматгиз, изд. 2-е, 1959.

вектора h, а только от его модуля $|h| = r$, где

$$r = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}. \quad (\text{I},4,1)$$

В приложениях почти всегда используются изотропные схемы, так как либо пространственная изменчивость в действительности близка к изотропной, либо может быть сведена к изотропной посредством соответствующего линейного преобразования координат. На примере изотропной схемы мы рассмотрим в конце этого параграфа механизм регуляризации, связанной с операцией восхождения. Так, если исходная ковариограмма ведет себя вблизи нуля как r^λ, то во всех случаях, кроме тех, в которых λ является нечетным целым числом, последовательные операции восхождения приводят к ковариограммам вида $r^{\lambda+1}$, $r^{\lambda+2}$ и т. д. Для нечетного целого λ эта последовательность будет иметь вид: r, $r^2 \ln r$, r^3, $r^4 \ln r$, . . .

Однако можно представить себе случай, когда операция восхождения не приводит к регуляризации ковариограммы. Например, если ковариограмма $g_3(x, y, z)$ в трехмерном пространстве имеет вид

$$g_3(x, y, z) = g(x)\, g(y)\, g(z),$$

то в результате восхождений первого и второго порядков получим ковариограммы

$$\left.\begin{aligned}g_2(x, y) &= A g(x)\, g(y)\\ \text{и}\qquad g_1(z) &= A^2 g(z),\end{aligned}\right\} \quad (\text{I},4,2)$$

(где $A = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, du$, которые ведут себя в окрестности нуля так же, как сама исходная ковариограмма g_3. Рассмотрим частный случай — геометрическую переменную $k(x)$, соответствующую кубу с ребром, равным единице. В этом случае имеем:

$$K_3(x, y, z) = \begin{cases}(1-|x|)(1-|y|)(1-|z|) & \text{при } |x|<1,\ |y|<1,\ |z|<1,\\ 0 & \text{при } |x|\geq 1,\ |y|\geq 1,\ |z|\geq 1.\end{cases}$$

В результате восхождений первого и второго порядков получим ковариограммы

$$K_2(x, y) = (1-|x|)(1-|y|)$$

и

$$K_1(z) = (1-|z|),$$

обладающие той же нерегулярностью поведения в точке $h = 0$, что и ковариограмма K_3. Явление такого типа назовем *эффектом прямоугольника*. На практике этот эффект может проявляться лишь в редких случаях, и большинство реальных объектов может быть описано изотропной схемой.

Изучение операции восхождения в изотропной схеме с помощью преобразования Фурье

Операция восхождения в случае изотропной схемы может изучаться как непосредственно, так и с помощью соотношений (I,3,3). Начнем с метода, основанного на преобразованиях Фурье. Так как $g_n(r)$ обладает сферической симметрией, ее преобразование Фурье обладает такой же симметрией и может быть записано в виде $G(\rho)$, где

$$\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}. \quad (\text{I},4,3)$$

Функция $G = F_n(g_n)$ — преобразование Фурье ковариограммы g_n в n-мерном пространстве, а функции G и g_n — изотропные функции, определенные в этом пространстве.

Операция восхождения вдоль любой оси координат, например x_n, в соответствии с (I,3,3) состоит в приравнивании нулю u_n в преобразовании Фурье ковариограммы. Так как $G(\rho)$ зависит только от ρ, то приравнивая u_n нулю в (I,4,3), мы получим тот же радиус-вектор ρ, но в $(n-1)$-мерном пространстве. Следовательно, ковариограмма g_{n-1}, полученная из g_n в результате восхождения первого порядка, имеет в $(n-1)$-мерном пространстве преобразование Фурье $G(\rho)$, которое будучи функцией только радиуса-вектора ρ не отличается от преобразования Фурье $G(\rho)$ ковариограммы g_n в n-мерном пространстве.

Таким образом, в изотропной схеме преобразование Фурье ковариограммы инвариантно относительно операций восхождения и спуска любого порядка вдоль произвольной прямой, плоскости или гиперплоскости:

$$G(\rho) = F_n(g_n) = F_{n-1}(g_{n-1}) = \ldots = F_{n-k}(g_{n-k}). \qquad \text{(I,4,4)}$$

Обратное преобразование Фурье сразу дает выражение ковариограммы, являющейся результатом восхождения k-го порядка:

$$g_{n-k}(r) = F'_{n-k}[G(\rho)]. \qquad \text{(I,4,5)}$$

Эта формула позволяет найти теоретическое решение проблемы восхождения и спуска в изотропной схеме, когда функция $G(\rho)$ известна. В случае операции спуска k имеет отрицательное значение.

Прямое исследование операции восхождения

В случае изотропной функции $f(x)$ выражения (I,3,1) и (I,3,2) восхождений первого и второго порядков имеют вид

$$\left.\begin{aligned} g_{n-1}(r) &= 2\int_0^\infty g_n\left(\sqrt{r^2+x^2}\right)dx, \\ g_{n-2}(r) &= 2\pi\int_0^\infty g_n\left(\sqrt{r^2+\rho^2}\right)\rho\,d\rho. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,4,6)}$$

Выражение g_{n-2} найдем в полярных координатах в плоскости (x_n, x_{n-1}). После замены переменных $u = \sqrt{r^2+\rho^2}$ получаем

$$\left.\begin{aligned} g_{n-1}(r) &= 2\int_r^\infty g_n(u)\frac{u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}, \\ g_{n-2}(r) &= 2\pi\int_r^\infty u\,g_n(u)\,du. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I,4,7)}$$

Операция восхождения второго (и вообще всякого четного) порядка сводится к обычному интегрированию. Обратная операция, спуск четного порядка, производится посредством обычного дифференцирования. Например, дифференцируя (I,4,7) по r, мы производим спуск второго порядка:

$$g_n(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dr}g_{n-2}(r). \qquad \text{(I,4,8)}$$

Восхождение нечетного порядка — операция более сложная. Соответственно спуск первого порядка не может быть осуществлен посредством дифференцирования.

Однако можно показать, что восхождение первого порядка

$$g_{n-1}(r) = 2\int_r^\infty g_n(u)\frac{u}{\sqrt{u^2-r^2}}du$$

позволяет определить спуск первого порядка как обратную операцию вида

$$g_n(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty g'_{n-1}(u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}. \qquad \text{(I,4,9)}$$

Это соотношение можно получить как результат восхождения первого порядка

$$g_{n+1}(u) = -\frac{1}{2\pi u}g'_{n-1}(u),$$

которое, в соответствии с (I,4,8), представляет собой спуск второго порядка.

Выбор вида ковариограммы $g(r)$

Операции, рассмотренные выше, имеют формальный характер и никоим образом не предрешают пригодности выбранного нами вида ковариограммы для описания пространственных переменных, соответствующих изучаемому объекту. Этот вопрос можно решить только при непосредственном изучении природы интересующего нас объекта. Выбирая теоретическую модель ковариограммы, следует стремиться не только к хорошей аппроксимации точек экспериментальной ковариограммы, но и обращать серьезное внимание на поведение $g(r)$ вблизи нуля. Даже в тех случаях, когда на основании экспериментальных данных определенных выводов о ковариограмме сделать нельзя, все же a priori по качественным представлениям о природе изучаемого объекта можно сделать обоснованные предположения об аналитическом характере ковариограммы. Естественно, при этом важную роль должны играть опыт и интуиция исследователя.

Единственным обязательным условием во всех случаях является положительная определенность функции, выбранной для аппроксимации экспериментальной ковариограммы. При этом все ковариограммы, получаемые из исходной в результате операций восхождения и спуска также будут положительно определенными функциями, что легко доказывается на основании классической теоремы Бохнера.

Операция восхождения над нерегулярной частью ковариограммы

В случае изотропной схемы операция восхождения над нерегулярной частью ковариограммы $g(r)$ может быть проведена почленно, что весьма важно для приложений. При этом каждому члену с r^λ (где λ — нецелое число) в разложении ковариограммы $g(r)$ соответствует член с $r^{\lambda+1}$ в разложении ковариограммы, полученной из $g(r)$ в результате восхождения первого порядка. В свою очередь каждому члену с r^{2p-1} (где p — целое число) соответствует член с $r^{2p}\ln r$. И обратно, каждый член с $r^{2p}\ln r$ дает при восхождении член с r^{2p+1}. Мы не приводим здесь доказательства этого правила, так как оно потребовало бы экскурса в теорию обобщенных функций [63, гл. III], а лишь укажем, что операции восхождения над нерегулярной частью ковариограммы можно проводить почленно в соответствии со следующей схемой

перехода:

$$\left.\begin{aligned} r^{\lambda} &\longrightarrow \sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda+1}{2}\right)}\,r^{\lambda+1},\ (\lambda-\text{нецелое число})\\ r^{2p-1} &\longrightarrow -2^{1-2p}\frac{(2p)!}{(p!)^2}\,r^{2p}\ln r,\ (p-\text{целое число})\\ r^{2p}\ln r &\longrightarrow \pi 2^{2p}\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}\,r^{2p+1}, \end{aligned}\right\} \quad (\text{I},4,10)$$

где $\Gamma(u)$ — обычная гамма-функция.

Это правило не распространяется на регулярную часть ковариограммы и позволяет получить результат операции восхождения, произведенной только над нерегулярной частью. Однако этого достаточно для характеристики степени нерегулярности новой пространственной переменной, а также, как мы убедимся в следующей главе, для решения проблемы оценки. Наконец, это правило позволяет понять на конкретном материале механизм регуляризации, возникающей в результате операции восхождения.

Пример. Для практических приложений представляет значительный интерес особый ряд, в котором при последовательных операциях восхождения логарифмические члены чередуются с членами, содержащими r в нечетной степени:

$$\ln r \longrightarrow \pi r \longrightarrow -\pi r^2 \ln r \longrightarrow -\pi^2\frac{2}{3}r^3 \longrightarrow \ldots$$

ГЛАВА II

Оценка пространственных переменных

Краткое содержание

Эта глава, в которой изложены основы практических приложений, посвящена проблеме оценки пространственных переменных.

В § 1 определяется понятие дисперсии оценки $\sigma^2(a)$ количества металла по регулярной сети опробования с шагом a и дается два эквивалентных выражения этой дисперсии: одно (II,1,12) — непосредственно через ковариограмму и другое (II,1,9) — через ее преобразование Фурье. Показано, что дисперсия оценки тем меньше, чем регулярнее поведение пространственной переменной и чем плотнее сеть опробования. Доказано, что в принципе невозможно определить точность оценки лишь по одним экспериментальным данным без обоснованной гипотезы о поведении $g(h)$ вблизи нуля. Рассмотрено также влияние эффекта самородков на дисперсию оценки.

В § 2 для линейного случая построено правило почленного соответствия между нерегулярной частью ковариограммы и ограниченным разложением дисперсии оценки $\sigma^2(a)$ в окрестности a-0 без учета элемента флуктуаций, связанного с конечностью носителя ковариограммы. Показано, что аналитически эквивалентные, т. е. обладающие одинаковыми нерегулярными частями, ковариограммы приводят к дисперсиям оценки, имеющим одинаковые ограниченные разложения.

В § 3 результаты обобщаются для случая многомерного пространства. Выводится принцип композиции дисперсий, позволяющий определить дисперсию оценки в случае многомерного пространства из ковариограммы самой пространственной переменной и ковариограмм, полученных из нее посредством операций восхождения.

В § 4 рассматривается вариант опробования по случайной слоевой сети. Сравниваются дисперсии оценок, полученных при опробовании по регулярной и по случайной слоевой сети для одного и того же числа проб.

§ 1. Общая теория регулярных сетей

При изучении пространственной переменной $f(x)$ одна из важнейших задач — оценка количества металла

$$Q=\int f(x)\,dx \qquad (\text{II},1,1)$$

по имеющимся экспериментальным данным. Предполагается, что эти данные получены в результате отбора проб по регулярной сети, ячейка которой имеет форму параллелепипеда с ребрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Другими словами, в n-мерном пространстве задана прямоугольная система координат с осями, параллельными основным направлениям сети опробования, так что пробы отобраны в точках

$$y+ka=(y_1+k_1a_1, \ldots, y_n+k_na_n), \qquad (\text{II},1,2$$

где k_i — целые числа, принимающие все возможные положительные и отрицательные значения, а $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — произвольная точка, принятая в качестве исходной при построении сети. При такой записи предполагается, что сеть не ограничена. Практически геометрическое поле пространственной переменной ограничено и достаточно считать, что реальная сеть опробования лишь слегка выходит за его пределы.

Предположив, что пробы являются точечными (при пробах конечного объема мы можем перейти к случаю точечного опробования, заменив f на $f * \check{p}$, а g на $g * p * \check{p}$). Таким образом, данные, на основании которых произ-

водится оценка Q, представляют собой бесконечное число значений $f(y + ka)$ для всех векторов k $(k_1, \ldots, k_n)$. В действительности в связи с ограниченностью геометрического поля только конечное число значений $f(y + ka)$ отлично от нуля. Для оценки количества металла Q, т. е. для приближенного вычисления интеграла (II,1,1), построим сумму по всем значениям k:

$$Q^*(y_1, \ldots, y_n) = a_1 a_2 \ldots a_n \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} f(y_1 + k_1 a_1, \ldots, y_n + k_n a_n), \tag{II,1,3}$$

которую назовем оценкой истинного значения Q и запишем в сокращенном виде:

$$Q^*(y) = |a| \sum_k f(y + ka), \tag{II,1,4}$$

где $|a|$ — объем ячейки сети.

Так как оценка Q^* не зависит от того, какая из проб принимается за исходную при построении сети, она является периодической функцией векторного аргумента y с периодом $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Это позволяет представить оценку количества металла в виде разложения в ряд Фурье

$$Q^*(y) = \sum_{p_1 \ldots p_n} C_{p_1 \ldots p_n} \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 y_1}{a_1} + \ldots + \frac{p_n y_n}{a_n}\right)\right], \tag{II,1,5}$$

где

$$C_{p_1 \ldots p_n} = \frac{1}{a_1 \ldots a_n} \int_P Q^*(y) \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 y_1}{a_1} + \ldots + \frac{p_n y_n}{a_n}\right)\right] dy_1 \ldots dy_n.$$

В сокращенном виде запишем:

$$\left.\begin{aligned} Q^*(y) &= \sum_p C_p e^{2\pi i p \frac{y}{a}}, \\ C_p &= \frac{1}{|a|} \int_P Q^*(y)\, e^{-2\pi i p \frac{y}{a}}\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{II,1,6}$$

При вычислении C_p интегрирование производится по объему параллелепипеда P с ребрами $a_1, a_2, \ldots a_n$, т. е. по объему ячейки сети. Учитывая выражение (II,1,4), получим для C_p из формулы (II,1,6)

$$C_p = \int f(y)\, e^{-2\pi i p \frac{y}{a}}\, dy,$$

где интегрирование производится по всему пространству.

Сравнив полученное выражение с преобразованием Фурье (I,1,8) и введя следующее обозначение для преобразования Фурье функции $f(x)$:

$$\Phi(u) = F[f(u)] = \int f(x)\, e^{-2\pi i u x}\, dx,$$

запишем формулу (II,1,6) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} Q^*(y) &= \sum_p C_p e^{2\pi i \frac{p}{a} y}, \\ C_p &= \Phi\left(\frac{p}{a}\right) = \Phi\left(\frac{p_1}{a_1}, \frac{p_2}{a_2}, \ldots, \frac{p_n}{a_n}\right). \end{aligned}\right\} \tag{II,1,7}$$

Для $p = 0$ (т. е. при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$) получим

$$C_0 = \Phi(0) = \int f(x)\, dx = Q. \tag{II,1,8}$$

Таким образом, постоянный член разложения оценки $Q^*(y)$ в ряд Фурье представляет собой не что иное, как количество металла Q, которое требуется оценить. При этом совокупность периодических членов ряда характеризует ошибку, связанную с этой оценкой.

Удобной мерой этой ошибки служит дисперсия оценки $\sigma^2(a)$, определяемая как среднее значение $[Q^*(y) - Q]^2$ при условии, что точка y занимает все возможные положения внутри параллелепипеда P. Эта величина по смыслу родственна дисперсиям случайных величин, рассматриваемых в теории вероятностей. Так, если представить себе, что исходная точка сети опробования внутри параллелепипеда P выбрана случайно, то оценка $Q^*(y)$ окажется также случайной величиной, дисперсия которой будет равной $\sigma^2(a)$. Независимо от того, как ее интерпретировать, дисперсия оценки имеет вид

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{|a|} \int_P [Q^*(y) - Q]^2\, dy. \tag{II,1,9}$$

Заменим Q^* ее разложением (II,1,7) и в силу ортогональности входящих в это разложение экспонент получим равенство

$$\sigma^2(a) = \sum_p |C_p|^2 - C_0^2 = \sum_p \left|\Phi\left(\frac{p}{a}\right)\right|^2 - Q^2,$$

которое по смыслу эквивалентно равенству Парсеваля.

Но в соответствии с (I,1,9) $|\Phi(u)|^2$ является преобразованием Фурье $G(u)$ кovариограммы $g(h)$ пространственной переменной $f(x)$, и, следовательно, дисперсию оценки можно записать в виде

$$\sigma^2(a) = \sum_p G\left(\frac{p}{a}\right) - G(0). \tag{II,1,10}$$

Теперь выразим дисперсию $\sigma^2(a)$ непосредственно через кovариограмму $g(h)$. Так как среднее значение $Q^*(y)$ в параллелепипеде P равно Q, формула (II,1,9) может быть представлена как

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{|a|} \int_P [Q^*(y)]^2\, dy - Q^2. \tag{II,1,11}$$

Возведем обе части равенства (II,1,4) в квадрат и получим, что

$$[Q^*(y)]^2 = |a|^2 \sum_{p,q} f(y + pa) f(y + qa),$$

где суммирование производится по всем целочисленным значениям p и q. Заменив q суммой $p + k$ и проинтегрировав обе части по объему параллелепипеда P, найдем:

$$\int_P [Q^*(y)]^2\, dy = |a|^2 \int_P \left[\sum_{p,k} f(y + pa) f(y + pa + ka)\right] dy.$$

Суммирование по индексам $p = (p_1, \ldots, p_n)$ позволяет перейти от интегрирования по объему параллелепипеда для P к интегрированию по всему пространству и записать:

$$\int_P [Q^*(y)]^2\, dy = |a|^2 \int \sum_k f(y) f(y + ka)\, dy.$$

Меняя местами знаки интегрирования и суммирования и учитывая определение кovариограммы $g(h)$ (I,1,2), получим

$$\int_P [Q^*(y)]^2\, dy = |a|^2 \sum_k g(ka).$$

Подставляя в формулу (II,1,11) этот результат, а также выражение (I,1,12) для Q^2, запишем формулу для $\sigma^2(a)$ в окончательном виде:

$$\sigma^2(a) = |a| \sum_k g(ka) - \int g(h)\,dh. \qquad \text{(II,1,12)}$$

Можно показать, что выражения (II,1,10) и (II,1,12) для дисперсии оценки эквивалентны. В приложениях используется та из них, которая более удобна в каждом конкретном случае.

Свойства дисперсии оценки $\sigma^2(a)$

Интуиция нам подсказывает, что оценка количества металла будет тем точнее, чем плотнее сеть опробования и чем непрерывнее и регулярнее пространственная изменчивость самого изучаемого признака. Влияние этих двух факторов отражено в формуле (II,1,12). Действительно, дисперсия оценки представляется как разность между приближенным и точным значениями интеграла $\int g(h)dh$, т. е. как ошибка вычисления интеграла по численным значениям $g(h)$. Естественно, эта ошибка тем меньше, чем многочисленнее экспериментальные данные и, следовательно, плотнее сеть опробования и чем регулярнее кovариограмма $g(h)$, т. е. чем регулярнее пространственная изменчивость самой переменной $f(x)$. Впрочем, практически определение дисперсии $\sigma^2(a)$ при плотной сети опробования достаточно сложно, так как при этом необходимо найти разность между двумя очень близкими величинами, каждую из которых трудно вычислить. Поэтому в следующих параграфах мы перейдем к построению более прямых приближенных формул расчета дисперсии, основанных на методах теории численного интегрирования.

По определению (II,1,9) дисперсия оценки обязательно должна быть положительной величиной. Однако формулы (II,1,10) и (II,1,12), примененные к произвольной функции $g(h)$ и ее преобразованию Фурье, могут дать отрицательные значения оценки дисперсии. Чтобы последнее было невозможным, кovариограмма $g(h)$ должна быть положительно определенной функцией. Тогда в силу теоремы Бохнера преобразование Фурье $G(u)$ кovариограммы $g(h)$ окажется неотрицательным при любых значениях u и, следовательно, дисперсия $\sigma^2(a)$ в выражении (II,1,10) будет суммой неотрицательных величин $G\left(\frac{p_1}{a_1}, \ldots \frac{p_n}{a_n}\right)$ для целых значений p, при которых $p_1, p_2, \ldots, p_n \neq 0$.

Оценка дисперсии $\sigma^2(a)$

Если довольствоваться только имеющимися экспериментальными значениями пространственной переменной $f(y + ka)$, то вычисление величин $g(ka)$, входящих в выражение (II, I, 12), следует производить по формуле

$$g^*(ka) = |a| \sum_p f(y + pa) f(y + pa + ka).$$

Аналогично оценку Q^2 находят как квадрат оценки Q^*:

$$[Q^*(y)]^2 = |a|^2 \sum_{p,k} f(y + pa) f(y + pa + ka).$$

Если подставить эти оценки вместо истинных значений в формулу (II,1,12), то $\sigma^2(a)$ окажется тождественно равной нулю. В тех же условиях использование формулы (II,1,10) может привести и к отрицательным значениям $\sigma^2(a)$. Это связано с тем, что при отборе проб по регулярной сети невозможно оценить гармоники пространственной переменной $f(y)$, периоды которых кратны шагу сети [1].

Таким образом, теоретически невозможно по одним лишь экспериментальным данным рассчитать одновременно и оценку количества металла, и дисперсию этой оценки. В связи с этим построенная выше теория, казалось бы, не имеет практического смысла. Однако в действительности эта трудность может быть преодолена, если a priori задаться определенным видом функции $g(h; \lambda, \mu, \ldots)$, параметры которой $\lambda, \mu, \ldots$ всегда могут быть подобраны путем сопоставления с экспериментальными значениями $g^*(ka)$. Формулы (II,1,10) и (II,1,12) применимы к кovариограмме, полученной именно таким способом. Естественно, ценность получаемых при этом результатов определяется степенью соответствия выбранной математической модели $g(h; \lambda, \mu, \ldots)$ физической реальности. Выбор математической модели [2], подходящей для того или другого частного случая, может быть произведен только на основе данных физической природы изучаемого объекта. Мы убедимся в последующих параграфах в том, что наиболее важен выбор поведения $g(h)$ при $|h| < a$ (где отсутствуют экспериментальные данные), т. е. поведения кovариограммы $g(h)$, определяемого ее нерегулярной частью.

Случай, когда имеется эффект самородков

При наличии эффекта самородков кovариограмма определяется выражением (I,2,11), т. е.

$$g(h) = C(h) + g_1(h),$$

где $C(h)$ отличается от нуля только в окрестности начала координат. Для сети, шаг которой a превышает длину носителя эффекта самородков, значения $C(ka)$ для всех k, кроме $k = 0$, равны нулю. В этих условиях из формулы (II,1,12) следует, что компонента дисперсии оценки, связанная с эффектом самородков, сводится к величине

$$|a| C(0) - \int C(h)\,dh.$$

Если вместо точечных проб отбираются пробы, размеры которых велики по сравнению с носителем эффекта самородков, то происходит регуляризация этого эффекта, и из формулы (I,2,12) следует, что его вклад в дисперсию оценки равен

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{|a|}{v} - 1\right) \int C(h)\,dh.$$

Если V — общий объем геометрического поля (месторождения), то число проб n примерно равно отношению $V/|a|$; тогда $|a| = V/n$, и компоненту дисперсии, связанную с эффектом самородков, можно представить в виде

$$\sigma_p^2 = \left[\frac{V}{nv} - 1\right] \int C(h)\,dh. \qquad \text{(II,1,13)}$$

Так как суммарный объем отобранных проб nv всегда много меньше объема месторождения V, то эта компонента дисперсии практически обратно пропорциональна объему отобранных проб, как это следует из (II,1,13), что еще раз подчеркивает случайную природу эффекта самородков. На практике

---

[1] Так как формулы (II,1,10) и (II,1,12) эквивалентны, то они, очевидно, должны приводить к одинаковым численным результатам. Вопросы использования формул, аналогичных (II,1,10), освещены в послесловии.— *Прим. ред.*

[2] Иногда без должных оснований принимается гипотеза независимости проб, т. е. считается, что кovариограмма $g(h)$ равна нулю везде, кроме окрестности $h = 0$. Эта гипотеза приводит к оценке дисперсии вида $\sigma^2(a) = |a| g(0) - Q^2$, которая является смещенной в сторону завышения или занижения в зависимости от формы сети опробования.

часто трудно отделить эффект самородков от накладывающихся на него аналогичных эффектов, связанных с ошибками измерения и анализа.

Случай редкой сети опробования

Предположим теперь, что область, где ковариограмма $g(h)$ отлична от нуля, по размерам меньше ячейки сети опробования, т. е. шаг сети превышает длину носителя ковариограммы. Тогда все значения $g(ka)$ в формуле (II,1,12) будут равны нулю, кроме $g(0)$, так что

$$\sigma^2(a) = |a|\, g(0) - \int g(h)\, dh. \qquad \text{(II,1,14)}$$

Именно такую формулу мы получили бы в предположении о независимости проб. Действительно, при таком шаге сети опробования только одна проба может попасть в объем месторождения и обладать ненулевым содержанием. Эта формула фактически соответствует случаю, когда одна проба случайно отобрана в пределах параллелепипеда $|a|$, содержащего геометрическое поле переменной (см. упражнение 3 к гл. III).

В следующем параграфе мы рассмотрим другой крайний случай, когда шаг сети очень мал, и определим принцип почленного соответствия между нерегулярной частью ковариограммы и ограниченным разложением дисперсии оценки в окрестности $a = 0$. При рассмотрении этого вопроса важную роль играет размерность пространства. Поэтому мы начнем с простейшего случая — одномерного пространства.

§ 2. Расчет дисперсии оценки в линейном случае

Прежде всего вспомним формулу Эйлера — Маклорена, используемую в теории численного интегрирования. Если отрезок $[x_0, x_n]$ разбит на n равных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, а $f(x)$ — функция, дифференцируемая $(2p+2)$ раза и непрерывная вместе со своими $(2p+2)$ первыми производными на этом отрезке, то

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \frac{x_n - x_0}{n}\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right] -$$

$$- \frac{B_2}{2!}\left(\frac{x_n - x_0}{n}\right)^2 [f'(x_n) - f'(x_0)] + \frac{B_4}{4!}\left(\frac{x_n - x_0}{n}\right)^4 [f'''(x_n) - f'''(x_0)] \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(\frac{x_n - x_0}{n}\right)^{2p} [f^{(2p-1)}(x_n) - f^{(2p-1)}(x_0)] + R_p, \qquad \text{(II,2,1)}$$

где B_{2p} — числа Бернулли $\left(B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots\right)$, а остаточный член R_p удовлетворяет неравенству

$$|R_p| < \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!}\, n \left(\frac{x_n - x_0}{n}\right)^{2p+3} M_p,$$

где M_p — максимальное значение $f^{(2p+2)}(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$.

Попытаемся теперь использовать эту формулу для расчета дисперсии оценки $\sigma^2(a)$, которая в соответствии с (II,1,12) может быть записана в виде

$$\sigma^2(a) = ag(0) + 2a \sum_{n=1}^{\infty} g(na) - 2 \int_0^{\infty} g(x)\, dx. \qquad \text{(II,2,2)}$$

Это выражение весьма напоминает формулу Эйлера — Маклорена. Необходимо только учесть, что ковариограмма $g(h)$, вообще говоря, обладает нерегулярностью при $h = 0$ и иногда при $h = b$, где b — носитель ковариограммы (если носитель ковариограммы конечен, то $g(h) \equiv 0$ при $h > b$). Обозначив через $(k+1)$ такое целое число, при котором

$$(k+1)\, a \leqslant b < (k+2)\, a, \qquad \text{(II,2,3)}$$

выделим в правой части (II,2,2) три члена:

$$R_1 = a[g(0) + g(a)] - 2\int_0^a g(x)\, dx,$$

$$R_2 = 2a\left\{\frac{1}{2} g(a) + g(2a) + \ldots + g[(k-1)\, a] + \frac{1}{2} g(ka)\right\} - 2\int_a^{ka} g(x)\, dx,$$

$$R_3 = ag(ka) - 2\int_{ka}^{b} g(x)\, dx + 2ag[(k+1)\, a].$$

Можно считать, что $g(h)$ обладает нерегулярностью только при $h = 0$ и $h = b$, поэтому формула Эйлера — Маклорена применима на отрезке $[a, ka]$. Тогда из (II,2,1) получим следующее выражение для R_2:

$$R_2 = 2a^2 \frac{B_2}{2!}[g'(ka) - g'(a)] - 2a^4 \frac{B_4}{4!}[g'''(ka) - g'''(a)] + \ldots$$

Распределим элементы члена R_2 между членами R_1 и R_3, отнеся к R_1 производные в точке a, а к R_3 — производные в точке ka, и получим разложение дисперсии оценки на два члена T_0 и T_z, т. е.

$$\sigma^2(a) = T_0(a) + T_z(a), \qquad \text{(II,2,4)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} T_0(a) &= a[g(0) + g(a)] - 2\int_0^a g(x)\, dx - 2a^2 \frac{B_2}{2!} g'(a) + \\ &\quad + 2\frac{a^4}{4!} B_4 g'''(a) - \ldots \\ T_z(a) &= ag(ka) - 2\int_{ka}^{b} g(x)\, dx + 2a^2 \frac{B_2}{2!} g'(ka) - \\ &\quad - 2a^4 \frac{B_4}{4!} g'''(ka) + \ldots + 2ag[(k+1)\, a]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II,2,5)}$$

T_0 назовем *элементом распространения*; он зависит только от поведения $g(x)$ на отрезке $[0, a]$, т. е. в окрестности нуля. Элемент T_z, напротив, связан с поведением $g(x)$ при приближении к оси x в точке $x = b$. Он называется *элементом флуктуаций*.

Элемент флуктуаций

При изучении элемента флуктуаций предположим, что в окрестности точки $x = b$ ковариограмма $g(x)$ допускает разложение вида

$$g(x) = \sum_{\lambda} C_\lambda (b - x)^\lambda.$$

Определим вклад в T_z члена с $(b-x)^\lambda$ для произвольного λ. Для упрощения записи обозначим остаток от деления b на a символом ε $(0 < \varepsilon < 1)$, т. е.

$$\varepsilon = \frac{b}{a} - (k+1). \qquad \text{(II,2,6)}$$

Подставляя ε в формулу (II,2,5) получим величину вклада $T_z(\lambda)$ в T_z члена с $(b-x)^\lambda$ в виде

$$T_z(\lambda)=a^{1+\lambda}\left[(1+\varepsilon)^\lambda+2\varepsilon^\lambda-\frac{2}{1+\lambda}(1+\varepsilon)^{\lambda+1}-2\lambda\frac{B_2}{2!}(1+\varepsilon)^{\lambda-1}+\right.$$
$$\left.+2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\frac{B_4}{4!}(1+\varepsilon)^{\lambda-3}-\ldots\right]. \qquad \text{(II,2,7)}$$

Таким образом, $T_z(\lambda)$ имеет порядок $(1+\lambda)$ относительно a и может принимать как положительные, так и отрицательные значения при изменении ε от 0 до 1. Можно показать ([63], гл. IV и приложение F), что интеграл $\int_0^1 T_z(\lambda)d\varepsilon$ (т. е. среднее значение T_z относительно ε) равен нулю [1]. Например, в случае $\lambda=1$

$$T_z(1)=a^2\left(\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{1}{6}\right).$$

Наличие элемента флуктуаций — фактор мешающий, так как на практике экспериментальные данные не позволяют судить о величине ε. Исходя из того, что среднее значение T_z по ε равно нулю, во всем дальнейшем изложении мы будем пренебрегать этим элементом. Но следует помнить, что он существует и может вносить значительные, не поддающиеся оценке расхождения между истинным значением дисперсии $\sigma^2(a)$ и ее оценкой с помощью только элемента распространения $T_0(a)$. Это легко увидеть на фиг. 2 гл. III. В случае, когда носитель ковариограммы b бесконечен и $g(h)$ стремится к нулю и при h, стремящемся к бесконечности, элемент флуктуаций исчезает (при условии, что $g(h)$ убывает достаточно быстро). Примерами таких ковариограмм могут служить функции вида $e^{-\lambda r}$ и $e^{-\lambda r^2}$.

Элемент распространения

Чтобы вычислить элемент распространения T_0 по формуле (II,2,5), предположим, что $g(h)$ допускает вблизи нуля разложение вида

$$\sum_\lambda C_\lambda x^\lambda,$$

годное для аппроксимации $g(h)$ до $h=a$. Обозначив вклад в T_0 члена с x^λ символом $T_0(x^\lambda)$, получим

$$T_0=\sum_\lambda C_\lambda T_0(x^\lambda).$$

Если сумма содержит конечное число членов, имеем ограниченное разложение T_0, а не точное его выражение.

Согласно расчету $T_0(x^\lambda)$ по формуле (II,2,5),

$$T_0(x^\lambda)=a^{1+\lambda}\left[1-\frac{2}{1+\lambda}-2\lambda\frac{B_2}{2!}+2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\frac{B_4}{4!}-\ldots\right]. \qquad \text{(II,2,7)}$$

[1] Выражение $T_z(\lambda)$ в зависимости от ε сводится к полиному Бернулли, когда λ — целое число. Это, впрочем, видно и из формулы (II,2,7), в которой при целочисленном значении λ содержится конечное число членов. В общем случае имеем

$$T_z(\lambda)=a^{1+\lambda}\frac{2^{1-\lambda}}{\pi^{1+\lambda}}\Gamma(1+\lambda)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi p\varepsilon-\lambda\frac{\pi}{2}\right)}{p^{1+\lambda}}.$$

Так как это разложение в ряд Фурье не содержит постоянного члена, интеграл от $T_z(\lambda)$ по ε от 0 до 1 всегда равен нулю.

Таким образом, $T_0(x^\lambda)$ имеет порядок $(1+\lambda)$ относительно a. Если $\lambda=2k$ — целое четное число, то с помощью формулы Эйлера — Маклорена легко показать, что

$$T_0(x^{2k})=0.$$

Очевидно, что только члены нерегулярной части ковариограммы дают вклад в элемент распространения, и для нерегулярной части вида

$$\sum C_\lambda x^\lambda$$

ограниченное разложение T_0 запишется как

$$T_0=\sum C_\lambda T_\lambda a^{\lambda+1}, \qquad \text{(II,2,8)}$$

где коэффициенты T_λ, определенные соотношением $T_0(x^\lambda)=T_\lambda a^{\lambda+1}$, не зависят от a. Таким образом, мы получили правило почленного соответствия между разложением нерегулярной части ковариограммы $g(x)$ и разложением дисперсии оценки $\sigma^2(a)$ (без учета элемента флуктуаций). Использовав это правило, имеющее много общего с правилом почленного восхождения от нерегулярной части ковариограммы, можно показать, как точность оценки связана с поведением ковариограммы в начале координат, т. е., в конечном счете, с регулярностью поведения самой пространственной переменной. В дальнейшем мы будем говорить, что две ковариограммы аналитически эквивалентны, если их нерегулярные части совпадают. Очевидно, что дисперсии оценки $\sigma^2(a)$, полученные по аналитически эквивалентным ковариограммам, имеют в окрестности $a=0$ одинаковые ограниченные разложения по степеням a.

Замечание 1. Необходимо подчеркнуть, что формула (II,2,8) получена в предположении, что шаг сети достаточно мал, или, более точно, что разложение вида $\sum C_\lambda x^\lambda$ пригодно для аппроксимации $g(x)$ до $x=a$. Когда шаг сети опробования велик, а число проб невелико, дисперсию оценки $\sigma^2(a)$ можно вычислить непосредственно по формуле (II,1,12). В случае, когда a слишком велико для применения формулы (II,2,8), но использование формулы (II,1,12) затруднено из-за необходимости учета большого количества членов, очень хорошие результаты дает простая графическая интерполяция между результатами, получаемыми по формулам (II,2,8) и (II,1,12).

Замечание 2. С другой стороны, не следует упускать из виду, что (II,2,8) — всего лишь ограниченное разложение в окрестности $a=0$. Для ковариограммы вида

$$g(x)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}x^{2k},$$

не имеющей нерегулярной части, правило соответствия ведет к нулевому значению $\sigma^2(a)$, так как $T_0(x^{2k})=0$. На практике при отличном от нуля шаге сети a дисперсия оценки $\sigma^2(a)$ никогда не равняется нулю. Полученный выше результат означает лишь, что $\sigma^2(a)$ обращается в нуль при $a=0$. В качестве примера рассмотрим ковариограмму:

$$g(x)=e^{-\lambda x^2}=\sum(-1)^n\frac{(\lambda x^2)^n}{n!}.$$

Ее преобразование Фурье имеет вид

$$G(u)=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\frac{\pi^2u^2}{\lambda^2}},$$

и по формуле (II,1,10) получаем

$$\sigma^2(a)=2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2}{\lambda a^2}n^2},$$

где $\sigma^2(a)$ не равна нулю при $a \neq 0$, но обращается в нуль со всеми производными при $a = 0$. Практически это означает, что при малых a дисперсия оценки может принимать только очень малые значения.

Точная формулировка правила соответствия

Теперь нам осталось только определить коэффициенты T_λ ограниченного разложения (II,2,8). Прежде чем использовать мало удобную формулу (II,2,7), отметим, что если есть возможность непосредственно получить разложение для ковариограммы какого-либо частного вида, имеющей x^λ в качестве младшего члена нерегулярной части, то коэффициент T_λ получается сразу же простой идентификацией.

Расчет может быть произведен ([63], гл. IV, § 2) с помощью функций Бесселя второго рода. Мы приведем здесь только результаты, которые играют важную роль в приложениях.

Если воспользоваться выражением для чисел Бернулли

$$B_\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^\alpha 2^{\alpha-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \text{ — целое, четное}),$$

можно показать, что каждому члену нерегулярной части с r^λ соответствует член $T_\lambda a^{1+\lambda}$ ограниченного разложения дисперсии оценки $\sigma^2(a)$ в окрестности $a = 0$, где

$$T_\lambda = -2 \sin\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) \frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda}. \qquad \text{(II,2,9)}$$

В частности, T_λ обращается в нуль при целом четном λ; следовательно, регулярная часть ковариограммы не дает никакого вклада в ограниченное разложение дисперсии оценки. Для целого нечетного λ значения T_λ отличны от нуля. Теперь остается рассмотреть вклад членов нерегулярной части вида $r^{2k} \ln r$. Легко заметить, что вклад $T_0(r^{2k} \ln r)$ в разложение $\sigma^2(a)$ получается дифференцированием $T_\lambda a^{1+\lambda}$ по λ, где $\lambda = 2k$. В результате мы получим следующее правило соответствия:

$$\left.\begin{aligned} &T_0(r^{2k}) = 0, \\ &T_0(r^{2k-1}) = \frac{(-1)^k}{k} B_{2k} a^{2k}, \\ &T_0(r^{2k} \ln r) = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{1+2k} B_{1+2k} a^{1+2k}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II,2,10)}$$

Приведем здесь значения B_k от B_2 до B_8:

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= 0{,}166667 = \frac{1}{6} \\ B_3 &= 0{,}058153 \\ B_4 &= 0{,}33333 = \frac{1}{30} \\ B_5 &= 0{,}025413 \\ B_6 &= 0{,}023809 = \frac{1}{42} \\ B_7 &= 0{,}026921 \\ B_8 &= 0{,}03333 = \frac{1}{30} \end{aligned}\right|$$

§ 3. Расчет дисперсии оценки в многомерном случае

В многомерном случае вычисление дисперсий оценки производится аналогично, но несколько более сложным путем. Исходя из общей формулы (II,1,12), можно показать, что здесь также существует элемент распространения и элемент флуктуаций (которым, как и в предыдущем случае, мы пренебрегаем). Что же касается элемента распространения, то легко показать, что принцип почленного соответствия остается в силе и дает возможность построить ограниченные разложения $\sigma^2(a_1, \ldots, a_n)$, упорядоченные по возрастающим степеням одночленов $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_n^{\lambda_n}$. Естественно, здесь также идет речь лишь об ограниченных разложениях, применимых только для малых значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$. При редкой сети опробования предпочтительнее использовать формулу (II,1,12), в которой в этом случае будет содержаться небольшое число членов. В пределе, когда ячейка сети по размеру превышает геометрическое поле переменной (т. е. $a_1 > b_1, \ldots, a_n > b_n$), имеется только одна рудная проба, которую можно рассматривать, как случайно размещенную внутри параллелепипеда P, содержащего геометрическое поле переменной. Тогда общая формула приобретает «случайный» характер:

$$\sigma^2(a_1, \ldots, a_n) = (a_1 a_2 \ldots a_n)\, g(0) - \int g(h)\, dh. \qquad \text{(II,3,1)}$$

Решение для промежуточных случаев (не очень плотных и не очень редких сетей) может быть получено простой графической интерполяцией. На практике, однако, не всегда возникает необходимость использовать такую интерполяцию, так как часто оказывается, что ограниченные разложения сохраняют смысл и для весьма редких сетей.

Правило соответствия. Мы ограничимся случаем изотропной схемы. Если ковариограмма может быть представлена вблизи нуля разложением вида

$$g(r) = \sum C_\lambda r^\lambda,$$

то дисперсия оценки допускает ограниченное разложение

$$\sigma^2(a_1, \ldots, a_n) = \sum C_\lambda T_0(r^\lambda), \qquad \text{(II,3,2)}$$

где $T_0(r^\lambda)$ — полиномы степени $\lambda + n$ относительно $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Мы дадим теоретическое выражение $T_0(r^\lambda)$ в общем виде, чтобы затем уточнить его для частного случая 2-мерного пространства.

Пусть

$$G(\rho) = F_n(r^\lambda) = \pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda-n}$$

— преобразование Фурье элемента r^λ в n-мерном пространстве. Применим к $G(\rho)$ общую формулу (II,1,10). Тогда для $T_0(r^\lambda)$ получим следующее выражение:

$$T_0(r^\lambda) = \frac{\pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p_1 p_2 \ldots p_n \neq 0} \frac{1}{\left[\frac{p_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{p_n^2}{a_n^2}\right]^{\frac{\lambda+n}{2}}}. \qquad \text{(II,3,3)}$$

Суммирование справа производится по всем системам положительных и отрицательных целых чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, за исключением единственной системы $(p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0)$.

Это краткое рассуждение не является строгим, так как операции, проведенные над r^λ и $\rho^{-\lambda-n}$, не вполне законны. Однако читатель может легко проверить, что тот же результат он получит и при строгом выводе, как это уже было сделано для одномерного случая, когда мы использовали функцию Бесселя, содержащую член с r^λ; при этом функция Бесселя была использована как вспомогательная, в то время как результат (II,3,3) имеет общее значение.

Компоненты дисперсии в двумерном случае

Непосредственное использование формулы (II,3,3) для расчета дисперсии очень трудоемко. Попытаемся отыскать приближенную формулу, ограничившись для начала двумерным случаем. Для $n = 2$ общая формула имеет вид

$$T_0(r^\lambda) = \frac{\pi^{-\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p_1 p_2 \neq 0} \frac{1}{\left[\frac{p_1^2}{a_1^2}+\frac{p_2^2}{a_2^2}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}}}. \qquad \text{(II,3,4)}$$

В целях большей определенности положим, что $a_2 \leqslant a_1$. В сети опробования мы можем выделить профили, соответствующие линиям наибольшей плотности опробования, т. е. профили, опробованные с шагом a_2. В пределе, когда $a_2 = 0$, мы получим фактически операцию восхождения вдоль этих профилей. При этом элемент с r^λ приведет, в соответствии с правилом (II,4,20), к элементу вида

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{1+\lambda};$$

это выражение фигурирует в ковариограмме новой переменной, полученной в результате восхождения. Дисперсия оценки этой новой переменной по сети с шагом a_1 обязательно будет равна

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a_1^{2+\lambda},$$

где T_λ определяется формулой (II,2,9). Действительно, если положить в формуле (II,3,4) $a_2 = 0$, то останутся только члены, соответствующие $p_2 = 0$, и тогда получим, что

$$2\frac{\pi^{-\lambda-1}\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} a_1^{2+\lambda} \sum_{p_1=1}^{\infty} \frac{1}{p_1^{\lambda+2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a_1^{2+\lambda}. \qquad \text{(II,3,5)}$$

Таким образом, мы получили основную часть $T_0(r^\lambda)$ в предположении, что отношение $\frac{a_1}{a_2}$ очень мало. Этот член представляет собой компоненту дисперсии, характеризующую точность оценки количества металла в геометрическом поле по сети профилей, количество металла в которых предполагается точно известным. Эта компонента дисперсии называется *дисперсией распространения на ленту*.

Когда a_2 не равно нулю, у нас нет правила соответствия для членов (II,3,4) с ненулевыми целыми λ. Однако можно показать, что, когда a_2 мало по сравнению с a_1, вносимая им компонента эквивалентна $T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda}$, где T_λ определяется выражением (II,2,9). Таким образом, в итоге мы получили

приближенную формулу:

$$T_0(r^\lambda) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a_1^{2+\lambda} + T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda} \qquad \text{(II,3,6)}$$

при $a_2 < a_1$.

При $\lambda < 8$ формула (II,3,6) дает удовлетворительную аппроксимацию вплоть до $a_2 = a_1$.

Итак, соотношение (II,3,6) выражает принцип композиции дисперсии распространения на профиль и дисперсии распространения на ленту. Дисперсия распространения на ленту [первый член правой части формулы (II,3,6)] представляет собой, как мы видели, дисперсию оценки количества металла по линейной сети с шагом a_1 для новой переменной, полученной посредством операции восхождения вдоль профилей. Второй член, $T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda}$, называется *дисперсией распространения на профиль* и представляет собою дисперсию оценки количества металла сети с шагом a_2, рассчитанную по ковариограмме самой пространственной переменной.

Если $g_2(r)$ — ковариограмма пространственной переменной в двумерном пространстве, $g_1(r)$ — ковариограмма, полученная из $g_2(r)$ посредством операции восхождения, $\sigma_1^2(a_1)$ и $\sigma_2^2(a_2)$ — дисперсии оценки, полученные для одномерных случаев по ковариограммам $g_1(r)$ и $g_2(r)$ соответственно, а $\sigma^2(a_1 a_2)$ — дисперсия, рассчитанная для двумерного случая по ковариограмме $g_2(r)$, принцип композиции можно записать в следующем виде:

$$\sigma^2(a_1 a_2) = \sigma_1^2(a_1) + a_1 \sigma_2^2(a_2) \qquad \text{(II,3,7)}$$

при $a_1 > a_2$.

Полученное выражение, справедливое при тех же предположениях, какие были допущены при выводе соотношения (II,3,6), показывает, что оценку количества металла в профиле по отобранным на нем пробам и оценку количества металла в ленте по профилю можно рассматривать как независимые; следовательно, суммарную дисперсию можно получить композицией дисперсий соответствующих оценок, как если бы речь шла о дисперсиях независимых случайных переменных (в обычном вероятностном смысле). Такой интуитивный ход к доказательству позволяет понять, почему формула (II,3,6) применима вплоть до $a_1 = a_2$ и весьма больших значений λ.

В приложениях чаще всего используются результаты, полученные для целых λ и членов, содержащих $r^{2k}\ln r$. Из формулы (II,3,6) легко получить следующее:

$$\begin{aligned} T_0(r^{2k}) &= 0, \\ T_0(r^{2k-1}) &= \frac{(-1)^k 2^{2-2k}(2k-2)!}{\left(k+\frac{1}{2}\right)[(k-1)!]^2} B_{1-2k} a_1^{1+2k} + \frac{(-1)^k}{k} B_{2k} a_1 a_2^{2k}, \\ T_0(r^{2k}\ln r) &= \frac{(-1)^{k+1} 2^{2+2k}(k!)^2}{(2k+3)!}\pi B_{2+2k} a_1^{2+2k} + \frac{(-1)^{k+1}\pi}{1+2k} B_{1+2k} a_1 a_2^{1+2k}. \end{aligned} \qquad \text{(II,3,8)}$$

В частности, когда $a_1 \geqslant a_2$,

$$\begin{aligned} T_0(r) &= -\frac{1}{6} a_1 a_2^2 - 0{,}0609 a_1^3, \\ T_0(r^2\ln r) &= 0{,}0609 a_1 a_2^3 + 0{,}0349 a_1^4, \\ T_0(r^3) &= \frac{1}{60} a_1 a_2^4 + 0{,}01198 a_1^5. \end{aligned} \qquad \text{(II,3,9)}$$

Обобщение на случай большей размерности

Обобщим принцип композиции дисперсий на случай большей размерности пространства. Пусть, например, $n = 3$, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ и $\sigma_3^2(a)$, $\sigma_2^2(a)$, $\sigma_1^2(a)$ — дисперсии оценок, вычисленные соответственно по ковариограмме g_3 и ковариограммам g_2 и g_1, полученным из g_3 в результате операций восхождения первого и второго порядков. Тогда

$$\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = \sigma_1^2(a_1) + a_1\sigma_2^2(a_2) + a_1a_2\sigma_3^2(a_3). \qquad \text{(II,3,10)}$$

Отсюда видно, что композиция компонент дисперсии производится так, как если бы оценки количества металла в слоях по сечениям, в сечениях по профилям и в профилях по пробам были произведены независимо одна от другой. Принцип соответствия позволяет также легко определить вклад $T_0(r^\lambda)$ в эту дисперсию члена нерегулярной части ковариограммы, содержащего r^λ:

$$T_0(r^\lambda) = -\frac{2\pi}{\lambda+2}T_{2+\lambda}a_1^{3+\lambda} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}T_{1+\lambda}a_1a_2^{2+\lambda} + T_\lambda a_1a_2a_3^{1+\lambda}. \qquad \text{(II,3,11)}$$

Случай регулярной непрямоугольной сети

На практике ячейка сети опробования может иметь форму параллелограмма (в двумерном пространстве) или косого параллелепипеда (в трехмерном пространстве). Принцип композиции дисперсий остается верным и в этом случае. Чтобы можно было воспользоваться выведенными выше формулами, достаточно при $n = 2$ в качестве a_2 взять расстояние между пробами в линиях наибольшей плотности опробования, а в качестве a_1 — расстояние между этими линиями. Аналогично в трехмерном случае в качестве a_3 следует взять шаг опробования вдоль линий наибольшей плотности, в качестве a_2 — расстояние между этими линиями, а в качестве a_1 — расстояние между плоскостями наибольшей плотности опробования.

§ 4. Случайное слоевое размещение проб

На практике иногда пробы размещаются не по регулярной сети, а случайно в пределах так называемых зон влияния. Когда зоны влияния одинаковы по размеру и полностью занимают геометрическое поле, говорят о случайной слоевой сети, где каждый слой выступает в качестве зоны влияния отобранной в его пределах пробы. В двумерном пространстве зоны влияния могут иметь вид параллелограммов или шестиугольников, в трехмерном пространстве — прямоугольных или косых параллелепипедов.

В этом параграфе мы определим дисперсию оценки, получаемой при такой сети, и сравним ее с дисперсией оценки для регулярной сети, построенной на тех же зонах влияния. Для простоты предположим, что зона влияния имеет вид прямоугольного параллелепипеда P со сторонами $a = (a_1, a_2 \ldots a_n)$, параллельными осям координат, однако заметим, что все полученные результаты будут справедливы и для других многогранников. Если зафиксировать положение точки $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ центра одной из зон влияния, то центры других зон влияния расположатся в точках $v + ka = (v_1 + k_1a_1, \ldots, v_n + k_na_n)$, где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ есть n-мерный вектор с целочисленными компонентами. В зоне P_k выберем случайную пробу, положение которой определим вектором $v + ka + u_k$. Будем считать, что положение конца вектора u_k выбрано случайно в параллелепипеде P с центром в начале координат. Обозначим символами $\omega(x)$ и $\Pi(h) = \omega * \check{\omega}$ геометрическую переменную, связанную с параллелепипедом P, и ее ковариограмму

соответственно. По результатам опробования, т. е. по значениям пространственной переменной $f(v + ka + u_k)$ для всех векторов k, можно построить оценку Q^* количества металла в виде

$$Q^* = |a| \sum_k f(v + ka + u_k). \qquad \text{(II,4,1)}$$

Оценка Q^* является случайной величиной, зависящей от вектора u_k, случайно выбираемого в пределах ячейки сети P, а также от исходной точки v, которую также можно рассматривать как случайно выбранную внутри параллелепипеда P. Регуляризованную переменную $f * \check{\omega}$, характеризующую количество металла в параллелепипеде P с центром в точке x, обозначим символом $f_p(x)$. Тогда $g_p = g * \Pi$ будет ковариограммой этой регуляризованной переменной.

При фиксированном v математическое ожидание $f(v + ka + u_k)$ относительно вектора u_k равно $\frac{1}{|a|}f_p(v + ka)$; и тогда математическое ожидание оценки Q^*

$$E(Q^* \mid v) = \sum_k f_p(v + ka) = Q$$

в точности окажется равным истинному количеству металла и не будет зависеть от положения исходной точки сети. С другой стороны, при фиксированном v значения $f(v + ka + u_k)$ являются независимыми переменными величинами вследствие случайного выбора u_k [1]. Поэтому дисперсия оценки Q^* при фиксированном v имеет вид .

$$D(Q^* \mid v) = |a| \sum_k \int_P [f(v + ka + u_k)]^2\, du - \sum_k [f_p(v + ka)]^2 =$$

$$= |a|\, g(0) - \sum_k [f_p(v + ka)]^2.$$

Так как математическое ожидание оценки Q^* при фиксированном v не зависит от v, искомая дисперсия $D(Q^*) = \sigma^2(a)$ определяется как среднее значение $D(Q^* \mid v)$, когда v случайно выбирается в P:

$$D(Q^*) = \sigma^2(a) = |a|\, g(0) - \frac{1}{|a|}g_p(0).$$

Подставив сюда значение $g_p = g * \Pi$ в начале координат, т. е.

$$g_p(0) = \int g(h)\,\Pi(h)\,dh,$$

получим окончательное выражение:

$$\sigma^2(a) = |a| \left[g(0) - \frac{1}{|a|^2}\int g(h)\Pi(h)\,dh \right]. \qquad \text{(II,4,2)}$$

Обратившись к алгорифму Коши (I,2,9), увидим, что дисперсия оценки — это произведение объема $|a|$ ячейки сети P на разность $g(0)$ и среднего значения $g(h)$ в P. Эта дисперсия зависит только от поведения ковариограммы $g(h)$ в пределах ячейки сети и принимает тем большее значение, чем быстрее убывает $g(h)$ в P, т. е. чем менее регулярно поведение пространственной переменной $f(x)$.

---

[1] Значения $f(v + ka + u_k)$ не являются независимыми переменными, но таковыми будут их уклонения от $\frac{1}{|a|}f_p(v + ka)$, что достаточно для получения приводимой ниже формулы.— *Прим. ред.*

Адаптированные сети опробования

Случайная слоевая сеть опробования называется *адаптированной*, если она обеспечивает минимум дисперсии оценки (II,4,2) при одном и том же объеме $|a|$ ячейки сети, т. е. фактически при одном и том же числе проб. В случае изотропности ковариограммы адаптированной окажется сеть, ячейки которой представлены правильными многогранниками. В двумерном пространстве это будет сеть с ячейкой в форме правильного шестиугольника. Сеть с ячейкой в форме квадрата несколько уступает предыдущей, так как квадрат сильнее отличается от круга, чем шестиугольник.

Аналогично регулярная сеть называется *адаптированной*, если она обеспечивает минимум дисперсии оценки (II,1,12) для заданного числа проб. Для одной и той же ковариограммы адаптированная регулярная сеть не обязательно будет иметь ячейку той же формы, что и адаптированная случайная слоевая сеть: все зависит от анизотропии пространственной переменной, проявляющейся в поведении ковариограммы вблизи нуля. Когда ковариограмма изотропна или может быть приведена к изотропной посредством линейного преобразования, то форма ячеек адаптированных сетей совпадает.

Как правило, адаптированная регулярная сеть дает лучшие результаты, чем адаптированная случайная слоевая сеть. Исключительным может оказаться случай, когда пространственная переменная содержит гармоническую составляющую большой амплитуды с периодом, кратным хотя бы одному из шагов опробования a_i.

С другой стороны, нельзя a priori сказать, какая из двух неадаптированных сетей, построенных из одних и тех же многогранников, даст лучшие результаты.

ГЛАВА III

Оценка геометрических переменных

Краткое содержание

В этой главе рассматривается практическое использование теории для решения вопросов, возникающих при оценке площадей и объемов.

В § 1 дается постановка задачи.

В § 2 показано, что геометрическая ковариограмма $K(h)$ линейна в окрестности нуля и что дисперсия оценки может быть определена с помощью принципа соответствия.

В § 3 приведены некоторые практические указания для случая двумерного пространства, дан анализ выражения дисперсии оценки и рассмотрены результаты экспериментальных исследований.

§ 1. Предварительные замечания

Перейдем теперь к проблеме оценки геометрической переменной, т. е. к проблеме оценки объема или площади геометрического поля. Эта задача, важность которой не вызывает сомнений, не может быть решена вероятностными методами. Каждая точка x либо входит, либо не входит в оцениваемый объем V, и поэтому утверждение типа: «точка x принадлежит V с вероятностью 1/2» не имеет объективного смысла [1]. Здесь мы столкнулись с типичным случаем, когда статистические выводы невозможны. Именно для решения подобных задач нами была построена теория транзитивных представлений.

Чтобы пояснить основные идеи, рассмотрим пример оценки рудной площади S (фиг. 1). Скважины, пробуренные по регулярной сети, позволяют судить о наличии или отсутствии минерализации в некотором количестве точек. Задача состоит в том, чтобы путем интерполирования между рудными и безрудными скважинами определить непрерывную кривую, соответствующую границе месторождения S. Степень неопределенности при определении этой границы в общем случае весьма велика. В то же время положение границы для одной пары скважин (рудной и безрудной) не полностью независимо от выбора ее положения для соседней пары. Вследствие этого положение границы в каждой паре не может быть задано случайной величиной, принимающей с равной вероятностью произвольные значения на отрезке, соединяющем рудную и безрудную скважины.

Однако в качестве постулатов могут быть приняты следующие два момента:

1. Вероятное значение рудной площади S должно быть принято равным na^2, где n — число рудных скважин, а a^2 — площадь ячейки сети. Действительно, если случайно накладывать на площадь S сетку квадратов со стороной a, то вероятное значение n будет равно S/a^2. Отсюда логически следует, что вероятное значение площади S равно na^2.

2. Можно определить две величины, между которыми обязательно должно находиться истинное значение S. Это величины площадей в контурах, проведенных через крайние (от центра) рудные и первые безрудные скважи-

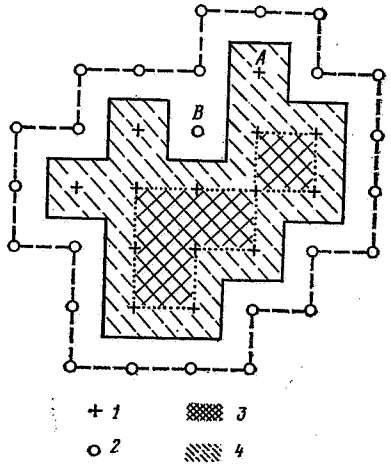
[1] По крайней мере это относится к случаю, когда V не настолько сложно по форме, что его геометрическая переменная $k(x)$ может интерпретироваться как реализация стационарной случайной функции (например, при однородной пористой среде) [68].

ны. Эти контуры образуются из отрезков, параллельных основным направлениям сети опробования и соединяющих рудные или безрудные скважины (фиг. 1). Обратим внимание на то, что рудная скважина A исключена из рудного контура при пессимистической оценке, тогда как безрудная скважина B оказалась внутри рудного контура при оптимистической оценке. Наконец, можно получить среднюю оценку, приписав каждой рудной скважине квадратную зону влияния.

Таким образом, для площади S, пересеченной 14 скважинами, получены три оценки в весьма широком диапазоне значений:

Нижний предел . . .	$4\,a^2$
Вероятное значение	$14\,a^2$
Верхний предел . . .	$26\,a^2$

Итак, искомая площадь может оказаться равной любому значению между $4a^2$ и $26a^2$, хотя совершенно очевидно, что эти значения не равновероятны (если, конечно, в рассматриваемом случае понятие вероятности имеет смысл). Отметим, кроме того, что вероятное значение $14a^2$ отличается от среднего значения верхнего и нижнего пределов $15a^2$. Это отличие свидетельствует о некоторой асимметрии вероятностного закона распределения оценок площадей.



Ф и г. 1. Оценка площади по регулярной сети скважин.

1 — рудная скважина; *2* — безрудная скважина; *3* — граница минимальной рудной площади; *4* — граница средней рудной площади; *5* — граница максимальной рудной площади.

Рассмотрим в более общем виде соотношение между средней и оптимистической оценками площади. Пусть n — число рудных скважин, каждой из которых приписана зона влияния в форме квадрата, а $2p$ — периметр рудной площади, составленной из этих зон влияния. Определим площадь, заключенную между средней границей и границей по оптимистической оценке. Каждый прямолинейный элемент длины l, взятый на средней границе, дает в эту площадь вклад $l\frac{a}{2}$. Кроме того, каждый внутренний угол, равный $\frac{\pi}{2}$, прибавляет, а внешний — убавляет $\frac{a^2}{4}$. Так как число выпуклых углов на 4 превышает число вогнутых, общий вклад от всех углов равен a^2. Следовательно, искомая площадь равна $pa + a^2$. Аналогично площадь между средней и пессимистической границами равна $pa - a^2$. Иными словами, в общем виде имеем:

Пессимистическая оценка (нижний предел): $(n+1)\,a^2 - pa$,
Вероятное значение (средняя площадь): na^2,
Оптимистическая оценка (верхний предел): $(n+1)\,a^2 + pa$.

В частности, среднее из значений верхнего и нижнего пределов всегда равно $(n+1)a^2$ и на a^2 больше средней оценки. Из сказанного следует вывод, согласно которому вероятное значение площади связано с числом рудных скважин, в то время как дисперсия, характеризующая возможную ошибку оценки, связана с периметром среднего контура. Не советуем пользоваться пессимистической оценкой на практике. Для более обоснованного выбора оценки следует попытаться оценить этот граничный эффект более точно.

§ 2. Свойства геометрических ковариограмм

Обычно для оценки объема или площади геометрического поля V пространственной переменной имеются те же данные, что и для оценки самой переменной. Например, если есть регулярная сеть опробования с началом в точке y и с шагом a, то по результатам опробования можно сказать, принадлежит ли каждая точка $y + pa = (y_1 + p_1a_1, \ldots, y_n + p_na_n)$ полю V или не принадлежит. Другими словами, если $k(x)$ — геометрическая переменная, связанная с полем V, то нам известны численные значения (0 или 1) $k(y + pa)$ для всех точек опробования. Оцениваемая величина есть не что иное, как количество металла, связанное с геометрической переменной $k(x)$:

$$V = \int k(x)\,dx. \qquad \text{(III,2,1)}$$

Проблема оценки параметров геометрического поля оказалась, таким образом, частным случаем общей проблемы оценки пространственных переменных, изложенной в гл. II. В частности, если известна геометрическая ковариограмма $K(h) = k * \check{k}$, то дисперсия оценки может быть вычислена по формуле (II,1,12) или с помощью принципа соответствия.

Часто, однако, мы будем располагать не значениями геометрической переменной в точках, а длинами пересечений или площадями сечений поля V, параллельных некоторому направлению. Тогда должна быть оценена уже не k_n в n-мерном пространстве, а переменная k_{n-1} или k_{n-2}, полученная из $k_n(x)$ с помощью операции восхождения первого или второго порядка. Ковариограммы этих переменных также могут быть получены посредством операции восхождения над $K(h)$.

Геометрическая ковариограмма обладает рядом важных особенностей, которые часто позволяют упростить расчет дисперсии оценки. Мы видели в гл. I, что $K(h)$ представляет собой меру (объем для $n = 3$) пересечения поля V и поля $\tau_{-h}V$, откуда, в частности, следует, что

$$K(0) = V \qquad \text{(III,2,2)}$$

и

$$\int K(h)\,dh = V^2. \qquad \text{(III,2,3)}$$

Ясно, таким образом, что значение ковариограммы $K(h)$ в нуле, а также ее интеграл либо известны, либо могут быть оценены. Рассмотрим теперь меру $K(\delta h)$ пересечения полей V и $\tau_{\delta h}$, где вектор δh бесконечно мал по модулю. Тогда разность мер $K(0)$ и $K(\delta h)$ (представляющая собой половину объема, описываемого вектором δh, когда его основание пробегает всю поверхность, ограничивающую V) с точностью до члена второго порядка относительно $|\delta h|$ равна

$$K(0) - K(\delta h) = S(\alpha)\,|\delta h|. \qquad \text{(III,2,4)}$$

Коэффициент пропорциональности $S(\alpha)$ называется *диаметральной полувариацией* в направлении α вектора δh. Если рассечь объем V плоскостями, перпендикулярными направлению α и отнесенными к абсциссам z их пересечения с прямой, параллельной α, то диаметральная вариация $2S(\alpha)$ будет равна верхнему пределу всех возможных сумм вида

$$|S(z_1) - S(z_2)| + |S(z_2) - S(z_3)| + \ldots + |S(z_{n-1}) - S(z_n)|,$$

где $S(z_i)$ — площади соответствующих сечений. Такой предел всегда существует для геометрических полей V, которые могут встретиться в природе. Эти поля могут иметь разрывы сплошности, а ограничивающие их поверхности могут обладать острыми краями, угловыми точками и т. д. В частном случае выпуклого геометрического поля диаметральная вариация $S(\alpha)$ равна площади проекции поля V на плоскость, перпендикулярную направлению α.

Итак, во всех случаях известны два первых члена разложения $K(h)$ в окрестности нуля:

$$K(h) = V - S(\alpha)|h| + \ldots, \qquad \text{(III,2,5)}$$

откуда следует, что геометрическая кovариограмма линейна в окрестности нуля.

Методы, изложенные в гл. II, позволяют получить основную часть дисперсии оценки V для плотных сетей опробования при условии, что кovариограмма $K(h)$ изотропна или может быть сведена к изотропной. В частности, если диаметральная полувариация $S(\alpha)$ практически постоянна при всех α и равна S, то для сети с размерами ячейки $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, получим

$$\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = S\left[\frac{1}{6}a_1a_2a_3^2 + 0{,}0609a_1a_2^3 + \frac{\pi}{90}a_1^4\right] + \ldots \qquad \text{(III,2,6)}$$

В случае, когда $a_3 = 0$, т. е. если измерены пересечения геометрического поля вдоль направления a_3, в формуле (III,2,6) останутся два последних члена. При $a_3 = a_2 = 0$, т. е. когда измерены площади сечений V, параллельных плоскости (a_2, a_3), останется лишь один последний член. В следующем параграфе мы рассмотрим более подробно случай оценки площадей.

§ 3. Оценка площадей

Рассмотрим проблему оценки площади S, характеризующейся геометрической кovариограммой $K(h)$ по прямоугольной сети точек опробования с размерами ячейки сети a_1 и a_2. Можно представить, что точки опробования — это проколы пласта вертикальными скважинами. Если n скважин оказались рудными, то в качестве оценки величины рудной площади примем выражение

$$S^* = na_1a_2. \qquad \text{(III,3,1)}$$

Что касается расчета дисперсии этой оценки, то возникает две проблемы: выбор вида формулы и оценка параметров, входящих в эту формулу. Рассмотрим их последовательно.

Выбор формулы

Предположим, что диаметральная вариация $D(h)$ практически не зависит от направления α и равна D. Линейный член кovариограммы изотропен, т. е.

$$K(h) = S - D|h| + \ldots,$$

так что основная часть дисперсии оценки дается первой из формул (II,3,9), и при $a_1 \geqslant a_2$ имеем

$$\sigma^2(a_1, a_2) = D\left[\frac{1}{6}a_1a_2^2 + 0{,}0609a_1^3\right]. \qquad \text{(III,3,2)}$$

Положим $n = S/a_1a_2$, где n — число рудных пересечений (или, точнее, математическое ожидание этого числа, когда исходная точка сети выбирается случайно в пределах прямоугольника, равного ячейке сети), и обозначим символом λ отношение меньшей стороны ячейки сети к большей, т. е.

$$\lambda = \frac{a_2}{a_1} \leqslant 1.$$

Тогда, выразив a_1 и a_2 через n и λ,

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda S}{n}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{S}{\lambda n}},$$

подставим эти значения в формулу (III,3,2) и, разделив обе части на S^2, получим относительную дисперсию оценки площади:

$$\frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{D}{\sqrt{S}\,n^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{6} + 0{,}0609\,\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right]. \qquad \text{(III,3,3)}$$

Эта дисперсия обратно пропорциональна $n^{3/2}$, где n — число точек опробования, попавших в рудный контур.

Но в общем случае диаметральная вариация D_α не постоянна. Однако часто можно перейти к рассмотренному выше случаю посредством подходящего линейного преобразования. Например, если D_1 и D_2 — диаметральные вариации в двух взаимно перпендикулярных направлениях α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, соответствующих основным элементам залегания рудного тела, то изменение масштаба по оси параллельной α_1 в $\frac{D_2}{D_1}$ раз приведет к геометрическому полю, диаметральная вариация которого будет примерно постоянна и равна D_2. При таком преобразовании не изменяется ни число n, ни относительная дисперсия оценки площади. Напротив, площадь S трансформируется в площадь $\frac{SD_2}{D_1}$, а прямоугольная сеть — в сеть с ячейкой в форме параллелограмма (кроме очевидного случая, когда направления α_1 и α_2 совпадают с основными направлениями сети). В этой новой сети выделим профили, т. е. линии наибольшей плотности опробования, и обозначим a_2' — шаг опробования вдоль профилей и a_1' — расстояние между профилями. Положим

$$\lambda' = \frac{a_2'}{a_1'}$$

и получим выражение для относительной дисперсии в виде

$$\frac{\sigma^2}{S^2} = \sqrt{\frac{D_1D_2}{S}}\,\frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{\lambda'}}{6} + 0{,}0609\,\frac{1}{(\lambda')^{3/2}}\right]. \qquad \text{(III,3,4)}$$

Но не следует забывать, что эти формулы содержат только первый член ограниченного разложения и, следовательно, они применимы только в случае очень плотной сети опробования. Кроме того, они не отражают возможного вклада элемента флуктуаций, связанного с ограниченностью носителя геометрической кovариограммы.

При редкой сети опробования удобнее непосредственно использовать формулу (II,1,12), которая в этом случае содержит небольшое число членов. В предельном случае, когда геометрическое поле S может целиком поместиться в ячейки сети и подсекается максимум одной пробой, общая формула приобретает «случайный» характер:

$$\sigma^2(a_1, a_2) = a_1a_2K(0) - \int K(h)\,dh = a_1a_2S - S^2$$

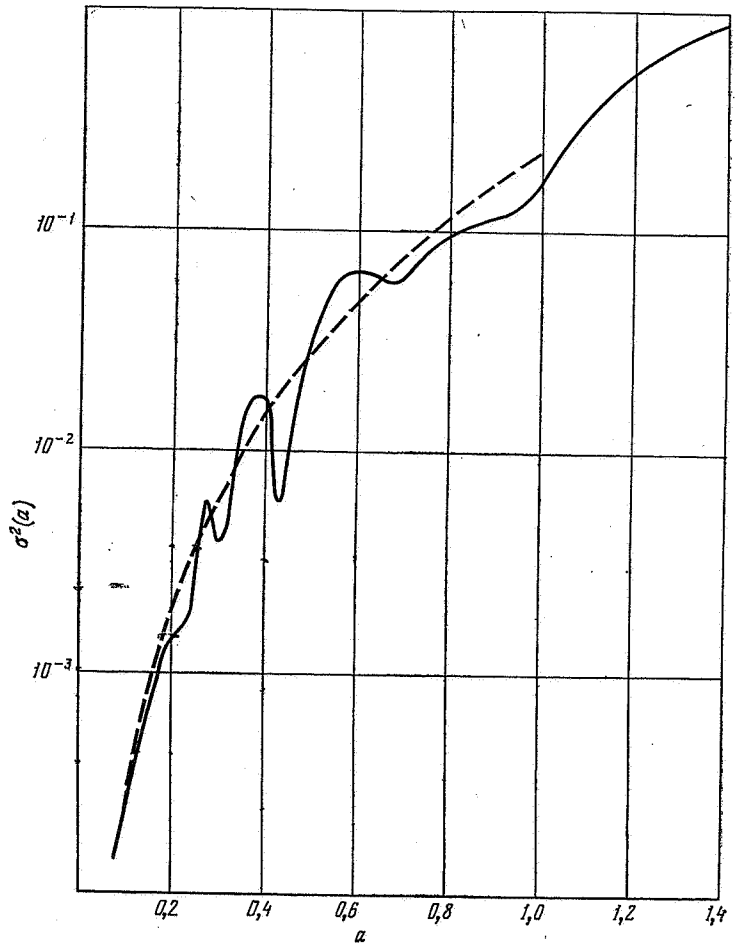
или для относительной дисперсии оценки

$$\frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{1}{n} - 1, \qquad \text{(III,3,5)}$$

где $n = \frac{S}{a_1a_2} < 1$.

Дисперсия оценки площади для промежуточных случаев обычно может быть получена посредством графической интерполяции результатов, полученных для очень плотных и очень редких сетей опробования. Рассмотрим в качестве примера расчет дисперсии оценки $\sigma^2(a)$ площади круга с единичным диаметром по квадратной сети с шагом a (фиг. 2). Флуктуирующая кривая (сплошная линия) отражает истинную зависимость дисперсии оценки от шага сети, рассчитанную по точной формуле (II,1,12), в то время как плавная кривая (пунктирная линия) — приближенную зависимость, рассчитанную для $a < 1$ с помощью формулы (III,3,2) при $a_1 = a_2 = a$. Отклонения, связанные

с наличием элемента флуктуаций, хотя и достигают значительной амплитуды, но располагаются по обе стороны от плавной кривой. Эта кривая, которая только и может быть использована на практике, кроме того, достаточно хорошо согласуется с результатами расчетов по формуле «случайного» типа для $a > 1$, так что ограниченные разложения типа (III,3,2) сохраняют практическую ценность даже для весьма редких сетей.



Ф и г. 2. Влияние элемента флуктуаций на дисперсию оценки площади круга единичного диаметра по квадратной сети.

1 — дисперсия оценки, вычисленная по точной формуле (II,1,12); *2* — дисперсия оценки, вычисленная по приближенной формуле $\sigma^2(a) = 0{,}2276a^2 + 0{,}00477a^5$, представляющей собой два первых члена ограниченного разложения дисперсии оценки без учета элемента флуктуаций.

Оценка параметров

На практике в качестве n берут число рудных скважин и либо оценивают S по формуле (III,3,1), либо оконтуривают рудную площадь, основываясь на дополнительных данных об изучаемом объекте, что часто позволяет получить лучшую оценку площади. Проблема состоит в том, чтобы оценить диаметральные вариации D_1 и D_2; при этом проще всего иметь дело с контуром рудного тела. Если заранее известно, что реальный контур обладает значительной изрезанностью, которая не может быть выявлена при данном шаге опробования, имеет смысл включить в ковариограмму $K(h)$ эффект самородков.

Частный случай

Если основные направления сети опробования параллельны основным элементам залегания рудного тела, то диаметральные вариации D_1 и D_2 в этих направлениях могут быть легко подсчитаны по формулам

$$D_1 = N_1 a_1 \quad \text{и} \quad D_2 = N_2 a_2,$$

где N_1 (N_2) определяется как половина числа элементов a_1 (a_2), образующих контур, полученный при приписывании каждой рудной скважине квадратной зоны влияния, как это было показано на фиг. 1. Тогда

$$\lambda' = \frac{D_1 a_2}{D_2 a_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

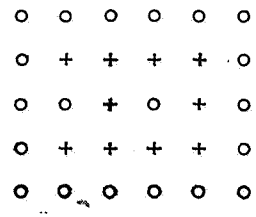
и

$$\frac{D_1 D_2}{S} = \frac{N_1 N_2}{n},$$

так что формула (III,3,4) запишется в виде

$$\frac{\sigma_S^{2\prime}}{S^2} = \frac{1}{n^2}\left[\frac{N_1}{6} + 0{,}0609\frac{N_2^2}{N_1}\right], \quad N_2 \geqslant N_1. \qquad \text{(III,3,6)}$$

Следует иметь в виду, что при подсчете N_1 и N_2 нужно учитывать не только внешние, но и внутренние контуры, если геометрическое поле имеет разрывы.



Ф и г. 3.

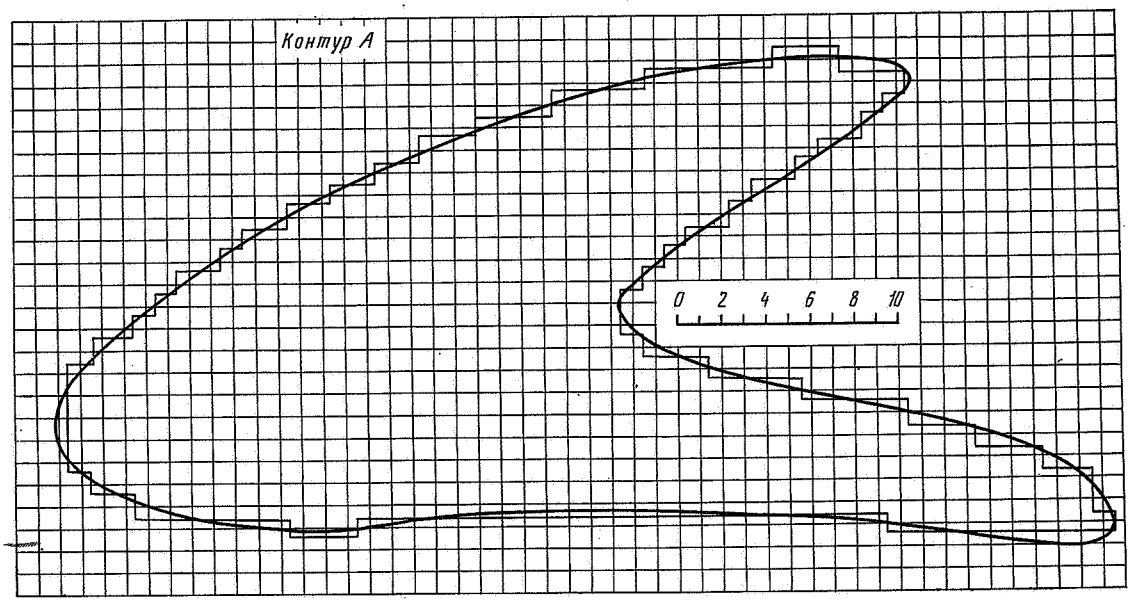
Пример. Определим дисперсию оценки рудной площади S по данным, показанным на фиг. 3. Как видно, внутри рудного контура имеется пустая скважина. Расчет дает: $n = 10$, $N_1 = 6$ и $N_2 = 4$, откуда следует, что

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{1}{100}\left[\frac{4}{6} + 0{,}0609\frac{36}{4}\right] \approx 0{,}0121,$$

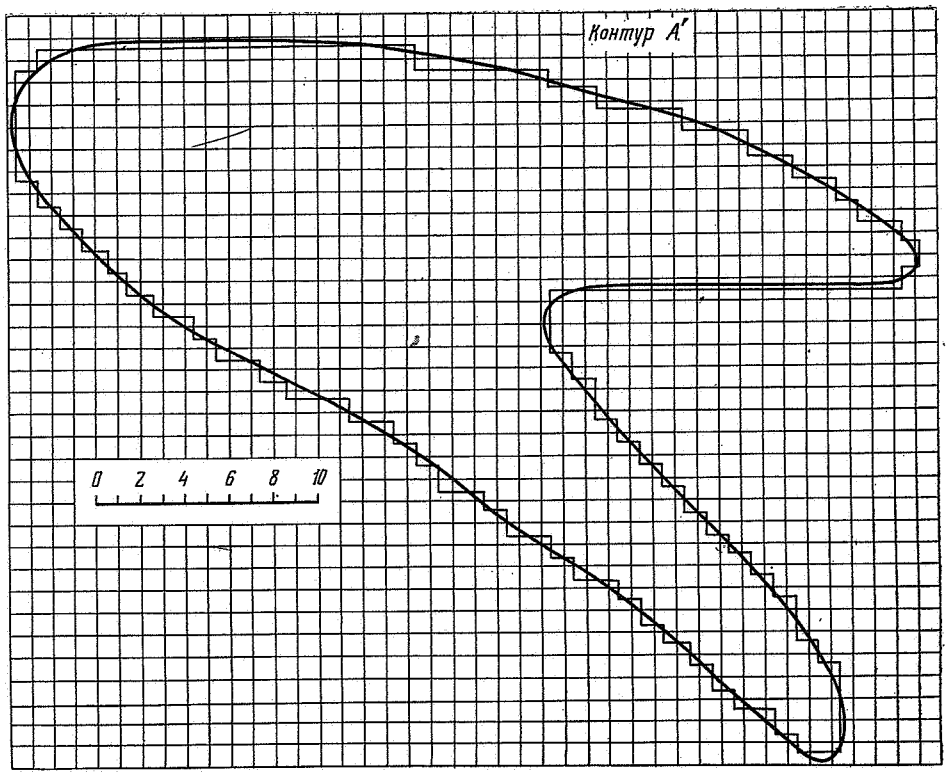
т. е. относительное стандартное отклонение $\sigma_S/S = 0{,}11$ и относительная погрешность определения площади с вероятностью 0,95 не превышает $\pm$ 22%.

Чтобы завершить рассмотрение граничного эффекта, приведем некоторые экспериментальные результаты. Эксперимент состоял в нанесении контура рудного тела на план и подсчете числа скважин, попавших в этот контур при наложении на него сетей опробования различной плотности.

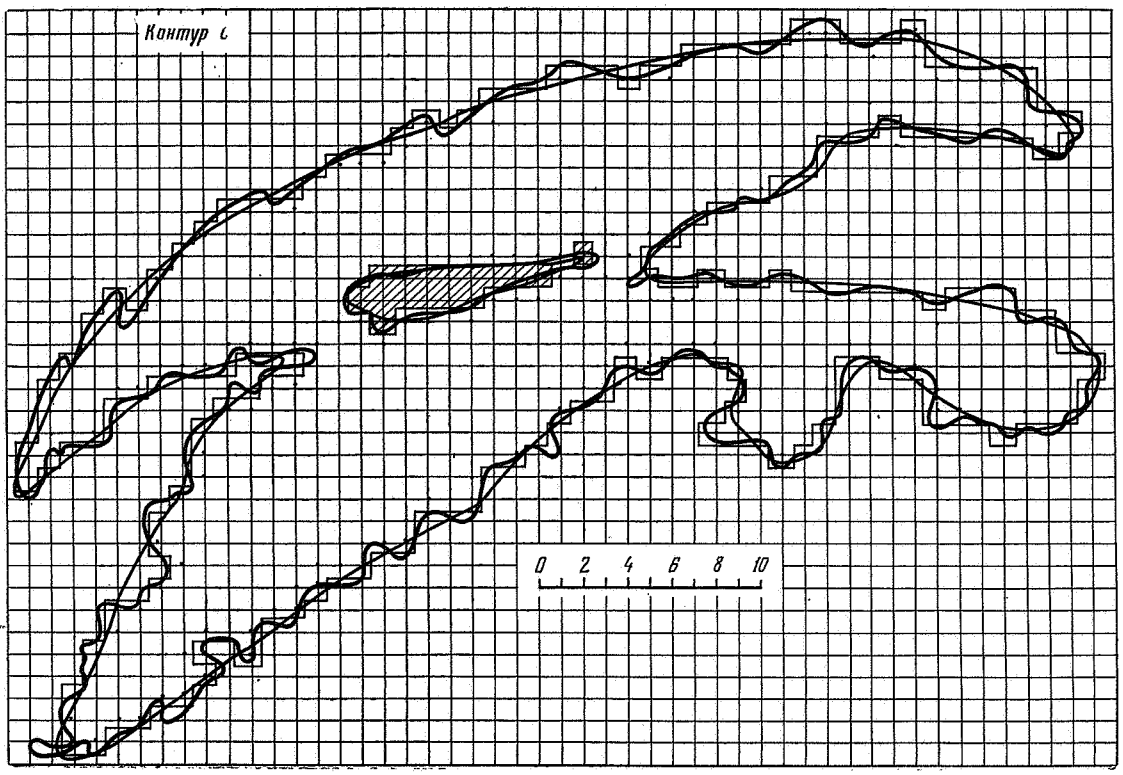
Было рассмотрено пять контуров: A — относительно простой по форме (фиг. 4); A′ — контур A, повернутый на 45° (фиг. 5); B — круг радиуса 20,4, C и D — сложные контуры (фиг. 6 и 7). На каждый контур накладывались квадратные сети с шагом 3, 4, 6, 8, 10, 12 и т. д. в масштабе, показанном на соответствующих фигурах. Для каждого шага сети подсчет числа n точек, попавших внутрь контура, производился для различных вариантов, получаемых при смещении исходной точки сети параллельно ее основным напра-



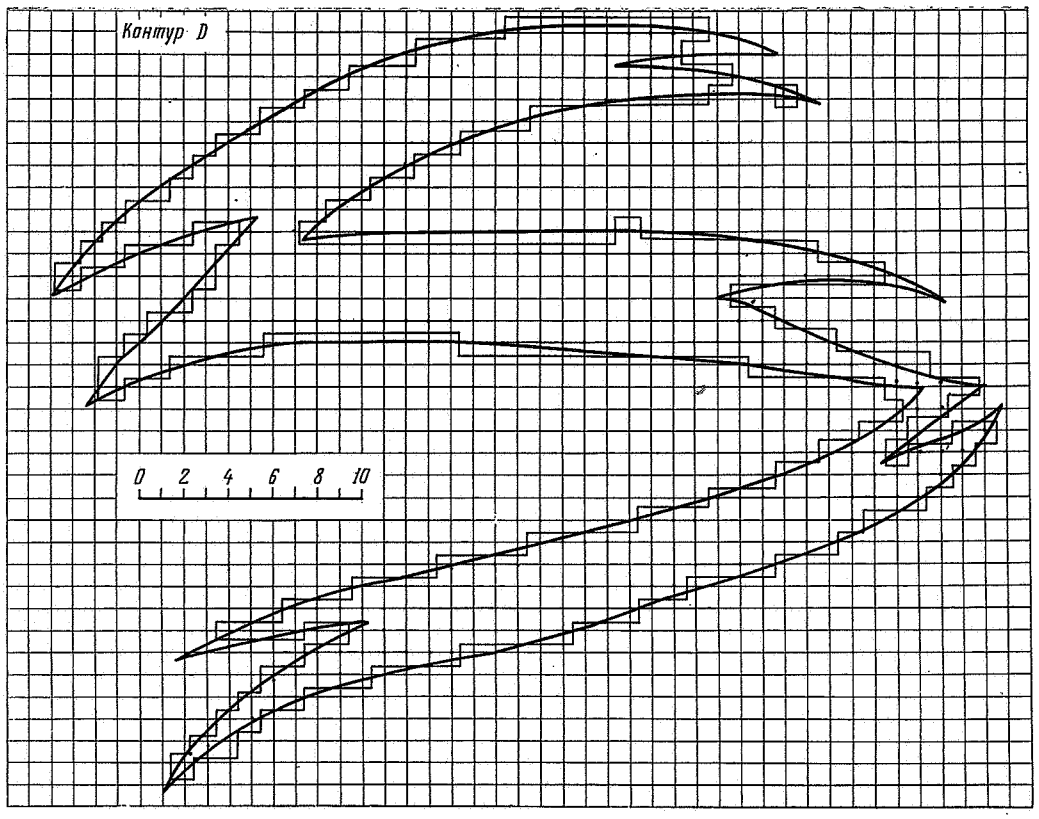
Фиг. 4. Контур A.



Фиг. 5. Контур A'.



Фиг. 6. Контур *C*.



Фиг. 7. Контур *D*.

Таблица 1

Экспериментальное изучение граничного эффекта

Контур	Шаг сети	Среднее число точек внутри контура, n	σ_n^2	Значение $\sigma_n^2/\sqrt{n}$	
				экспериментальное	теоретическое
A	3	59,8	6,25	0,81	0,67
	4	33,6	3,36	0,58	
	6	14,9	3,94	1,03	
	8	8,4	3,20	1,10	
	10	5,4	1,37	0,59	
A′	3	60,0	8,67	1,11	0,67
	4	23,8	4,45	0,77	
	6	15,0	1,89	0,49	
	8	8,4	1,22	0,42	
	10	5,4	0,82	0,35	
B	3	143,2	1,28	0,106	0,24
	4	80,6	2,49	0,278	
	5	51,6	0,81	0,113	
	6	35,8	2,88	0,483	
	8	20,1	0,99	0,221	
	10	12,9	0,74	0,206	
	12	8,9	0,50	0,167	
	20	3,2	0,49	0,274	
	24	2,2	0,53	0,358	
C	3	66,7	2,39	0,29	0,74
	4	37,7	4,06	0,66	
	6	16,8	3,21	0,78	
	8	9,4	1,72	0,56	
	12	4,2	2,24	1,09	
	24	1,0	0,47	0,47	
D	3	44,6	5,36	0,80	1,30
	4	25,1	7,05	1,40	
	6	11,1	2,00	0,60	
	8	6,3	2,82	1,12	
	12	2,8	2,00	1,20	
	24	0,7	0,51	0,61	

влениям с шагом, равным 1. Так, для сети с шагом 3 было получено 9 вариантов, с шагом 4—16 вариантов и т. д. Для каждого контура и каждой сети определялась дисперсия числа точек, попавших в контур. Как следует из выведенных выше формул, теоретическое отношение $\sigma_n^2/\sqrt{n}$ для данного контура постоянно при любой сети. В табл. 1 для каждого контура приведены значения среднего числа рудных скважин, дисперсия оценки σ_n^2 и отношения $\sigma_n^2/\sqrt{n}$ для всех сетей. Следует обратить внимание на нарушение закономерности изменения экспериментальных значений σ_n^2 при изменении шага сети. Эти нарушения, по-видимому, связаны с влиянием элемента флуктуаций, а также со значительной степенью неопределенности оценки геометрических переменных по редким сетям. Однако они носят случайный характер, что подтверждается отсутствием закономерных тенденций в изменении экспериментальных значений отношения $\sigma_n^2/\sqrt{n}$, которые случайно колеблются около соответствующих теоретических значений. Формулы теории транзитивных представлений позволяют определить порядок величины дисперсии оценки, что практически оказывается достаточным, если учесть неизбежный разброс экспериментальных данных.

ГЛАВА IV

Транзитивное представление совместного распределения нескольких пространственных переменных

Краткое содержание

В этой главе полученные результаты обобщаются на случай нескольких переменных, определенных на одном и том же геометрическом поле. Содержание этой главы очень важно для решения прикладных задач.

В § 1 определяются ковариационная матрица, представляющая собой обобщение понятия ковариограммы на случай нескольких переменных, и дисперсия одновременной оценки двух переменных.

В § 2 дается понятие внутренней независимости переменных f_i и f_j.

В § 3 это понятие применяется к пространственной переменной $f(x)$ и связанной с ней геометрической переменной $k(x)$ и формулируется условие внутренней независимости переменной и ее геометрического поля.

В § 4 изучается проблема одновременной оценки содержания и запаса руды и металла.

§ 1. Ковариационная матрица

На практике часто возникает необходимость изучения нескольких пространственных переменных, определенных на одной и той же геометрической базе. В этих случаях необходимо уделять серьезное внимание изучению корреляции, которая может связывать эти переменные. При этом, кроме корреляции, связывающей значения $f_i(x)$ и $f_j(x)$ двух переменных в точке x, следует принимать во внимание также корреляцию между значениями $f_i(x)$ и $f_j(x+h)$ этих переменных в разных точках пространства.

Предположим, что в геометрическом поле V, определенном геометрической ковариограммой

$$K(h) = k * \check{k},$$

одновременно рассматривается несколько пространственных переменных $f_1(x), f_2(x), \ldots$ на точечной геометрической базе. С переменной $f_i(x)$ связана ее транзитивная ковариограмма $g_i(h)$, определенная выражением

$$g_i = f_i * \check{f}_i. \qquad \text{(IV,1,2)}$$

Для удобства определения ковариационной матрицы введем новую пространственную переменную

$$f(x; \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(x), \qquad \text{(IV,1,3)}$$

представляющую собой линейную комбинацию переменных $f_i(x)$ с произвольными действительными коэффициентами λ_i. С этой новой переменной связана ковариограмма

$$g(h; \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j f_i * \check{f}_j = \sum_i \lambda_i^2 g_i(h) + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j [f_i * \check{f}_j + \check{f}_i * f_j]. \qquad \text{(IV,1,4)}$$

При решении некоторых вопросов может оказаться интересным раздельное рассмотрение каждой из составляющих $f_i * \check{f}_j$ и $\check{f}_i * f_j$, заключенных в квадратных скобках. Более часто они рассматриваются совместно в виде симме-

тричного выражения

$$C_{ij}(h) = C_{ji}(h) = \frac{1}{2}[f_i * \check{f}_j + \check{f}_i * f_j]. \qquad \text{(IV,1,5)}$$

При этом ковариограмма (IV,1,4) может быть записана в виде

$$g(h;\ \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2 g_i(h) + 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j C_{ij}(h).$$

Если, кроме того, ввести естественное обозначение

$$C_{ii}(h) = g_i(h),$$

то запись (IV,1,4) приобретает симметричный вид:

$$g(h;\ \lambda_i) = \sum_{i,\,j} \lambda_i\lambda_j C_{ij}(h). \qquad \text{(IV,1,6)}$$

Член $C_{ij}(h)$ назовем *смешанной ковариограммой, связанной с переменными* f_i и f_j, а матрицу смешанных ковариограмм — *ковариационной матрицей*. Формула (IV,1,6) позволяет распространить на $C_{ij}(h)$ почти все свойства, присущие ковариограмме $g(h)$. Для этого достаточно заметить, что $g(h;\ \lambda_i)$ должна удовлетворять каждому из этих свойств при любых значениях λ_i и λ_j, и затем использовать метод идентификации. Таким образом, операция восхождения над C_{ij} аналогична операции восхождения над ковариограммой, и, следовательно, если регуляризовать f_i и f_j с помощью функции опробования или весовой функции p с ковариограммой $P = p * \check{p}$, то регуляризованные функции $f_i * \check{p}$ и $f_j * \check{p}$ будут в качестве смешанной ковариограммы иметь $C_{ij} * P$.

Член $C_{ij}(h)$ по своей природе выражает корреляцию между $f_i(x)$ и $f_j(x+h)$. Для пояснения его смысла представим, что для определения количества металла, связанного с переменной $f(x;\ \lambda_i)$, определенной формулой (IV,1,3), мы располагаем точечными пробами, отобранными по прямоугольной сети с шагом $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда оценка примет вид

$$Q(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i Q_i^*, \qquad \text{(IV,1,7)}$$

а дисперсия оценки $\sigma^2(a)$ получится путем применения к ковариограмме g линейного оператора ε_a, который, согласно (II,1,12), определяется по формуле:

$$\sigma^2(a) = \varepsilon_a(g) = |a_1a_2\ldots a_n| \sum_{k_1\ldots k_n} g(k_1a_1, \ldots, k_na_n) - \int g(h)\,dh. \qquad \text{(IV,1,8)}$$

Так как этот оператор линейный, дисперсия оценки количества металла $Q(\lambda_i)$ запишется в виде

$$\sigma^2(a;\ \lambda_i) = \varepsilon_a[g(h;\ \lambda_i)] = \sum_{ij} \lambda_i\lambda_j \varepsilon_a(C_{ij}) = \sum_i \lambda_i^2 \varepsilon_a(g_i) + 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \varepsilon_a(C_{ij}). \qquad \text{(IV,1,9)}$$

В этом выражении величина $\varepsilon_a(g_i)$ равна дисперсии оценки количества металла Q_i^*, относящегося к переменной f_i; обозначим ее символом $\sigma_i^2(a)$. Если аналогичным путем ввести обозначение $\sigma_{ij}(a)$ для ковариации погрешностей совместных оценок Q_i^* и Q_j^*, то непременно должны получить, что

$$\sigma^2(a;\ \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2\sigma_i^2(a) + 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}(a).$$

Так как λ_i — произвольны, то достаточно идентифицировать элемент, содержащий $\lambda_i\lambda_j$, с подобным элементом в выражении (IV,1,9), чтобы

получить

$$\sigma_{ij}(a) = \varepsilon_a(C_{ij}). \qquad \text{(IV,1,10)}$$

Таким образом, ковариация совместных (по одной и той же сети опробования) оценок Q_i^* и Q_j^* получается путем применения к смешанной ковариограмме C_{ij} того же линейного оператора $\varepsilon(a)$, который служил для расчета обычной дисперсии оценки $\sigma^2(a)$. Следовательно, приближенные методы, рассмотренные в гл. II, полностью применимы и в данном случае.

§ 2. Условие внутренней независимости

Обычно ковариация оценок, определенных формулой (IV,1,10), не равна нулю, и количества металла Q_i и Q_j оцениваются не независимо одно от другого, даже если f_i и f_j представляются независимыми в обычном статистическом смысле. Связанные с общим геометрическим полем V эти две переменные не могут быть абсолютно «независимыми». При отсутствии каких-либо других причин связи сама принадлежность к одному и тому же геометрическому полю приводит для неотрицательных переменных f_i и f_j к наличию обязательно положительной ковариации оценок $\varepsilon_a(C_{ij})$. Так, если при некоторой сети опробования получена завышенная оценка объема геометрического поля V, то при прочих равных условиях будет иметь место тенденция к одновременному завышению обеих оценок количеств металла Q_i^* и Q_j^*, и наоборот.

Обычная независимость переменных f_i и f_j является внутренней по отношению к полю V. Во второй части мы убедимся, что это понятие более точно выражается в теории, называемой *теорией собственных схем*. Оно соответствует случаю, когда обычная ковариация точечных переменных $f_i(x)$ и $f_j(x)$ равна нулю. В наших обозначениях эта независимость в обычном смысле выражается соотношением

$$C_{ij}(0) = m_im_jK(0) = \frac{Q_iQ_j}{K(0)}, \qquad \text{(IV,2,1)}$$

где $K(0)$ — объем геометрического поля V, $m_i = \frac{Q_i}{K(0)}$ и $m_j = \frac{Q_j}{K(0)}$ — средние значения переменных f_i и f_j в поле V.

Однако следует иметь в виду, что соотношение (IV,2, 1) выражает лишь независимость точечных переменных и из него никак не следует независимость переменных на неточечных геометрических базах, которые получаются при обычных способах регуляризации и опробования. Мы постулируем гораздо более сильное условие

$$C_{ij}(h) = m_im_jK(h), \qquad \text{(IV,2,2)}$$

т. е. смешанная ковариограмма C_{ij} пропорциональна геометрической ковариограмме K.

При выполнении этого условия мы будем говорить, что две пространственные переменные f_i и f_j удовлетворяют условию внутренней независимости (внутренней по отношению к полю V). На самом деле это условие чрезмерно строго и практически никогда полностью не выполняется. Однако если амплитуда колебания смешанной ковариограммы $C_{ij}(h)$ относительно $m_im_jK(h)$ не очень велика, то приближенно может быть принято, что переменные удовлетворяют условию внутренней независимости. Во второй части мы вернемся к соотношению (IV,2,2) и дадим его интерпретацию с вероятностной точки зрения.

При выполнении условия внутренней независимости (IV,2,2) ковариация $\varepsilon_a(C_{ij})$ совместных оценок количеств металла Q_i^* и Q_j^* имеет вид

$$\sigma_{ij}(a) = \varepsilon_a(C_{ij}) = m_im_j\varepsilon_a(K) = m_im_j\sigma_V^2 \qquad \text{(IV,2,3)}$$

Дисперсия $\sigma_V^2 = \varepsilon_a(K)$ — это дисперсия оценки объема геометрического поля, называемая иногда *геометрической дисперсией*. В подобном случае относительная дисперсия ошибки, совершаемой при оценке отношения Q_i/Q_j, в первом приближении может быть сведена к виду:

$$\frac{\sigma_i^2(a)}{Q_i^2}+\frac{\sigma_j^2(a)}{Q_j^2}-\frac{2\sigma_{ij}(a)}{Q_iQ_j}=\frac{\sigma_i^2(a)}{Q_i^2}+\frac{\sigma_j^2(a)}{Q_j^2}-2\frac{\sigma_V^2}{V^2}. \qquad \text{(IV,2,4)}$$

В общем случае условие внутренней независимости (IV,2,2) не будет выполняться, и величина разности

$$C_{ij}(h)-m_im_jK(h) \qquad \text{(IV,2,5)}$$

будет давать общую оценку корреляции, существующей как между $f_i(x)$ и $f_j(x+h)$, так и между $f_i(x+h)$ и $f_j(x)$. Но сразу заметим, что если выражение (IV,2,5) при малых $|h|$ принимает положительные значения, оно непременно примет отрицательные значения при больших $|h|$, так как интегрирование выражения (IV,2,5) дает в результате нуль. Действительно, в соответствии с формулой (I,1,13)

$$\int m_im_jK(h)=m_im_j[K(0)]^2.$$

С другой стороны, подставив значение C_{ij} из определения (IV,1,5) и поменяв порядок интегрирования по h и по x, получим, что

$$\int C_{ij}(h)\,dh=\frac{1}{2}\int\int[f_i(x)f_j(x+h)+f_i(x+h)f_j(x)]\,dx\,dh=$$
$$=\frac{1}{2}\int[Q_jf_i(x)+Q_if_j(x)]\,dx=Q_iQ_j.$$

Таким образом, всегда

$$\int C_{ij}(h)\,dh=Q_iQ_j=m_im_j[K(0)]^2; \qquad \text{(IV,2,6)}$$

следовательно, положительная корреляция на малых расстояниях обязательно компенсируется отрицательной корреляцией на больших расстояниях.

§ 3. Связь между переменной и ее геометрическим полем

Интересный частный случай пространственного взаимоотношения переменных может быть рассмотрен в связи с пространственной переменной $f(x)$ и геометрической переменной $k(x)$ ее геометрического поля V. Если записать $C(h)$ вместо $C_{ij}(h)$, то условие внутренней независимости (IV,2,2) запишется просто как

$$C(h)=mK(h), \qquad \text{(IV,3,1)}$$

где $m = Q/K(0)$ — среднее значение переменной $f(x)$ в ее геометрическом поле. Если это условие выполняется, соотношение (IV,2,4) принимает вид

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2}=\frac{\sigma_Q^2}{Q^2}-\frac{\sigma_V^2}{V^2}.$$

Относительная дисперсия оценки среднего содержания получается как разность относительных дисперсий оценок количества металла и объема геометрического поля. Это значит, что величины m и V в выражении $Q = mV$ могут рассматриваться оцененными независимо одна от другой. В этом случае мы будем говорить, что отсутствует взаимная связь оценок объема геометрического поля и среднего значения функции в нем. Когда не сказывается влияние положения точки x внутри геометрического поля

V и особенно бо́льшая или меньшая удаленность ее от его границ, соотношение (IV,3,1) может служить критерием применимости теории собственных схем (см. часть вторую).

Вследствие значительной важности этого соотношения мы рассмотрим его более детально и с этой целью введем для начала два новых понятия.

Алгорифмы $m(h)$ и $Q(h)$

Мы видели [см. соотношение (I,1,5)], что геометрическая ковариограмма дает меру объема $V' = V \cap \tau_h V$ или объема $V'' = V \cap \tau_{-h} V$. Обозначим символами $m(h)$ и $Q(h)$ среднее значение функции и количество металла в объеме V', т. е.

$$Q(h)=m(h)K(h)=\int\limits_{V'}f(x)\,dx.$$

Объем V' имеет в качестве геометрической переменной произведение $k(x)\,k(x-h)$. Действительно, $k(x) = 1$, если x принадлежит полю V, и нулю, если x не принадлежит полю V, а $k(x-h) = 1$ лишь в том случае, если $y = x - h$ принадлежит полю V, или соответственно $x = y + h$ принадлежит полю $V' = V \cap \tau_h V$. Аналогично объем V'' имеет в качестве геометрической переменной произведение $k(x)\,k(x+h)$. Впрочем, множителем $k(x)$ можно пренебречь, так как величина $f(x)$ равна нулю, когда $k(x) = 0$. Определим теперь соответствующие алгорифмы следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned}Q(h)=m(h)K(h)&=\int f(x)\,k(x-h)\,dx=f*\check{k},\\ Q(-h)=m(-h)K(h)&=\int f(x)\,k(x+h)\,dx=\check{f}*k.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,3,2)}$$

Смешанная ковариограмма $C(h)$

Вернемся теперь к смешанной ковариограмме пространственной переменной $f(x)$ и ее геометрической переменной $k(x)$. По определению (IV,1,5)

$$C(h)=\frac{1}{2}[f*\check{k}+\check{f}*k].$$

Используя алгорифмы (IV,3,2), можем записать, что

$$C(h)=\frac{1}{2}[Q(h)+Q(-h)]. \qquad \text{(IV,3,3)}$$

Таким образом, $C(h)$ равно среднему арифметическому количеству металла, содержащегося в симметричных пересечениях V' и V'', которые образуются при переносах поля V на h и $-h$ соответственно. Условие внутренней независимости (IV,3,1) приобретает в этом случае следующий примечательный вид:

$$\frac{1}{2}[m(h)+m(-h)]=m. \qquad \text{(IV,3,4)}$$

Внутренняя независимость между пространственной переменной и ее геометрическим полем имеет место в том случае, если среднее значение, принимаемое переменной в симметричных пересечениях поля V с самим собой при переносе его на h и $-h$, остается постоянным и равным генеральному среднему m. Это условие выражает остутствие систематического тренда значений переменной за исключением, однако, линейного тренда, который совместим

с условием (IV,3,4). И при вероятностном подходе, как мы увидим во второй части, теория собственных схем допускает либо постоянство вероятных значений, либо в некоторых случаях наличие линейного тренда. Этой теорией могут описываться только переменные, удовлетворяющие условию (IV,3,4), т. е. не зависящие от своего поля. Практически можно допускать некоторые отклонения от этого условия, интерпретируя их как обычные статистические колебания, при условии, конечно, что их амплитуда не очень велика.

В случае зонального тренда, когда, например, содержание, наиболее богатое в центре поля, постепенно убывает к его периферии, действуют следующие отношения:

$$C(h) > mK(h) \text{ при } |h| \text{ малом,}$$
$$C(h) < mK(h) \text{ при } |h| \text{ большом.}$$

Отметим, однако, что во всех случаях остаются справедливыми равенства

$$\left.\begin{aligned} &C(0) = mK(0) = Q, \\ &\int C(h)\,dh = m\int K(h)\,dh = QV. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,3,5)}$$

Первое равенство является результатом определения (IV,3,3), а второе — непосредственно выводится из выражения (IV,2,6). Равенство $C(0) = mK(0)$ означает, что обычная ковариация переменных $f(x)$ и $k(x)$ всегда равна нулю, как это следует из сравнения с соотношением (IV,2,1). Таким образом, только корреляция между $f(x)$ и $k(x+h)$, т. е. $C(h)$, может служить характеристикой влияния поля и его границ на свойства пространственной переменной.

§ 4. Одновременная оценка содержания и запасов руды и металла

В этом параграфе мы не будем принимать во внимание плотности руды, т. е. фактически будем говорить о среднем содержании $m = Q/V$, выражающем количество металла на единицу объема. В гл. II и III мы видели, как вычисляются дисперсии σ_Q^2 и σ_V^2 оценок количества металла и объема из кovариограмм $g(h)$ и $K(h)$ точечного содержания $f(x)$ и геометрической переменной $k(x)$. Относительная дисперсия ошибки при определении среднего содержания в первом приближении может быть записана в виде выражения

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} + \frac{\sigma_V^2}{V^2} - 2\frac{\sigma_{QV}}{QV}. \qquad \text{(IV,4,1)}$$

в которое входит ковариация σ_{QV} оценок Q и V. Эта ковариация в свою очередь может быть рассчитана по смешанной кovариограмме $C(h)$ определенной формулой (IV,3,3). Таким образом, в принципе необходимо знать фукцию $C(h)$.

В частном случае, когда содержание $f(x)$ не зависит от своего поля V, т. е. когда характер изменения $f(x)$ остается одинаковым в пределах всего геометрического поля, имеем $C(h) = mK(h)$ и, следовательно, как уже было показано,

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}. \qquad \text{(IV,4,2)}$$

Достаточно представить это выражение в форме

$$\frac{\sigma_Q^2}{Q^2} = \frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{\sigma_V^2}{V^2},$$

чтобы увидеть, что в связи с внутренней независимостью пространственной переменной и ее геометрического поля оценки объема и содержания также будут независимы.

Однако в общем случае условие внутренней независимости не соблюдается, и тогда необходимо обращаться непосредственно к формуле (IV,4,1) и вычислять величину σ_{QV}.

В частности, рассмотрим месторождение (пластовое или штокообразное), разведанное параллельными, например вертикальными скважинами. При этом производится фактически операция восхождения вдоль вертикального направления. Каждая скважина дает запас металла A, мощность рудного интервала p и среднее содержание $t = A/p$. Часто оказывается, что содержание t и мощность p связаны положительной или отрицательной корреляционной зависимостью (в обычном статистическом смысле). В этом случае условие внутренней независимости содержания не соблюдается и, следовательно, простая формула (IV,4,2) неприменима.

Имеет смысл рассмотреть непосредственно две переменные $A(x,y)$ и $p(x,y)$, определенные в двумерном пространстве и имеющие в качестве геометрического поля проекцию S видимого контура поля V на горизонтальную плоскость. Если эти новые переменные оказываются независимыми от их геометрического поля S (что обычно встречается в случае пластообразных рудных тел), то можно вычислить относительную дисперсию σ_m^2/m^2 методами, описанными во второй части. Однако может случиться и так, что A и p не будут независимы от поля S (в случае штокообразного месторождения). Тогда следует обратиться к транзитивным методам и к формуле (IV,4,1). Но зависят или не зависят переменные A и p от их геометрического поля, они связаны статистической зависимостью между собой, поэтому расчет дисперсии σ_m^2/m^2 требует знания либо транзитивной смешанной кovариограммы $C(h)$, либо эквивалентного ей элемента, вводимого в теории собственных схем.

Во всех случаях, однако, верно соотношение

$$\left(\frac{\sigma_Q}{Q} - \frac{\sigma_V}{V}\right)^2 \leqslant \frac{\sigma_m^2}{m^2} \leqslant \left(\frac{\sigma_Q}{Q} + \frac{\sigma_V}{V}\right).$$

При условии, что объем известен точнее, чем количество металла, т. е. σ_V/V мало по сравнению с σ_Q/Q, можно принять $\sigma_m^2/m^2 = \sigma_Q^2/Q^2$ и таким образом избежать вычисления смешанного члена. Кроме того, если определен коэффициент корреляции ρ (в статистическом смысле) между мощностью p и запасом A, то можно иногда предполагать (или ожидать), что этот коэффициент характеризует зависимость ошибок в оценках V и Q. Это весьма упрощенное представление приводит к приближенной формуле

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} + \frac{\sigma_V^2}{V^2} - 2\rho\frac{\sigma_Q\sigma_V}{QV}.$$

Но обычно нет оснований использовать один и тот же коэффициент ρ как для переменных, так и для их оценок.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ СОБСТВЕННЫХ СХЕМ

Введение

В первой части этой работы мы сделали попытку построить теорию пространственных переменных без привлечения какой-либо вероятностной гипотезы. Однако в стремлении остаться в рамках чисто геометрического подхода есть, возможно, нечто иллюзорное и возникает вопрос, не проявляются ли официально изгнанные из теории вероятностные понятия в скрытой замаскированной форме. На такую мысль наводит наличие элемента флуктуаций в дисперсии оценки (см. гл. II, § 2). Если бы нам была точно известна транзитивная ковариограмма $g(h)$ пространственной переменной, мы смогли бы по общим формулам (II,1,10) или (II,1,12), которые имеют чисто геометрической смысл, со всей строгостью определить дисперсию оценки $\sigma^2(a)$ (включая элемент флуктуаций). Но точное значение ковариограммы $g(h)$ можно получить лишь при условии, что полностью известна пространственная переменная $f(x)$, а в этом случае исчезает сама проблема оценки. Практически экспериментальные данные никогда не позволяют найти ковариограмму $g(h)$ с такой точностью, чтобы можно было оценить элемент флуктуаций. Самое большое, на что можно претендовать, — это, сделав некоторые предположения о характере поведения ковариограммы $g(h)$ вблизи нуля, предсказать математическое ожидание, или элемент распространения, дисперсии оценки $\sigma^2(a)$; при этом элемент флуктуаций следует рассматривать как простую непредсказываемую случайную флуктуацию. Фиг. 2 в гл. III в этом смысле весьма показательна. Самое малое изменение ковариограммы $g(h)$, устанавливаемое экспериментально, не изменит сколько-нибудь значительно элемента распространения, но может совершенно неожиданно сказаться на элементе флуктаций. Аналогично задание всех начальных условий математически строго определяет последующее развитие физической системы. Но эти начальные условия могут быть определены лишь с некоторой точностью. В то же время достаточно лишь малейшего, неуловимого экспериментально отличия начальных условий, чтобы по прошествии некоторого времени получить состояние системы, совершенно отличное от первоначально предсказанного. Это несоразмерное разрастание малых начальных погрешностей обусловило успешное введение вероятностного подхода в физике. Теперь представляется вполне законным подобный подход распространить на теорию пространственных переменных.

Во второй части книги мы примем гипотезу, согласно которой пространственная переменная $f(x)$ может рассматриваться как реализация случайной функции $F(x)$. Известно, что случайная функция $F(x)$ определяется как векторная случайная величина с бесконечным числом составляющих, каждая из котор х представляет значение функции в точке x пространства. Между случайной функцией $F(x)$ и ее реализацией $f(x)$ существуют те же взаимоотношения, что и между обычной случайной величиной Y и ее численным значением y, полученным в результате частного опыта.

Этот первоначальный подход не вызывает серьезных возражений. Впрочем, строго говоря, речь идет не о гипотезе, которая может быть подтверждена или опровергнута экспериментально, а скорее о концепции, на которой можно построить рациональную интерпретацию пространственной изменчивости. Реальные трудности возникают только тогда, когда встает вопрос о статистических выводах. Действительно, мы будем говорить об определении пространственного закона этой случайной функции $F(x)$, т. е. закона распределения

$$P[F(x_1) < f_1, \ldots, F(x_k) < f_k] = G(f_1, \ldots, f_k;\ x_1, \ldots, x_k)$$

для всех систем точек $x_1, \ldots, x_k$, число которых произвольно (но конечно). Если удастся определить этот закон, вероятностная интерпретация будет иметь смысл. К сожалению, совместный закон распределения G зависит более чем от k параметров [среди которых важны для нас по крайней мере k моментов первого порядка и $\frac{1}{2}k(k+1)$ моментов второго порядка], тогда как имеется самое большее k численных значений $f(x_1), \ldots, f(x_k)$, полученных при измерении $f(x)$ в k точках. Таким образом, в общем случае, если не будут сделаны соответствующие предположения, с помощью которых число параметров, подлежащих учету, может быть уменьшено, статистические выводы останутся неопределенными (и вероятностная интерпретация будет лишена смысла).

Согласно наиболее распространенной гипотезе, предполагается, что случайная функция $F(x)$ стационарна, т. е. пространственный закон, описывающий функцию, рассматривается как инвариантный относительно переноса совокупности точек x. Из этой гипотезы следует однородность случайной функции в пространстве, проявляющаяся в том, что в любой точке поля случайная функция обладает одинаковыми средними характеристиками. Образно говоря, явление, описываемое этой функцией, бесконечно повторяется в пространстве, и благодаря такому повторению статистические выводы становятся возможными. Поскольку закон совместного распределения значений случайной функции в различных точках инвариантен относительно переноса совокупности точек, число параметров, которыми он определяется, существенно уменьшается.

Итак, мы будем считать, что пространственную переменную $f(x)$ можно рассматривать как реализацию стационарной случайной функции $F(x)$. Эта гипотеза не всегда приемлема. Если наблюдается закономерное уменьшение значений $f(x)$ при удалении точки наблюдения от центральной части поля, то ни в коем случае нельзя говорить о стационарности, и в таком случае следует воспользоваться методами транзитивных представлений, изложенными в первой части. Но следует отметить, что транзитивные и вероятностные методы приводят к одним и тем же конечным результатам, особенно когда вопрос касается расчета дисперсий распространения. Это совпадение имеет большое методологическое значение. Оно свидетельствует о том, что допущение стационарности случайной функции, кажущееся необходимым для обоснования статистических выводов и доказательства применимости вероятностной терминологии, на самом деле играет не столь важную роль. Примем ли мы гипотезу стационарности и используем методы теории собственных схем или отбросим ее и используем методы транзитивных представлений, мы придем к одним и тем же численным значениям дисперсии оценки или, во всяком случае, значениям, практически близким. В результате становится ясно, что нестационарную случайную функцию можно изучать (по крайней мере в том, что касается проблем оценки) как если бы она была стационарной, но при условии, что в качестве ее вариограммы будет принята «средняя» вариограмма, построенная по экспериментальным значениям, полученным в пределах оцениваемого участка геометрического поля.

В гл. V мы кратко изложим классическую теорию случайных стационарных в широком смысле функций и покажем, как в ее рамках формулируют-

ся основные вопросы, рассматриваемые в данной работе (регуляризация переменных, оценка и крайгинг). Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в последующих главах, посвященных теории собственных схем.

В теории стационарных случайных функций основным инструментом является ковариационная (или автокорреляционная) функция $K(h) = E[f(x) f(x+h)]$, которая представляет ковариацию значений случайной функции в точках, расстояние между которыми равно h, и которая играет ту же роль, что и кovариограмма $g(h)$ в транзитивных методах. Ковариационная функция $K(h)$ существует только в том случае, если дисперсия существует a priori, т. е. если $K(0) < \infty$. Однако в природе есть множество явлений с неограниченной дисперсией, которые не могут быть правильно описаны, если им a priori приписать конечную дисперсию. Это утверждение может некоторых удивить. Но природа приготовила нам тут в некотором смысле ловушку. Когда отбирают пробы v в геометрическом поле V, то по значениям пространственной переменной в пробах получают статистическую гистограмму, исходя из которой можно вычислить дисперсию, всегда принимающую в этом случае строго определенное значение. Но эта дисперсия является функцией $\sigma^2(V \mid v)$ геометрической базы пробы v и геометрического поля V. В частности, она возрастает при расширении пределов геометрического поля V. Если значения пространственной переменной в пробах имеют a priori конечную дисперсию, она должна проявиться как предел экспериментальных значений дисперсии $\sigma^2(V \mid v)$ при бесконечном увеличении V. Часто приходится предполагать, что такого предела нет. Так, геологи Южной Африки (особенно Д. Г. Крайг), изучая золоторудные месторождения Витватерсранда, вычисляли по сотням тысяч проб дисперсии содержаний золота для все более крупных блоков, участков и, наконец, рудных полей. При этом они экспериментально получили соотношение вида $\sigma^2 = \alpha \ln V/v$. Возрастание дисперсии наблюдалось вплоть до последней экспериментальной точки, где V/v было уже порядка десятка миллиардов. По этим данным можно уверенно сделать вывод о том, что a priori дисперсия здесь бесконечна.

Однако даже в тех случаях, когда дисперсия a priori бесконечна, часто случается, что приращения $[f(x+h) - f(x)]$ сохраняют конечную дисперсию. Случайную функцию со стационарными в широком смысле приращениями будем называть *собственной стохастической схемой*. Изучать случайную функцию как собственную схему значит изучать ее через ее приращения, т. е. с точностью до постоянной (впрочем, именно так всегда изучаются классические процессы Пуассона и Винера — Леви). Основной характеристикой, заменяющей ковариационную функцию $K(h)$, является полувариограмма, или собственная функция, определяемая как математическое ожидание квадратов приращений

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[f(x+h) - f(x)]^2\}.$$

В гл. VI—IX на этой новой основе рассматриваются те же вопросы, что и в первой части: регуляризация и операция восхождения, оценка дисперсии среднего и проблема одновременной оценки нескольких величин (среднего содержания и запасов руды и металла). Вводятся очень важные для математической теории разведки понятия: дисперсия распространения, дисперсия пробы v в геометрическом поле V и дисперсия крайгинга (или оценка крайгинга, обладающая минимальной дисперсией). Эквиваленты этих понятий могут быть формально получены и в рамках теории транзитивных представлений. Действительное их содержание неразрывно связано с основными гипотезами теории собственных схем.

ГЛАВА V

Некоторые сведения о случайных функциях

Краткое содержание

В этой главе дается краткая сводка определений и основных свойств случайных функций [1], и в частности случайных функций стационарных в широком смысле, которые используются во второй части этой книги. Читатели, которые знакомы с теорией случайных функций, эту главу могут пропустить.

В § 1 случайная функция $f(x)$ определяется по совместному закону распределения $F(f_1, \ldots, f_k; x_1, \ldots, x_k)$ значений случайной функции $f(x)$ на некотором множестве произвольных точек $(x_1, \ldots, x_k)$. Формулируется условие стационарности случайной функции. Дается выражение для моментов различного порядка.

В § 2 рассматривается случайная функция, стационарная в широком смысле (стационарная случайная функция второго порядка), определяются свойства ее ковариограммы $K(h)$ и устанавливается связь характера ее поведения в нуле с регулярностью поведения случайной функции $f(x)$.

В § 3 даются определения сходимости, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратичном, применимые к случайным функциям. Формулируются основные понятия геостатистики: регуляризация переменных, дисперсии распространения и оценки, крайгинг.

§ 1. Определение случайной функции

Случайную функцию следует рассматривать как случайную величину с бесконечным числом составляющих. Случайная величина $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)$ с k составляющими в теории вероятностей определяется k-мерным законом распределения

$$F(z_1, \ldots, z_k) = P\{Z_1 < z_1, \ldots, Z_k < z_k\},$$

указывающим вероятность того, что k обычных случайных величин $Z_1, \ldots Z_k$ одновременно оказываются меньше соответствующих заданных чисел $z_1, \ldots, z_k$. Если k становится бесконечно большим, то компоненту Z_i можно рассматривать как случайную величину, представляющую значения $f(x_i)$, принимаемые случайной функцией $f(x)$ в определенной точке x_i n-мерного пространства. Таким образом, случайная функция $f(x)$ представляется в виде случайной величины с бесконечным числом составляющих; при этом в качестве составляющих выступают значения случайной функции $f(x)$ в каждой точке x n-мерного пространства. В частном случае одномерного пространства можно рассматривать случайную функцию $f(t)$ времени t. Случайная функция $f(t)$, описывающая развитие некоторого явления во времени, называется *случайным процессом*, однако мы не будем пользоваться этим термином.

Естественно, переход к бесконечному (в общем случае нечетному) числу составляющих поднимает ряд сложных проблем. Мы руководствуемся в этой работе следующим нестрогим, но вполне допустимым для решения прикладных задач, утверждением: случайная функция считается определен-

[1] Мы следуем классической книге Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, изд. 3-е, М., Физматгиз, 1961. Читатель может также обратиться к другим работам по теории случайных функций.

ной, если для всякой совокупности точек $x_1, \ldots, x_k$ n-мерного пространства, где k — произвольно, но конечно, известен совместный закон распределения случайных величин $f(x_1), \ldots, f(x_k)$, представляющих значения случайной функции $f(x)$ в этих точках, т. е. если известна функция распределения

$$F(f_1, \ldots, f_k;\ x_1, \ldots, x_k) = P\{f(x_1) < f_1, \ldots, f(x_k) < f_k\}. \qquad (V,1,1)$$

Эта функция в общем случае зависит от значений $x_1, \ldots, x_k$ как от параметров и удовлетворяет двум очевидным условиям. Согласно первому условию, порядок, в котором берутся точки $x_1, \ldots, x_k$ и соответствующие значения $f_1, \ldots, f_k$, не играет никакой роли. Для всякой перестановки $i_1, \ldots, i_k$ индексов $1, 2, \ldots, k$ должно выполняться равенство

$$F(f_{i_1}, \ldots, f_{i_k};\ x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = F(f_1, \ldots, f_k;\ x_1, \ldots, x_k).$$

Согласно второму условию, при $f_k = \infty$ в выражении (V, 1, 1) неравенство $f(x_k) < f_k$ становится излишним, и мы получаем закон совместного распределения $k-1$ случайных величин $f(x_1), \ldots, f(x_{k-1})$. Следовательно, закон распределения F должен удовлетворять следующему соотношению:

$$F(f_1, \ldots, f_{k-1},\ \infty;\ x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_k) = F(f_1, \ldots, f_{k-1};\ x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Реализация случайной функции

Реализацией, или *возможным значением* случайной функции $f(x)$, называется ансамбль численных значений $f(x_i)$, полученных в каждой точке x_i пространства путем случайного выбора в соответствии с законом совместного распределения F. Соотношение между случайной функцией $f(x)$ и ее реализацией то же, что и между случайной величиной Z и ее частным значением z, полученным случайно в соответствии с законом распределения случайной величины Z. Реализацию случайной функции $f(x)$ можно рассматривать как пространственную переменную. Обратно, данная пространственная переменная может быть интерпретирована как частная реализация некоторой случайной функции $f(x)$; однако такая интерпретация имеет реальный смысл только тогда, когда из нее следуют определенные статистические выводы и когда по численным значениям $f(x_i)$ пространственной переменной можно получить оценку закона распределения F случайной функции $f(x)$. Так как совместный закон распределения F k составляющих $f_1, \ldots, f_k$ в общем случае определяется более чем k параметрами, то практически статистические выводы возможны лишь в случае стационарности случайной функции.

Стационарная случайная функция

Очень важное значение имеет частный случай, когда все конечномерные законы распределения F инвариантны относительно любого переноса совокупности точек $x_1, \ldots, x_k$. Если для любой совокупности точек $x_1, \ldots, x_k$ и любого вектора h справедливо равенство

$$F(f_1, \ldots, f_k;\ x_1+h, \ldots, x_k+h) = F(f_1, \ldots, f_k;\ x_1, \ldots, x_k), \qquad (V,1,2)$$

говорят, что $f(x)$ является стационарной функцией. При стационарности случайной функции $f(x)$ законы распределения F определяются взаимным расположением точек $x_1, \ldots, x_k$ в пространстве и не зависят от положения их центра тяжести. Стационарность случайной функции означает однородность ее в пространстве и, если угодно, свидетельствует о том, что описываемое случайной функцией явление бесконечно повторяется во всем n-мерном пространстве.

Моменты случайной функции

Момент порядка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ случайной функции $f(x)$, закон распределения которой определяется выражением (V,1,1), равен математическому ожиданию произведения

$$[f(x_1)]^{\alpha_1}[f(x_2)]^{\alpha_2} \ldots [f(x_k)]^{\alpha_k}.$$

Этот момент, обозначаемый символом $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x_1, \ldots, x_k)$ — функция точек $x_1, \ldots, x_k$, которая определяется формулой

$$M_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x_1, \ldots, x_k) = E\{[f(x_1)]^{\alpha_1} \ldots [f(x_k)]^{\alpha_k}\} =$$

$$= \int f_1^{\alpha_1} \ldots f_k^{\alpha_k}\, dF(f_1, \ldots, f_k;\ x_1, \ldots x_k). \qquad (V,1,3)$$

Момент первого порядка является математическим ожиданием случайной функции $f(x)$ в точке x. Мы будем обозначать его символом $m(x)$:

$$m(x) = M_1(x) = E[f(x)] = \int f\, dF(f;\ x). \qquad (V,1,4)$$

Вместо смешанного момента $M_{11}(x_1, x_2)$ часто вводят центральный смешанный момент $K(x_1, x_2)$, определяемый выражением

$$K(x_1, x_2) = M_{11}(x_1, x_2) - m(x_1)\, m(x_2) = E\{[f(x_1) - m(x_1)]\,[f(x_2) - m(x_2)]\}. \qquad (V,1,5)$$

Функция $K(x_1, x_2)$ — ковариация случайных переменных $f(x_1)$ и $f(x_2)$. В общем случае она зависит от значений x_1 и x_2 как от параметров. Если точки x_1 и x_2 совпадают, т. е. $x_1 = x_2 = x$, то функция $K(x, x)$ точки x определяет дисперсию случайной величины $f(x)$:

$$K(x, x) = D[f(x)]. \qquad (V,1,6)$$

Вообще говоря, могут встретиться случайные функции, не имеющие конечных моментов второго и даже первого порядка. Когда дисперсия $K(x, x)$ существует в каждой точке x [ковариация $K(x_1\, x_2)$ также существует для каждой пары точек x_1 и x_2], говорят, что случайная функция $f(x)$ является функцией с конечной дисперсией.

§ 2. Случайные функции, стационарные в широком смысле

Если случайная функция $f(x)$ стационарна, т. е. если все законы распределения F инвариантны по отношению к переносу точек $x_1, \ldots x_k$, то различные моменты, если они существуют, будут, очевидно, обладать тем же свойством. В частности, для произвольного вектора h имеем

$$m(x+h) = m(x),$$

$$K(x_1+h, x_2+h) = K(x_1, x_2).$$

Отсюда непосредственно следует, что математическое ожидание стационарной случайной функции $f(x)$ не зависит от точки x и равно постоянной m, а ковариация $K(x_1, x_2)$ зависит только от вектора $x_2 - x_1$, но не от x_1 и x_2 порознь. Таким образом,

$$m(x) = m,$$

$$K(x_1, x_2) = K(x_2 - x_1). \qquad (V,2,1)$$

Когда закон распределения F случайной функции $f(x)$ таков, что моменты первого и второго порядка случайной функции удовлетворяют соотно-

шениям (V,2,1), то случайная функция $f(x)$ называется *стационарной в широком смысле* (или стационарной функцией второго порядка). Следует заметить, что условие (V,2,1) в общем случае не влечет за собой условия (V,1,2), т. е. случайная функция, стационарная в широком смысле, не будет стационарной в узком смысле. Однако в очень многих практических приложениях, когда оперируют только математическими ожиданиями и корреляционными функциями, т. е. только моментами первого и второго порядков, имеет значение лишь стационарность случайной функции в широком смысле. Гипотеза о стационарности случайной функции в широком смысле и принимается в дальнейшем изложении.

Так как без нарушения общности рассуждений случайную функцию $f(x)$ можно заменить центрированной случайной функцией $f(x) - m$, то для упрощения ниже предполагается, что $m = 0$.

Ковариация

Ковариационная функция

$$K(h) = E[f(x+h) f(x)] \qquad (V,2,2)$$

стационарной в широком смысле случайной функции с нулевым средним значением ($m = 0$) не может быть произвольной. Она должна быть такой, чтобы все линейные комбинации вида

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

имели неотрицательную дисперсию для любых точек x_i и коэффициентов λ_i. С учетом формулы (V,2,2) эта дисперсия определяется выражением

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[f(x_i) f(x_j)] = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j K(x_j - x_i).$$

Если оно положительно или равно нулю для любых x_i и λ_i, функция $K(h)$ называется *положительно определенной*.

Обратно, если $K(h)$ — положительно определенная функция, можно построить стационарную нормально распределенную случайную функцию, для которой $K(h)$ будет ковариационной функцией. Отсюда следуют свойства функции $K(h)$, не отличающиеся от рассмотренных в гл. I свойств транзитивных ковариограмм $g(h)$:

$$\left.\begin{aligned} &K(h) = K(-h), \\ &K(0) \geqslant 0, \\ &K(h) \leqslant K(0). \end{aligned}\right\} \qquad (V,2,3)$$

Значение $K(0)$ ковариационной функции $K(h)$ при $h = 0$ — не что иное, как дисперсия случайной функции $f(x)$.

Обычно предполагают, что ковариационная функция $K(h)$ непрерывна. Так как ковариационная функция положительно определенная, то достаточно ее непрерывности при $h = 0$, чтобы она была непрерывной при всех значениях h.

Наконец, из теоремы Бохнера следует, что для положительной определенности функции необходимо и достаточно, чтобы она имела преобразование Фурье с суммируемой положительной мерой, сумма которой равняется дисперсии $K(0)$.

Иногда используют ковариационные функции $K(h)$, непрерывные всюду, кроме точки $h = 0$, такие, которые при стремлении модуля h к нулю стремятся к положительным значениям, меньшим $K(0)$. В этом случае будем говорить о наличии эффекта самородков, характеризуемого постоянной самородков C, равной

$$C = K(0) - \lim_{|h| \to 0} K(h).$$

Однако практически в большинстве случаев ковариационная функция характеризуется не разрывом в нуле, а наличием вблизи $h = 0$ узкой зоны перехода, в пределах которой ковариационная функция убывает хотя и непрерывно, но очень быстро.

Наконец, есть прямое соответствие между поведением ковариационной функции вблизи точки $h = 0$ и степенью регулярности случайной функции или ее различных возможных реализаций. Характер этого соответствия будет уточнен в следующем параграфе.

§ 3. Дифференцирование и интегрирование случайной функции

Из различных видов стохастической сходимости мы будем использовать только сходимость в среднем квадратичном. Последовательность случайных величин $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ называется сходящейся в среднем квадратичном к случайной величине Z, если математическое ожидание квадрата разности $(Z_n - Z)^2$ стремится к нулю при безграничном увеличении n, т. е. если

$$\lim_{n \to \infty} E[(Z_n - Z)^2] = 0. \qquad (V,3,1)$$

Необходимым и достаточным условием, при котором последовательность переменных Z_n, обладающих конечными дисперсиями, была бы сходящейся в среднем квадратичном, является стремление к нулю математического ожидания $(Z_n - Z_m)^2$ при неограниченном увеличении меньшего из n и m, т. е.

$$\lim_{\min(n, m) \to \infty} E[(Z_n - Z_m)^2] = 0. \qquad (V,3,2)$$

Когда это условие сходимости в среднем квадратичном выполняется, математическое ожидание предела последовательности Z_n равно пределу математических ожиданий величин Z_n:

$$E(\lim_{n \to \infty} Z_n) = \lim_{n \to \infty} E(Z_n). \qquad (V,3,3)$$

Это значит, что при выполнении (V,3,1) операции предела в среднем квадратичном и математического ожидания можно поменять местами.

Непрерывность случайной функции

Случайная функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{|x - x_0| \to 0} E\{[f(x) - f(x_0)]^2\} = 0. \qquad (V,3,4)$$

Чтобы стационарная случайная функция второго порядка (стационарная в широком смысле) была непрерывной в каждой точке x, достаточно ее непрерывности в среднем квадратичном в точке x, ибо условие (V,3,4) для указанной функции эквивалентно условию

$$\lim_{|h| \to 0} [K(h)] = K(0). \qquad (V,3,5)$$

Другими словами, чтобы стационарная в широком смысле случайная функция была непрерывна в среднем квадратичном, необходимо и достаточно непрерывности ее ковариационной функции $K(h)$ при $h = 0$. Ясно, впрочем, что в этом случае ковариационная функция будет непрерывной при всех значениях h.

Дифференцирование случайной функции

Обозначим теперь (не так, как в остальной части этой главы) символами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координаты точки x. Говорят, что случайная функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в среднем квадратичном по x_1 в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и имеет в этой точке частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ случайной функции, если выполняется равенство

$$\lim_{|h_1|\to 0} E\left\{\left[\frac{f(x_1+h_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h_1} - \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}\right]^2\right\} = 0. \tag{V,3,6}$$

Аналогично определяются производные в среднем квадратичном по остальным координатам $x_2, \ldots, x_n$ и производная в некотором направлении α, записываемая в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}; \tag{V,3,7}$$

где α_i — косинус угла, образуемого заданным направлением с положительным направлением оси $0x_i$.

Чтобы случайная функция $f(x)$, стационарная в широком смысле, с нулевым средним и ковариационной функцией $K(h)$ была дифференцируема в среднем квадратичном во всех точках, достаточно выполнения условия (V,3,6) хотя бы в одной точке. Легко показать, что необходимым и достаточным условием этого является существование двух производных от функции $K(h) = K(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ по h_1 в точке $h = 0$. Тогда ковариационная функция дважды дифференцируема по h_1 во всех точках h и, кроме того, существует равенство

$$E\left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(x+h) \frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\right] = -\frac{\partial^2}{\partial h_1^2} K(h). \tag{V,3,8}$$

Итак, случайные функции, дифференцируемые один раз в среднем квадратичном, имеют ковариационные функции, дифференцируемые во всех точках дважды и, следовательно, характеризующиеся параболическим поведением в точке $h = 0$. Справедливо и обратное. При этом вторая производная ковариационной функции $K(h)$ равна взятой с обратным знаком ковариационной функции первой производной случайной функции $f(x)$.

Интегрирование случайной функции

Аналогично можно определить интегрирование в среднем квадратичном. Рассмотрим случайные переменные I_m, определяемые выражением

$$I_m = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\,\varphi(x_i)\,\Delta V_i,$$

где m — число смежных объемов ΔV_i, на которые разбито геометрическое поле V, а $f(x_i)$ и $\varphi(x_i)$ — значения случайной функции $f(x)$ и некоторой произвольной неслучайной функции $\varphi(x)$ в точке x_i, взятой случайно внутри

объема ΔV_i. Если при неограниченном увеличении числа m элементарных объемов ΔV_i и стремлении максимального по величине объема ΔV_i к нулю последовательность случайных переменных I_m сходится в среднем квадратичном к некоторому пределу I, т. е. если

$$\lim_{\max|\Delta V_i|\to 0} E[(I_m - I)^2] = 0,$$

то говорят, что случайная величина I является интегралом от случайной функции $f(x)$ с функцией веса $\varphi(x_i)$ и областью интегрирования V; для нее применяют обычное обозначение интеграла:

$$I = \int_V f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{V,3,9}$$

Необходимым и достаточным условием существования стохастического интеграла I, когда подынтегральная функция $f(x)$ стационарна в широком смысле, является существование обычного интеграла

$$D(I) = \int_V \int_V K(y-x)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy, \tag{V,3,10}$$

представляющего собой дисперсию случайной величины I.

Если ввести функцию взвешивания (или опробования) $p(x)$, определяемую равенством

$$p(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in V, \\ 0 & \text{при } x \notin V, \end{cases}$$

выражения (V,3,9) и (V,3,10) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} I &= \int f(x)\,p(x)\,dx, \\ D(I) &= \int\int K(x-y)\,p(x)\,p(y)\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{V,3,11}$$

Наконец, если обозначить символом $P(h)$ транзитивную ковариограмму весовой функции $p(x)$

$$P(h) = p * \check{p} = \int p(x)\,p(x+h)\,dx,$$

то в соответствии с алгорифмом Коши (I,2,9) дисперсия $D(I)$ может быть записана как

$$D(I) = \int K(h)\,P(h)\,dh. \tag{V,3,12}$$

В частности, если в качестве функции взвешивания взять функцию $k(x)/v$, где $k(x)$ — геометрическая переменная, то стохастический интеграл

$$Y = \frac{1}{v}\int f(x)\,dx = \frac{1}{v}\int k(x)\,f(x)\,dx$$

будет определять среднее значение случайной функции в пробе v. Дисперсия среднего значения в пробе выражается формулой

$$D(Y) = \frac{1}{v^2}\int\int K(x-x')\,k(x)\,k(x')\,dx\,dx'; \tag{V,3,13}$$

очевидно, что она равна среднему значению ковариационной функции $K(h)$ в объеме пробы v, когда оба конца вектора h независимо один от другого занимают все возможные положения в объеме пробы.

Регуляризация случайной функции

Если в выражении (V,3,11) в качестве весовой функции вместо $p(x)$ взять $p(x-z)$, то стохастический интеграл I станет случайной функцией $I(z)$ точки z и определит среднее значение $f(x)$ в пробе, расположенной в точке z и характеризуемой весовой функцией $p(x)$. Эта случайная функция существует, так как ее дисперсия дается все тем же выражением $D(I)$, которое полностью определено. Проведенная таким образом операция представляет собой стохастическую свертку и может быть записана как $I = f * \check{p}$. Обозначим $f_p = f * \check{p}$ и назовем функцию f_p *регуляризованной функцией, полученной путем взвешивания случайной функции f на весовую функцию p.* Иногда эту функцию называют *подвижным взвешенным средним.* Необходимо помнить, что регуляризованная функция f_p, полученная взвешиванием случайной функции f, сама является случайной функцией. Вопреки наивному представлению, переход к подвижному среднему ни в коей мере не устраняет стохастического характера, присущего осредняемой случайной функции. Результатом этой операции оказалась другая случайная функция, просто несколько более регулярная, чем исходная. Действительно, найдем ковариационную функцию регуляризованной случайной функции f_p. Получим

$$K_p(h) = E[f_p(x) f_p(x+h)] = E\left[\int\int f(y+x)\, p(y)\, f(y'+x+h)\, p \times \right.$$
$$\left. \times (y'-x-h)\, dy\, dy'\right] = \int\int K(y-y'-h)\, p(y)\, p(y')\, dy\, dy'.$$

Это выражение представляет собой свертку K и транзитивной ковариограммы P весовой функции p, т. е. $P = p * \check{p}$, и его можно записать в виде

$$K_p = K * P. \qquad \text{(V,3,14)}$$

Таким образом, ковариационную функцию регуляризованной случайной функции f_p получают путем регуляризации ковариационной функции K случайной функции f с помощью транзитивной ковариограммы P функции взвешивания. Механизм такой регуляризации подобен описанному при рассмотрении теории транзитивных представлений. В частности, когда весовая функция p дифференцируема, ковариограмма P, а следовательно, и K_p дважды дифференцируемы, и регуляризованная функция f_p дифференцируема в среднем квадратичном, даже если исходная функция f не имеет производных. Функция взвешивания p передает случайной функции f присущие ей (функции взвешивания) черты регулярности. Но регуляризованная функция f_p тем не менее не перестает быть случайной функцией.

Дисперсия распространения

Если V и V' — два объема, а Y и Z — средние значения случайной функции в этих объемах, т. е. значения стохастических интегралов

$$Y = \frac{1}{V}\int f(x)\, dx \quad \text{и} \quad Z = \frac{1}{V'}\int f(x)\, dx,$$

то ковариация Y и Z определится выражением

$$\sigma_{YZ} = \frac{1}{VV'} E\left[\int_V\int_{V'} f(x) f(x')\, dx\, dx'\right] = \frac{1}{VV'}\int_V\int_{V'} K(x-x')\, dx\, dx'.$$

Эта ковариация равна среднему значению ковариационной функции $K(h)$, когда концы вектора $h = x - x'$ занимают независимо один от другого все возможные положения в объемах V и V' соответственно.

В теории собственных схем мы введем дисперсию $D(Y-Z) = \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 - 2\sigma_{YZ}$ разности $Y - Z$ и назовем ее *дисперсией распространения.* Эта дисперсия будет служить для характеристики ошибки, с которой среднее значение случайной функции в объеме V может быть принято в качестве оценки среднего значения в объеме V' (или наоборот). Дисперсия распространения имеет следующий вид:

$$D(Y-Z) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V K(x-x')\, dx\, dx' + \frac{1}{V'^2}\int_{V'}\int_{V'} K(x-x')\, dx\, dx' -$$
$$- \frac{2}{VV'}\int_V\int_{V'} K(x-x')\, dx\, dx'. \qquad \text{(V,3,15)}$$

Для случайных функций, стационарных в широком смысле, было бы удобно ввести условное математическое ожидание $E(Y|Z)$ и условную дисперсию $\sigma^2_{Y.Z}$ величины Y при фиксированном значении Z. Однако чтобы найти эти величины, необходимо знать закон совместного распределения Y и Z, а не только их моменты первого и второго порядков. За исключением случаев, когда законы распределения нормальны или логнормальны, условные моменты слишком сложны для практического определения. Напротив, дисперсия распространения может быть вычислена всегда, когда известна ковариационная функция $K(h)$; при этом вовсе не требуется знать совместный закон распределения величин Y и Z. Наконец, в теории собственных схем исчезает само понятие математического ожидания, в то время как дисперсия распространения остается всегда определимой.

Дисперсия оценки

Если вместо объема V' рассматривать дискретную совокупность, состоящую из N точек $x_1, \ldots, x_N$, величина Z определится выражением

$$Z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

Переменная Z представляет собой среднее значение случайной функции $f(x)$ в N точечных пробах. В этом случае дисперсия распространения $D(Y-Z)$ характеризует ошибку, с которой среднее значение Y случайной функции $f(x)$ в объеме V оценивается величиной Z, полученной по N точечным пробам. Назовем эту дисперсию дисперсией оценки. Очевидное преобразование формулы (V,3,15) дает следующее выражение для дисперсии оценки:

$$D(Y-Z) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V K(x-x')\, dx\, dx' + \frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N} K(x_i-x_j) -$$
$$- \frac{2}{NV}\sum_{i=1}^{N}\int_V K(x-x_i)\, dx. \qquad \text{(V,3,16)}$$

Крайгинг

При оценивании среднего значения Z функции $f(x)$ в объеме V по N точечным пробам можно попытаться получить лучшую оценку, заменив простое среднее арифметическое некоторым средним взвешенным, приписывая каждому значению $f(x_i)$ в точке x_i вес, определяемый с учетом большей или меньшей корреляции $f(x_i)$ с искомой величиной Z и зависящий, следова-

тельно, от положения точки x_i относительно объема V. Рассмотрим оценку вида

$$Y=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i f(x_i)+\lambda_0 m,$$

считая истинное среднее значение функции $m = E\,[f(x)]$ известным. Коэффициенты взвешивания λ определим из условий минимума дисперсии оценки $E\,[(Z-Y)^2]$. Прежде всего заметим, что для выполнения условия $E(Y) = E(Z)$ коэффициент λ_0 должен быть взят равным $1 - \Sigma\lambda_i$ и что выбранная нами оценка должна принять следующий вид:

$$Y=m+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\,[f(x_i)-m]. \qquad \text{(V,3,17)}$$

Тогда дисперсия оценки разности $(Z - Y)$ будет равной

$$D(Z-Y)=\sigma_z^2-2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sigma_{zi}+\sum_{i,\,j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij},$$

где σ_{ij} — ковариация значений $f(x_i)$ и $f(x_j)$, а σ_{zi} — ковариация $f(x_i)$ и Z. Чтобы это выражение было минимальным, коэффициенты λ_i должны удовлетворять системе линейных уравнений, получаемых при приравнивании нулю частных производных дисперсии $D(Z - Y)$ по λ_i, т. е. системе

$$\sum_i\lambda_i\sigma_{ij}=\sigma_{zi};\qquad i=1,\ldots,N. \qquad \text{(V,3,18)}$$

Когда коэффициенты взвешивания λ_i удовлетворяют этой системе, мы говорим, что оценка Y реализует крайгинг величины Z. Дисперсия крайгинга равна минимальному значению дисперсии $D(Z - Y)$. Умножив обе части выражения (V,3,18) на λ_i и просуммировав их по i, получим

$$\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}=\sum_i\lambda_i\sigma_{zi}.$$

Следовательно, дисперсия крайгинга равна

$$\sigma_K^2=\sigma_Z^2-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sigma_{zi}.$$

Замечание. Сейчас, при первом рассмотрении крайгинга, мы приняли, что среднее значение m известно нам a priori. Обычно на практике такие случаи не встречаются: среднее значение m само должно быть оценено по имеющимся данным. Оно может быть представлено суммой $m = \sum_i \mu_i f(x_i)$, где $\sum_i \mu_i = 1$. Но тогда оценка (V,3,17) сводится к $Z = \sum_i a_i f(x_i)$, где $\sum_i a_i = 1$. При этом в выражении оценки больше нет в явной форме априорного генерального среднего m, но зато появилось условие нормировки $\sum a_i = 1$ [необходимое для выполнения равенства $E(Y) = E(Z)$]. В этой форме крайгинг рассматривается в теории собственных схем. Мы вернемся к нему в гл. IX.

ГЛАВА VI

Стохастические собственные схемы

Краткое содержание

Эта глава посвящена теории так называемых собственных схем, которая при решении многих прикладных задач позволяет изучать случайные функции с бесконечными дисперсиями.

В § 1 дается определение собственной схемы как случайной функции со стационарными приращениями. Определяются моменты первого и второго порядков и вводится собственная функция $\gamma(h)$, позволяющая рассчитать все моменты второго порядка и играющая основную роль в теории собственных схем.

В § 2 изучается соотношение между собственной, $\gamma(h)$, и ковариационной, $K(h)$, функциями, которое характерно для собственной схемы транзитивного типа. Показано, что собственная функция определима во многих случаях, когда $K(h)$ не существует. Перечисляются свойства собственной функции и указывается, что она должна быть условно положительно определенной функцией. Затем поясняется прикладное значение собственной функции и рассматриваются различные модели анизотропии.

В § 3 изучаются неточечные пространственные переменные. Вводится одно из основных понятий геостатистики — дисперсия распространения, определяемая как дисперсия $D(Y - Z)$ разности двух стохастических средних, полученных регуляризацией исходной функции f посредством взвешивания на функции p_1 и p_2 соответственно.

В § 4 определяется понятие дисперсии объема v в поле V (когда объем v очень мал) как среднее значение дисперсий распространения v на V, получаемых для всех возможных положений v в V. С помощью соотношения аддитивности (VI,4,5) это понятие обобщается на случай любых объемов. Дается аналогичное определение ковариации объемов v и v' в V и вводится новое выражение для дисперсии распространения.

В § 5 анализируется соотношение между собственной схемой и транзитивным представлением. Рассматриваются условия, при которых математическое ожидание транзитивной ковариограммы $g(h)$ может быть выражено через собственную функцию $\gamma(h)$ и геометрическую ковариограмму $K(h)$ объема V. Этот параграф при первом чтении может быть пропущен.

В § 6 в качестве иллюстрации рассматривается пример представления реальной пространственной переменной с помощью собственной схемы де Вейса с зональной анизотропией.

§ 1. Собственная схема и моменты

Мы будем называть *схемой с законом собственного рассеивания*, или, сокращенно, *собственной схемой* случайную функцию со стационарными приращениями. Многие пространственные переменные могут быть интерпретированы, по крайней мере в первом приближении, как реализации случайных функций подобного типа.

Рассмотрим данное определение более подробно. Пусть $f_i = f(x_i)$, $f_j = f(x_j)$, . . . — значения точечной пространственной переменной, рассматриваемой как реализация случайной функции $f(x)$. Мы a priori не налагаем ограничений на вероятностные законы распределения самих величин f_i, f_j, . . ., и моменты второго и даже первого порядка функции $f(x)$ могут не существовать (быть бесконечными). Нас интересуют только приращения

$$\varepsilon_{ij}=f_j-f_i=f(x_j)-f(x_i), \qquad \text{(VI,1,1)}$$

определяемые как разности значений, принимаемых пространственной переменной в двух точках x_i и x_j. Эти приращения в свою очередь будем рассматривать как случайные величины. Тогда случайная функция $f(x)$

с точностью до произвольной постоянной определится совокупностью всех конечномерных законов распределения $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots; x_i, x_j, x_k, x_l, \ldots)$ приращений $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots$ между произвольными точками $x_i, x_j, x_k, x_l, \ldots$ (число точек произвольное конечное). Эти законы распределения в общем случае зависят от координат точек. Случайная функция $f(x)$ называется случайной функцией со стационарными приращениями; она определяет стохастическую схему с законом собственного рассеивания, если удовлетворяются два следующих условия.

1. Так как $f(x)$ определяется лишь с точностью до произвольной постоянной, то законы распределения F не должны меняться, если известно численное значение, принимаемое одной из величин $f_i = f(x_i)$. Естественно, когда известны два или большее число из этих значений, например f_i и f_j, то соответствующие приращения $\varepsilon_{ij} = f_j - f_i$ также становятся известными, и законы F должны быть заменены условными законами распределения для фиксированных значений ε_{ij}.

2. Приращения имеют стационарный характер, т. е. законы $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots; x_i, x_j, x_k, x_l, \ldots)$ являются инвариантными относительно переноса совокупности точек $x_i, x_j, \ldots$ на произвольный вектор h:

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots; x_i+h, x_j+h, x_k+h, x_l+h) = \\ = F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots; x_i, x_j, x_k, x_l, \ldots). \qquad \text{(VI,1,2)}$$

Таким образом, законы F зависят от взаимного расположения точек $x_i, x_j, \ldots$ и не зависят от положения их центра тяжести в пространстве. Очевидно, что пространственная переменная, являющаяся реализацией собственной схемы, сохраняет однородный характер изменчивости во всем пространстве. Ее изменчивость обладает собственным характером, т. е. не зависящим от рассматриваемого участка.

Моменты приращений, если они существуют, просто определяются с помощью законов F как математические ожидания выражений вида $[\varepsilon_{ij}]^{\alpha_1}[\varepsilon_{kl}]^{\alpha_2}\ldots$ Для собственных схем эти моменты сами стационарны, т. е. инвариантны относительно любого переноса совокупности точек $x_i, x_j, \ldots$ В большинстве задач, кроме весьма специальных, рассматриваемых в упражнениях (флуктуации и оценка моментов второго порядка), нам нужны только моменты двух первых порядков. Поэтому будем предполагать, что эти моменты всегда существуют и являются стационарными. При получении интересующих нас результатов сами законы распределения F практически никогда не будут приниматься в расчет, поскольку в этом нет необходимости, когда приращения ε_{ij} стационарны в широком смысле.

Моменты первого порядка и линейный тренд

Обозначим символом Δ_{ij} математическое ожидание приращения ε_{ij}. По определению собственных схем величина Δ_{ij} зависит только от вектора $h_{ij} = x_j - x_i$. Запишем, что

$$E(\varepsilon_{ij}) = \Delta_{ij} = \Delta(h_{ij}).$$

Из определения приращения (VI,1,1) вытекает соотношение замкнутости, к которому мы еще вернемся и которое можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}.$$

Если в этом выражении перейти от приращений ε к их математическим ожиданиям, то будет видно, что функция $\Delta(h)$ должна удовлетворять соотношению

$$\Delta(h_{ij}) + \Delta(h_{jk}) = \Delta(h_{ik})$$

при любых векторных аргументах h_{ij}, h_{jk} и h_{ik}, для которых

$$h_{ij} + h_{jk} = h_{ik}.$$

Отсюда следует, что $\Delta(h)$ является линейной формой от вектора $h = (h_1, \ldots, h_n)$, т. е. существует такой вектор Δ с координатами $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$, при котором линейная форма $\Delta(h)$ равна скалярному произведению векторов Δ и h:

$$\Delta(h) = \Delta h = \Delta_1 h_1 + \Delta_2 h_2 + \ldots + \Delta_n h_n. \qquad \text{(VI,1,3)}$$

Таким образом, в случае собственных схем моменты первого порядка зависят от линейного тренда [1] пространственной переменной $f(x)$, характеризуемого постоянным градиентом Δ. Линейная составляющая может быть легко исключена, если мы заменим $f(x)$ на $f(x) - x\Delta = f(x) - x_1\Delta_1 - \ldots - x_n\Delta_n$. В этом случае приращения ε_{ij} заменяются приращениями $\varepsilon_{ij} - \Delta h_{ij}$, математические ожидания которых равны нулю. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что моменты первого порядка тождественно равны нулю:

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0. \qquad \text{(VI,1,4)}$$

Моменты второго порядка и закон собственного рассеивания

Как следует из определения собственной схемы, момент второго порядка $E(\varepsilon_{ij}^2)$, который, согласно предположению (VI,1,4), тождественно равен дисперсии $D(\varepsilon_{ij})$ приращения ε_{ij}, является функцией векторного аргумента

$$h_{ij} = x_j - x_i.$$

Дадим определение функции $\gamma(h)$, которую будем называть *функцией собственного рассеивания* (или, короче, *собственной функцией*):

$$\gamma(h_{ij}) = \frac{1}{2} D(\varepsilon_{ij}). \qquad \text{(VI,1,5)}$$

Функция $\gamma(h)$ равна половине дисперсии приращения $f(x+h) - f(x)$, т. е.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} D[f(x+h) - f(x)]. \qquad \text{(VI,1,6)}$$

Эту функцию будем также называть *полувариограммой*, а функцию $D[f(x+h) - f(x)]$ аргумента h, рассчитываемую по экспериментальным значениям для дискретных значений h,— *вариограммой*. Собственная функция $\gamma(h)$ играет в теории собственных схем ту же роль, что ковариационная функция в теории стационарных случайных функций.

Задания собственной функции $\gamma(h)$ достаточно для того, чтобы определить все моменты второго порядка. Дисперсии определяются непосредственно из соотношения (VI,1,5). Найдем теперь ковариацию двух приращений ε_{ij} и ε_{kl}. Введем для краткости следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} D(\varepsilon_{ij}), \\ E(ij, kl) &= E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(VI,1,7)}$$

Рассмотрим сначала случай двух приращений ε_{ij} и ε_{jk}, имеющих одну общую точку x_j. Для трех индексов i, j и k справедливо соотношение замкнутости

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}.$$

[1] Наличие линейного тренда проявляется при обработке экспериментальных данных в аномально быстром возрастании вариограммы $\gamma(h)$ при больших значениях h.

Возьмем дисперсию обеих частей соотношения. Принимая во внимание обозначения (VI,1,7), получим

$$E(ji,\ jk) = -E(ij,\ jk) = \gamma_{ij} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik}. \qquad \text{(VI,1,8)}$$

Пусть теперь даны произвольные приращения ε_{ij} и ε_{kl}. Соотношение замкнутости для четырех индексов i, j, k и l имеет вид

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il}.$$

Возьмем дисперсию обеих частей соотношения. Получим

$$\gamma_{ij} + \gamma_{jk} + \gamma_{kl} + E(ij,\ jk) + E(jk,\ kl) + E(ij,\ kl) = \gamma_{il}.$$

Учитывая соотношение (VI,1,8), напишем

$$E(ij,\ kl) = \gamma_{il} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik} - \gamma_{jl}. \qquad \text{(VI,1,9)}$$

Это важное равенство показывает, что все моменты второго порядка могут быть найдены, если только задана собственная функция $\gamma(h)$.

§ 2. Смысл и свойства собственной функции $\gamma(h)$

В этом параграфе мы рассмотрим соотношения, связывающие собственную функцию $\gamma(h)$ с ковариационной функцией $K(h)$ случайной функции, изучим свойства $\gamma(h)$ и уточним ее физический смысл.

Соотношения между $\gamma(h)$ и $K(h)$

Положим, что $f(x)$ — случайная стационарная функция с конечной дисперсией $K(0)$ и ковариационной функцией $K(h)$. По определению собственной функции (VI,1,6) имеем

$$\gamma(h) = K(0) - K(h). \qquad \text{(VI,2,1)}$$

Для обычных случайных функций, обладающих конечной дисперсией, ковариационная функция $K(h)$ стремится к нулю, когда $|h|$ стремится к бесконечности. Корреляционные зависимости исчезают на больших расстояниях. Поэтому собственная функция стремится к дисперсии $K(0)$ и, следовательно, остается ограниченной

$$\gamma(\infty) = K(0). \qquad \text{(VI,2,2)}$$

Обратно, если собственная функция $\gamma(h)$ остается ограниченной и стремится к пределу $\gamma(\infty)$ при стремлении $|h|$ к бесконечности, то ковариационную функцию $K(h)$ можно выразить через собственную функцию

$$K(h) = \gamma(\infty) - \gamma(h), \qquad \text{(VI,2,3)}$$

полагая дисперсию $\gamma(\infty) = K(0)$ известной.

Ясно, что в этом случае собственная функция $\gamma(h)$ несет ту же информацию, что и ковариационная функция $K(h)$. Однако бывают случаи, когда собственная функция $\gamma(h)$ неограниченно возрастает при увеличении $|h|$. Так, например, на практике довольно часто получаются вариограммы вида r^λ, где $\lambda > 0$, или $\ln r$. В подобных ситуациях случайная функция $f(x)$ имеет бесконечную дисперсию, так что ковариационная функция $K(h)$ не может быть определена. Но приращения ε_{ij} сохраняют конечную дисперсию, и благодаря собственной функции $\gamma(h)$ случайная функция $f(x)$ может быть изучена как собственная схема, т. е. с точностью до произвольной постоянной.

Когда $\gamma(\infty)$ существует (имеет конечное значение), т. е. когда ковариационная функция $K(h)$ определима, мы говорим, что собственная схема

относится к типу транзитивных собственных схем [1]. Расстояние, за пределами которого ковариационная функция $K(h)$ обращается в нуль или становится ничтожно малой, а функция $\gamma(h)$ равна или почти равна своему асимптотическому значению $\gamma(\infty)$, совпадающему с априорной дисперсией $K(0)$, мы называем *носителем переходной части кovариограммы* b. При значениях $|h|$, превышающих величину носителя, случайные переменные $f(x)$ и $f(x+h)$ становятся некоррелированными. Очень часто, кстати, это отсутствие корреляции допустимо рассматривать как строгое, т. е. можно полагать, что $K(h) \equiv 0$ и $\gamma(h) \equiv K(0)$ при $|h| \geqslant b$. В действительности носитель b — величина не скалярная, она зависит от направления α вектора h, и, вообще говоря, характер изменения $b(\alpha)$ при изменении направления α выявляет важные структурные особенности пространственной переменной. Например, при изучении распределения содержаний отдельных минералов в осадочных формациях экспериментальные вариограммы часто могут быть отнесены к транзитивному типу. Обычно это означает, что площадь развития отложений состоит из отдельных обособленных микробассейнов осадконакопления. Изучение зависимости размера носителя $b(\alpha)$ от направления α позволяет определить форму и средние размеры этих микробассейнов, направление их простирания и т. д.

Часто дисперсия $K(0)$, не будучи бесконечной, все же очень велика и почти теряет практический смысл. Так бывает, например, когда размер носителя велик по сравнению с масштабом участков исследования. Экспериментальное оценивание дисперсии $K(0)$ возможно лишь при условии, что имеющиеся данные опробования освещают участок геометрического поля, размеры которого существенно больше величины носителя переходной части кovариограммы. Поэтому если размеры исследуемого участка имеют величину того же порядка, что и размер носителя, или еще меньшую, то нельзя получить численного значения дисперсии $K(0)$. Впрочем, кovариограмма здесь и не нужна, так как изменчивость пространственной переменной значительно лучше представляется с помощью собственной функции $\gamma(h)$.

Свойства собственной функции $\gamma(h)$

Из определения (VI,1,6) следует, что $\gamma(h)$ — неотрицательная четная функция:

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \geqslant 0. \qquad \text{(VI,2,4)}$$

Кроме того, при $h = 0$ всегда

$$\gamma(0) = 0. \qquad \text{(VI,2,5)}$$

Из последнего условия не обязательно следует, что $\gamma(h)$ стремится к нулю при стремлении к нулю $|h|$. Соотношение

$$\lim_{|h| \to 0} \gamma(h) = C > 0$$

указывает на наличие эффекта самородков в нуле (C — константа самородков). Гораздо чаще эффект самородков проявляется не разрывом собственной функции в нуле, а наличием очень узкой зоны перехода вблизи нуля, в пределах которой собственная функция, хотя и не имеет разрывов, но изменяется чрезвычайно быстро. Однако при экспериментальных исследованиях и для практических приложений проявление эффекта самородков можно рассматривать как наличие действительного разрыва собственной функции

[1] Не следует принимать (несмотря на имеющиеся аналогии) собственные схемы транзитивного типа за транзитивные представления, о которых шла речь в первой части книги.

в нуле. Поэтому собственная функция всегда предполагается непрерывной во всех точках, кроме, возможно, точки $h = 0$.

Соотношение (VI,2,3) показывает, что когда асимптотическое значение $\gamma(\infty)$ существует, выражение $\gamma(\infty) - \gamma(h)$ должно обладать всеми свойствами ковариационной функции $K(h)$, т. е. быть положительно определенной функцией. Но если $\gamma(h)$ не имеет предела при стремлении $|h|$ к бесконечности, условия, налагаемые на собственную функцию $\gamma(h)$, менее строги. Действительно, следует требовать только, чтобы всякая линейная комбинация приращений вида

$$H = \sum_k \lambda_k [f(y_k) - f(x_k)] \qquad \text{(VI,2,6)}$$

имела положительную дисперсию при произвольных y_k, x_k и λ_k. Исходя из соотношения (VI,1,9), дисперсию линейной комбинации H можно представить выражением

$$D(H) = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l [\gamma(y_l - x_k) + \gamma(x_l - y_k) - \gamma(x_l - x_k) - \gamma(y_l - y_k)]. \qquad \text{(VI,2,7)}$$

Если функция $\gamma(h)$ такова, что дисперсия $D(H)$ неотрицательна, то функцию $\gamma(h)$ назовем *условно положительно определенной*. Необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $\gamma(h)$ была условно положительно определенной, является положительность меры лапласиана от $-\gamma(h)$. Доказательство такого условия можно найти в теории обобщенных функций. Отметим, что функции вида $\gamma(h) = r^\lambda$ при $\lambda < 2$ и $\gamma(h) = \ln r$ удовлетворяют условию и могут быть использованы для аппроксимации эмпирических вариограмм. На практике мы часто используем логарифмическую собственную функцию (схема де Вейса). Заметим также, что ограничение $\lambda < 2$ для собственной функции r^λ требует, чтобы любая вариограмма $\gamma(h)$ возрастала на бесконечности медленнее, чем h^2. Если вариограмма возрастает быстрее, это с очевидностью свидетельствует о существовании линейного тренда, который следует вычитать из случайной функции.

Практический смысл собственной функции $\gamma(h)$

Поведение собственной функции вблизи нуля непосредственно связано со степенью регулярности и непрерывности пространственной переменной $f(x)$. Можно показать, что собственная функция, непрерывная при $h = 0$, характеризует случайную функцию $f(x)$, непрерывную в среднем квадратичном. Аналогично собственная функция $\gamma(h)$, дважды дифференцируемая в нуле, т. е. параболическая в начале координат, характеризует случайную функцию $f(x)$, единожды дифференцируемую в среднем квадратичном.

Рассмотрим некоторые свойства собственной функции более подробно.

1. Собственная функция $\gamma(h)$ позволяет уточнить содержание часто встречающегося в геологической практике, но недостаточно четко определенного понятия «зона влияния пробы». Поведение собственной функции при увеличении $|h|$ дает количественную характеристику уменьшения влияния данной пробы на различные участки месторождения по мере увеличения расстояния между пробой и участком.

2. При решении прикладных вопросов всегда стараются получить возможность оперировать с собственной функцией изотропной собственной схемы, т. е. с собственной функцией, имеющей вид

$$\gamma(h) = \gamma(r),$$

где $r = |h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$.

Но следует иметь в виду, что анизотропия, выявляемая при изучении экспериментальных полувариограмм, сама по себе представляет большой интерес, так как дает представление об основных структурных особенностях изучаемого объекта. На практике используют несколько простых моделей анизотропии.

Простейшей является геометрическая анизотропия, при которой $\gamma(h)$ оказывается функцией $\gamma(Q)$ квадратичной формы

$$Q = \sum_{ij} a_i a_j h_i h_j$$

относительно координат вектора h. При этом достаточно провести линейное преобразование координат, чтобы геометрически анизотропную схему свести к изотропной, для которой $Q = r^2$. Как правило, основные направления анизотропии считаются известными a priori и совпадающими с преимущественными направлениями развития самого изучаемого объекта, так что линейное преобразование сводится к замене $h_1, h_2, \ldots, h_n$ на $\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \ldots, \lambda_n h_n$ с соответственно подобранными постоянными λ — модулями аффинного преобразования.

Возможна также зональная анизотропия, когда собственная функция $\gamma(h)$ зависит не от всех n компонент вектора h, а только от одного или двух из них. Например, в случае трехмерного пространства можно встретить собственную функцию $\gamma(h_3)$, зависящую только от вертикальной составляющей h_3 вектора h. При такой собственной функции приращение $f(x+h) - f(x)$ имеет нулевую дисперсию для всех горизонтальных векторов $h = (h_1, h_2, 0)$. Другими словами, пространственная переменная $f(x)$ остается постоянной в горизонтальной плоскости.

Аналогично в случае потока, когда пространственная переменная $f(x)$ остается постоянной вдоль одной (например, первой) оси координат, собственная функция зависит от двух других координат: $\gamma(h) = \gamma(h_2, h_3)$. Практически, естественно, пространственная переменная $f(x)$ никогда не остается строго постоянной в плоскости или вдоль профилей, параллельных некоторому направлению, а лишь проявляет значительно меньшую изменчивость по сравнению с изменчивостью в других направлениях. Тогда собственную функцию можно представить суммой двух компонент, одна из которых будет характеризовать изотропную составляющую изменчивости, а другая — зональную (или вообще анизотропную):

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_3),$$

или

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_2, h_3).$$

В значительном большинстве задач и особенно при расчете дисперсий оценки эти две составляющие рассматриваются раздельно, а их эффект суммируется.

3. Явления перехода, подробно рассматриваемые в гл. XIV, выражаются на вариограмме в виде уступов и порогов, анализ которых часто позволяет выявить наложения нескольких структур различного масштаба.

4. Степень непрерывности и регулярности пространственной переменной хорошо отражается поведением вариограмм вблизи нуля. Можно выделить четыре типа вариограмм; перечислим эти типы в порядке убывания регулярности относимых к ним вариограмм.

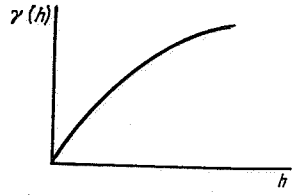
Вариограммы с параболическим характером изменения вблизи нуля (фиг. 8), т. е. дважды дифференцируемые в нуле,— тип вариограмм, соответствующий весьма регулярным пространственным переменным, дифференцируемым в среднем квадратичном.

Тип вариограмм, непрерывных в нуле, но не дифференцируемых там дважды (фиг. 9), соответствует непрерывной, но менее регулярной (не дифференцируемой в среднем квадратичном) пространственной переменной.

Вариограммы с эффектом самородков в нуле характеризуются разрывом при $h = 0$ (фиг. 10), так что функция $\gamma(h)$ не проходит через начало координат. Вариограммы такого типа соответствуют весьма нерегулярным пространственным переменным, не обладающим непрерывностью в среднем квадратичном.

Наконец, вариограммы, параллельные оси h (фиг. 11) и выражающие эффект самородков в чистом виде, выделяются в четвертый тип, относя-

Фиг. 8.



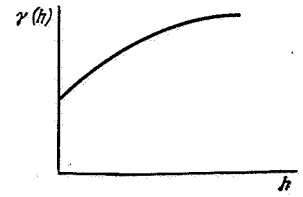
Фиг. 9.

щийся к полностью случайной пространственной переменной с независимыми приращениями.

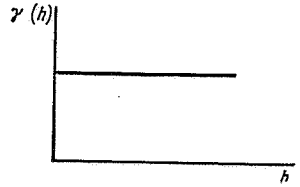
5. Когда собственная функция $\gamma(r)$ является функцией радиуса-вектора $r = |h|$, можно характеризовать ее поведение вблизи нуля ограниченным разложением вида

$$\gamma(r) = \sum a_{2n} r^{2n} + \sum C_\lambda r^\lambda.$$

В таком разложении различают регулярную, содержащую только члены с r^{2n}, и нерегулярную части. Если нерегулярная часть в разложении отсут-



Фиг. 10.



Фиг. 11.

ствует, собственная функция $\gamma(h)$ бесконечно дифференцируема и, следовательно, представляет собой в высшей степени регулярную пространственную переменную $f(x)$. Таким образом, именно нерегулярная часть разложения, содержащая члены с r^λ (иногда также с $r^{2n} \ln r$), где λ — отличное от целого четного число, определяет степень регулярности пространственной переменной. При этом наиболее существенную роль играет член с наименьшим значением λ. Поэтому степень регулярности пространственной переменной удобно характеризовать наименьшим показателем степени λ в нерегулярной части разложения вариограммы.

§ 3. Переменные на конечных геометрических базах и дисперсия распространения

Чтобы определить в терминах собственных схем нетрадиционные пространственные переменные (переменные на конечных геометрических базах), рассмотрим вначале две группы точек x_i и x_j (численностью N_i и N_j соответственно) и таких коэффициентов взвешивания λ_i и λ_j, при которых

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{j \in J} \lambda_j = 1, \qquad \text{(VI,3,1)}$$

где суммирование по i производится по всей совокупности I точек x_i первой группы, а по j — по всей совокупности J точек x_j второй группы. Определим теперь две новые случайные переменные Y и Z, как средние взвешенные с коэффициентами λ_i и λ_j значения $f(x_i)$ и $f(x_j)$ соответственно:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i), \\ Z &= \sum_{j \in J} \lambda_j f(x_j). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI,3,2)}$$

Расширив понятие приращения, будем изучать не сами величины Y и Z, а их разность $Y - Z$, которая является линейной комбинацией приращений $\varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i)$ точечной переменной $f(x)$. Действительно, приняв во внимание условие (VI,3,1), сразу получим

$$f(x_i) = f(x_j) + \varepsilon_{ji} = \sum_{j \in J} \lambda_j [f(x_j) + \varepsilon_{ji}] = Z + \sum_{j \in J} \lambda_j \varepsilon_{ji},$$

откуда

$$Y - Z = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ji}. \qquad \text{(VI,3,3)}$$

Таким образом, случайная переменная $Y - Z$ полностью определяется линейной комбинацией конечного числа приращений ε_{ji}. Из условия (VI,1,4) следует, что

$$E(Y - Z) = 0. \qquad \text{(VI,3,4)}$$

Чтобы найти выражение для дисперсии разности $Y - Z$, нужно возвести в квадрат обе части равенства (VI,3,3) и перейти к математическим ожиданиям. Воспользовавшись обозначениями (VI,1,7), запишем

$$D(Y - Z) = \sum_{\substack{i,\, k \in I \\ j,\, l \in J}} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l E(ji, kl).$$

Раскрыв в соответствии с (VI,1,9) выражение математического ожидания под знаком суммы, после простых преобразований получим

$$D(Y - Z) = 2 \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} - \sum_{j,\, l \in J} \lambda_j \lambda_l \gamma_{jl} - \sum_{i,\, k \in I} \lambda_i \lambda_k \gamma_{ik}. \qquad \text{(VI,3,5)}$$

Таким образом, дисперсия разности $Y - Z$ определяется с помощью двукратного суммирования значений собственной функции $\gamma(h)$; она оказывается симметричной относительно Y и Z, т. е. относительно двух групп индексов I и J. Эта дисперсия называется *дисперсией распространения* Y *на* Z (или Z на Y), поскольку она характеризует ошибку $Y - Z$, возникающую при распространении среднего значения пространственной переменной в точках x_j на совокупность значений переменной в точках x_i, т. е. при оценивании Z с помощью Y. В частном случае, когда

$$\lambda_i = \frac{1}{N_i}, \quad \lambda_j = \frac{1}{N_j},$$

Y и Z представляют собой простые средние арифметические значений $f(x)$ по каждой группе точек x_i и x_j численностью N_i и N_j соответственно.

Переход от суммирования к интегрированию осуществляется просто. Пусть, например, даны объем V и непрерывная весовая функция $p(x)$, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_V p(x)\, dx = 1. \qquad \text{(VI,3,6)}$$

У нас нет уверенности, что стохастический интеграл

$$Z=\int_V p(x)\,f(x)\,dx$$

определен, т. к. нельзя вычислить его дисперсию. Напротив, приращение

$$Y-Z=\sum_{i\in I}\lambda_i f(x_i)-\int_V f(x)\,p(x)\,dx \qquad \text{(VI,3,7)}$$

полностью определено (в том, что касается стохастического интеграла), так как его дисперсия получается предельным переходом в выражении (VI,3,5), в результате которого имеем

$$D(Y-Z)=2\sum_{i\in I}\int_V \lambda_i p(x)\,\gamma(x-x_i)\,dx-\int_V\int_V p(x)\,p(x')\,\gamma(x-x')\,dx\,dx'-$$

$$-\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\lambda_i\lambda_j\gamma(x_i-x_j). \qquad \text{(VI,3,8)}$$

Возьмем, например, $p(x)=\frac{1}{V}k(x)$, где $k(x)$ — геометрическая переменная поля V. Величина Z — стохастическое математическое ожидание случайной функции $f(x)$ в V, которое для краткости будем часто называть *средним содержанием* в объеме V. Кроме того, примем все веса λ_i равными $1/N$, где N — число точек x_i. Тогда Y будет средним арифметическим значением $f(x_i)$, которое для краткости назовем *средним содержанием в N точках*. При этих условиях

$$Y-Z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)-\frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx, \qquad \text{(VI,3,9)}$$

и дисперсия распространения среднего содержания в N точках на весь объем V составит

$$D(Y-Z)=\frac{2}{NV}\sum_{i=1}^{N}\int_V\gamma(x-x_i)\,dx-\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'-$$

$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\gamma(x_i-x_j). \qquad \text{(VI,3,10)}$$

Переменная Y также может быть стохастическим средним значением функции $f(x)$ в некотором объеме. Возьмем, например, средние содержания в двух объемах V и V' —

$$Y=\frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx,$$

$$Z=\frac{1}{V'}\int_{V'} f(x)\,dx.$$

Дисперсия распространения среднего содержания в V на объем V' равна

$$D(Y-Z)=\frac{2}{VV'}\int_V\int_{V'}\gamma(x-x')\,dx\,dx'-$$

$$-\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x_1-x_2)\,dx_1\,dx_2-\frac{1}{V'^2}\int_{V'}\int_{V'}\gamma(x'_1-x'_2)\,dx'_1\,dx'_2. \qquad \text{(VI,3,11)}$$

Аналогично находим ковариацию двух оценок среднего содержания. Нет необходимости приводить здесь соответствующие формулы, которые легко получить путем замены дискретных сумм интегралами. Ограничимся тем, что приведем результаты для случая, когда имеются четыре переменные, являющиеся стохастическими средними (два оцениваемых средних значения Z и U и две их оценки Y и T).

Пусть p_1, p_2, p_3 и p_4 — такие весовые функции, для которых

$$\int p_1(x)\,dx=\int p_2(x)\,dx=\int p_3(x)\,dx=\int p_4(x)\,dx=1;$$

тогда две ошибки распространения

$$Y-Z=\int p_1(x)\,f(x)\,dx-\int p_2(x)\,f(x)\,dx$$

и

$$T-U=\int p_3(x)\,f(x)\,dx-\int p_4(x)\,f(x)\,dx$$

будут иметь ковариацию

$$E[(Y-Z)(T-U)]=-\int\int[p_1(x)-p_2(x)]\,[p_3(y)-p_4(y)]\,\gamma(x-y)\,dx\,dy. \qquad \text{(VI,3,12)}$$

Эта ковариация в дальнейшем будет для краткости называться *ковариацией распространения*.

Регуляризация собственной схемы

Дисперсия распространения представляет собой некоторое обобщение вариограммы $2\gamma(h)$ на случай неточечных переменных. Сама вариограмма по определению равна $D[f(x+h)-f(x)]$ и фактически является не чем иным, как дисперсией взаимного распространения двух точечных переменных $f(x+h)$ и $f(x)$. Функцию, получаемую регуляризацией собственной схемы $f(x)$ посредством взвешивания на функцию опробования (весовую функцию) $p(x)$, удобно представить с помощью свертки. Как всегда, предположив, что

$$\int p(x)\,dx=1,$$

вводим транзитивную кovариограмму $P(h)$ весовой функции $p(x)$:

$$P(h)=p*\check{p}=\int p(x)\,p(x+h)\,dx.$$

Содержание в пробе, приуроченной к точке x, является регуляризованной случайной функцией $f_p(x)$, которая представляется стохастическим интегралом

$$f_p(x)=f*\check{p}=\int f(x+y)\,p(y)\,dy. \qquad \text{(VI,3,13)}$$

Как и сама случайная функция $f(x)$, так и функция, полученная ее регуляризацией путем взвешивания, может быть охарактеризована только через свои приращения $f_p(x+h)-f_p(x)$, т. е. в рамках собственной схемы. Дисперсия этих приращений, очевидно, равна дисперсии взаимного распространения двух переменных

$$Y=\int f(y)\,p(y-x)\,dy,$$

$$Z=\int f(y)\,p(y-x-h)\,dy$$

и определяется выражением

$$D(Y-Z)=2\int\int\gamma(x-x')\,p(x)\,p(x'-h)\,dx\,dx'-$$
$$-2\int\int\gamma(x-x')\,p(x)\,p(x')\,dx\,dx'.$$

Достаточно положить $x=u+x'$ и провести первое интегрирование по x', чтобы под знаком интеграла получить в явном виде выражение транзитивной вариограммы $P=p*\check{p}$:

$$D(Y-Z)=2\int\gamma(u)\,P(u+h)\,du-2\int\gamma(u)\,P(u)\,du.$$

Но собственная функция $\gamma_p(h)$ регуляризованной посредством взвешивания функции $f_p=f*\check{p}$, определяющей собственную схему, равна половине дисперсии $D(Y-Z)$. Следовательно, можно записать, что

$$\gamma_p(h)=\gamma*P-\int\gamma(u)\,P(u)\,du,$$

где (VI,3,14)

$$\gamma*P=\int\gamma(u)\,P(u+h)\,du.$$

Итак, собственная функция $\gamma_p(h)$ регуляризованной случайной функции $f_p=f*\check{p}$, полученной взвешиванием $f(x)$ на весовую функцию (функцию опробования) $p(x)$, с точностью до постоянной определяется регуляризацией собственной функции $\gamma(h)$ посредством взвешивания на транзитивную ковариограмму $P=p*\check{p}$ весовой функции. Постоянная равна среднему взвешенному на $p(x)\,p(x')$ значению $\gamma(x-x')$; ее вычитанием из $\gamma*P$ обеспечивается выполнение равенства $\gamma_p(0)=0$.

В частном случае, когда

$$p(x)=\frac{1}{v}k(x),$$

где $k(x)$ — геометрическая переменная пробы v, регуляризованная случайная функция $f_p=f*\check{p}$ является средним содержанием в пробе v, приуроченной к точке x. С точностью до постоянной, равной среднему значению $\gamma(h)$ в объеме v, собственная функция $\gamma_p(h)$ в этом случае представит среднее из всех возможных значений $\gamma(x-x')$, соответствующих вектору $(x-x')$, концы которого с одинаковой вероятностью могут занимать любое положение в двух объемах v, смещенных один относительно другого на h.

Естественно, случайная функция $f_p=f*\check{p}$ должна быть существенно более регулярной, чем исходная функция f, если только весовая функция достаточно регулярна. Например, если весовая функция p дифференцируема один раз, ее ковариограмма P дифференцируема уже дважды, и, следовательно, в соответствии с формулой (VI,3,14), собственная функция $\gamma_p(h)$ также будет иметь вторую производную. Таким образом, регуляризованная функция $f_p=f*\check{p}$ дифференцируема в среднем квадратичном, даже если исходная случайная функция f вообще не имеет производных. Механизм регуляризации будет описан более подробно в гл. VII.

§ 4. Дисперсия распространения пробы v на поле V

Если v и V — два объема, первый из которых содержится во втором, а Y и Z — средние стохастические значения функции $f(x)$ в этих объемах, то дисперсия распространения, характеризующая погрешность оценивания

среднего значения Z в объеме V средним значением Y в объеме v, полностью определяется формулой (VI,3,11). Эту дисперсию для краткости будем называть *дисперсией распространения v на V*. Она зависит, в частности, от положения, занимаемого объемом v внутри объема V, и, следовательно, не представляет собою дисперсии неточечной переменной с геометрической базой v в геометрическом поле V (или, короче, *дисперсии v в V*). Ясно, что дисперсия признака, определенного по пробам с геометрической базой v, в пределах поля V должна быть в некотором роде средним значением всех дисперсий распространения v на V при всех геометрически возможных способах размещения v в V. Однако оказывается, что сформулированное таким образом понятие дисперсии v в V, кажущееся на первый взгляд совершенно естественным и очевидным, однозначно определяется лишь в случае точечной переменной.

Исследуем сначала точечную переменную. Пусть m — стохастическое среднее значение $f(x)$ во всем геометрическом поле V, т. е.

$$m=\frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx.$$

Дисперсию $f(x)$ в объеме V можно определить как математическое ожидание стохастического интеграла

$$S^2=\frac{1}{V}\int_V[f(x)-m]^2\,dx. \qquad (VI,4,1)$$

Используя приращения $\varepsilon_{ij}=f(x_j)-f(x_i)$, можем записать, что

$$f(x_i)-m=\frac{1}{V}\int_V\varepsilon_{ji}\,dx_j,$$

и выразить S^2 через трехкратный интеграл:

$$S^2=\frac{1}{V^3}\int_V\int_V\int_V\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ki}\,dx_i\,dx_j\,dx_k.$$

Дисперсия $f(x)$ в объеме V, которую обозначим символом $\sigma^2(0\,|\,V)$, есть математическое ожидание этого интеграла, и согласно формуле (VI,1,8), она равна

$$\sigma^2(0\,|\,V)=E(S^2)=\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad (VI,4,2)$$

Итак, дисперсия точечной переменной $f(x)$ в объеме V равна среднему значению в этом объеме собственной функции $\gamma(h)$. Она может быть вычислена с помощью алгорифма Коши (I,2,9).

Определим теперь ту же дисперсию $\sigma^2(0\,|\,V)$ как среднее значение дисперсии распространения $D[f(x)-m]$, когда точка x случайно (с одинаковой для всего объема вероятностью) выбирается в V. В соответствии с формулой (VI,3,10) имеем

$$D[f(x)-m]=\frac{2}{V}\int_V\gamma(x-y)\,dy-\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(y-y')\,dy\,dy';$$

после интегрирования по x получаем

$$\frac{1}{V}\int_V D[f(x)-m]\,dx=\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'=\sigma^2(0\,|\,V).$$

Таким образом, оба способа определения дисперсии точечной переменной $\sigma^2(0\,|\,V)$ эквивалентны.

Перейдем теперь к переменной Y, определяемой на неточечной геометрической базе v, т. е. представляющей стохастическое среднее значение $f(x)$ в объеме v:

$$Y=\frac{1}{v}\int_v f(x)\,dx.$$

Определение (VI,4,1) здесь не имеет смысла, так как интегрирование выражения $(Y-m)^2$ по всем значениям x в пределах объема V захватит частично значения переменной $f(x)$ в точках, внешних по отношению к V. Действительно, при суммировании по x в окрестности границы V часть объема v будет выходить за эту границу. Иначе говоря, поскольку геометрическая база пробы v имеет конечные размеры, на контуре геометрического поля V возникает граничный эффект, который, в частности, приводит к тому, что стохастическое среднее значение переменной $Y(x)$ в объеме v не обязательно будет совпадать с m. Когда объем v соизмерим с объемом V, понятие дисперсии v в V практически полностью лишается смысла. Имеется, однако, два случая, когда строгое или приближенное определение дисперсии v в V возможно.

Первый из них — случай, при котором объем V слагается из равных по величине объемов v_i (например, из параллелепипедов). Если обозначить символом Z_i стохастическое среднее случайной функции $f(x)$ в объеме v_i, а символом m — такое же среднее в объеме V, образованном сложением N объемов v_i, можно записать следующее строгое равенство:

$$m=\frac{1}{N}\sum_i Z_i.$$

Конечная совокупность, состоящая из N средних значений Z_i, характеризуется дисперсией

$$S^2(v\mid V)=\frac{1}{N}\sum_i (Z_i-m)^2,$$

которая в действительности является стохастической. Математическое ожидание этого выражения, т. е.

$$\sigma^2(v\mid V)=E[S^2(v\mid V)]=\frac{1}{N}\sum_i D(Z_i-m), \qquad \text{(VI,4,3)}$$

называется дисперсией v_i в V. Но дисперсия распространения каждого отдельного содержания Z_i на объем V рассчитывается по общей формуле (VI,3,11). Так как объемы v_i в сумме образуют объем V, для любой функции $\Phi(x)$ имеем:

$$\frac{1}{Nv}\sum_i\int_{v_i}\Phi(x)\,dx=\frac{1}{V}\int_V\Phi(x)\,dx.$$

Учитывая этот алгорифм и формулу (VI,3,11), получим

$$\frac{1}{N}\sum_i D(Z_i-m)=\frac{2}{V}\int_V dx\,\frac{1}{Nv}\sum_i\int_{v_i}\gamma(x-x_i)\,dx_i-$$

$$-\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'-\frac{1}{Nv^2}\int_v\int_v\gamma(x-x')\,dx\,dx'=$$

$$=\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'-\frac{1}{v^2}\int_v\int_v\gamma(x-x')\,dx\,dx'.$$

Итак, в том частном случае, когда геометрическое поле V сложено из элементов одинакового объема v, дисперсия v в V определяется следующим выражением:

$$\sigma^2(v\mid V)=\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'-\frac{1}{v^2}\int_v\int_v\gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad \text{(VI,4,4)}$$

Второй частный случай — объем v очень мал (по всем размерам) по сравнению с геометрическим полем V, и потому влияние граничного эффекта пренебрежимо мало. Это обстоятельство оправдывает, кстати, интуитивное, но чисто экспериментального происхождения понятие дисперсии пробы v малого размера в большом геометрическом поле V. Стохастическое среднее значений Z_i по всем v в пределах V практически не отличается от m. В выражении для дисперсии распространения стохастического среднего Z_i в объеме v_i, приуроченном к точке x_i, на все геометрическое поле V можно в первом приближении положить

$$\frac{2}{vV}\int_V\int_{v_i}\gamma(x-x')\,dx\,dx'\approx\frac{2}{V}\int_V\gamma(x-x_i)\,dx.$$

Следовательно, дисперсия v в V приближенно определяется как среднее значение дисперсии распространения v_i на V, когда x_i занимает все возможные положения в V. В этом случае опять приходим к формуле (VI,4,4).

Таким образом, в обоих случаях, когда дисперсия $\sigma^2(v\mid V)$ определима, она дается формулой (VI,4,4). Эта формула приводит к соотношению аддитивности, называемому также *формулой Крайга*,

$$\sigma^2(v\mid V')=\sigma^2(v\mid V)+\sigma^2(V\mid V'), \qquad \text{(VI,4,5)}$$

которое показывает, что дисперсия v в V' равна сумме дисперсий v в V и V в V'. Соотношение (VI,4,5) имеет смысл только в том случае, когда объемы v и V расположены внутри V и V' соответственно и когда выполняется одно из двух рассмотренных выше условий определимости дисперсии v в V. Но это соотношение может быть использовано для определения дисперсии также тогда, когда эти условия не соблюдаются. Действительно, возьмем объем V' таким большим, чтобы обе дисперсии $\sigma^2(v\mid V')$ и $\sigma^2(V\mid V')$ были определимыми, и найдем дисперсию $\sigma^2(v\mid V)$ из соотношения

$$\sigma^2(v\mid V)=\sigma^2(v\mid V')-\sigma^2(V\mid V'). \qquad \text{(VI,4,6)}$$

Очевидно, что определение дисперсии $\sigma^2(v\mid V)$ из соотношения (VI,4,6) всегда приведет к формуле (VI,4,4), которая приобретает, таким образом, общий характер. В частности, размер поля V', играющего здесь лишь подсобную роль, не влияет на получаемый результат.

Естественно, нельзя ожидать, что дисперсия $\sigma^2(v\mid V)$ останется строго положительной, если объемы v и V окажутся геометрически несовместимыми. Кроме того, имеем

$$\sigma^2(V\mid v)=-\sigma^2(v\mid V).$$

Поэтому формальное использование приведенных формул в случае геометрической несовместимости объемов v и V может привести к результатам, не имеющим практического смысла.

Аналогично определим ковариацию в поле V двух различных проб, расположенных строго определенным образом одна относительно другой и занимающих своим ансамблем все возможные положения внутри объема V. Используя вспомогательное большое поле V' и соотношение аддитивности, получим общую формулу этой ковариации:

$$\sigma^2(vv'\mid V)=\frac{1}{V^2}\int_V\int_V\gamma(x-x')\,dx\,dx'-\frac{1}{vv'}\int_v\int_{v'}\gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad \text{(VI,4,7)}$$

Замечание. Вообще, можно характеризовать корреляцию двух объемов v и v' в поле V обычным коэффициентом корреляции

$$\rho(vv' \mid V) = \frac{\sigma(vv' \mid V)}{\sqrt{\sigma^2(v \mid V)\,\sigma^2(v' \mid V)}},$$

но этот коэффициент вовсе не присущ собственной схеме и сложным образом зависит от выбора поля V. В частности, если $\gamma(h)$ не стремится к конечному пределу $\gamma(\infty)$, а безгранично возрастает при стремлении $|h|$ к бесконечности, то обе дисперсии и ковариация для очень большого V эквивалентны бесконечным величинам и всегда в пределе

$$\rho(vv' \mid \infty) = 1.$$

Это замечание позволяет понять, почему коэффициенты корреляции практически не используются в теории собственных схем. Действительно, сама собственная функция $\gamma(h)$ наилучшим образом выражает корреляцию между значениями пространственной переменной $f(x)$ и $f(x+h)$, свободную от всякого влияния геометрического поля.

Пример однородной собственной функции. Предположим, что $\gamma(h)$ — однородная собственная функция порядка β, т. е. удовлетворяющая соотношению

$$\gamma(\lambda h) = |\lambda|^{\beta}\gamma(h),$$

где λ — произвольная скалярная величина, а показатель степени β меньше 2 в соответствии со сказанным в § 2. Вычислим дисперсию $\sigma^2(v \mid V)$ в частном случае, когда в n-мерном пространстве объем v подобен и гомотетичен [1] объему V с таким модулем гомотетии λ, при котором

$$\frac{v}{V} = \lambda^n.$$

Во втором интеграле общей формулы (VI,4,4) произведем замену переменных: $x = \lambda y$, $x' = \lambda y'$ ($dx = \lambda^n dy$, $dx' = \lambda^n dy'$). Тогда

$$\sigma^2(v \mid V) = (1-\lambda^{\beta})\,\frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx'.$$

Обозначив, как и ранее, символом $\sigma^2(0 \mid V)$ дисперсию в V точечной переменной, полученное выражение можем написать в виде

$$\sigma^2(v \mid V) = \left[1 - \left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{\beta}{n}}\right]\sigma^2(0 \mid V). \qquad \text{(VI,4,8)}$$

Эта формула применима, в частности, в изотропном случае при собственной функции r^{β}.

Пример собственной функции де Вейса. Собственная функция называется *собственной функцией де Вейса*, если она удовлетворяет равенству

$$\gamma(\lambda h) = \gamma(h) + 3\alpha \ln|\lambda|, \qquad \text{(VI,4,9)}$$

где α — постоянная, называемая *коэффициентом абсолютного рассеивания*. Часто используемая нами на практике изотропная собственная схема де Вейса характеризуется собственной функцией вида $3\alpha \ln r$. Для подобных и гомотетично расположенных объемов v и V можно с помощью уравнения (VI,4,9) и замены переменных (подобной той, что произведена выше) получить следующую весьма важную формулу, называемую

[1] Гомотетия — такое расположение подобных фигур, при котором все прямые, соединяющие соответствующие друг другу точки фигур, пересекаются в одной точке, называемой *центром гомотетии*. — *Прим. ред.*

формулой де Вейса:

$$\sigma^2(v \mid V) = \alpha \ln\frac{V}{v}. \qquad \text{(VI,4,10)}$$

Замечание. При практических расчетах дисперсий распространения или оценки часто удобно выражать их через дисперсии и ковариации содержаний в пробах и в оцениваемом объеме в пределах некоторого большого поля V'', которое, кстати, может быть выбрано произвольным, так как его объем не играет никакой роли в расчетах и автоматически исключается из получаемых результатов.

Рассмотрим, например, формулу (VI,3,11), дающую дисперсию распространения среднего по полю V на поле V' (совершенно аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи). Эта формула может быть представлена в виде

$$D(V-Z) = \sigma^2(V \mid V'') + \sigma^2(V' \mid V'') - 2\sigma(VV' \mid V''). \qquad \text{(VI,4,11)}$$

Достаточно подставить в эту формулу выражения (VI,4,4) и (VI,4,7) дисперсий и ковариации V и V' в произвольном поле V'', чтобы убедиться, что все члены, зависящие от V'', автоматически исключаются, и мы вновь приходим к формуле (VI,3,11). Представление дисперсии распространения в виде (VI,4,11) имеет то преимущество, что оно выявляет скрытый смысл различных членов выражения (VI,3,11). Кроме того, выражение (VI,4,11) является обобщением формулы (V,3,15), которая непосредственно применима только к стационарным в широком смысле случайным функциям. Априорные дисперсии и ковариации, которые не существуют в случае собственных схем, заменяются соответствующими дисперсиями и ковариациями, отнесенными к произвольному большому полю V''.

§ 5. Связь между собственными схемами и транзитивными представлениями

Простого соотношения между собственными схемами, которые мы определили как случайные функции со стационарными приращениями, и транзитивными представлениями, изучаемыми в первой части, не существует. Транзитивные представления весьма общи. Они позволяют описать любую пространственную переменную, заданную на конечном геометрическом поле V. С другой стороны, транзитивная ковариограмма $g(h)$ непосредственно связана с геометрией данного поля V, и нет никакого простого способа перейти от характеристик пространственной переменной, полученных в поле V, к ее характеристикам в другом поле V'. Впрочем, следует иметь в виду, что эта связь между ковариограммой и геометрическим полем часто выражает реально существующую зональность пространственной переменной, например тенденцию к систематическому уменьшению значений пространственной переменной по мере удаления от центра и приближения к границам геометрического поля. В подобном случае невозможно разделить, что связано с геометрией поля, а что свойственно пространственной изменчивости как таковой. Явления подобного типа, легко представляемые транзитивными методами, не имеют ничего общего с собственными схемами, так как приращения в этом случае ни в коей мере нельзя рассматривать как стационарные.

Напротив, в случае, когда поведение пространственной переменной не зависит существенно от положения участка ее рассмотрения относительно границ геометрического поля, т. е. когда поле V можно рассматривать как произвольно взятое внутри обширной области однородной пространственной изменчивости, зависимость ковариограммы $g(h)$ от геометрии поля становится искусственной и маскирует при этом более простые реально существующие черты изменчивости. В подобном случае имеются все основания

обратиться к теории собственных схем, т. е. интерпретировать реальную пространственную переменную как реализацию собственной схемы, произвольным образом включенную внутрь поля V. Собственная функция $\gamma(h)$ позволяет, таким образом, выразить характеристики «самой» пространственной переменной, свободные от всякого влияния геометрической формы или размеров поля. Связь между собственными схемами и транзитивными представлениями в подобных случаях должна выражаться формулой, дающей зависимость математического ожидания $E[g(h)]$ транзитивной кovариограммы от закона собственного рассеивания $\gamma(h)$.

Рассмотрим вначале стационарную случайную функцию $f(x)$ с математическим ожиданием m, дисперсией σ^2 и ковариограммой $R(h) = \sigma^2 - \gamma(h)$.

Если $k(x)$ — геометрическая переменная с транзитивной ковариограммой $K(h)$, то случайная функция $k(x) f(x)$ представляет собой пространственную переменную, ограниченную полем V, определяемым геометрической переменной $k(x)$. Ковариограмма этой пространственной переменной имеет вид

$$g(h) = \int k(x)\, k(x+h)\, f(x)\, f(x+h)\, dx$$

и представляет собой случайную функцию с математическим ожиданием

$$E[g(h)] = [m^2 + R(h)]\, K(h) = [m^2 + \sigma^2 - \gamma(h)]\, K(h). \qquad \text{(VI,5,1)}$$

Входящие сюда параметры m и σ^2 — это априорные моменты функции $f(x)$, которые не имеют аналогов в теории собственных схем. Но сумма $m^2 + \sigma^2$ может быть выражена через среднее значение $m(V) = \frac{1}{V} f(x)\, dx$ и дисперсию $\sigma^2(0 \mid V)$ функции $f(x)$ в поле V. В качестве упражнения предлагаем читателю самому показать, что для стационарной в широком смысле случайной функции справедливо равенство

$$E[m^2(V) + \sigma^2(0 \mid V)] = m^2 + \sigma^2.$$

Учитывая этот результат, перепишем формулу (VI,5,1) в следующем виде:

$$\gamma(h) = \sigma^2(0 \mid V) + E\left[m^2 - \frac{g(h)}{K(h)}\right]. \qquad \text{(VI,5,2)}$$

Соотношение между $\gamma(h)$ и $K(h)$ в этой форме может быть использовано в теории собственных схем. (В действительности существует еще одно дополнительное условие, о котором мы пока ничего не скажем.) Для перехода от транзитивного представления к собственной схеме практически чаще всего будет использоваться формула (VI,5,2).

§ 6. Экспериментальный пример зональной анизотропии

Экспериментальные данные представляют собой результаты измерения мощности горизонтальной пластовой залежи, по форме в плане напоминающей прямоугольник с площадью 300 × 200 $м^2$. Измерения производились по сети 10 × 10 и, следовательно, мы располагаем всего 600 значениями, из которых значения, близкие к границам залежи, равны нулю. На фиг. 12 изображены изолинии мощности, а в табл. 2 приведены численные значения, взятые из статьи Штамбергера [85]. Поведение изолиний указывает на существование предпочтительного направления, или потока, ориентированного приблизительно с востока на запад. Попытаемся представить пространственную изменчивость значений мощности в плане с помощью схемы де Вейса с зональной анизотропией. Обозначим символами $\alpha_и$ и $\alpha_з$ коэффициенты абсолютного рассеивания, соответствующие изотропной и зональной изменчивостям. Известно, что в случае схемы де Вейса экспериментальные вариограммы, рассчитанные для разных направлений и построенные на полулогарифмическом бланке, должны быть линейными (по крайней мере на относительно большом интервале). При этом, для всех направлений, кроме предпочтительного, вариограммы должны быть параллельными, а их наклон пропорционален сумме коэффициентов $\alpha_и$ и $\alpha_з$. В направлении потока наклон вариограммы должен быть меньшим и пропорциональным коэффициенту $\alpha_и$. По экспериментальным данным мы вычислили 10 первых значений вариограмм для меридиональных и широтных направлений (с шагом d от 10 до 100 $м$) и 7 первых значений вариограмм для северо-восточных и северо-западных направлений (с шагом d от 14,14 до ~100 $м$). По данным, показанным в табл. 3, на фиг. 13 построены все четыре вариограммы. Подтверждая теоретические предположения, все четыре вариограммы имеют линейный

Таблица 2

Распределение численных значений мощностей по площади

0	0,5	0,8	09	0	0	0	0	01	02	07	08	09	06	0	0	02	03	03	0
0,1	1,2	2,0	20	10	11	10	0,8	10	16	16	20	22	18	19	15	18	14	09	01
0	1,5	3,0	25	11	17	19	21	27	32	20	21	28	31	36	34	30	21	15	02
0,2	1,5	3,9	26	10	20	33	37	45	34	21	26	36	40	48	42	36	27	14	0
0,1	1,5	40	24	10	24	45	51	42	21	20	30	42	51	57	52	42	30	13	0
0,2	1,6	3,6	20	11	32	48	43	28	20	26	34	50	61	62	55	38	29	10	0
0,3	1,7	2,9	16	14	31	37	26	21	23	30	40	56	63	58	50	35	21	09	0
0,1	1,0	2,0	10	19	30	25	20	20	28	37	51	57	53	49	43	29	19	10	0
0,1	0,7	0,8	10	25	35	28	21	25	34	43	50	51	52	51	40	28	18	13	01
0	0,6	0,9	16	34	38	27	20	26	37	42	47	53	56	50	41	27	17	12	02
0	0,8	1,5	26	40	40	22	21	27	35	49	53	67	63	54	40	31	19	14	04
0	0,9	1,7	33	51	35	21	23	29	40	55	67	70	60	50	40	30	17	13	03
0	1,0	1,8	34	42	31	23	22	30	45	57	60	58	50	42	37	26	18	11	01
0	0,8	1,5	20	29	20	26	25	34	46	48	46	42	37	33	30	20	17	10	0
0	0,6	1,3	15	20	20	20	24	35	40	39	35	30	30	30	30	26	19	10	0
0	0,7	1,4	19	25	22	21	25	30	30	32	30	20	34	39	38	30	18	13	0
0,1	0,9	1,8	28	32	20	23	29	35	30	35	30	36	41	48	45	35	20	15	0
0,2	1,4	2,5	39	31	26	25	40	45	34	30	35	46	52	54	46	57	22	14	01
0,3	1,6	30	40	28	25	27	43	51	38	30	40	48	60	55	47	36	24	13	02
0,5	2,0	3,2	34	23	24	26	45	62	40	31	41	52	63	56	40	30	21	12	01
0,6	1,8	2,1	21	21	22	25	51	61	39	33	40	54	61	53	35	28	19	10	02
0,3	1,6	1,9	20	25	20	26	50	62	40	31	39	53	58	49	32	25	16	09	02
0	1,0	18	30	34	20	27	48	60	40	30	36	50	51	40	27	21	15	08	01
0	0,8	21	41	32	21	28	42	63	41	30	34	50	50	38	25	20	15	10	0
0	0,2	11	28	24	20	27	45	64	42	31	30	40	53	37	28	19	14	12	0
0	0,1	09	14	18	20	30	50	63	43	31	30	40	53	47	31	23	17	13	04
0	0,2	10	19	26	30	40	55	61	40	30	31	42	60	56	43	27	21	15	06
0,1	0,6	18	31	37	42	43	46	41	30	32	31	48	70	62	45	28	24	17	08
0,2	0,1	16	27	20	28	30	29	20	16	19	24	51	50	35	26	17	14	13	05
0	0	0	0	0	08	10	04	01	0	0	09	21	10	02	03	04	03	02	0

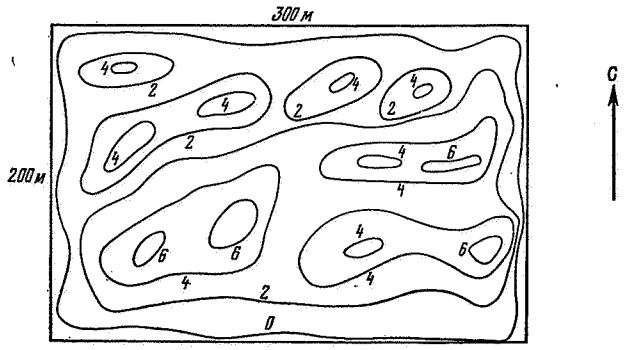
С ⟵ ⟶ Ю

Таблица 3

Вариограммы мощностей в четырех направлениях

d	С – Ю	В – З	d	СЗ–ЮВ	СВ–ЮЗ
10	1,059	0,612	14,14	1,760	1,122
20	2,866	1,402	29,28	4,102	3,082
30	4,179	2,001	42,42	5,187	4,264
40	4,970	2,216	56,57	5,752	4,885
50	5,383	2,300	70,71	6,032	5,704
60	6,061	2,441	84,85	6,319	5,882
70	5,981	2,980	98,99	6,807	5,430
80	5,593	2,605			
90	5,773	2,689			
100	6,666	2,802			

характер, три из них параллельны, а четвертая, соответствующая направлению потока, имеет существенно меньший наклон, чем три остальные. Итак, предположение о возможности использования схемы де Вейса с зональной анизотропией очень хорошо соответствует качественной картине явления. Рассмотрим теперь количественные характеристики изменчивости.



Фиг. 12. Изолинии мощности.

Если принять в качестве единицы длины $d = 10$ *м*, то вариограмма в широтном направлении может быть представлена уравнением

$$\sigma_d^2 = 0{,}61 + 0{,}99 \ln d, \qquad \text{(VI,6,1)}$$

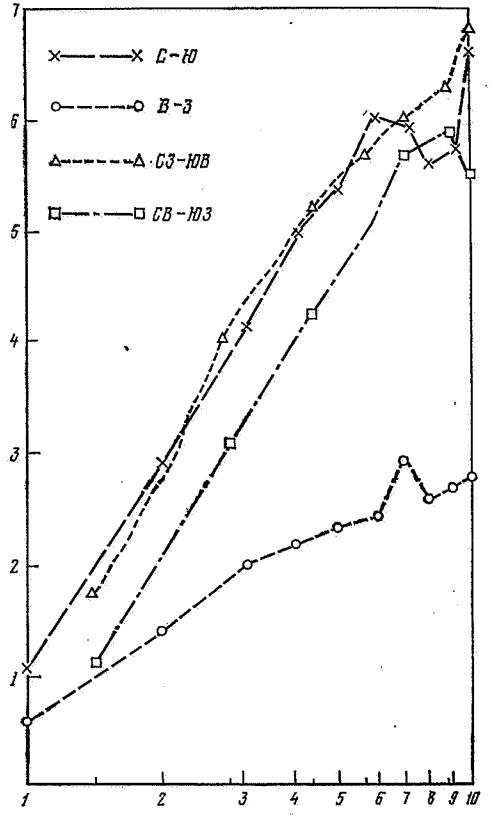
из которого находим значение коэффициента абсолютного рассеивания для изотропной изменчивости:

$$\alpha_и = \frac{0{,}99}{6} = 0{,}165.$$

Вариограмма в меридиональном направлении в свою очередь может быть аппроксимирована прямой

$$\sigma_d^2 = 1{,}06 + 2{,}48 \ln d. \qquad \text{(VI,6,2)}$$

Если принять, что закон изотропного рассеивания, определенный уравнением (VI,6,1), свободен от влияния геометрической анизотропии, вариограмму (VI,6,2) следует интерпретировать как сумму вариограммы изотропной изменчивости и вариограммы, связанной с зональностью. Вычитая из вариограммы (VI,6,2) вариограмму изотропной изменчивости, получим:



Фиг. 13. Вариограммы мощности в различных направлениях.

$$\sigma_d^2 = 0{,}45 + 1{,}49 \ln d. \qquad \text{(VI,6,3)}$$

Наконец, вариограмма в произвольном направлении должна выражаться следующей формулой:

$$\sigma_d^2 = 1{,}06 + 0{,}99 \ln r + 1{,}49 \ln (z - z'), \qquad \text{(VI,6,4)}$$

где r — расстояние между точками, $a\ (z - z')$ — разность ординат этих точек по оси север — юг. В частности, для диагонального направления северо-восток или северо-запад имеем

$$z - z' = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

и, следовательно, вариограммы для этого направления могут быть представлены в виде

$$\sigma_d^2 = 1{,}06 - 1{,}49 \ln \sqrt{2} + 2{,}48 \ln r = 0{,}545 + 2{,}48 \ln r. \qquad \text{(VI,6,5)}$$

Сравним это уравнение со средней (из двух диагональных) экспериментальной вариограммой. Как следует из табл. 4, согласие получено достаточно

Таблица 4

Усредненная вариограмма в направлениях СЗ—ЮВ и СВ—ЮЗ

d, m	Значения σ_d^2	
	теоретические	экспериментальные
1,41	1,40	1,44
2,83	3,22	3,59
4,24	4,12	4,72
5,66	4,85	5,32
7,07	5,39	5,87
8,48	5,84	6,10
9,90	6,24	6,12

близкое. Принятая модель хорошо описывает реальную изменчивость, и предположение о зональном характере изменчивости следует считать подтвержденным.

ГЛАВА VII

Восхождение при постоянной мощности в случае собственных схем

Краткое содержание

Содержание этой главы, за исключением § 1,— материал трудный, однако нет необходимости вникать во все детали приводимых в ней выкладок. Полученные результаты даны лишь фрагментарно, в виде, пригодном для практического использования. Тем не менее с теоретической точки зрения, операция восхождения при постоянной мощности l и малых расстояниях ($r < l$) приводит к регуляризации, аналогичной той, которая была описана при изложении транзитивных представлений (вновь появляется последовательность чередующихся членов вида r^{2p-1} и $r^{2p}\ln r$), выражаемой более сложными формулами. Напротив, при больших расстояниях ($r > l$) эффект регуляризации от проведения операции восхождения неощутим.

В § 1 вводится понятие восхождения при постоянной мощности и даются соответствующие алгорифмы, в частности алгорифмы изотропного прямого восхождения первого и второго порядков.

В § 2 рассмотрено важное для практических приложений прямое восхождение первого порядка при постоянной мощности l и изотропной собственной схеме с собственной функцией $\gamma(r) = r^{\lambda}$. Результаты получены в виде разложений в степенные ряды как для общего, так и для трех частных случаев (для $\gamma(r) = r^{\lambda}$, когда λ — целое четное и нечетное число, и для $\gamma(r) = r^{2p}\ln r$).

В § 3 даются формулы прямоугольника, представляющие средние значения собственной функции $\gamma(r) = r^{\lambda}$ между прямоугольником ab и его стороной (функции $\chi_{\lambda}(b; a)$ и $\chi_{\lambda}(a; b)$, а также среднее значение r^{λ} внутри самого прямоугольника. Формулы, выведенные для произвольного λ и для трех частных случаев, даны в форме степенных рядов.

В § 4 приведены формулы параллелепипеда и излагаются некоторые частные результаты.

§ 1. Определение и алгорифмы операции восхождения при постоянной мощности

Согласно определению, данному в теории транзитивных представлений, операция восхождения может быть истолкована как предельный случай регуляризации пространственной переменной с помощью функции опробования $p(x) = k(x)$, соответствующей пробе v, когда геометрической базой пробы является бесконечная прямая. В теории собственных схем операция восхождения вдоль бесконечной оси невыполнима, так как в силу стационарности собственной схемы пространственная изменчивость остается однородной во всем пространстве и собственная схема $f(x)$ не может быть суммируемой. С другой стороны, в этом случае ничто не препятствует проведению операции восхождения вдоль отрезка прямой конечной длины. Мы назовем длину этого отрезка *мощностью* и будем рассматривать операцию восхождения вдоль постоянной мощности. Чтобы оправдать такое название, сошлемся на типичный пример: отбор керна на всю мощность из вертикальной скважины, пробуренной в некоторой точке горизонтально залегающего рудного тела,— техническая операция, абстрактным выражением которой будет операция восхождения вдоль отрезка прямой конечной длины (вдоль мощности залежи).

Возможны три варианта операции восхождения вдоль конечной мощности в зависимости от того, является ли мощность случайной, функционально изменяющейся или постоянной величиной. Теоретически операция

восхождения при случайной изменчивости мощности представляет наибольший интерес, но изучение ее в таком варианте сопряжено со значительными трудностями, если только пространственную переменную $f(x)$ и мощность $l(x)$ нельзя рассматривать как взаимно независимые. Операция восхождения при переменной, но закономерно изменяющейся мощности в свою очередь приводит к потере стационарности или собственного характера регуляризованной функцией. Поэтому мы ограничимся изучением операции восхождения при постоянной мощности. Мощность рудных тел часто изменяется плавно и в ограниченных пределах, поэтому выводы, полученные для постоянной мощности, могут быть с некоторым приближением использованы при решении практических задач.

Пусть в n-мерном пространстве даны: собственная схема $f_n(x)$ с собственной функцией рассеивания $\gamma(h)$; длина (или прямая мощность) l; единичный вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, определяющий направление восхождения вдоль вектора мощности $l\alpha$. Любой точке плоскости π (не параллельной направлению α, вдоль которого будет производиться операция восхождения) мы ставим в соответствие стохастическое выражение

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{l}\int_0^l f_n(x+\lambda\alpha)\,d\lambda. \qquad \text{(VII,1,1)}$$

Относительно точек x плоскости π функция $f_{n-1}(x)$ является $(n-1)$-мерной случайной функцией, представляющей собой стохастическое среднее содержание по направлению, совпадающему с направлением $l\alpha$. Легко убедиться, что приращения

$$f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)$$

этой функции между точками x и y плоскости π сохраняют стационарный характер, так что сама функция $f_{n-1}(x)$ является $(n-1)$-мерной собственной стохастической схемой. Если приращения исходной функции f_n имеют нулевые математические ожидания (как это всегда нами предполагается), то тем же свойством обладают и приращения функции f_{n-1}. Остается определить функцию собственного рассеивания $\gamma_{n-1}(h)$ регуляризованной функции $f_{n-1}(x)$. В соответствии с определением (VI,1,6) имеем

$$\gamma_{n-1}(h) = \frac{1}{2}D\,[f_{n-1}(x+h) - f_{n-1}(x)]. \qquad \text{(VII,1,2)}$$

Другими словами, функция $\gamma_{n-1}(h)$ равна половине дисперсии распространения, или дисперсии взаимного оценивания двух случайных величин $f_{n-1}(x+h)$ и $f_{n-1}(x)$, определенных формулой (VII,1,1), и эту функцию можно вычислить через значения собственной функции $\gamma_n(h)$ с помощью общей формулы (VI,3,11), которая дает

$$2\gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{l^2}\int_0^l\int_0^l \gamma_n[h+(t'-t)\alpha]\,dt\,dt' - \frac{2}{l^2}\int_0^l\int_0^l \gamma_n[(t-t')\alpha]\,dt\,dt'.$$

Первый интеграл представляет собой среднее значение величины $\gamma_n^{r}(x-x')$, когда точки x и x' занимают независимо все возможные положения на двух равных и отстоящих на расстояние h один от другого векторах $l\alpha$. Второй интеграл представляет собой аналогичное среднее значение, но для $h=0$, т. е. когда оба вектора совпадают. Разделив обе части равенства на 2 и воспользовавшись алгорифмом Коши (I,2,9), получим для $\gamma_{n-1}(h)$ следующее выражение:

$$\gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-t)\,\gamma_n(h+t\alpha)\,dt - \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-t)\,\gamma_n(t\alpha)\,dt. \qquad \text{(VII,1,3)}$$

Восхождение называют *прямым* или *косым* в зависимости от того, перпендикулярна или не перпендикулярна плоскость π направлению α, вдоль которого проводится операция восхождения. Когда восхождение прямое, а собственная схема изотропна, т. е. ее собственная функция может быть представлена как функция $\gamma(r)$ единственного аргумента $r = |h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$, формула (VII,1,3) приобретает вид

$$\gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)\,\gamma_n\left[\sqrt{r^2+x^2}\right]dx - \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)\,\gamma_n(x)\,dx \qquad \text{(VII,1,4)}$$

и называется *алгорифмом изотропного восхождения первого порядка*. Именно это выражение чаще всего используют при решении прикладных вопросов. Определенная таким образом собственная функция $\gamma_{n-1}(h)$ позволяет рассчитать все дисперсии и ковариации распространения, связанные с собственной схемой $f_{n-1}(x)$ в плоскости π.

Операция восхождения второго порядка

Можно повторить операцию и провести новое восхождение при мощности l' вдоль вектора $l'\alpha'$, лежащего в плоскости π (т. е. вектора $l'\alpha'$ в $(n-1)$-мерном пространстве, для которого уже определена собственная схема f_{n-1}). В результате повторного восхождения получится новая собственная схема f_{n-2}, являющаяся функцией точек $(n-2)$-мерного пространства. Функция собственного рассеивания $\gamma_{n-2}(h)$ устанавливается путем применения алгорифма (VII,1,3) к собственной функции $\gamma_{n-1}(h)$ или сложного алгорифма двойного восхождения непосредственно к функции собственного рассеивания $\gamma_n(h)$. Последний алгорифм симметричен относительно векторов $l\alpha$ и $l'\alpha'$:

$$\gamma_{n-2}(h) = \frac{4}{l^2 l'^2}\int_0^l\int_0^{l'} (l-t)\,(l'-t')\,\gamma_n(h+t\alpha+t'\alpha')\,dt\,dt' -$$
$$-\frac{4}{l^2 l'^2}\int_0^l\int_0^{l'} (l-t)\,(l'-t')\,\gamma_n(t\alpha+t'\alpha')\,dt\,dt'. \qquad \text{(VII,1,5)}$$

Это выражение определяет среднее значение величины $\gamma(x-x')$, когда каждая из концевых точек x и x' векторного аргумента занимает все возможные положения в одном из двух одинаковых параллелограммов, построенных на векторах $l\alpha$ и $l'\alpha'$ и отстоящих один от другого на расстояние h.

Если собственная схема изотропна, а оба восхождения являются прямыми (т. е. если все три вектора — h, α и α' — взаимно перпендикулярны), как это чаще всего бывает в действительности, формула (VII,1,5) может быть переписана в следующем виде:

$$\gamma_{n-2}(r) = \frac{4}{l^2 l'^2}\int_0^l\int_0^{l'} (l-x)\,(l'-x')\,\gamma_n\left[\sqrt{r^2+x^2+x'^2}\right]dx\,dx' -$$
$$-\frac{4}{l^2 l'^2}\int_0^l\int_0^{l'} (l-x)\,(l'-x')\,\gamma_n\left[\sqrt{x^2+x'^2}\right]dx\,dx'. \qquad \text{(VII,1,6)}$$

Это выражение называется *алгорифмом изотропного прямого восхождения второго порядка*.

Формула (VII,1,6) описывает характер изменчивости среднего содержания в прямоугольном сечении прямой призмы, основанием которой служит прямоугольник со сторонами l и l'.

Операция восхождения над собственной схемой, особенно изотропной, кажется более сложной, чем операция восхождения, изложенная нами в теории транзитивных представлений, поскольку число параметров увеличилось (появился параметр l при восхождении первого порядка, а также параметр l' — при восхождении второго порядка) и соответственно более сложными стали требуемые вычисления.

§ 2. Операция восхождения при постоянной мощности для собственной функции вида r^λ

Рассмотрим подробнее важное для практических приложений прямое восхождение первого порядка при постоянной мощности l и изотропной собственной схеме с полувариограммой $\gamma(r) = r^\lambda$. Такое восхождение может быть выражено с помощью гипергеометрических функций. Так как весьма громоздкие выводы сами по себе не интересны, мы приведем только конечные результаты в форме степенных рядов. Введем функцию

$$\gamma_\lambda(r) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)\,(x^2+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,dx. \qquad \text{(VII,2,1)}$$

Эта функция — среднее значение величины $|h|^\lambda$, когда концы вектора h пробегают независимо один от другого стороны длиной l прямоугольника lr с основанием r. Она отличается от искомой полувариограммы $\gamma_{n-1}(r)$ на постоянную величину, которую легко определить из выражения (VII,1,4), записав, что

$$\gamma_{n-1}(r) = \gamma_\lambda(r) - \gamma_\lambda(0). \qquad \text{(VII,2,2)}$$

Для больших расстояний, которые определяются условием $r > l$, разлагаем функцию $\gamma_\lambda(r)$:

$$\gamma_\lambda(r) = r^\lambda\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-k+1\right)}{(2k+1)\,(k+1)!}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k}\right]. \qquad \text{(VII,2,3)}$$

Отметим, что с уменьшением значений l/r функция $\gamma_\lambda(r)$ сходится к первому члену ряда, равного r^λ. Таким образом, операция восхождения почти не меняет собственной функции при значениях r, соответствующих большим расстояниям.

На малых расстояниях, т. е. когда $r < l$, получается выражение значительно более сложное:

$$\gamma_\lambda(r) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) l} + \frac{2}{\lambda+2}\cdot\frac{r^{\lambda+2}}{l^2} +$$

$$+ l^\lambda\left[\frac{2}{(1+\lambda)\,(2+\lambda)} + \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{r^2}{l^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)\,k!}\left(\frac{r}{l}\right)^{2k}\right]. \qquad \text{(VII,2,4)}$$

В этом выражении выделим, как и ранее в теории транзитивных представлений, регулярную и нерегулярную части. Регулярная часть состоит из ряда, содержащего члены с четными целыми степенями отношения r/l. Множитель l^λ в регулярной части введен для сохранения одинаковой для всего выражения размерности. Нерегулярная часть в отличие от результата восхождения для транзитивных ковариограмм содержит не один член, а два: один с $r^{1+\lambda}/l$, другой — с $r^{2+\lambda}/l^2$. Правда, когда r/l очень мало, главным членом разложения функции γ_λ является первый из членов нерегулярной

части. Простой анализ коэффициента при этом члене показывает, что восхождение от первого члена разложения (VII,2,4) до множителя $1/l$ совпадает с восхождением от первого члена разложения транзитивной ковариограммы:

$$r^\lambda \to \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{\lambda+1} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1+\lambda}{2}\right)} r^{\lambda+1}.$$

Таким образом, операция восхождения над собственными схемами при малых расстояниях приводит к регуляризации того же типа, что и в случае транзитивных представлений.

В практических приложениях чаще всего будут встречаться функции r^λ с целыми (четными или нечетными) степенями λ, а также логарифмические члены вида $r^{2p}\ln r$, где p — целое число: несмотря на бо́льшую сложность формул, мы придем, как и при операциях восхождения в теории транзитивных представлений, к последовательности, приведенной в конце § 4 гл. I.

Рассмотрим последовательно все три частных случая. Случай, когда $\lambda = 2p$, т. е. является целым четным числом, сравнительно прост. Собственная функция $\gamma_\lambda(r)$ сводится к однородному четному многочлену порядка $2p$ относительно r и λ. Действительно, разложение (VII,2,3) оканчивается на члене порядка $k = p$. Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_2(r) = r^2 + \frac{1}{6}\,l^2,\\
&\gamma_4(r) = r^4 + \frac{1}{3}\,r^2l^2 + \frac{1}{15}\,l^4,\\
&\gamma_6(r) = r^6 + \frac{1}{2}\,r^4l^2 + \frac{1}{5}\,r^2l^4 + \frac{1}{28}\,l^6.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII,2,5)}$$

Когда $\lambda = 2p-1$, т. е. является целым нечетным числом, разложение (VII,2,3), которое в этом случае содержит бесконечное число членов, применимо только при $r \geqslant l$. При малых расстояниях, $r \leqslant l$, разложение (VII,2,4) имеет ряд особенностей и должно изучаться с помощью обычного предельного перехода (полагают $\lambda = 2p - 1 + \varepsilon$ и ищут пределы, к которым стремятся члены разложения при стремлении ε к нулю). При этом появляется член с $r^{2p}\ln r$. Действительно, в разложении (VII,2,4) только два члена имеют особенности при $\lambda = 2p-1$: это, во-первых, изолированный член с $r^{1+\lambda}$ и, во-вторых, член порядка $k = p$ из ряда с четными целыми степенями. Выпишем эти два члена:

$$\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\cdot\frac{r^{1+\lambda}}{l} + l^\lambda\,\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-p+2\right)}{(\lambda+1-2p)\,p!}\left(\frac{r}{l}\right)^{2p}.$$

Когда λ стремится к $2p-1$, выделенный двучлен будет иметь в качестве предела

$$\frac{r^{2p}}{l}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,p!}\left[\ln\frac{l^2}{r^2} - 2 + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}\right] =$$

$$= \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\cdot\frac{r^{2p}}{l}\left[\ln\frac{l^2}{r^2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2\ln 2\right].$$

Отсюда получаем выражение для $\gamma_{2p-1}(r)$:

$$\gamma_{2p-1}(r) = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\cdot\frac{r^{2p}}{l}\left[\ln\frac{l^2}{r^2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2\ln 2\right] +$$

$$+\frac{2}{2p+1}\cdot\frac{r^{2p+1}}{l^2}+l^{2p-1}\left[\frac{1}{p\,(2p+1)}+\frac{1}{2p-2}\cdot\frac{r^2}{l^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{k=2\\k\neq p}}^{\infty}\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(p-k+\frac{3}{2}\right)}{2\,(p-k)\,k!}\left(\frac{r}{l}\right)^{2k}\right], \qquad \text{(VII,2,6)}$$

или в частном случае, при $\lambda=1$,

$$\gamma_1(r)=l\left[\frac{1}{3}+\frac{r^2}{l^2}\left(\ln\frac{l}{r}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\frac{r^3}{l^3}-\frac{1}{8}\frac{r^4}{l^4}+\frac{1}{96}\frac{r^6}{l^6}+\ldots\right]. \qquad \text{(VII,2,7)}$$

Для этого частного случая непосредственно выводится следующее точное выражение:

$$\gamma_1(r)=\frac{1}{3}\sqrt{l^2+r^2}+\frac{2}{3}\frac{r^2}{l^2}\left[r-\sqrt{l^2+r^2}\right]+\frac{r^2}{l}\ln\frac{l+\sqrt{l^2+r^2}}{r}. \qquad \text{(VII,2,8)}$$

Рассмотрим теперь собственную функцию с членами логарифмического вида $r^{2p}\ln r$. Операцию восхождения над членом $r^\lambda\ln r$ можно осуществить путем дифференцирования по λ предыдущих разложений. В приложениях наиболее часто встречаются члены с $r^{2p}\ln r$, где p — целое число. Так как $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ в этом случае принимает бесконечное значение, то в выражении (VII,2,4) возможны существенные упрощения. Действительно, основной член этого выражения

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\cdot\frac{r^{1+\lambda}}{l}=\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\lambda\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{1+\lambda}{2}\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)}\cdot\frac{r^{1+\lambda}}{l}$$

при $\lambda=2p$ после дифференцирования по λ дает

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{r^{1+2p}}{l}=\pi\,\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}\cdot\frac{r^{1+2p}}{l}.$$

С точностью до множителя $1/l$ это выражение совпадает с результатом восхождения от члена с $r^{2p}\ln r$ транзитивной ковариограммы. Для примера, а также с целью дальнейшего использования приведем результат операции восхождения над членами $\ln r$ и $r^2\ln r$ (т. е. с $p=0$ и $p=1$ соответственно). Для члена $\ln r$ получим следующие разложения, соответствующие большим ($r>l$) и малым ($r<l$) расстояниям r:

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\gamma_\lambda(r)\right]_{\lambda=0}=\begin{cases}\ln r+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\,(k+1)\,(2k+1)}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k} & \text{при } r>l,\\ \ln r-\frac{3}{2}+\pi\frac{r}{l}+\frac{r^2}{l^2}\left[\ln\frac{r}{l}-\frac{3}{2}\right]+ & \\ \quad+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\,(k-1)\,(2k-1)}\left(\frac{r}{l}\right)^{2k} & \text{при } r<l.\end{cases} \qquad \text{(VII,2,9)}$$

Впрочем, непосредственным выводом можно получить также и точное выражение, соответствующее этим разложениям:

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\gamma_\lambda(r)\right]_{\lambda=0}=\ln l-\frac{3}{2}-\ln\sin\theta+\frac{2\theta}{\operatorname{tg}\theta}+\frac{\ln\cos\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}, \qquad \text{(VII,2,10)}$$

где $\theta=\operatorname{arctg}\frac{l}{r}$.

Аналогично для члена $r^2\ln r$ в случае больших и малых расстояний r результаты операций восхождения представляются в виде следующих разложений:

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\gamma_\lambda(r)\right]_{\lambda=2}=\begin{cases}r^2\ln r+\frac{1}{6}l^2\ln r+r^2\left[\frac{1}{12}\frac{l^2}{r^2}+\right. & \\ \quad\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\,(k+1)\,(k-1)\,(2k+1)}\cdot\frac{l^{2k}}{r^{2k}}\right] & \text{при } r>l,\\ \frac{2}{3}\pi\frac{r^3}{l}+\frac{1}{2}\frac{r^4}{l^2}\ln r+l^2\ln l\left[\frac{1}{6}+\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{2}\frac{r^4}{l^4}\right]+ & \\ +l^2\left[-\frac{7}{72}-\frac{r^2}{l^2}-\frac{7}{8}\frac{r^4}{l^4}+\right. & \\ \left.+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\,(k-1)\,(k-2)\,(2k-3)}\frac{r^{2k}}{l^{2k}}\right] & \text{при } r<l.\end{cases} \qquad \text{(VII,2,11)}$$

§ 3. Формулы прямоугольника для собственной функции вида r^λ

В практических приложениях и особенно, как будет видно в гл. VIII, при расчете дисперсий оценок стараются обычно последовательным проведением операций восхождения свести задачу к одномерному случаю. В дополнение к полувариограмме $\gamma(h)$ одномерной собственной схемы обычно используют две вспомогательные собственные функции $\chi(h)$ и $F(h)$, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned}&\chi(h)=\frac{1}{h}\int_0^h\gamma(x)\,dx\\ \text{и}\quad&F(h)=\frac{2}{h^2}\int_0^h x\chi(x)\,dx=\frac{2}{h^2}\int_0^h(h-x)\,\gamma(x)\,dx.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII,3,1)}$$

Функция $\chi(h)$ выражает среднее значение функции $\gamma(x)$, когда x представляет собой расстояние между текущей точкой отрезка длины h и одним из его фиксированных концов. Функция $F(h)$ в свою очередь есть среднее значение функции $\gamma(x)$, когда x — расстояние между двумя точками, независимо одна от другой занимающими все возможные положения на отрезке h. Эта функция позволяет, в соответствии с формулой (VI,4,4), рассчитать дисперсию среднего значения, определенного по отрезку l, в пределах поля длины L, а именно

$$\sigma^2(l\,|\,L)=F(L)-F(l).$$

Аналогично функция $\chi(h)$ позволяет, в соответствии с формулой (VI,4,7), вычислить в пределах поля L ковариацию $\sigma(0,\ l\,|\,L)$ отрезка l и одного из его концов, равную

$$\sigma(0,\ l\,|\,L)=F(L)-\chi(l).$$

Дисперсия распространения среднего содержания, определенного по малой пробе l на отрезок L, в центре которого расположена проба, может быть выражена равенством

$$\sigma_E^2=2\chi\left(\frac{l}{2}\right)-F(L)-F(l).$$

Большое практическое значение имеют формулы прямоугольника, выводу которых посвящен этот параграф. Эти формулы дают вспомога-

тельные функции $\chi(h)$ и $F(h)$, определяемые выражениями (VII,3,1), когда в качестве собственной функции берут $\gamma_\lambda(r)$, полученные в предыдущем параграфе.

Замечания. Так как собственная функция $\gamma_\lambda(h)$ представляет собой среднее значение r^λ между двумя сторонами l прямоугольника lh, то вспомогательные функции $\chi(h)$ и $F(h)$, найденные по $\gamma_\lambda(h)$, также должны иметь вполне определенный геометрический смысл. Действительно, в этом случае функция $\chi(h)$ представляет собой среднее значение r^λ для всех векторов r, соединяющих произвольную точку прямоугольника lh с произвольной точкой на одной из его сторон l (сокращенно, среднее значение r^λ между прямоугольником lh и стороной l), а $F(h)$ — среднее значение r^λ, когда r — расстояние между двумя точками, независимо одна от другой пробегающее по всей площади прямоугольника (сокращенно, среднее значение r^λ в прямоугольнике lh).

Для удобства заменим символы l и h на a и b. При этом всегда будем полагать

$$b \leqslant a. \qquad \text{(VII,3,2)}$$

В принимаемых обозначениях функция $F_\lambda(a, b)$ будет означать среднее значение r^λ в прямоугольнике ab, функция $\chi_\lambda(b, a)$ — среднее значение между прямоугольником и его большей стороной и, наконец, $\chi_\lambda(a, b)$ — среднее значение r^λ между прямоугольником и его меньшей стороной.

Первая из этих функций, $F_\lambda(a, b)$, симметрична относительно аргументов a и b. Действительно,

$$F_\lambda(a, b) = \frac{4}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b (a-x)(b-y)(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\, dx\, dy. \qquad \text{(VII,3,3)}$$

Две последние функции, $\chi_\lambda(b, a)$ и $\chi_\lambda(a, b)$, напротив, не симметричны относительно этих аргументов. Из определений (VII,3,1) непосредственно следует, что функции $\chi_\lambda(b, a)$ и $\chi_\lambda(a, b)$ могут быть получены дифференцированием $F_\lambda(a, b)$ по b и a соответственно, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \chi_\lambda(b, a) &= \frac{1}{2b}\frac{\partial}{\partial b} b^2 F_\lambda(a, b), \\ \chi_\lambda(a, b) &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial a} a^2 F_\lambda(a, b). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII,3,4)}$$

Кроме того, введем в рассмотрение функцию $\gamma_\lambda(b, a)$ — среднее значение r^λ между двумя бо́льшими сторонами a прямоугольника ab, и функцию $\gamma_\lambda(a, b)$ — аналогичное среднее значение, но между двумя меньшими сторонами b:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\lambda(b, a) &= \frac{\partial}{\partial b} b\chi_\lambda(b, a) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial b^2} b^2 F_\lambda(a, b), \\ \gamma_\lambda(a, b) &= \frac{\partial}{\partial a} a\chi_\lambda(a, b) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2} a^2 F_\lambda(a, b). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII,3,5)}$$

Все введенные выше функции могут быть выражены через гипергеометрические функции. Но практически проще почленно дифференцировать или интегрировать соответствующие этим функциям ряды. В качестве исходной примем функцию $\gamma_\lambda(b, a)$, разложение которой представлено выражением (VII,2,4) при $r = b$ и $l = a$. Почленным интегрированием этого ряда по b (что законно, так как $b < a$) получим сначала $\chi_\lambda(b, a)$, а затем и $F_\lambda(a, b)$. Наконец, почленным дифференцированием функции $F_\lambda(a, b)$ по аргументу a получим $\chi_\lambda(a, b)$ и $\gamma_\lambda(a, b)$. Последняя функция, $\gamma_\lambda(a, b)$, должна совпадать с выражением (VII,2,3), если в нем положить $r = a$ и $l = b$. Такой подход является общим. Разложения для больших расстояний в формулах прямоугольника всегда могут быть получены из разложений для малых расстояний с помощью последовательного проведения операций интегрирования и дифференцирования. В то же время обратный переход в общем случае невозможен.

Точные формулы для произвольного значения λ

Функция $\gamma_\lambda(b, a)$ представляет собой однородное выражение степени λ относительно a и b. Общий член вида $b^\mu a^{\lambda-\mu}$ функции $\gamma_\lambda(b, a)$ при последовательном интегрировании по b дает члены $\frac{1}{\mu+1} b^\mu a^{\lambda-\mu}$ и $\frac{2}{(\mu+1)(\mu+2)} b^\mu a^{\lambda-\mu}$ в выражениях для $\chi_\lambda(b, a)$ и $F_\lambda(a, b)$ соответственно.

При дифференцировании, согласно формулам (VII,3,4) и (VII,3,5), получают члены

$$\frac{\lambda+2-\mu}{(\mu+1)(\mu+2)} b^\mu a^{\lambda-\mu} \text{ и } \frac{(\lambda+2-\mu)(\lambda+1-\mu)}{(\mu+1)(\mu+2)} b^\mu a^{\lambda-\mu}$$

для функций $\chi_\lambda(a, b)$ и $\gamma_\lambda(a, b)$. Читатель сам может проверить, что таким образом формула (VII,2,3) действительно выводится из формулы (VII,2,4). При этом члены нерегулярной части с $b^{1+\lambda}/a$ и $b^{2+\lambda}/a^2$ попросту исчезают, и это обстоятельство лишь подтверждает, что переход в обратном направлении, т. е. от разложения для больших расстояний (VII,2,3) к разложению для малых расстояний (VII,2,4), невозможен.

Разложения функций $F_\lambda(a, b)$, $\chi_\lambda(b, a)$ и $\chi_\lambda(a, b)$ имеют следующий вид (напомним, что всегда принимается $b \leqslant a$):

$$F_\lambda(a, b) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)(\lambda+3)\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot \frac{b^{1+\lambda}}{a} + \frac{4}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)} \frac{b^{2+\lambda}}{a^2} +$$
$$+ a^\lambda \left[\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{6(\lambda-1)} \frac{b^2}{a^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)(k+1)!} \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right], \qquad \text{(VII,3,6)}$$

$$\chi_\lambda(b, a) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{b^{1+\lambda}}{a} + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} \frac{b^{2+\lambda}}{a^2} +$$
$$+ a^\lambda \left[\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{3(\lambda-1)} \frac{b^2}{a^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)\,k!} \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right], \qquad \text{(VII,3,7)}$$

$$\chi_\lambda(a, b) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)(\lambda+3)\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{b^{1+\lambda}}{a} +$$
$$+ a^\lambda \left[\frac{1}{\lambda+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+1\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)(k+1)!} \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right]. \qquad \text{(VII, 3,8)}$$

В практических приложениях λ чаще всего будет целым числом, четным или нечётным. Кроме членов вида r^λ, могут встретиться также выражения с членами логарифмического вида $r^{2p} \ln r$. Рассмотрим эти частные случаи.

Случай целого четного показателя степени ($\lambda = 2p$)

Приведенные выше разложения существенно упрощаются для целого четного λ. Во-первых, $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ принимает бесконечное значение, что при-

водит к исчезновению члена с $b^{1+\lambda}/a$ в нерегулярной части функций. Во-вторых, бесконечный ряд сводится к четному многочлену степени $2p$ относительно b/a. Мы не будем приводить здесь эти простые выражения.

Случай целого нечетного показателя степени ($\lambda = 2p - 1$)

В этом случае также следует последовательно провести операции интегрирования и дифференцирования над функцией $\gamma_{2p-1}(b, a)$, разложение которой получается из формулы (VII,2,6) при замене $r = b$ и $l = a$. При этом общий член вида $b^\mu a^{\lambda-\mu} \ln \frac{b}{a}$ функции $\gamma_{2p-1}(b, a)$ переходит в общие члены функций $\chi(b, a)$, $F(a, b)$ и $\chi(a, b)$, равные соответственно

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^{\lambda-\mu}b^\mu}{\mu+1}\ln\frac{b}{a}-\frac{a^{\lambda-\mu}b^\mu}{(\mu+1)^2},\\ &\frac{2}{(\mu+1)(\mu+2)}a^{\lambda-\mu}b^\mu\ln\frac{b}{a}-\frac{2(2\mu+3)}{(\mu+1)^2(\mu+2)^2}a^{\lambda-\mu}b^\mu,\\ &\frac{2+\lambda-\mu}{(\mu+1)(\mu+2)}a^{\lambda-\mu}b^\mu\ln\frac{b}{a}-\left[\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}+\frac{(2+\lambda-\mu)(2\mu+3)}{(\mu+1)^2(\mu+2)^2}\right]a^{\lambda-\mu}b^\mu, \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII,3,9)}$$

Используя эти соотношения и взяв выражение (VII,2,6) за исходное, получим

$$\left.\begin{aligned} \chi_{2p-1}(b, a) &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(2p+1)(p!)^2}\frac{b^{2p}}{a}\times\\ &\times\left[2\ln\frac{a}{b}+\frac{2}{2p+1}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-2+2\ln 2\right]+\ldots,\\ F_{2p-1}(b, a) &= \frac{2^{1-2p}(2p)!}{(2p+1)(2p+2)(p!)^2}\frac{b^{2p}}{a}\times\\ &\times\left[2\ln\frac{a}{b}+\frac{1}{p+1}+\frac{2}{2p+1}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-2+2\ln 2\right]+\ldots,\\ \chi_{2p-1}(a, b) &= \frac{2^{-2p}(2p)!}{(2p+1)(2p+2)(p!)^2}\frac{b^{2p}}{a}\times\\ &\times\left[2\ln\frac{a}{b}+\frac{2}{2p+1}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-2\ln 2\right]+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII,3,10)}$$

В формулах (VII,3,10) выписаны полностью только нерегулярные части, соответствующие членам с $b^{1+\lambda}/a$ и $a^\lambda b^{2p}/a^{2p}$ в разложениях (VII,3,6), (VII,3,7) и (VII,3,8). Остальные, не выписанные здесь члены, идентичны соответствующим членам этих разложений (при $\lambda = 2p - 1$).

Случай членов логарифмического вида $r^{2p}\ln r$

В этом случае в качестве исходных берут разложения (VII,2,9) и (VII,2,10) и применяют тот же метод последовательного интегрирования и дифференцирования. Мы приведем лишь два выражения (для $\lambda = 2p = 0$ и $\lambda = 2p = 2$), из которых с помощью соотношений (VII,3,4) легко получить функции χ.

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}F_\lambda(a, b)\right]_{\lambda=0} &= \ln a-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\left[\ln\frac{b}{a}-\frac{25}{12}\right]+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(k+1)(2k-1)(2k+1)}\frac{b^{2k}}{a^{2k}},\\ \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}F_\lambda(a, b)\right]_{\lambda=2} &= \frac{\pi}{15}\frac{b^3}{a}+\frac{1}{3}\frac{b^4}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{11}{900}\frac{b^4}{a^2}+\frac{1}{6}a^2\ln a+\\ &+\frac{1}{6}b^2\ln a+a^2\left[-\frac{7}{72}-\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}-\frac{7}{120}\frac{b^4}{a^4}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}{}'\frac{(-1)^k}{k(k+1)(k-1)(k-2)(2k-3)(2k+1)}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII,3,11)}$$

§ 4. Формулы параллелепипеда для собственной функции вида r^λ

Повторная операция восхождения над полученными разложениями приведет к формулам параллелепипеда. Пусть a, b и c ($a \geqslant b \geqslant c$) — три стороны параллелепипеда. Обозначим символом $F_\lambda(a, b, c)$ среднее значение r^λ в этом параллелепипеде, символом $\gamma_\lambda(a, b, c)$ — среднее значение r^λ между двумя гранями bc, отстоящими одна от другой на расстояние a, и символом $\chi_\lambda(a, bc)$ — среднее значение r^λ между параллелепипедом и одной из его граней bc. Разложение функции $\gamma_\lambda(r, a)$, представленное в виде

$$\gamma_\lambda(r, a) = \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}b^\mu$$

после почленного проведения операции восхождения по мощности b и последующего интегрирования по c дает

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\lambda(c, ab) &= \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\gamma_\mu(c, b),\\ \chi_\lambda(\varepsilon, ab) &= \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\chi_\mu(c, b),\\ F_\lambda(a, b, c) &= \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}F_\mu(b, c). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII,4,1)}$$

Дифференцируя по b, получим формулы для средних сечений:

$$\left.\begin{aligned} \chi_\lambda(b, ac) &= \frac{1}{2b}\frac{\partial}{\partial b}b^2F_\lambda(a, b, c) = \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\chi_\mu(b, c),\\ \gamma_\lambda(b, ac) &= \frac{\partial}{\partial b}b\chi_\lambda(b, a, c) = \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\gamma_\mu(b, c). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII,4,2)}$$

Аналогично дифференцируя по a, получим формулы для малых сечений:

$$\left.\begin{aligned} \chi_\lambda(a, bc) &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial a}a^2F_\lambda(a, b, c) = \frac{1}{2}\sum(\lambda+2-\mu)A_\mu a^{\lambda-\mu}F_\mu(b, c),\\ \gamma_\lambda(a, bc) &= \frac{\partial}{\partial a}\chi_\lambda(a, bc) = \frac{1}{2}\sum(\lambda+2-\mu)(\lambda+1-\mu)\times\\ &\times A_\mu a^{\lambda-\mu}F_\mu(b, c). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII,4,3)}$$

Формулы настоящего параграфа представлены в виде кратных рядов. Нет необходимости записывать их в развернутом виде. Лучше в каждом конкретном случае при выполнении численных расчетов обрывать разложения функций γ_μ, χ_μ и F_μ на членах такого порядка, чтобы обеспечивалась желаемая точность вычислений. Соответствующий численный пример мы рассмотрим в главе, посвященной схеме де Вейса.

ГЛАВА VIII

Проблемы оценки

Краткое содержание

В этой главе, местами сложной для чтения, освещаются вопросы, связанные с практическим приложением общей теории.

В § 1 проблема оценки разбивается на две самостоятельные задачи: выбор весовой функции (коэффициентов крайгинга) и расчет дисперсии получаемой оценки (дисперсии крайгинга).

В § 2 рассматривается вариант регулярной сети опробования с предпочтительным размещением проб и рассматриваются два способа вычисления дисперсии оценки: композиция дисперсии распространения на профиль, на сечение и на слой и композиция элементарных дисперсий распространения.

В § 3 выводятся формулы для расчета дисперсии оценки в линейном случае на основе принципа почленного соответствия и рассматриваются условия их применения.

В § 4 рассматривается проблема оценки в случае регулярной сети опробования со случайной исходной точкой, учитывается влияние граничного эффекта на точность оценки и с помощью перехода к транзитивным представлениям выводятся формулы дисперсий оценки.

В § 5 изучаются чисто случайная и случайная слоевая сети опробования, рассматривается влияние граничного эффекта и сравниваются различные варианты сетей опробования.

§ 1. Проблема оценки

При решении многочисленных практических задач возникает необходимость оценить среднее значение пространственной переменной в пределах поля V по результатам дискретного опробования. Часто, например, представляет интерес величина

$$Z=\int_V p(x)\,f(x)\,dx, \qquad \text{(VIII,1,1)}$$

где $f(x)$ — пространственная переменная, а $p(x)$ — весовая функция, равная нулю вне поля V и удовлетворяющая условию:

$$\int_V p(x)\,dx=1. \qquad \text{(VIII,1,2)}$$

Величину Z мы будем называть средним содержанием, взвешенным на $p(x)$ в поле V, или, для краткости, *взвешенным содержанием в поле* V. При оценке Z исследователь располагает обычно численными значениями пространственной переменной в конечном или практически бесконечном поле V'. Когда располагают значениями не точечной переменной, а переменной $f*\check{\alpha}$, регуляризованной посредством взвешивания на весовую функцию α (например, когда известны лишь содержания в пробах ненулевого объема v), можно действовать как если бы переменная была точечной и использовать при этом собственную функцию $\gamma(h)$, регуляризованную по правилам, изложенным в гл. VI, § 3. С помощью весовой функции $\lambda(x)$, равной нулю вне поля V', определяют величину

$$Y=\int_{V'} \lambda(x)\,f(x)\,dx, \qquad \text{(VIII,1,3)}$$

численное значение которой является оценкой неизвестного истинного среднего значения Z. При этом проблема оценки предстает перед нами в виде двух весьма различных самостоятельных задач. Первая задача заключается в выборке вида оценки Y, сводящемуся к выбору весовой функции $\lambda(x)$, вторая — в расчете точности этой оценки.

В теории собственных схем величины Z и Y интерпретируются как стохастические интегралы, т. е. как случайные величины. При условии

$$\int_{V'} \lambda(x)\,dx=1 \qquad \text{(VIII,1,4)}$$

ошибка $(Y-Z)$, вносимая при принятии величины Y в качестве оценки истинного значения Z или, как мы говорим, при распространении среднего содержания в пробах V' на поле V, может характеризоваться дисперсией распространения $D(Y-Z)$, вычисляемой по общим формулам гл. VI. Расчет дисперсии распространения, которую назовем также *дисперсией оценки*, исчерпывает решение второй из указанных выше задач. Численное значение дисперсии оценки $D(Y-Z)$ зависит от выбора весовой функции $\lambda(x)$. Поэтому естественно пытаться в каждом частном случае выбрать функцию $\lambda(x)$ [удовлетворяющую условию (VIII,1,4) и равную нулю вне поля V'] так, чтобы дисперсия $D(Y-Z)$ была минимальной. Эта задача решается с помощью методов *крайгинга* [1], подробно описываемых в гл. X.

Во многих случаях нет необходимости обращаться к крайгингу и можно удовлетвориться функцией $\lambda(x)$ достаточно простого вида, выбранной a priori. Такой выбор позволяет ценой незначительной потери точности уменьшить количество трудоемких вычислительных операций.

Положим, например, что

$$p(x)=\frac{1}{V}k(x), \qquad \text{(VIII,1,5)}$$

где $k(x)$ — геометрическая переменная, связанная с полем V. В этом случае оцениваемая величина Z оказывается обычным (не взвешенным) средним содержанием в поле V. При достаточно плотной сети точечных проб, размещенных равномерно по объему поля V в точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$, вполне законной будет оценка

$$Y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i),$$

которая представляет собой простое среднее арифметическое из наблюденных значений $f(x_i)$; ее дисперсия должна выражаться формулой (VI,3,10)

$$D(Y-Z)=\frac{2}{NV}\sum_i\int_V \gamma(x-x_i)\,dx-\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\gamma(x_i-x_j)-$$
$$-\frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad \text{(VIII,1,6)}$$

Если число отобранных проб велико, вычислять дисперсию оценки непосредственно по формуле (VIII,1,6) — дело весьма утомительное; тогда желательно получить менее трудоемкие приближенные формулы. Выводом подобных формул мы займемся в § 2 и 5, здесь же опишем основные варианты построения разведочных сетей и расположения их относительно геометрического поля.

---

[1] Этот термин дан по имени Д. Г. Крайга, который в своих работах изучает рассматриваемую проблему применительно к месторождениям золота Южной Африки.

Регулярная сеть опробования с предпочтительным размещением точек в оцениваемом поле

Очень часто оцениваемое геометрическое поле выбирается как некоторая часть более обширной области, оконтуриваемая по данным самого опробования. Оцениваемое поле V представляет собой совокупность зон влияния некоторого количества проб N, выделяемых по определенному признаку. При таком способе построения поля каждая проба будет занимать в своей зоне влияния некоторое предпочтительное положение. Например, в случае двумерного пространства при прямоугольной сети опробования пробы расположены в центрах (или при другом варианте — в вершинах) зон влияния, составляющих поле V. Понятно, что форма поля должна полностью согласоваться с геометрическим характером сети опробования.

Регулярная сеть опробования со случайным размещением исходной точки

Часто поле V рассматривается в его естественных границах, а не выбирается (или оконтуривается) исследователем. В качестве такого примера приведем случай изучения разведуемого рудного тела целиком, а не некоторой его части. В подобном случае поле V, как правило, заранее неизвестно, и возможность того, что сеть опробования займет по отношению к этому полю предпочтительное положение, практически исключена. Часть периферических проб ляжет совсем близко к границам поля, часть может оказаться далеко от них. Обычно можно считать, что сеть опробования как бы случайно набрасывается на оцениваемое геометрическое поле, или, другими словами, что некоторая точка сети, принимаемая за исходную, располагается случайно в пределах ячейки сети.

Случайная сеть и случайная слоевая сеть

Хотя это и не желательно, но иногда пробы размещаются произвольно. Когда каждая проба независимо от других размещается случайно в пределах поля V, говорят о чисто случайном размещении проб и о чисто случайной сети опробования. Гораздо чаще, однако, не затрудняя себя размещением проб по регулярной сети, стараются выдержать более или менее постоянную плотность размещения проб в пределах поля V. В этом случае можно считать, что поле V разделено на равные зоны влияния, а пробы случайно размещены в каждой из этих зон. Такую сеть принято называть *случайной слоевой*.

Из трех рассмотренных вариантов размещения проб в поле V первый — наиболее важный для практических приложений и одновременно самый трудный для изучения. Этому варианту посвящены следующие два параграфа, два других варианта рассматриваются в § 4 и 5.

§2. Регулярные сети опробования с предпочтительным размещением проб

Регулярную сеть называют *сетью с предпочтительным размещением проб*, если геометрическое поле V слагается из N равных многогранников v_i, называемых *зонами влияния*, а точки отбора проб размещаются либо в центрах зон влияния (центральное размещение), либо в их вершинах (краевое размещение). Будем предполагать, что пробы точечные, поскольку от неточечных проб всегда можно перейти к точечным, если вместо самой функции $f(x)$ рассматривать результат ее регуляризации посредством взвешивания на функцию опробования.

В качестве оценки среднего содержания в поле V

$$Z = \frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx$$

принимаем среднее арифметическое из содержаний в N пробах, т. е.

$$Y = \frac{1}{N}\sum_i f(x_i).$$

Дисперсия оценки, которую мы обозначим символом σ_N^2, определяется по общей формуле (VIII,1,6):

$$\sigma_N^2 = D(Y-Z) = \frac{2}{NV}\sum_i\int_V \gamma(x-x_i)\,dx - \frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i-x_j) - \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad \text{(VIII,2,1)}$$

Член $\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i-x_j)$, вычисляемый суммированием по двум индексам, представляет собой приближенное значение первого члена, который в свою очередь дает приближенное значение двойного интеграла, стоящего на третьем месте.

Полученная в теории транзитивных представлений формула (II,1,12) аналогична формуле (VIII,2,1), хотя первая из них несколько проще. Сходство этих формул не случайно — оно свидетельствует об их глубоком родстве, бóльшая сложность формулы (VIII,2,1) объясняется предпочтительным размещением проб, которое не имеет эквивалента в теории транзитивных представлений.

При построении приближенных формул возможны два способа. Первый состоит в простом переносе в теорию собственных схем результатов, полученных в гл. II, в то время как второй способ является специфическим и не имеет аналога в теории транзитивных представлений.

Композиция дисперсий распространения на профиль, на сечение и на слой

В сети опробования легко можно выделить плоскости и профили наибольшей плотности размещения проб. Рассмотрим, например, случай трехмерного пространства. Обычно, определив средние содержания по пробам, отобранным в профилях, принимают эти содержания в качестве оценок истинных содержаний по профилям. В свою очередь среднее содержание по профилям, расположенным в одной плоскости, приписывают соответствующему сечению и, наконец, среднее содержание по всем сечениям берут в качестве среднего содержания для всего поля V в целом. При этом на всех стадиях распространения известных содержаний на неопробованные участки поля вносят некоторые ошибки распространения, которые, естественно, как-то накапливаются. Если все эти ошибки независимы (т. е. ковариации ошибок равны нулю), дисперсия результирующей ошибки будет просто суммой трех дисперсий распространения, т. е.

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_3}^2. \qquad \text{(VIII,2,2)}$$

Дисперсии распространения — $\sigma_{N_1}^2$, $\sigma_{N_2}^2$ и $\sigma_{N_3}^2$ — назовем *дисперсиями распространения на профиль, на сечение и на слой соответственно*.

Конечно, принцип композиции дисперсий (VIII,2,2) справедлив лишь в той мере, в какой все три ошибки аналогии действительно являются независимыми или хотя бы могут приближенно рассматриваться в качестве

независимых. Интуиция подсказывает, что это условие соблюдается по крайней мере в тех случаях, когда поведение собственных функций в окрестностях нуля не слишком регулярно. Подобное утверждение трудно доказать расчетами, как мы это сделали с помощью ограниченных разложений в теории транзитивных представлений. Но полная аналогия между дисперсиями распространения, выявленная при сравнении общих формул (II,1,12) и (VIII,2,1), служит дополнительным аргументом в пользу этого утверждения, и мы будем считать, что с некоторым приближением формула (VIII,2,2) верна для обычно используемых собственных функций [1].

Основное значение принципа композиции дисперсий распространения на профиль, сечение и слой состоит в том, что использование этого принципа позволяет свести расчет любых дисперсий распространения к последовательному нахождению нескольких дисперсий распространения в одномерном пространстве. Однако перед тем как изложить конкретные способы оценки точности среднего, рассмотрим второй принцип приближенного расчета дисперсий, существенно отличающийся от первого, но в равной степени применимый в практических приложениях.

Композиция элементарных дисперсий распространения

Когда пробы расположены в центрах зон влияния, общая формула (VIII,2,1) может быть представлена в ином виде. Обозначим символом Z_i среднее содержание в зоне влияния v_i с центром в точке x_i, где отобрана точечная проба с содержанием $f(x_i)$. Дисперсия распространения σ_E^2, характеризующая ошибку оценивания среднего содержания Z_i величиной $f(x_i)$, определяется выражением

$$\sigma_E^2 = D[Z_i - f(x_i)] = \frac{2}{v_i}\int_{v_i}\gamma(x-x_i)\,dx - \frac{1}{v_i^2}\int_{v_i}\int_{v_i}\gamma(x-x')\,dx\,dx' \qquad \text{(VIII,2,3)}$$

и называется *элементарной дисперсией распространения пробы x_i на зону ее влияния v_i*. Так как все зоны влияния имеют одинаковый объем, общая ошибка оценки Z по среднему значению содержания во всех пробах равна среднему арифметическому всех частных ошибок ε_i, вносимых при оценке содержаний Z_i в каждой зоне влияния v_i, т. е.

$$Z - Y = \frac{1}{N}\sum_i [Z_i - f(x_i)] = \frac{1}{N}\sum_i \varepsilon_i.$$

Дисперсия этой ошибки выражается формулой, эквивалентной формуле (VIII,2,1):

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j} E(\varepsilon_i\varepsilon_j). \qquad \text{(VIII,2,4)}$$

Второй член правой части полученного равенства представляет собой среднее значение ковариаций распространения, которые могут быть вычислены по общим формулам гл. VI. Если величина этого члена ничтожно мала

[1] Мера выполнимости соотношения (VIII,2,2) зависит не только от изменчивости признака, но и от характера сети опробования. Так, например, чем неравномернее расположение проб в профилях, профилей в сечениях и сечений в объеме V, тем правомернее суммирование дисперсий распространения при нахождении дисперсии σ_N^2. — *Прим. ред.*

и им можно пренебречь, формула (VIII,2,4) становится очень простой:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2. \qquad \text{(VIII,2,5)}$$

Она выражает принцип композиции элементарных дисперсий и справедлива лишь в случае независимости ошибок, с которыми оцениваются средние содержания в зонах влияния по пробам, отобранным в центрах этих зон.

Принципы приближенного расчета дисперсий оценки, выраженные формулами (VIII,2,2) и (VIII,2,5), очевидно, несовместимы, и в каждом конкретном случае должен быть выбран какой-нибудь один принцип расчета. Действительно, в общем случае сумма ковариаций распространения, входящая в формулу (VIII,2,4), не настолько мала, чтобы ею можно было пренебречь. Представим в двумерном пространстве сеть опробования с очень вытянутой прямоугольной ячейкой. Расстояние между двумя соседними точками отбора проб x_i и x_j на профиле слишком мало по сравнению с длиной зон влияния, чтобы оценки зон влияния v_i и v_j могли быть независимыми одна от другой. За исключением частных случаев (например, в случаях кубической или квадратной сети опробования в изотропном поле или адаптированной сети при наличии анизотропии), формула (VIII,2,5) неприменима.

Можно сказать, что принцип композиции элементарных дисперсий распространения играет второстепенную роль по сравнению с принципом композиции дисперсий распространения на сечение и слой. Далее будем проводить расчеты главным образом по формуле (VIII,2,2). Принцип композиции элементарных дисперсий распространения можно попытаться использовать при вычислении дисперсий распространения на профиль $\sigma_{N_1}^2$, хотя, как мы увидим, даже в линейном случае применение формулы (VIII,2,5) далеко не всегда дает хорошие результаты.

Пример. Рассмотрим разведку жилы или пласта горными выработками, пройденными на N горизонтах. Пусть l_i — длина штрека на i-ом горизонте, H — расстояние между соседними горизонтами по падению рудного тела. Каждый штрек в свою очередь опробован с постоянным интервалом между точками пробоотбора. Суммарное число проб во всех N горизонтах равно n. Обозначим символом $\gamma_2(h)$ полувариограмму содержаний по точечным пробам, а символом $\gamma_1(h, l)$ — полувариограмму, полученную из $\gamma_2(h)$ операцией восхождения по длине горной выработки l (полувариограмма $\gamma_1(h, l)$ зависит от l).

Пусть $\sigma_{E_2}^2$ — дисперсия распространения содержания в точечной [1] пробе на отрезок профиля, являющийся зоной ее влияния, а $\sigma_{E_1}^2$ — дисперсия распространения содержания в штреке l на зону его влияния, которую можно представить в виде прямоугольника со сторонами H и l. Обе они рассчитываются по формулам для случая одномерного пространства: одна — с помощью полувариограммы $\gamma_2(h)$, другая — с помощью полувариограммы $\gamma_1(h, l)$. Дисперсия оценки для всего рудного тела равна

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma_{E_2}^2 + \frac{\sum_i l_i^2\sigma_{E_1}^2(l_i)}{\left[\sum_i l_i\right]^2}. \qquad \text{(VIII,2,6)}$$

Если длина штреков на всех горизонтах одинакова ($l_1 = l_2 = \ldots l$), то формула (VIII,2,6) примет особенно простой вид:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma_{E_2}^2 + \frac{1}{N}\sigma_{E_1}^2.$$

[1] Мы говорим о точечных пробах, рассматривая жильное месторождение как двумерное. Реальное месторождение имеет, конечно, и третье измерение, но его можно исключить с помощью операции восхождения по направлению мощности рудного тела. Поэтому, говоря о точечном содержании, мы фактически имеем в виду линейный запас, полученный по пересечению жилы на всю мощность.

§ 3. Расчет дисперсии оценки

Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что можно ограничиться расчетом дисперсий распространения для линейного случая. Пусть $\gamma(h)$, $\chi(h)$ и $F(h)$ — собственная функция и две введенные ранее вспомогательные функции

$$\left.\begin{aligned} &\chi(h)=\frac{1}{h}\int_0^h \gamma(u)\,du \\ \text{и}\quad &F(h)=\frac{2}{h^2}\int_0^h u\chi(u)\,du=\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-u)\,\gamma(u)\,du. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII,3,1)}$$

Если a — шаг опробования профиля, а N — суммарное число проб, расположенных в центрах зон влияния, т. е. в точках профиля

$$x_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)a,$$

то геометрическое поле представляет собой отрезок прямой $(0, L)$, где $L=Na$.

Применительно к таким условиям

$$\int_0^L \gamma(x-x_i)\,dx=x_i\chi(x_i)+(L-x_i)\,\chi(L-x_i),$$

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h \gamma(x-x')\,dx\,dx'=F(h),$$

так что общая формула (VIII,2,1) записывается как

$$\sigma_N^2=\frac{4}{NL}\sum_i x_i\chi(x_i)-F(L)-\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i-x_j). \qquad \text{(VIII,3,2)}$$

Чтобы упростить это выражение, заметим, что

$$\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i-x_j)=\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)\,\gamma(ka).$$

Сделав соответствующие подстановки в формуле (VIII,3,2), получим

$$\sigma_N^2=\frac{4}{NL}\sum_{i=1}^{N} x_i\chi(x_i)-\frac{4}{L^2}\int_0^L x\chi(x)\,dx+$$
$$+\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-x)\,\gamma(x)\,dx-\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)\,\gamma(ka). \qquad \text{(VIII,3,3)}$$

Таким образом, дисперсия оценки представлена в виде суммы двух остаточных членов, равных ошибкам численного интегрирования и аналогичных остаточному члену ряда Эйлера — Маклорена. Разделив члены, содержащие множители $\frac{1}{L}$ и $\frac{1}{N}$, и члены с $\frac{1}{L^2}$ и $\frac{1}{N^2}$, представим дисперсию оценки в виде следующего разложения:

$$\sigma_N^2=T_1+T_2,$$

где

$$T_1=\frac{2}{L}\int_0^L \gamma(x)\,dx-\frac{2a}{L}\left\{\gamma(a)+\gamma(2a)+\ldots+\gamma[(N-1)a]+\frac{1}{2}\gamma(Na)\right\},$$

$$T_2=\frac{4a}{L^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\chi(x_i)-\frac{4}{L^2}\int_0^L x\chi(x)\,dx-\frac{2}{L^2}\int_0^L x\gamma(x)\,dx+ \qquad \text{(VIII,3,4)}$$
$$+\frac{2a}{L^2}\left\{a\gamma(a)+2a\gamma(2a)+\ldots+(N-1)\,a\gamma[(N-1)a]+\frac{1}{2}Na\gamma(Na)\right\}.$$

Выражения T_1 и T_2 одинаково интерпретируются и обладают аналогичными свойствами. Поэтому, чтобы избежать сложных выкладок, мы детально рассмотрим только более простой из них — T_1. Воспользуемся тем же методом, что и в гл. II, и преобразуем выражение T_1, равное разности между точным и приближенным значениями интеграла, с помощью формулы Эйлера — Маклорена (II,2,1). Поскольку в общем случае собственная функция имеет особенности при $h=0$, эта формула применима не на всем интервале $(0, L)$, а лишь на интервале (a, L). Учитывая, что $\gamma(0)=0$, запишем

$$T_1=\frac{2}{L}\int_0^a \gamma(x)\,dx-\frac{a}{L}\gamma(a)+\frac{2}{L}\left\{\int_a^L \gamma(x)\,dx-\frac{a}{2}\gamma(a)-\right.$$
$$\left.-a\gamma(2a)-\ldots-a\gamma[(N-1)a]-\frac{a}{2}\gamma(Na)\right\}.$$

Будем считать, что собственная функция $\gamma(x)$ удовлетворяет необходимым требованиям непрерывности и дифференцируемости на отрезке (a, L), и посему выражение в фигурных скобках может быть разложено в ряд Эйлера — Маклорена. Запишем

$$T_1=\frac{2}{L}\int_0^a \gamma(x)\,dx-\frac{a}{L}\gamma(a)+\frac{2}{L}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{B_{2p}a^{2p}}{(2p)!}\times$$
$$\times\left[\gamma^{(2p-1)}(L)-\gamma^{2p-1}(a)\right]. \qquad \text{(VIII,3,5)}$$

В общем случае выражение (VIII,3,5) следует рассматривать как ограниченное разложение, а не полный ряд. В разложении фигурируют члены двух различных групп. Первая группа содержит интеграл $\int_0^a \gamma(x)\,dx$ и производные нечетного порядка $\gamma^{(2p-1)}(a)$; все ее члены определяются значениями собственной функции на отрезке $(0, a)$. Эта группа членов эквивалентна элементу распространения $T_0(a)$ в формуле (II,2,5). Вторая группа зависит только от значений, принимаемых производными $\gamma^{(2p-1)}(L)$ в точке L, и соответствует элементу флуктуаций $T_Z(a)$ в той же формуле. Элемент флуктуаций, как и в теории транзитивных представлений, мы рассматривать не будем. Вклад этого элемента в случае собственных схем несколько меньше, так как темп возрастания обычно используемых собственных функций $\gamma(h)$ замедляется с увеличением $|h|$ и практически производные в точке $L=Na$ всегда (кроме случаев очень малых N) ничтожно малы по сравнению с производными в точке a.

Правило почленного соответствия и принцип композиции элементарных дисперсий распространения

Пусть собственная функция на интервале $(-a\leqslant h\leqslant a)$ представлена ограниченным разложением

$$\gamma(h)=\sum C_\lambda|h|^\lambda. \qquad \text{(VIII,3,6)}$$

Если пренебрегать элементом флуктуаций, можно считать, что каждый член разложения с $|h|^\lambda$ вносит в разложение T_1 вклад

$$T_1(h^\lambda) = \frac{1}{N} R_\lambda a^\lambda, \qquad \text{(VIII,3,7)}$$

где R_λ — коэффициент, не зависящий от N и a (в чем легко убедиться, подставив h^λ вместо $\gamma(h)$ в формуле (VIII,2,5)).

Аналогично каждый такой член вносит в T_2 (также при условии исключения элемента флуктуаций) вклад

$$T_2(h^\lambda) = \frac{1}{N^2} R'_\lambda a^\lambda, \qquad \text{(VIII,3,8)}$$

где R'_λ — коэффициент, не зависящий от N и a.

Итак, если разложение (VIII,3,6) применимо для расстояний h, меньших или равных шагу сети a, можно получить ограниченное разложение дисперсии оценки, пригодное в окрестности $a = 0$, применив правило почленного соответствия, выражаемое формулой

$$\sigma_N^2 = \sum_\lambda C_\lambda [T_1(h^\lambda) + T_2(h^\lambda)] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum C_\lambda R_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2} \sum C_\lambda R'_\lambda a^\lambda. \qquad \text{(VIII,3,9)}$$

Прежде чем заняться определением коэффициентов R_λ и R'_λ, входящих в формулу (VIII,3,9), укажем условия, при которых разложение (VIII,3,6) применимо только до расстояний, меньших $h = a$. Такая ситуация часто возникает при редкой сети наблюдений, когда шаг сети a велик. Мы встретим такой пример в гл. XI. Собственная функция $\gamma_\lambda(r)$, получаемая из r^λ операцией восхождения первого порядка, представляется в виде разложения (VII,2,3), если r больше мощности восхождения l, или разложения (VII,2,4), если r меньше l. Когда шаг сети a больше мощности l, разложение (VII,2,4) не применимо при $h = a$, и, следовательно, правило соответствия, выражаемое формулой (VIII,3,9), не может быть использовано.

В этом случае задача решается с помощью формулы (VIII,2,5), т. е. на основе принципа композиции элементарных дисперсий распространения. Так как скорость изменения собственной функции меняется внутри интервала $(0, a)$, можно ожидать, что ковариации распространения $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ будут ничтожно малы, а соответствующие ошибки распространения содержаний в пробах на зоны влияния длиной a — независимы. Расчетным путем можно показать, что способ определения дисперсии с помощью формулы (VIII,2,5) приемлем в тех случаях, когда поведение собственной функции $\gamma(h)$ в окрестностях нуля не слишком регулярно.

На основе всего сказанного выше сформулируем следующее практическое правило:

Если собственная функция $\gamma(h)$ представлена ограниченным разложением

$$\gamma(h) = \sum C_\lambda h^\lambda \qquad \text{(VIII,3,10)}$$

на интервале $(0 \leqslant h \leqslant a)$, где a — шаг сети опробования, то ограниченное разложение по a дисперсии оценки получается в соответствии с принципом почленного соответствия и выражается формулой

$$\sigma_N^2 = \sum_\lambda C_\lambda \left[\frac{1}{N} R_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2} R'_\lambda a^\lambda \right]. \qquad \text{(VIII,3,11)}$$

В том случае, когда разложение (VIII,3,10) не приемлемо вплоть до $h = a$, дисперсия оценки в соответствии с принципом композиции элементарных дисперсий распространения рассчитывается по формуле

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2 = \frac{1}{N} \left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) \right]. \qquad \text{(VIII,3,12)}$$

Осталось рассчитать численные значения коэффициентов R_λ и R'_λ, входящих в формулу (VIII,3,11).

Точная формулировка правила соответствия

Чтобы определить коэффициенты R_λ ограниченного разложения дисперсии оценки, можно взять вариограмму $\gamma(h)$, нерегулярная часть которой содержит всего один член с h^λ, и воспользоваться методом идентификации. Такой расчет был произведен с помощью функций Лагерра. Так как этот расчет весьма громоздок и сам по себе интереса не представляет, приведем лишь окончательные результаты.

Правило соответствия. Всякому члену ограниченного разложения вариограммы вблизи $h = 0$, содержащему h^λ, соответствуют два члена в ограниченном разложении дисперсии оценки:

где

$$\left.\begin{aligned} T_1(h^\lambda) &= \frac{1}{N} 2 \sin\frac{\lambda\pi}{2} \frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda} a^\lambda, \\ T_2(h^\lambda) &= \frac{1}{N^2} \frac{1-\lambda-2^{-\lambda}}{(1+\lambda)(2+\lambda)} 2\cos\frac{\lambda\pi}{2} B_{2+\lambda} a^\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII,3,13)}$$

где N — число проб, отобранных по регулярной сети с шагом a.

Таким образом, в случае собственных схем дисперсия распространения содержит два члена: один, основной, с коэффициентом $\frac{1}{N}$, другой — с коэффициентом $\frac{1}{N^2}$. Первый член рассчитывается так же, как и в теории транзитивных представлений. Второй член не имеет аналога в этой теории, и его появление связано с конечным характером операций восхождения в случае собственных схем (восхождение по конечной мощности, суммирование по конечному числу проб). Подобным же образом при осуществлении операции восхождения над r^λ (гл. VII), кроме члена

$$\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot \frac{r^{1+\lambda}}{l},$$

соответствующего подобному члену при восхождении в теории транзитивных представлений, появляется член более высокого порядка, содержащий $r^{\lambda+2}/l^2$. При увеличении N или l численное значение этого члена становится ничтожно малым, и формулы восхождения для собственных схем асимптотически стремятся к формулам восхождения в случае транзитивных представлений.

В приложениях представляют интерес собственные схемы с λ целым (четным и нечетным), а также собственные схемы, содержащие члены вида $x^{2k} \ln x$. Рассмотрим эти варианты.

1. Целое четное λ ($\lambda = 2k$)

В этом случае члены ограниченного разложения дисперсии оценки определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} T_1(x^{2k}) &= 0, \\ T_2(x^{2k}) &= \frac{1}{N^2} \frac{(-1)^{k+1}(2k-1+2^{-2k})}{(2k+1)(k+1)} B_{2+2k} a^{2k}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII,3,14)}$$

Таким образом, собственная функция $\gamma(h)$, содержащая только члены с x^{2k}, т. е. очень регулярная в начале координат, приводит не к нулевой дисперсии, как это было в теории транзитивных представлений, а к дисперсии, содержащей члены с a^{2k}/N^2.

2. Целое нечетное λ ($\lambda = 2k-1$)

При целом нечетном λ получаем обратную картину:

$$\left.\begin{aligned} T_1(x^{2k-1}) &= \frac{1}{N}\frac{(-1)^{k+1}B_{2k}}{k}a^{2k-1}, \\ T_2(x^{2k-1}) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII,3,15)}$$

3. Логарифмический член вида $x^{2k}\ln x$

Значения T_1 и T_2 в этом случае можно получить, продифференцировав выражение (VIII,3,13) по λ и подставив затем $\lambda = 2k$. Простое выражение получается только для T_1:

$$T_1(x^{2k}\ln x) = \frac{(-1)^k}{N}\frac{\pi}{1+2k}B_{1+2k}a^{2k}. \qquad \text{(VIII,3,16)}$$

Замечание. В приложениях членом T_2 чаще всего можно пренебречь. Действительно, если N велико, то численное значение этого члена, содержащего $\frac{1}{N^2}$, мало по сравнению с величиной члена T_1. Конечно, эти рассуждения справедливы лишь при больших значениях N. Но и сами формулы, подобные (VIII,3,13), являются приближенными, так как в них не учитывается элемент флуктуаций, величина которого ничтожно мала тоже лишь при больших значениях N. Если, например, имеется единственная проба, расположенная в центре отрезка, то дисперсия оценки совпадает с элементарной дисперсией распространения и определяется формулой

$$\sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a).$$

При этом правило соответствия выражается в виде

$$T(x^\lambda) = \left[\frac{2^{1-\lambda}}{\lambda+1} - \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right]a^\lambda, \qquad \text{(VIII,3,17)}$$

что существенно отличается от (VIII,3,13).

Трудно получить решение, когда $N \neq 1$, но еще слишком мало, чтобы можно было пренебречь элементом флуктуаций. В этом случае можно произвести расчет, непосредственно воспользовавшись формулой (VIII,3,2), или, что проще, ограничиться в первом приближении композицией элементарных дисперсий распространения по формуле (VIII,3,13). Последним способом можно воспользоваться, если только значение λ не очень велико.

Краевое размещение проб

Приведенные выше формулы получены для случая, когда поле L является суммой N отрезков влияния a и в центре каждого отрезка расположена проба. Практически часто в качестве оцениваемого поля берут отрезок L, заключенный между крайними пробами; тогда общее число проб, отбираемых с шагом a на отрезке $L = Na$, будет равным $N+1$. Координаты точек отбора проб определяют из равенства

$$x_i = ia \quad (i = 0, 1, \ldots, N).$$

Так как зоны влияния крайних проб равны $\frac{1}{2}a$, то в качестве оценки среднего содержания по всему отрезку возьмем сумму

$$Y = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2}f(x_N)\right].$$

Дисперсия оценки, которую мы обозначим σ_N^2 (хотя в действительности имеется $N+1$ проб), выражается формулой, аналогичной (VIII,3,2):

$$\sigma_N^2 = \frac{4}{N^2}\left[\sum_{k=1}^{N-1} k\chi(ka) + \frac{1}{2}N\chi(Na)\right] - \frac{1}{N^2}\left[2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\gamma(ka) + \frac{1}{2}\gamma(Na)\right] - F(Na). \qquad \text{(VIII,3,18)}$$

Исходя из этой формулы, можно разработать те же способы приближенной оценки дисперсии, что и при центральном расположении проб. В частности, правило соответствия запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} T_1(x^\lambda) &= \frac{1}{N}2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda}a^\lambda, \\ T_2(x^\lambda) &= -\frac{1}{N^2}2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\frac{\lambda+3}{(\lambda+1)(\lambda+2)}B_{2+\lambda}a^\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII,3,19)}$$

Так как члены с множителем $\frac{1}{N}$ в обоих случаях одинаковы, а члены с множителем $\frac{1}{N^2}$ обычно не учитываются, сформулируем следующее практическое правило: дисперсия оценки поля $L = Na$ по $N+1$ пробам в случае краевого их расположения рассчитывается по тем же формулам, что и дисперсии оценки этого поля по N пробам в случае центрального их расположения в зонах влияния.

Этим правилом можно руководствоваться также и при малом числе проб N (но больше единицы) и даже тогда, когда ограниченное разложение собственной функции $\gamma(h)$ не применимо до $h = a$. В последнем случае дисперсия оценки определяется по формуле

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 = \frac{1}{N}\left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a)\right], \qquad \text{(VIII,3,20)}$$

где σ_E^2 — элементарная дисперсия распространения центральной пробы на зону ее влияния при том же шаге сети.

Только при $N = 1$, т. е. когда требуется оценить отрезок длины a по двум пробам, расположенным на его концах, необходимо использовать специальную формулу

$$\sigma_1^2 = \sigma_F^2 = 2\chi(a) - \frac{1}{2}\gamma(a) - F(a), \qquad \text{(VIII,3,21)}$$

вытекающую из общей формулы (VIII,3,18).

Дисперсия $\sigma_F^2 = \sigma_1^2$ может быть названа *элементарной дисперсией распространения при краевом размещении проб*. Эту дисперсию не следует принимать за элементарную дисперсию распространения при центральном размещении проб σ_E^2, которую и используют во всех случаях, когда применяют принцип композиции элементарных дисперсий распространения. Именно величина σ_E^2, а не σ_F^2, входит в формулу (VIII,3,20).

§ 4. Регулярная сеть опробования со случайным размещением исходной точки

Предположим, что конечное поле V служит носителем собственной схемы $f(x)$, а в его пределах произвольно без учета геометрии поля размещена регулярная сеть опробования. Так как по условию функция $f(x)$ равна нулю вне поля V, сеть опробования можно считать бесконечной. Произвольность расположения сети равносильна тому, что одна из точек

отбора проб, u, принимаемая за исходную, случайно выбрана внутри параллелепипеда, равного ячейке сети опробования. Таким образом, все остальные пробы отобраны в точках $x_k = u + ka = (u_1 + k_1a_1 \ldots, u_n + k_na_n)$, где $a = (a_1, \ldots a_n)$ — шаг сети, а $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — вектор с целочисленными компонентами. Такое размещение проб не отличается от уже рассмотренного нами в гл. II при изучении теории оценок с позиций транзитивных представлений. Это облегчает решение соответствующей проблемы теории оценок собственных схем.

Обозначим символом $K(h)$ геометрическую ковариограмму поля V. Математическое ожидание ковариограммы $g(h)$ пространственной переменной $f(x)$ в поле V может быть получено с помощью собственной функции $\gamma(h)$. Из соотношения (VI,5,2) имеем:

$$g(h) = [m^2 + \sigma^2(0 \mid V)]\, K(h) - K(h)\, \gamma(h). \qquad \text{(VIII,4,1)}$$

Ошибка, допускаемая при оценке количества металла —

$$Q = \int_V f(x)\, dx$$

— характеризуется транзитивной дисперсией оценки, которую обозначим символом σ_Q^2. Применим к ковариограмме $g(h)$ оператор ε_a, определяемый формулой

$$\varepsilon_a(g) = ag(0) + 2a \sum_{r=1}^{\infty} g(pa) - 2 \int_0^{\infty} g(h)\, dh.$$

В результате получим

$$\sigma_Q^2 = [m^2 + \sigma^2(0 \mid V)]\, \varepsilon_a(K) - \varepsilon_a(K\gamma). \qquad \text{(VIII,4,2)}$$

Способ такого расчета дисперсии рассмотрен в гл. II. Заметим, что транзитивную дисперсию оценки объема V (если объем оценивается по той же сети опробования) также легко найти с помощью оператора ε_a. Обозначив геометрическую дисперсию символом σ_V^2, запишем, что

$$\sigma_V^2 = \varepsilon_a(K). \qquad \text{(VIII,4,3)}$$

Имея в виду равенство (VIII,4,3), приходим к следующему соотношению между дисперсией оценки количества металла и геометрической дисперсией:

$$\sigma_Q^2 = [m^2 + \sigma^2(0 \mid V)]\, \sigma_V^2 - \varepsilon_a(K\gamma). \qquad \text{(VIII,4,4)}$$

Что касается среднего содержания $m = Q/V$, то оно оценивается с относительной ошибкой, дисперсия которой равна σ_m^2/m^2. Далее пространственная переменная $f(x)$ должна рассматриваться как независимая от своего поля [в смысле внутренней независимости (IV,3,1)], так как именно ее внутренняя независимость от поля V является необходимым условием для того, чтобы $f(x)$ могла быть описана собственной схемой. Следовательно, и для собственных схем действует соотношение (IV,4,2)

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}.$$

Это соотношение, как известно, означает, что оценки объема и среднего содержания получены как бы независимо одна от другой. Заменив дисперсию σ_Q^2 ее выражением из (VIII,4,4), учтя очевидное соотношение $Q = mV$ и обозначив символом σ^2 дисперсию $\sigma^2(0 \mid V)$ функции $f(x)$ в поле V, получим окончательное выражение:

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_V^2}{V^2} - \varepsilon_a\left(\frac{K\gamma}{Q^2}\right). \qquad \text{(VIII,4,5)}$$

Если поле V известно точно, член $\frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_V^2}{V^2}$, который отражает влияние геометрической ошибки на точность оценки содержания, обращается в нуль, и формула (VIII,4,5) приобретает очень простой вид:

$$\sigma_m^2 = -\varepsilon_a\left(\frac{K\gamma}{V^2}\right). \qquad \text{(VIII,4,6)}$$

Дисперсия оценки собственной схемы вычисляется как транзитивная дисперсия оценки по ковариограмме $[-K\gamma/V^2]$. В общем случае, однако, объем V не известен a priori, и к дисперсии оценки надо прибавить член $\frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_V^2}{V^2}$, учитывающий неточность границ поля.

Следует помнить, что формулы (VIII,4,5) и (VIII,4,6) применимы, если только выполняется условие внутренней независимости функции $f(x)$ и поля V, т. е. практически при отсутствии зональности (именно при этом условии вообще применима теория собственных схем). Если условие внутренней независимости не выполняется, следует обратиться к транзитивным представлениям совместной изменчивости двух пространственных переменных (гл. IV). Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. X.

Сравнение различных вариантов регулярных сетей

Предположим, что пространственная и геометрическая переменные изотропны, а ковариограмма пространственной переменной $\gamma(h)$ может быть при данной сети опробования представлена в виде ограниченного разложения с основным членом, содержащим r^λ. Геометрическая ковариограмма $K(h)$ в свою очередь может быть в соответствии с формулой (III,2,5) представлена разложением

$$K(r) = V - Sr + \ldots$$

в интервале $(-a \leqslant r \leqslant a)$, если только нерегулярные изменения контура поля V в пределах расстояний, соизмеримых с шагом сети a, характеризуются незначительной амплитудой.

В этом случае справедливо разложение

$$-\frac{K\gamma}{V^2} = -\frac{\gamma}{V} + \frac{S}{V^2} r\gamma + \ldots = -\frac{r^\lambda}{V} + \frac{S}{V^2} r^{\lambda+1} + \ldots.$$

Так как основная часть разложения вариограммы $[-K\gamma/V^2]$ представлена членом $[-r^\lambda/V]$, то легко показать, что основная часть дисперсии σ_m^2, определяемой формулой (VIII,4,6), равна основной части дисперсии оценки, рассчитанной для той же сети опробования в случае предпочтительного размещения проб. Таким образом, различие дисперсии этих двух вариантов сети в основном обусловлено геометрическим членом $\frac{\sigma^2\sigma_V^2}{m^2V^2}$, отражающим влияние некоторой неопределенности границ поля V на погрешность оценки среднего содержания при случайном размещении регулярной сети. Обратим внимание на то, что ошибка определения объема влияет на ошибку определения содержания даже в условиях принятой нами гипотезы внутренней независимости пространственной переменной и геометрического поля.

§ 5. Случайная сеть и случайная слоевая сеть

Случайная сеть

При чисто случайной сети опробования точка взятия каждой из N проб случайно и независимо от остальных выбирается в пределах всего поля V.

Дисперсия оценки

$$Y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i),$$

где x_i — случайно выбранные точки взятия проб, равна математическому ожиданию дисперсии $D(Y-Z)$, определяемой общей формулой (VIII,2,1), когда N точек x_i случайно выбираются в объеме поля V.

Эту же дисперсию можно найти, исходя из следующих элементарных соображений. Пусть $m(V)$ — среднее значение функции $f(x)$ в пределах поля V (среднее значение, которое мы хотим оценить), определяемое стохастическим интегралом

$$m(V)=\frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx.$$

Ошибка оценки определяется как разность

$$Y-m(V)=\frac{1}{N}\sum_i [f(x_i)-m(V)].$$

Так как точки x_i размещены в пределах поля V случайно, корреляция между разностями $f(x_i)-m(V)$ в поле V отсутствует и дисперсия оценки будет равной

$$\sigma_N^2=D[Y-m(V)]=\frac{1}{N}\sum_i D[f(x_i)-m(V)].$$

Но дисперсия $D[f(x)-m(V)]$ — не что иное, как дисперсия $\sigma^2(0\,|\,V)$ содержаний $f(x)$ в пределах поля V, поэтому

$$\sigma_N^2=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx'=\frac{1}{N}\sigma^2(0\,|\,V), \qquad \text{(VIII,5,1)}$$

т. е. дисперсию оценки для чисто случайной сети находят путем деления на N (число отобранных проб) дисперсии $\sigma^2(0|\,V)$ переменной $f(x)$ в пределах поля V. Этот результат вполне соответствует ожидаемому, так как значения $f(x_i)$ по отношению к случайному выбору точек x_i являются случайными величинами с дисперсией $\sigma^2(0|\,V)$.

Случайная слоевая сеть

При случайной слоевой сети поле V как бы делится на равные зоны влияния v_i, а точка взятия пробы x_i в зоне v_i выбирается случайно. Следует различать, однако, два варианта в зависимости от того, известны или не известны границы поля V до проведения опробования.

Если поле V известно a priori, то, как правило, можно считать, что оно представляется суммой зон влияния v_i, которые, таким образом, не выходят за пределы поля V. Дисперсию оценки для этого варианта можно определить как математическое ожидание общего выражения (VIII,2,1), считая точки x_i случайными и равновозможными в своих зонах влияния v_i.

Еще проще получить дисперсию оценки непосредственно. Пусть Z_i — среднее содержание в зоне v_i. Тогда среднее содержание во всем поле V будет равно

$$m(V)=\frac{1}{N}\sum_i Z_i,$$

а ошибку оценки запишем как

$$Y-m(V)=\frac{1}{N}\sum_i [f(x_i)-Z_i].$$

Разность $[f(x_i)-Z_i]$ представляет собой некоррелированную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(0\,|\,V)$; следовательно,

$$\sigma_N^2=\frac{1}{Nv^2}\int_v\int_v \gamma(x-x')\,dx\,dx'=\frac{1}{N}\sigma^2(0\,|\,v), \qquad \text{(VIII,5,2)}$$

т. е. когда поле V известно a priori, дисперсия оценки по случайной слоевой сети в N раз меньше дисперсии $\sigma^2(0\,|\,v)$ переменной $f(x)$ в пределах зоны влияния $v=\frac{V}{N}$ (N — число проб, отобранных в поле V).

Из сравнения формул (VIII,5,1) и (VIII,5,2) видно, что случайная слоевая сеть опробования всегда обеспечивает бо́льшую точность оценки, чем чисто случайная сеть. Разность дисперсий соответствующих оценок среднего содержания равна дисперсии среднего содержания Z зоны влияния v в пределах всего поля V, деленной на число этих зон, поскольку известно, что

$$\frac{1}{N}[\sigma^2(0\,|\,V)-\sigma^2(0\,|\,v)]=\frac{1}{N}\sigma^2(v/V).$$

Часто границы поля V, в пределах которого должна быть произведена оценка пространственной переменной, до опробования точно не известны. В этом случае сеть зон влияния v_i располагается как бы случайно относительно поля V, и мы оказываемся перед проблемой оценки, рассмотренной в теории транзитивных представлений. Как и в предыдущем параграфе, возьмем транзитивную ковариограмму, вернее ее математическое ожидание

$$g(h)=[m^2+\sigma^2(0\,|\,V)]\,K(h)-K(h)\,\gamma(h),$$

где $K(h)$ — геометрическая ковариограмма, и используем формулу (II,4,5), определяющую дисперсию оценки количества металла Q. В результате получим, что

$$\sigma_Q^2=vV(m^2+\sigma^2)-\frac{1}{v}\int_v\int_v (m^2+\sigma^2)\,K(x-x')\,dx\,dx'+$$
$$+\frac{1}{v}\int_v\int_v K(x-x')\,\gamma(x-x')\,dx\,dx',$$

где символом σ^2 для краткости обозначена дисперсия $\sigma^2(0\,|\,V)$. Аналогично с помощью той же формулы (II,4,5) получим для дисперсии оценки объема V следующее выражение:

$$\sigma_V^2=vV-\frac{1}{v}\int_v\int_v K(x-x')\,dx\,dx'.$$

Наконец, мы должны предположить (как и в § 4 настоящей главы), что соблюдается условие внутренней независимости пространственной переменной $f(x)$ и поля V (это условие необходимо для применимости математического аппарата теории собственных схем). Тогда справедливо следующее

соотношение:

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}.$$

Окончательную формулу для расчета дисперсии оценки содержания m в поле V получим, если заменим дисперсии σ_Q^2 и σ_V^2 соответствующими выражениями:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2\sigma_V^2}{V^2} + \frac{1}{Nv^2}\int_v\int_v \frac{K(x-x')}{V}\gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad \text{(VIII,5,3)}$$

Таким образом, дисперсия оценки содержания при слоевой случайной сети опробования, когда поле V не известно a priori, равна сумме двух членов. Первый член отражает влияние неопределенности границ поля, а второй — вычисляется через собственную функцию $\frac{K(h)\gamma(h)}{V}$ с помощью формулы (VIII,5,2), выведенной для случая, когда поле V известно до начала опробования.

Сравнение регулярной и случайной слоевой сетей

Сравним регулярные сети с предпочтительным и случайным размещением со случайными слоевыми сетями при известном или не известном a priori положении поля. Результаты сравнения в случае собственных схем практически полностью совпадают с результатами, полученными в гл. II, § 4 для транзитивных представлений.

Сеть опробования (регулярная или случайная слоевая) называется *адаптированной*, если она при заданном объеме зоны влияния v или при заданном количестве проб обеспечивает получение оценки с минимальной дисперсией. При изотропии пространственных переменных адаптированной оказывается сеть, ячейками которой служат правильные многогранники. В частности, в двумерном поле V практически адаптированными являются сети, ячейки которых имеют форму квадратов или шестиугольников (шестиугольники обладают некоторым преимуществом перед квадратами, поскольку меньше отличаются от круга). При наличии какой-либо анизотропии форма ячейки адаптированной регулярной сети не обязательно совпадает с формой ячейки адаптированной слоевой сети: все зависит от характера влияния анизотропии на поведение собственной функции в окрестности нуля. Но если имеет место геометрическая анизотропия, то хотя бы в первом приближении можно считать, что ячейки обоих типов адаптированных сетей остаются одинаковыми. Действительно, при геометрической анизотропии собственная функция $\gamma(h)$ с помощью простого линейного преобразования может быть сведена к виду $\gamma(r)$; ячейка адаптированной сети тем же преобразованием сводится к правильному многограннику, являющемуся ячейкой адаптированной сети при изотропной изменчивости. В этом случае адаптированные сети одинаковы как для регулярной сети, так и для случайной слоевой.

Как правило, адаптированная регулярная сеть позволяет получить лучшие результаты, чем адаптированная случайная слоевая сеть. Исключение представляет случай, когда, например, пространственная переменная содержит гармоническую составляющую аномально большой амплитуды с периодом, кратным шагу сети опробования.

С другой стороны, при неадаптированных сетях нельзя без численного расчета соответствующих дисперсий распространения сказать, какая из двух сетей (регулярная или случайная слоевая) с одинаковым объемом ячейки v даст лучший результат.

ГЛАВА IX

Крайгинг

Краткое содержание

В § 1 формулируется проблема крайгинга и рассматривается ее практический смысл.

В § 2 выводятся общие уравнения крайгинга и дается выражение дисперсии крайгинга.

В § 3 рассматривается полный крайгинг и указываются условия применимости принципа суперпозиции результатов крайгинга при оценке содержания полезного компонента по месторождению в целом.

В § 4 вводятся понятия непрерывного крайгинга, подробно разбираемого в гл. XIII.

§ 1. Проблема крайгинга и ее значение

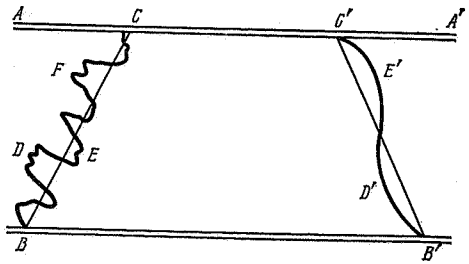
В начале предыдущей главы мы уже встречались с понятием крайгинга. Проблема крайгинга заключается в нахождении наилучшей оценки содержания в некотором блоке на основании всей имеющейся информации, т. е. при крайгинге следует использовать содержания во всех пробах как внутри, так и вне оцениваемого блока. Фактически смысл крайгинга состоит в том, что содержанию каждой пробы приписывается такой вес, при котором получаемая оценка среднего содержания обладает минимальной дисперсией. Определение весов производят с учетом геометрических форм, размеров и взаимного расположения оцениваемого блока и проб. При крайгинге пробы учитываются обычно с тем меньшими весами, чем более удалены они от центра блока. Но, как мы убедимся на многих примерах, и в частности в гл. XII, это интуитивно оправдываемое правило в некоторых случаях частично нарушается (например, в случае эффекта экрана).

Конечно, проблему крайгинга (т. е. определения оптимальных весов, с которыми мы должны учитывать отдельные пробы при оценке среднего в блоке) нельзя решить без некоторых предположений о геостатистических характеристиках изучаемого рудного тела. Так, в дальнейшем будем предполагать, что рудное тело геостатистически однородно, т. е. содержание, выступающее в роли пространственной переменной, в пределах этого тела можно рассматривать как реализацию собственной схемы.

Условие однородности изучаемого объекта обязательно. Никакой крайгинг невозможен между разнородными частями одного и того же тела. В подобных случаях речь может идти об учете разубоживания, а не о проведении крайгинга, но эта задача не решается теоретически, так как весовые коэффициенты здесь могут быть определены только опытным путем.

Минимизируя дисперсию, крайгинг позволяет извлечь бо́льшую часть информации, заключенной в данных опробования, и получить более точную оценку среднего содержания в изучаемом блоке. Увеличение точности часто бывает значительным, однако оно не всегда окупает трудности проведения дополнительных расчетов, связанных с необходимостью взвешивания исходных данных. Наиболее важное практическое значение крайгинга заключается не в увеличении точности оценки среднего содержания по блоку, а в том, что он позволяет исключить систематическую ошибку. При разведке большинства рудных месторождений по данным опробования из общего

объема месторождения выделяют отдельные его части, разработка которых экономически не оправдана. Д. Г. Крайг показал, что если содержание в каждом блоке оценивается по пробам, отобранным внутри его объема, то содержания в блоках, отнесенных к промышленным, в среднем систематически завышаются. Это явление объясняется тем, что содержания в пробах характеризуются, как правило, значительно большим разбросом, чем средние содержания в блоках, и соответственно гистограмма истинных средних содержаний всегда содержит меньше экстремальных (больших и малых) значений и больше близких к общему среднему, чем гистограмма, построенная по данным опробования. В результате при разделении по этой, последней, гистограмме блоки, отнесенные к непромышленным, на самом деле будут в среднем богаче, чем это даст оценка по соответствующим пробам, а блоки, отнесенные к промышленным, напротив, беднее.



Фиг. 14.

Даже из самых общих соображений следует, что крайгинг позволяет устранить это нежелательное явление. Действительно, пробы, отобранные вне выделенного богатого блока в среднем будут иметь меньшие содержания, а так как при крайгинге им приписывают ненулевые веса, они снизят оценку среднего по сравнению с той, которая получилась бы только по внутренним пробам.

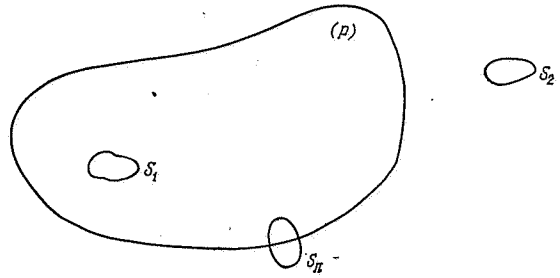
На примере жильного тела, разведанного двумя горными выработками, покажем, почему учет только внутренних (по отношению к выделенному промышленному блоку) проб приводит к завышенной оценке среднего содержания в этом блоке. Пусть рудное тело с промышленным содержанием вскрыто двумя выработками (фиг. 14): выработкой BB' — на всем ее протяжении и выработкой AA' — на участке CC'. Если построить блок $BCC'B''$ и в качестве оценки среднего содержания в нем взять среднее по интервалам BB' и CC', то истинное содержание в блоке будет в среднем ниже полученного, так как в блок частично попадут бедные участки, влиянием которых мы пренебрегли, отбросив при расчете отрезки AC и $C'A'$. Действительно, истинная граница промышленного оруденения, как правило, представляет собой не прямую BC или $B'C'$, изображенную нами, а некоторую часто весьма неправильную линию типа $BDEFC$. Кроме того, участки с бедным оруденением могут находиться и внутри промышленного блока, а участки с богатой рудой за его пределами. Таким образом, при эксплуатации месторождения будет оставлена часть богатых руд и одновременно извлечена часть горной массы с непромышленным содержанием полезного компонента, что приведет к снижению содержания в добытой руде. Крайгинг, с помощью которого учитывается этот эффект, состоит в расчете среднего содержания в блоке $BCC'B'$ посредством взвешивания содержаний на отрезках BB', CC', AC и $C'A'$ с соответствующими коэффициентами, например 60% — для BB', 27% — для CC' и 13% — для двух внешних отрезков AC и $A'C'$. (Если участки богатого и бедного оруденения геостатистически разнородны

и разделены непрерывной относительно плавной границей, такой, например, как $B'D'E'C'$ на фиг. 14, то говорят не о крайгинге, а о разубоживании в прямом смысле.)

Основное назначение такого взвешивания — исключить (в среднем) ошибку в сторону систематического завышения оценок в промышленных блоках. По сравнению с этой главной задачей увеличение точности оценки отходит на второй план.

§ 2. Общие уравнения крайгинга

В самом общем виде условие задачи, связанной с крайгингом, может быть сформулировано следующим образом. Пусть дано геостатистически однородное рудное тело (не обязательно изотропное), в котором с целью



Фиг. 15.

оценки среднего содержания в блоке P отобрано n проб $S_1, S_2, \ldots, S_n$, характеризующихся содержаниями $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Требуется, зная форму, размеры и взаимное расположение блока P и проб S_i, найти наилучшую линейную оценку

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \qquad \text{(IX,2,1)}$$

истинного среднего содержания Z в блоке P. Эту задачу всегда можно решить, определив коэффициенты a_i уравнения (IX, 2,1), которые удовлетворяли бы двум следующим условиям. Во-первых, когда блок P вместе с пробами S_i занимает различные положения в большом поле (с той же собственной схемой, которая представляет собой содержание в реальном рудном теле), среднее значение ошибки $Z - Z^*$ должно быть равно нулю. Это условие записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \qquad \text{(IX,2,2)}$$

Во-вторых, коэффициенты крайгинга должны иметь такие значения, при которых дисперсия $D(Z - Z^*)$ возможной ошибки была бы минимальной. Приняв во внимание условие (IX, 2,1), запишем выражение дисперсии в следующем виде:

$$D(Z-Z^*) = \sigma_Z^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_{ZX_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{ij}, \qquad \text{(IX,2,3)}$$

где σ_Z^2 — дисперсия истинного среднего содержания в блоке; σ_{ZX_i} — ковариация среднего содержания Z и содержания X_i в пробе S_i, σ_{ij} — ковариация содержаний X_i и X_j (в частности, $\sigma_{ii} = \sigma_{X_i}^2$ — дисперсия

содержания X_i). Все дисперсии и ковариации относятся к большому воображаемому полю, размеры которого, однако, не влияют на результаты расчетов: параметры этого поля проявляются в постоянной A, которая входит в выражения всех дисперсий и ковариаций, но исключается в силу условия (IX,2,2). Таким образом, дисперсия (IX,2,3) зависит только от вида собственной функции.

Условие минимума дисперсии (совместно с условием несмещенности оценки) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}\sum_j a_j\sigma_{ij} &= \sigma_{ZX_i} + \lambda,\\ \sum_j a_j &= 1.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,2,4)}$$

Таким образом, имеем систему, состоящую из $n+1$ линейных уравнений, содержащих $n+1$ неизвестных (n коэффициентов a_i и множитель Лагранжа λ). Так как множитель λ сам по себе интереса не представляет, то исключим его. Для этого выберем одну пробу, например S_n (обычно выбирают пробу, занимающую по сравнению с остальными пробами более выгодное для нас положение, например центральное), и запишем условие (IX,2,2) в виде

$$a_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i, \qquad \text{(IX,2,5)}$$

после чего подставим полученное значение коэффициента a_n в уравнения (IX,2,4)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} a_j\sigma_{ij} + a_n\sigma_{in} &= \sigma_{ZX_i} + \lambda,\\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j\sigma_{nj} + a_n\sigma_{nn} &= \sigma_{ZX_n} + \lambda.\end{aligned}$$

Для исключения множителя Лагранжа вычтем последнее уравнение из $n-1$ предыдущих и заменим коэффициент a_n его выражением из (IX,2,5). Если положим

$$\left.\begin{aligned}R_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_{nj} - \sigma_{ni} + \sigma_{nn},\\ N_i &= \sigma_{ZX_i} - \sigma_{ZX_n} - \sigma_{in} + \sigma_{nn},\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,2,6)}$$

то систему (IX,2,4) можно записать как

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{ij} = N_i. \qquad \text{(IX,2,7)}$$

Решение этой системы $n-1$ линейных уравнений с $n-1$ неизвестными позволяет определить коэффициенты крайгинга $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и рассчитать a_n по формуле (IX,2,5).

Если найденные таким образом коэффициенты a_i подставим в формулу (IX,2,3), то получим минимальную дисперсию оценки

$$\sigma_K^2 = \sigma_Z^2 - 2\sigma_{ZX_n} + \sigma_{X_n}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i N_i, \qquad \text{(IX,2,8)}$$

которую назовем *дисперсией крайгинга*. Первые три слагаемых правой части (IX,2,8) представляют собой не что иное, как дисперсию распространения

$$\sigma_E^2 = \sigma_Z^2 - 2\sigma_{ZX_n} + \sigma_{X_n}^2$$

содержания X_n пробы S_n на оцениваемый блок P. Если мы располагаем только одной пробой S_n, то эта дисперсия и будет дисперсией оценки (крайгинга). Отбор каждой дополнительной пробы приводит к улучшению оценки среднего, что формально выражается в вычитании из дисперсии распространения σ_E^2 всегда положительных членов a_iN_i. Формулы (IX,2,7) и (IX,2,8) являются общими уравнениями крайгинга. Элементы матрицы R_{ij} и N_i определяются из соотношений (IX,2,6), и их значения зависят только от собственной функции.

§ 3. Полный крайгинг

Линейные уравнения крайгинга (IX,2,7) обладают существенной особенностью: как следует из соотношений (IX,2,6), коэффициенты R_{ij} определяются дисперсиями и ковариациями содержаний в пробах S_i и не зависят от оцениваемого участка. Влияние блока сказывается лишь на членах N_i, в которые входит ковариация σ_{ZX_i} содержания Z с содержанием X_i в пробе S_i. Отсюда непосредственно следует теорема суперпозиции результатов крайгинга. Действительно, предположим, что по одним и тем же пробам $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с помощью крайгинга определяют оценки истинных средних содержаний z и z' в двух различных блоках объема P и P', т. е. находят оценки

$$z^* = \sum a_i X_i \quad \text{и} \quad z'^* = \sum a_i' X_i,$$

где коэффициенты a_i и a_i' — решения системы (IX,2,7) при значениях N_i и N_i', соответствующих блокам P и P'. Если объединить блоки P и P' в один (предполагается, что P и P' не перекрываются) с истинным содержанием

$$Z = \frac{P}{P+P'} z + \frac{P'}{P+P'} z',$$

то коэффициенты N_i из формулы (IX,2,7) для крайгинга блока $P+P'$ можно найти путем взвешивания ковариаций на размеры блоков

$$\sigma_{ZX} = \frac{P}{P+P'} \sigma_{zx_i} + \frac{P'}{P+P'} \sigma_{z'x_i},$$

т. е. фактически взвешиванием на размеры блоков самих значений N_i для блоков P и P'. Таким образом, коэффициенты крайгинга A_i для $P+P'$ в силу линейности системы будут равны

$$A_i = \frac{P}{P+P'} a_i + \frac{P'}{P+P'} a_i', \qquad \text{(IX,3,1)}$$

а сама оценка среднего содержания —

$$Z^* = \frac{P}{P+P'} z^* + \frac{P'}{P+P'} z'^*. \qquad \text{(IX,3,2)}$$

Другими словами, перед нами суперпозиция оценок крайгинга (со взвешиванием по тоннажу или объему руды). Этот вывод является строгим, если крайгинг обоих блоков осуществляется по одним и тем же пробам S_i, и в частности в случае полного крайгинга, когда каждый блок оценивается по всей совокупности проб, взятых в рудном теле. Можно сказать: «по отношению к результатам полного крайгинга применим принцип суперпозиции».

Если хотят получить наилучшую оценку среднего содержания по рудному телу в целом, то в случае полного крайгинга можно произвести взвешивание оценок крайгинга, найденных для отдельных блоков. Таким образом, последовательная, блок за блоком, оценка месторождения эквивалентна оценке его в целом.

Полный крайгинг почти никогда не применяют из-за сложности вычислений. Как правило, при крайгинге ограничиваются учетом лишь небольшого числа ближайших проб, что позволяет полностью учесть влияние всех

внешних данных. Так как эти ореолы образуют почти непроницаемый экран, неполный крайгинг практически не отличается от полного.

В теории непрерывного крайгинга необходимо знать теорему суперпозиции, представленную в дифференциальной форме. Оцениваемый блок рассматривается при этом как сумма элементарных блоков dS бесконечно малой величины. Если $a_i(M)$ — коэффициент крайгинга, относящийся к элементарной площадке dS с центром в точке M, то коэффициент крайтинга для всего блока получается интегрированием, а именно

$$A_i = \frac{1}{S}\int\limits_S\int a_i(M)\,dS.$$

Если известно решение проблемы точечного крайгинга, то эта формула позволит произвести крайгинг блока S произвольной формы. При этом уравнения точечного крайгинга представляют собой простой частный случай общих уравнений, приведенных выше. Когда содержания $Z = f(z)$ в точке z оцениваются по известным содержаниям $X_i = f(x_i)$ в точках x_i, они принимают вид

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i),$$

и коэффициенты крайгинга удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_j\gamma(x_i - x_j) = \gamma(z - x_i) + \lambda,\\ &\sum a_i = 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,3,3)}$$

Исключив коэффициент a_n, найдем, что

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{ij} = N_i,$$

где

$$\left.\begin{aligned} R_{ij} &= \gamma(x_i - x_j) - \gamma(x_n - x_j) - \gamma(x_n - x_i),\\ N_i &= \gamma(z - x_i) - \gamma(x_n - z) - \gamma(x_n - x_i). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,3,4)}$$

§ 4. Непрерывный крайгинг

Теперь сформулируем проблему оценки в более общем виде. Пусть даны поле V с весовой функцией, равной нулю за пределами поля и удовлетворяющей условию $\int p(x)\,dx = 1$ (например, $p(x) = k(x)/V$, где $k(x)$ — геометрическая переменная поля V), и численные значения пространственной переменной $f(x)$ на множестве точек V'. Требуется оценить интеграл

$$Z = \int\limits_V p(x) f(x)\,dx. \qquad \text{(IX,4,1)}$$

Найдем такую весовую функцию $\lambda(x)$ (если V' — непрерывный объем) или такие коэффициенты взвешивания λ_i (если V' — дискретное множество, состоящее из N точек), при которых

$$\left.\begin{aligned} &\int \lambda(x)\,dx = 1,\\ \text{или}\quad &\\ &\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = 1, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,4,2)}$$

и построим оценку

$$\left.\begin{aligned} &Y = \int\limits_{V'} \lambda(x) f(x)\,dx,\\ \text{или}\quad &\\ &Y = \sum_i \lambda_i f(x_i). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,4,3)}$$

Весовую функцию $\lambda(x)$ или коэффициенты взвешивания λ_i следует выбирать так, чтобы был обеспечен минимум дисперсии $D(Y - Z)$, существование которого гарантируется условием (IX,4,2). Рассмотрим, например, непрерывный случай. Из формул гл. VI, § 3 имеем

$$D(Y - Z) = -\int (\lambda - p) * (\check{\lambda} - \check{p})\,\gamma\,dx. \qquad \text{(IX,4,4)}$$

Воспользуемся обычным приемом исчисления; учтем, что функция $\lambda(x)$, выбранная с учетом условия (IX,4,2), должна обеспечивать минимум дисперсии $D(Y - Z)$ и потребуем, чтобы приращение

$$\delta\Big[D(Y - Z) + 2\mu\int\limits_{V'}\lambda(x)\,dx\Big], \qquad \text{(IX,4,5)}$$

где множитель Лагранжа 2μ определяется из условия (IX,4,2), равнялось нулю при любом приращении $\delta\lambda(x)$ функции $\lambda(x)$. Так как функция $\gamma(x)$ четная, приращение (IX,4,5) может быть представлено в следующем виде:

$$-\int [\delta\lambda * (\check{\lambda} - \check{p}) + \delta\check{\lambda} * (\lambda - p)]\,\gamma\,dx + 2\mu\int \delta\lambda(x)\,dx =$$

$$= -2\int \delta\lambda * (\check{\lambda} - \check{p})\,\gamma\,dx + 2\mu\int \delta\lambda(x)\,dx =$$

$$= -2\int\int \delta\lambda(x)\,[\lambda(x+h) - p(x+h)]\,\gamma(h)\,dx\,dh + 2\mu\int \delta\lambda(x)\,dx.$$

Чтобы это приращение равнялось нулю при любом приращении $\delta\lambda(x)$ необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\int [\lambda(x+h) - p(x+h)]\,\gamma(h)\,dh = \mu \qquad \text{(IX,4,6)}$$

для всех точек x множества V'. Согласно этому результату, значение $f(x)$ в каждой точке x множества V' должно иметь одинаковые ковариации (с точностью до постоянной) с оценкой Y и истинным содержанием Z. Постоянная μ определяется дополнительным условием (IX,4,2). Учитывая соотношение (IX,4,6), которое должно выполняться для всех точек x множества V', минимальное значение дисперсии $D(Y - Z)$, или дисперсию крайгинга σ_K^2, запишем в виде

$$\sigma_K^2 = -\int (\lambda - p)\,[(\lambda - p) * \gamma]\,dx = -\mu + \int p\,(\lambda - p) * \gamma]\,dx,$$

или

$$\sigma_K^2 = \int \gamma\,(\lambda * \check{p})\,dx - \mu - \int \gamma\,(p * \check{p})\,dx. \qquad \text{(IX,4,7)}$$

Теорема суперпозиции результатов крайгинга

По одним и тем же данным, например по численным значениям пространственной переменной $f(x)$ в точках x множества V', можно произвести оценку средних содержаний Z_i различных участков V_i:

$$Z_i = \int\limits_{V_i} p_i(x) f(x)\,dx,$$

где p_i — весовая функция с единичной суммой внутри участка V_i, принимающая нулевые значения за его пределами.

Пусть $\lambda_i(x)$ — коэффициенты крайгинга, полученные решением уравнения (IX,4,6) для оценки среднего содержания Z_i. Если Z — среднее взвешенное из средних содержаний по участкам V_i, т. е.

$$Z = \sum_i \alpha_i Z_i = \int \sum_i \alpha_i p_i(x) f(x)\, dx,$$

где α_i — веса с единичной суммой, то оценка содержания Z может быть получена с помощью коэффициентов крайгинга $\lambda(x)$, находимых по коэффициентам $\lambda_i(x)$ с помощью взвешивания на те же веса α_i, т. е.

$$\lambda(x) = \sum_i \alpha_i \lambda_i(x).$$

Действительно, коэффициенты крайгинга $\lambda_i(x)$ по условию удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_i * \gamma = p_i * \gamma + \mu_i$$

и

$$\int \lambda_i(x)\, dx = 1$$

во всех точках множества V'. Достаточно умножить эти соотношения на α_i и просуммировать по i, чтобы получить

$$\lambda * \gamma = \gamma * \sum \alpha_i p_i + \sum \alpha_i \mu_i$$

и

$$\int \lambda(x)\, dx = 1$$

для всех точек x, принадлежащих множеству V'.

Итак, при условии, что крайгинг производится по одним и тем же данным [значениям $f(x)$ в точках x множества V'], возможна линейная суперпозиция оценок крайгинга Y_i для различных участков V_i.

Точечный крайгинг. В частности, оценка крайгинга произвольного участка V может быть получена суперпозицией результатов крайгинга для всех точек y, принадлежащих участку V. Если в качестве истинного содержания Z, подлежащего оценке, выступает значение $f(y)$ функции $f(x)$ в точке $x = y$, то уравнение (IX,4,6) сводится к виду

$$\int_{V'} \lambda(x)\, \gamma(x' - x)\, dx = \gamma(x' - y) + \mu \qquad \text{(IX,4,8)}$$

для всех точек x', принадлежащих множеству V'.

Решение уравнения (IX,4,8) дает значения $\lambda(x, y)$ как функцию точки y, и тогда коэффициенты крайгинга для всего объема V получаются интегрированием коэффициентов $\lambda(x, y)$ по этому объему:

$$\lambda(x) = \int_V p(y)\, \lambda(x, y)\, dy. \qquad \text{(IX,4,9)}$$

Этот способ суперпозиции точечных оценок крайгинга широко используется нами в приложениях.

В случае когда объем V' произволен, решение интегрального уравнения (IX,4,8) сопряжено со значительными трудностями. Однако в приложениях и особенно в горном деле область V' известных значений пространственной переменной $f(x)$ представляет собой либо конечное множество N точек дискретного опробования, либо сеть сплошного опробования,

которую можно рассматривать как совокупность некоторых кривых (горные выработки). Рассмотрим оба случая.

Если область V' образована одной или несколькими кривыми C, в качестве параметра можно принять криволинейную абсциссу s точки x на кривой C. Тогда уравнения точечного крайгинга для точки y запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \int_C \lambda(s)\, \gamma[x(s') - x(s)]\, ds &= \gamma[x(s') - y] + \mu, \\ \int_C \lambda(s)\, ds &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,4,10)}$$

Нельзя указать общего решения этой системы интегральных уравнений для произвольных кривых C и собственных функций γ. Когда собственная функция $\gamma(h)$ имеет вид $\ln r$ (случай изотропной схемы де Вейса), а кривые C образуют замкнутый контур, решение системы (IX, 4, 10) может быть получено на основе теории гармонических функций. В гл. XIII для этого случая будет доказана теорема экрана (аналогичная соответствующей теореме в электростатике), согласно которой содержания внутри контура C не зависят от содержаний во внешней по отношению к контуру области, если только значения содержания известны во всех точках контура.

Когда V' — конечное множество точек дискретного опробования, интегральные уравнения (IX,4,8) точечного крайгинга заменяются системой линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \gamma(x_j - x_i) &= \gamma(x_j - y) + \mu, \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX,4,11)}$$

которая решается значительно проще. Заметим, что эта система полностью эквивалентна полученной ранее системе (IX,3,3).

Теоретически любой блок должен оцениваться по всем имеющимся пробам. Однако достаточно учесть лишь один или два ореола внешних проб, которые в силу эффекта экрана позволяют получить вполне удовлетворительную оценку.

ГЛАВА X

Теория многокомпонентных собственных схем

Краткое содержание

В этой главе результаты, полученные в гл. IX, рассматриваются применительно к случаю многокомпонентной собственной схемы.

В § 1 определяется собственная матрица совместного рассеивания $\gamma_{ij}(h)$ и исследуются ее свойства.

В § 2 вводятся понятия ковариации распространения и ковариации в поле V для переменных на неточечной геометрической базе.

В § 3 определяется понятие собственной независимости и устанавливается его связь с понятием внутренней независимости, используемым в теории транзитивных представлений. Формулируются условия существования собственной корреляции.

В § 4 рассматривается проблема совместной оценки среднего содержания и запасов руды и металла.

§ 1. Матрица совместного собственного рассеивания

Методы, изложенные в гл. IX, обобщаются на случай нескольких собственных схем $f_1(x)$, $f_2(x)$,. . ., определенных на одной и той же геометрической базе. В теории многокомпонентных собственных схем транзитивные представления совместного распределения пространственных переменных излагаются в вероятностных терминах. Эта теория не обеспечивает общности подхода, свойственной теории транзитивных представлений, так как предполагает собственный характер совместной изменчивости переменных, т. е. ее независимость от рассматриваемого геометрического поля. Но она позволяет более тонко и глубоко изучать корреляционные связи между самими переменными, не искаженные влиянием геометрического поля.

Определение. Случайную функцию с несколькими компонентами, имеющими стационарные приращения, называем *многокомпонентной собственной схемой* $f_i(x)$. Если обозначить символом $\varepsilon_i(x-x')$ приращение i-ой составляющей

$$\varepsilon_i(x-x') = f_i(x') - f_i(x), \tag{X,1,1}$$

то законы распределения

$$F[\varepsilon_{i_1}(x_1-x_1'),\ \varepsilon_{i_2}(x_2-x_2'),\ \ldots;\ x_1,\ x_1',\ x_2,\ x_2',\ \ldots]$$

любого числа приращений с произвольными индексами i_1, i_2, . . . и в произвольных точках x_1, x_1', x_2, x_2', . . . в случае многокомпонентной собственной схемы будут инвариантными относительно всякого переноса ансамбля этих точек и не изменятся, когда станет известным численное значение любой из компонент.

Моменты приращений, которые также являются стационарными, определяются просто. Чаще всего в расчет будут приниматься моменты только первого и второго порядков, так что получаемые результаты будут применимы лишь в случае стационарных собственных схем второго порядка (стационарных в широком смысле).

Моменты первого порядка, $E[f_i(x+h) - f_i(x)]$, характеризуют градиенты линейных трендов Δ_i каждой из компонент. Как и в предыдущей главе, предположим, что линейные тренды всех компонент равны нулю (в противном случае всегда можно заменить f_i на $f_i - x\Delta_i$).

Для удобства введения моментов второго порядка рассмотрим линейную комбинацию функций f_i с произвольными коэффициентами λ_i, т. е.

$$f(x, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(x). \tag{X,1,2}$$

По определению многокомпонентной собственной схемы каждая из этих линейных комбинаций сама является обычной (однокомпонентной) собственной схемой, по отношению к которой применимы результаты, изложенные в гл. IX. В частности, каждая такая комбинация описывается законом собственного рассеивания, определяемого (с учетом обозначения (X,1,1)) уравнением

$$\gamma(h, \lambda_i) = \frac{1}{2} D\left[\sum_i \lambda_i \varepsilon_i(h)\right],$$

или

$$\gamma(h, \lambda_i) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[\varepsilon_i(h)\, \varepsilon_j(h)]. \tag{X,1,3}$$

Естественно положить

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E[\varepsilon_i(h)\, \varepsilon_j(h)] = \frac{1}{2} E\{[f_i(x+h) - f_i(x)]\,[f_j(x+h) - f_j(x)]\}. \tag{X,1,4}$$

Выражение $\gamma_{ij}(h)$ в общем случае будем называть *собственной функцией совместного рассеивания переменных f_i и f_j*. Совокупность функций $\gamma_{ij}(h)$ образует собственную матрицу совместного рассеивания. В случае $i = j$ функция $\gamma_{ij}(h) = \gamma_i(h)$ является собственной функцией собственной схемы $f_i(x)$.

Свойства функции $\gamma_{ij}(h)$

Все свойства функции совместного рассеивания $\gamma_{ij}(h)$ определяются соответствующими свойствами собственной функции $\gamma(h)$. В этом легко убедиться, если учесть, что функция $\gamma(h, \lambda_i)$ обладает свойствами собственной функции при любых λ_i.

Так, например, каждая собственная функция $\gamma(h)$ положительна. Для любой линейной комбинации $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$ квадратичная форма

$$\lambda_i^2 \gamma_i(h) + 2\lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h) + \lambda_j^2 \gamma_j(h)$$

должна быть также положительной, откуда следует неравенство Шварца[1]

$$|\gamma_{ij}(h)| \leqslant \sqrt{\gamma_i(h)\, \gamma_j(h)}. \tag{X,1,5}$$

Это неравенство позволяет определить коэффициент совместного рассеивания

$$R_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_i(h)\, \gamma_j(h)}}. \tag{X,1,6}$$

Этот коэффициент, численные значения которого всегда заключены между -1 и $+1$, представляет собой не что иное, как коэффициент корреляции приращений $[f_i(x+h) - f_i(x)]$ и $[f_j(x+h) - f_j(x)]$.

Кроме того, из соотношения (VI,1,9) видно, что все ковариации любых приращений функций f_i и f_j могут быть вычислены, если только известна собственная функция совместного рассеивания $\gamma_{ij}(h)$. Рассмотрим кова-

[1] В советской литературе принято название «неравенство Коши — Буняковского». — *Прим. перев.*

риацию двух приращений $[f(x', \lambda_i) - f(x, \lambda_i)]$ и $[f(y', \lambda_i) - f(y, \lambda_i)]$. С учетом формул (X,1,2) и (X,1,3) получим

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[\varepsilon_i(x'-x)\varepsilon_j(y'-y)] =$$
$$= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j [\gamma_{ij}(y'-x) + \gamma_{ij}(y-x') - \gamma_{ij}(y-x) - \gamma_{ij}(y'-x')].$$

Идентифицируя члены по λ_i, найдем, что

$$E\{[f_i(x') - f_i(x)][f_j(y') - f_j(y)]\} =$$
$$= \gamma_{ij}(y'-x) + \gamma_{ij}(y-x') - \gamma_{ij}(y-x) - \gamma_{ij}(y'-x').$$

Итак, собственная матрица совместного рассеивания позволяет определить все моменты второго порядка.

§ 2. Регуляризованные переменные и ковариация распространения

Рассмотрим случайные величины

$$Y_i = \int p_1(x) f_i(x)\, dx,$$
$$Z_i = \int p_2(x) f_i(x)\, dx,$$
$$Y = \sum_i \lambda_i Y_i,$$
$$Z = \sum_i \lambda_i Z_i,$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — весовые функции, удовлетворяющие соотношению

$$\int p_1(x)\, dx = \int p_2(x)\, dx = 1.$$

Дисперсия распространения, характеризующая точность оценки величины Z с помощью величины Y, имеет вид

$$D(Y-Z) = -\int\int [p_1(x) - p_2(x)][p_1(y) - p_2(y)]\, \gamma(x-y)\, dx\, dy.$$

Достаточно идентифицировать члены в левой и правой частях равенства по коэффициентам $\lambda_i\lambda_j$, чтобы получить следующее выражение для ковариации ошибок распространения $(Y_i - Z_i)$ и $(Y_j - Z_j)$ в случае многокомпонентной собственной схемы:

$$E[(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)] =$$
$$= -\int\int [p_1(x) - p_2(x)][p_1(y) - p_2(y)]\, \gamma_{ij}(x-y)\, dx\, dy. \qquad (X,2,1)$$

В частности, когда Y_i и Z_i — средние значения функции f_i в объемах V и V', т. е.

$$Y_i = \frac{1}{V}\int_V f_i(x)\, dx,$$
$$Z_i = \frac{1}{V'}\int_{V'} f_i(x)\, dx,$$

общая формула (X,2,1) запишется в виде

$$E[(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)] = \frac{2}{VV'}\int_V\int_{V'} \gamma_{ij}(x-y)\, dx\, dy -$$
$$- \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma_{ij}(x-y)\, dx\, dy - \frac{1}{V'^2}\int_{V'}\int_{V'} \gamma_{ij}(x-y)\, dx\, dy). \qquad (X,2,2)$$

Эта величина представляет собой ковариацию ошибок $(Y_i - Z_i)$ и $(Y_j - Z_j)$, вносимых при распространении средних значений функций f_i и f_j в объеме V на объем V'. В частном случае, когда $i = j$, формула (X,2,2) определяет, естественно, обычную дисперсию распространения.

Применяя результаты, полученные в гл. VI, § 4, к линейной комбинации $\sum_i \lambda_i$, Y_i и идентифицируя члены по коэффициентам $\lambda_i\lambda_j$, можно определить ковариацию в поле V средних

$$Y_i = \frac{1}{v}\int_v f_i(x)\, dx$$

и

$$Y_j = \frac{1}{v}\int_v f_j(x)\, dx,$$

имеющих одну и ту же геометрическую базу v. Как и в гл. VI, § 4, эта ковариация, обозначаемая через $\sigma_{ij}(v \mid V)$, имеет строгий смысл только в том случае, если поле V составлено из равных объемов v или если объем v мал по сравнению с геометрическим полем V. В том и другом случае выполняется равенство

$$\sigma_{ij}(v \mid V) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma_{ij}(x-y)\, dx\, dy - \frac{1}{v^2}\int_v\int_v \gamma_{ij}(x-y)\, dx\, dy, \qquad (X,2,3)$$

которое является обобщением формулы (VI,4,4) на случай многокомпонентной собственной схемы.

Отсюда легко может быть получено соотношение аддитивности

$$\sigma_{ij}(v \mid V) = \sigma_{ij}(v \mid V') + \sigma_{ij}(V' \mid V), \qquad (X,2,4)$$

которое позволяет во всех случаях использовать формулу (X,2,3) для определения ковариации Y_i и Y_j в произвольном объеме V.

§ 3. Собственная независимость

Мы будем говорить, что две точечные переменные $f_i(x)$ и $f_j(x)$ собственно не зависимы, если собственная функция их совместного рассеивания $\gamma_{ij}(h)$ тождественно равна нулю:

$$\gamma_{ij}(h) \equiv 0. \qquad (X,3,1)$$

Это условие означает, что коэффициент корреляции приращений $[f_i(x+h) - f_i(x)]$ и $[f_j(x+h) - f_j(x)]$ равен нулю при любом h. Из формулы (X,1,6) непосредственно следует, что коэффициент корреляции двух произвольных приращений $[f_i(x) - f_i(x')]$ и $[f_j(y) - f_j(y')]$ равен нулю для любых четырех точек x, x', y и y'. Кроме того, любая ковариация распространения вида (X,2,1) или (X,2,2) равна нулю, т. е. все оценки средних значений переменных f_i и f_j в произвольных объемах взаимно не зависимы. Ковариация в поле V, введенная в предыдущем параграфе, также равна нулю, т. е. коэффициент корреляции между значениями переменных f_i и f_j, определенных на одной и той же геометрической базе v, всегда равен нулю независимо от размеров и формы пробы v и геометрического поля V.

Связь между собственной и внутренней независимостью

Если многокомпонентная собственная схема $f_i(x)$ рассматривается в пределах произвольного поля V, то в транзитивном представлении ей соответствует переменная $k(x) f_i(x)$, где $k(x)$ — геометрическая переменная поля V.

Предположим теперь, что выполняется условие собственной независимости (X,3,1). Применим соотношение (VI,5,2) к линейной комбинации $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$ и, идентифицируя члены по коэффициентам $\lambda_i \lambda_j$, получим, что

$$\gamma_{ij}(h) = \sigma_{ij}(0 \mid V) + E\left[m_i m_j - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)}\right].$$

Так как собственная функция совместного рассеивания γ_{ij} и ковариация $\sigma_{ij}(0 \mid V)$ переменных f_i и f_j в поле V равны нулю, то, следовательно,

$$E\left[m_i m_j - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)}\right] = 0. \qquad (X,3,2)$$

Из сравнения полученного результата с формулой (IV,2,2) видно, что равенство (X,3,2) представляет собой не что иное, как условие внутренней независимости, выраженное в вероятностном виде.

Итак, собственная независимость влечет за собой внутреннюю независимость, но только для математических ожиданий. Последнее обусловлено вероятностным характером теории собственных схем.

Собственная корреляционная зависимость

В общем случае собственная функция $\gamma_{ij}(h)$ не является тождественно равной нулю, и переменные f_i и f_j связаны собственной зависимостью. Степень этой зависимости характеризуется самой собственной функцией $\gamma_{ij}(h)$ или коэффициентом совместного рассеивания $R_{ij}(h)$, определенным формулой (X,1,6) и представляющим собой коэффициент корреляции между приращениями компонент f_i и f_j пространственной переменной. В частности, может представлять интерес предел (если он существует) коэффициента $R_{ij}(h)$ при стремлении h к нулю. Коэффициент $R_{ij}(h)$ обладает собственным характером в том смысле, что его величина не зависит от поля V, в пределах которого изучается совместное распределение переменных f_i и f_j. Но в отличие от собственной функции $\gamma_{ij}(h)$ коэффициент $R_{ij}(h)$ трудно обобщить на случай неточечных пространственных переменных.

Исходя из определения ковариации $\sigma_{ij}(v \mid V)$ переменных Y_i и Y_j (X,2,3), можно получить коэффициент корреляции

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}(v \mid V)}{\sqrt{\sigma_i^2(v \mid V)\,\sigma_j^2(v \mid V)}}. \qquad (X,3,3)$$

Но этот коэффициент не обладает собственным характером, так как он зависит (иногда весьма сложным образом) от выбора геометрического поля V.

В зависимости от поведения функций γ_i, γ_j и γ_{ij} на бесконечности коэффициент корреляции ρ_{ij} может стремиться к некоторому пределу, в общем случае определяемому характером стремления поля V к бесконечности.

Так как ковариация σ_{ij} и дисперсии σ_i^2 и σ_j^2 вычисляются с применением одного и того же линейного оператора ε к функциям γ_{ij}, γ_i и γ_j, то в частном случае, когда эти функции пропорциональны функции $\gamma(h)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \gamma_i(h) &= \alpha_i \gamma(h), \\ \gamma_j(h) &= \alpha_j \gamma(h), \\ \gamma_{ij}(h) &= \alpha_{ij} \gamma(h), \end{aligned}\right\} \qquad (X,3,4)$$

формула (X,3,3) дает

$$\rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij}\varepsilon[\gamma(h)]}{\sqrt{\alpha_i \varepsilon[\gamma(h)]\,\alpha_j \varepsilon[\gamma(h)]}} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}.$$

В этом случае коэффициент корреляции ρ_{ij} совпадает с коэффициентом совместного рассеивания R_{ij}:

$$\rho_{ij} = R_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}; \qquad (X,3,5)$$

таким образом, можно говорить, что в этом случае коэффициент корреляции ρ_{ij} имеет собственный характер. Собственная корреляция может быть только между переменными одной природы, генетически связанными между собой. Разнородные переменные (как, например, содержание полезного компонента и мощность рудного тела) характеризуются в общем случае собственными функциями, которые различно ведут себя в окрестности нуля; следовательно, соотношения (X,3,4) не выполняются и корреляция не является собственной.

§ 4. Совместная оценка содержания и запасов руды и металла

В гл. IV, § 4, мы уже встречались с проблемой совместной оценки содержания и запасов руды и металла в том виде, как она формулируется в теории транзитивных представлений. Было показано, что решение этой проблемы не представляет никакого труда в случае внутренней независимости пространственной переменной и ее геометрического поля. Как мы показали в § 3, условие внутренней независимости переменной и поля удовлетворяется, когда пространственная переменная $f(x)$ может рассматриваться в качестве реализации собственной схемы. В этом случае соотношение (IV,4,2) может быть представлено в виде

$$\sigma_Q^2/Q^2 = \sigma_m^2/m^2 + \sigma_V^2/V^2,$$

позволяющем оценить дисперсию оценки запасов металла через дисперсию оценки среднего содержания, вычисляемую по правилам, изложенным в гл. VIII, и геометрическую дисперсию, всегда определяемую по правилам, изложенным в гл. III.

Но условие внутренней независимости между точечной пространственной переменной $f(x)$ и геометрической переменной $k(x)$ трехмерного поля V весьма редко выполняется на практике (кроме того, это условие предусматривает, в частности, отсутствие корреляции в обычном смысле — между мощностью и содержанием). Однако иногда все же можно избежать расчета смешанной кovариограммы $C(h)$, введенной в гл. IV. Действительно, на месторождении обычно отбираются не изометричные, а линейные пробы, например керновые (в скважинах) или бороздовые (в рассечках). Ограничимся для простоты случаем, когда пластовое тело разведуется вертикальными скважинами (достигнутые выводы окажутся применимыми и для других вариантов разведки). При оценке запасов и содержаний фактически производится операция восхождения по вертикальному направлению, с помощью которой точечное содержание $f(x, y, z)$ заменяется линейным запасом $A(x, y)$, или запасом металла на единицу площади в географической точке (x, y), а геометрическая переменная $k(x, y, z)$ трехмерного поля V — мощностью $p(x, y)$ в той же точке. Но появляется еще и новая геометрическая переменная $k'(x, y)$, связанная с новым двумерным полем S, представляющим собой проекцию поля V на топографическую поверхность. Рассмотрим соотношения между этими переменными.

Как правило, существует корреляция (в обычном смысле) между средним содержанием $\frac{A}{p}$ и мощностью рудного интервала p по скважине. В гл. IV было показано, что это обстоятельство приводит к невыполнению условия внутренней независимости между точечной переменной $f(x, y, z)$ и гео-

метрической переменной $k\,(x,\ y,\ z)$ ее поля V. Однако вполне может оказаться, что новые переменные $A\,(x,\ y)$ и $p\,(x,\ y)$, даже находящиеся между собой в корреляционной связи, будут независимы от своего нового двумерного поля S, представляемого геометрической переменной $k'\,(x,\ y)$. В этом случае иногда появляется возможность представить переменные A и p собственными схемами. Чтобы убедиться в реальности такой возможности, необходимо построить и сопоставить собственные функции γ_A и γ_p и собственную функцию совместного рассеивания γ_{Ap} этих двух переменных. Если корреляция между A и p имеет собственный характер, т. е. если функции γ_A, γ_p и γ_{Ap} пропорциональны, проблема решается очень просто. Прежде всего имеем

$$\sigma_Q^2/Q^2 = \sigma_A^2/A^2 + \sigma_S^2/S^2,$$
$$\sigma_V^2/V^2 = \sigma_p^2/p^2 + \sigma_S^2/S^2,$$

где σ_S^2 — дисперсия оценки площади S, σ_A^2 и σ_p^2 — дисперсии оценки среднего линейного запаса $\overline{A}$ и средней мощности рудного тела $\overline{p}$ соответственно. С другой стороны, ковариация оценок $Q = \overline{A}S$ и $V = \overline{p}S$ в первом приближении удовлетворяет соотношению $\sigma_{QV}^2/QV = \sigma_{Ap}^2/Ap + \sigma_S^2/S^2$. Но в силу собственного характера корреляции $\sigma_{Ap}^2 = \rho\sigma_A\sigma_p$, поэтому

$$\sigma_{QV}/QV = \rho\frac{\sigma_A\sigma_p}{\overline{A}\,\overline{p}} + \sigma_S^2/S^2.$$

Наконец, относительная дисперсия σ_m^2/m^2 оценки среднего $m = Q/V$, которая в общем виде выражается формулой $\sigma_m^2/m^2 = \sigma_Q^2/Q^2 + \sigma_V^2/V^2 - 2\sigma_{QV}/QV$, в данном случае запишется в виде

$$\sigma_m^2/m^2 = \sigma_A^2/\overline{A}^2 + \sigma_p^2/\overline{p}^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_p/\overline{A}\,\overline{p}. \qquad (X,4,1)$$

Следует помнить, что это выражение справедливо лишь при собственном характере корреляции, когда коэффициент корреляции ρ' между оценками $\overline{A}$ и $\overline{p}$ равен коэффициенту корреляции ρ между линейным запасом A и мощностью p рудного тела по скважине. В более общем случае (если только величины A и p независимы от поля S) имеем

$$\sigma_m^2/m^2 = \sigma_A^2/\overline{A}^2 + \sigma_p^2/\overline{p}^2 - 2\rho'\sigma_A\sigma_p/\overline{A}\,\overline{p}, \qquad (X,4,2)$$

где коэффициент ρ' может отличаться от обычного статистического коэффициента корреляции между A и p. Ковариация $\sigma_{Ap} = \rho'\sigma_A\sigma_p$ может быть получена по собственной функции рассеивания γ_{Ap} с помощью тех же операций, которые служат для расчета дисперсии оценки по собственной функции γ.

Уместно привести всегда выполняющееся соотношение

$$(\sigma_A/A - \sigma_p/p)^2 \leqslant \sigma_m^2/m^2 \leqslant (\sigma_A/A + \sigma_p/p)^2,$$

которое иногда целесообразно использовать для определения дисперсии оценки среднего содержания m.

Замечание. Если поле S не известно a priori, т. е. не является заданным как сумма зон влияния скважин, к каждой из дисперсий σ_A^2/A^2 и σ_p^2/p^2 следует добавить дисперсию, характеризующую влияние ошибки подсчета площади S на оценки средних значений $\overline{A}$ и $\overline{p}$. Это влияние, обусловленное граничным эффектом, сказывается даже в том случае, когда линейный запас A и мощность p независимы от поля S.

Внутренняя независимость между величинами A и P и их геометрическим полем S типична для пластообразных залежей простой геометрической формы. В большинстве других ситуаций (например, при штокообразных залежах сложной формы) условие внутренней независимости линейного запаса и мощности от их геометрического поля не выполняется. Тогда целесообразно воспользоваться методами теории транзитивных представлений (гл. IV, § 4).

Книга вторая

ПРИКЛАДНАЯ ГЕОСТАТИСТИКА

Введение

Важная проблема, которая постоянно возникает перед геологом при подсчете запасов, состоит в определении точности оценок среднего содержания, запаса руды и запаса металла, получаемых на основании данных опробования.

Вопреки распространенному мнению, подобная проблема — не чисто статистическая, поскольку содержание (как и другие признаки) представляет собой пространственную, а не чисто случайную переменную. Так как пространственная переменная обладает псевдо-непрерывностью, мы должны ожидать, что точность оценки будет зависеть не только от числа отобранных проб, но прежде всего от их форм, размеров и взаимного расположения, т. е. от геометрии проведенных разведочных работ. Нельзя и пытаться сформулировать эту задачу, не имея логического и математического аппарата, с помощью которого можно характеризовать специфические свойства изменения содержания в пространстве.

При подсчете запасов представляют интерес три величины: тоннаж руды T, тоннаж металла Q и среднее содержание x, т. е. отношение Q/T. Количество металла Q может быть определено как произведение

$$Q = Tx,$$

где T выступает в качестве так называемой «переменной положения», а x — «переменной напряжения».

Используется и другое определение количества металла. Вместо тоннажа руды T можно ввести площадь оруденения S (переменная положения), а вместо содержания — площадной запас A (переменная напряжения), определяемый как запас металла на единицу площади; тогда

$$Q = SA.$$

Переменная положения (T или S) играет по сравнению с переменной напряжения (x или A) ту же роль, что геометрическое поле по сравнению с пространственной переменной, которая меняется внутри него. Проблема оценки запаса руды или размеров минерализованной площади аналогична, таким образом, проблеме оценки геометрического поля. Это весьма специфичная проблема, назовем ее *геометрической проблемой*, не может быть решена в рамках теории собственных схем, и подойти к ней можно лишь через транзитивные методы. Однако тоннаж T, или вернее объем V, руды часто представляют в виде

$$V = Sh,$$

где S — площадь оруденения (переменная положения), а h — среднее значение мощности, которая может рассматриваться как переменная напряжения. В геометрическом поле S мощность представляет собой такую же пространственную переменную, как и содержание или линейный запас.

В гл. III мы показали, что методы теории транзитивных представлений позволяют решить геометрическую проблему, т. е. рассчитать дисперсию

оценки площади или объема. Мы не будем более возвращаться к этому вопросу и во второй книге займемся изучением переменной напряжения (содержания или линейного запаса), связанной со своим геометрическим полем. При этом мы ограничимся рамками теории собственных схем и для каждой схемы, которую мы будем изучать (схемы де Вейса, сферической и эффекта самородков), рассмотрим композицию дисперсий распространения. Однако нельзя допускать, чтобы дисперсии распространения рассчитывались для зон влияния, фактически не входящих в геометрическое поле изучаемой переменной. Надо иметь в виду, что эти дисперсии имеют смысл лишь в той мере, в какой можно считать установленным (исходя из геологического изучения) существование и непрерывность геометрического поля. Геостатистик должен проводить свои исследования после геолога в пределах той однородной геологической зоны, которую выделит до него геолог. Никогда нельзя забывать, что предварительное определение геологически однородного минерализованного поля — обязательное условие успешного применения геостатистических методов. В частности, геостатистик всегда должен избегать экстраполяции — это элемент его профессиональной этики. На вопрос, какова вероятность продолжения месторождения на глубину ниже разведанного горизонта, геостатистик ответить не может. Оценка глубин месторождения проводится геологом на основании геологических данных. При отсутствии количественных данных и пройденных горных выработок геостатистик ничего не может сказать. Нет такой волшебной палочки, которая могла бы ему заменить недостающую информацию.

Таким образом, с точки зрения геостатистика, запасы могут делиться только на две категории:

1. Запасы, которые определяются в основном по геологическим соображениям без достаточно уверенной количественной оценки; геостатистика здесь неприменима, и в этом отношении не следует строить иллюзий.

2. Запасы, которые основаны на количественных данных, позволяющих точно оконтурить геологически однородное и геометрически непрерывное поле оруденения. В этом случае геостатистик может дать более или менее надежные количественные оценки запасов и рассчитать дисперсии этих оценок (для содержания, запасов руды и металла).

Запасы второй группы в свою очередь можно было бы разделить на различные подгруппы в зависимости от того, с какой точностью они разведаны. Но такое подразделение не отражает каких-либо существенных черт и может привести к парадоксам. Например, запасы можно считать «определенными» или «вероятными» в зависимости от относительной ошибки их определения, но если, например, погрешность определения запасов каждого из четырех рудных тел примерно одинаковых размеров равна 50%, то погрешность суммарных запасов составит 25%, и, таким образом, при объединении вероятных запасов они окажутся в более высокой подгруппе «определенных» запасов.

Более того, точность разведки сама по себе не может служить критерием для классификации запасов [1]. Необходимо также учитывать экономические условия. Предположим, например, что в результате экономического анализа некоторое железорудное тело признано промышленным, поскольку среднее содержание железа в его рудах превосходит 50%. Если разведочные работы дают оценку содержания 55%, то ошибка на 2% не опасна, так как даже при содержании 53% месторождение останется промышленным. Но если оценка содержания равна 51%, то ошибка может оказаться решающей: в том случае, когда истинное содержание окажется равным 49%, в эксплуатацию будет введен объект практически не промышленный. Таким образом,

[1] Это замечание следует отнести к точности подсчета количества запасов, но не к точности разведки вообще, или, как говорят, к разведанности запасов. — *Прим. ред.*

экономическое значение одной и той же погрешности ($\pm 2\%$) меняется в зависимости от близости содержания к промышленному минимуму. Более подробно мы рассмотрим этот вопрос в третьей книге.

В приложениях мы будем рассматривать различные по морфологии рудные тела, выделяя три основных типа: штокообразные, пластообразные (слоевые и жильные) и линзообразные (прерывистые) тела. Кратко остановимся на каждом из этих типов.

А. Штокообразные тела

Рассмотрим вначале случай разведки штока с помощью горных выработок. Как правило, это могут быть штреки и орты (или горизонтальные скважины и т. п.), размещенные на различных горизонтах (штоки часто удлинены по одному из направлений, вдоль которого наблюдается зональность оруденения. В этих случаях следует использовать рассечки, перпендикулярные направлению удлинения штока и пересекающие его на всю мощность, так как выработка, параллельная зональности оруденения, может дать смещенную оценку содержания). Горные выработки опробуются, а отобранные пробы направляются на химический анализ. Таким образом, имеется несколько различных источников погрешностей, которые определяют конечную точность получаемых оценок. Рассмотрим компоненты суммарной погрешности.

1. *Ошибки отбора и анализа проб.* Эти ошибки обычно трудно разделить, и их рассматривают вместе. Первая ошибка обусловлена методикой отбора проб. Важными факторами, влияющими на величину этой ошибки, могут быть такие, например, как количество совков, отбираемых при опробовании каждой вагонетки руды, различие гранулометрического состава исходной руды и отбираемой пробы или — при бороздовом опробовании — аккуратность, с которой выдерживается заданный профиль борозды, и однородность или различие механических свойств руды и вмещающих пород. Влияние ошибки опробования может быть особенно значительным, когда имеются факторы, приводящие к систематическому искажению результата опробования (обогащение рудной мелочи при совковом опробовании или приуроченность наиболее богатого оруденения к механически ослабленным зонам при бороздовом опробовании). Вторая ошибка вносится при сокращении отобранной пробы, когда ее дробят, просеивают и квартуют [1]. Обычно величина этой ошибки бывает незначительной и не имеет систематического характера. Наконец, в лаборатории вносится третья ошибка, ошибка самих анализов, которая может иметь не только случайный, но и систематический характер.

Систематические ошибки особенно опасны. Действительно, на каждом горизонте всегда отбирается большое число проб. Случайные ошибки анализа или опробования не зависят одна от другой и взаимно компенсируются. Если в анализ отдельной пробы вкралась ошибка, характеризующаяся дисперсией σ^2, то ошибка среднего значения из n проб будет иметь дисперсию σ^2/n, ничтожно малую, так как n велико. Систематические ошибки не

[1] См. P. G y, L'echantillonage des mineralis en vrac», Revue de l'Industrie Minerale, спец. вып. 1967 г.

Здесь небесполезно подчеркнуть принципиальное различие между массой отбитой руды и некоторым объемом руды на месте залегания. Руда на месте залегания характеризуется корреляционными связями, которые определяются собственной функцией $\gamma(r)$. Масса отбитой руды, напротив,— относительно случайная смесь кусков руды: два куска, оказавшиеся рядом в отбитой руде, как правило, не бывают соседними на месте залегания. Это приводит к почти полному исключению исходных корреляционных связей. Распределение содержаний в массе отбитой руды следует закону, для которого функция $\gamma(r)$ обращается в нуль или становится ничтожно малой, как только r становится больше диаметра куска руды. В этих условиях можно ожидать, что дисперсия будет обратно пропорциональна отобранному объему. Формулы П. Жи, которые, действительно, дают дисперсию, обратно пропорциональную объему пробы, относятся к проблеме создания средней пробы, представляющей всю опробованную массу руды. Эта проблема радикально отличается от проблемы оценки месторождения по данным определения содержания в руде на месте залегания в объеме пройденных горных выработок.

компенсируются и проявляются в средних значениях так же, как и в отдельных измерениях, и, следовательно, они могут искажать оценку месторождения в целом. Систематические ошибки бывают связаны как с анализом (в этом случае следует говорить о дефектах метода анализа), так и со способом отбора проб. Систематические ошибки при отборе проб возникают чаще всего в связи с явлениями селективного обогащения или обеднения рудного материала (обогащение или обеднение рудной мелочи при совковом опробовании, устойчивых и рыхлых зон в жильном теле при бороздовом опробовании, шлама при опробовании скважин с плохим выходом керна и т. д.). Геологам, впрочем, хорошо известны эти опасности. Подобные систематические ошибки могут быть выявлены и исключены лишь с помощью весьма специальных методов, предназначенных для конкретных случаев. Общей теории, пригодной для всех случаев, не существует. В дальнейшем мы будем предполагать, что опробование проведено хорошо в том смысле, что оно свободно от систематических ошибок. Таким образом, ошибки опробования и анализа проб в целом для сечения будут давать результирующую дисперсию σ^2/n, которая почти всегда ничтожно мала, но в случае необходимости может быть включена в дисперсию распространения на сечение.

2. *Дисперсия распространения на сечение.* Даже если содержания полезного компонента в отобранных пробах известны точно, они лишь приближенно характеризуют среднее содержание на всем оцениваемом горизонте. При этом удобно различать случаи сплошного и дискретного опробований.

Опробование называется сплошным, если совокупность проб, содержания в которых известны с точностью до ошибок опробования и анализа, занимает весь объем рудного тела в сечении пройденных горных выработок. Например, сплошным является опробование скважины, когда выход керна равен 100%; опробование горной выработки, когда анализу подвергается вся масса выдаваемой из выработки руды. В этом случае, если нет систематических ошибок опробования и анализа, определяется истинное содержание в объеме пройденных горных выработок. Остается рассмотреть, в какой мере содержание полезного компонента в руде по данным опробования в горных выработках позволяет оценить истинное содержание полезного компонента в рудном теле на разведочном горизонте. Эта задача решается методами, изложенными в гл. VIII. Обычно горные выработки (штреки, рассечки, горизонтальные скважины) можно рассматривать как некоторые линейные пробы. Горизонт можно разделить на зоны влияния этих проб так, чтобы каждая из проб располагалась в центре своей зоны влияния. Дисперсии распространения каждой из проб на их зоны влияния либо вычисляются по общим формулам, либо определяются с помощью соответствующих графиков. Взвесив эти элементарные дисперсии распространения на квадраты площадей зон влияния, отнесенные к квадрату суммы площадей (или просто разделив элементарную дисперсию распространения на число зон влияния, если зоны влияния примерно равновелики), получим дисперсию σ_S^2, характеризующую ошибку, вносимую при принятии средневзвешенного по площадям зон влияния истинного содержания, определенного по горным выработкам, в качестве содержания для всего горизонта. Эта дисперсия называется *дисперсией распространения на сечение.*

Но опробование может быть дискретным, когда совокупность проб, содержания в которых известны, не занимает всего геометрического объема пройденных выработок. Таков, например, случай бороздового опробования выработок. При дискретности опробования вносится дополнительная ошибка, связанная с принятием среднего содержания в пробах в качестве истинного содержания в выработке. Соответствующую дисперсию σ_D^2 можно легко определить, если весь объем горной выработки разбить на зоны влияния соответствующих дискретных проб. Обычно можно ограничиться вычислением (по формулам гл. VIII) средней дисперсии распространения пробы на

зону влияния и делением этой дисперсии на общее число бороздовых проб. Дисперсия σ_D^2 часто оказывается столь малой, что ею можно пренебречь, но иногда все же ее необходимо учитывать. Отметим, что ошибку распространения среднего содержания в пробах на опробованную выработку можно рассматривать как независимую от ошибки распространения истинного среднего содержания в выработках на разведочное сечение. Другими словами, эта дисперсия σ_D^2 должна быть просто прибавлена к дисперсии σ_S^2, соответствующей сплошному опробованию. Иногда прибавляется и третий член, характеризующий ошибки опробования и анализа. Сумма $\sigma_D^2 + \sigma_S^2$ называется *дисперсией распространения на сечение.* Именно она характеризует точность, с которой может быть определено содержание полезного компонента в рудном теле на данном горизонте.

3. *Дисперсия распространения на слой.* Наконец мы рассмотрим последнюю ошибку, которая на практике чаще всего оказывается наиболее значительной. Эта ошибка связана с распространением содержания по горизонту на два прилегающих полуэтажа, образующих его зону влияния. Если производится оценка слоя по единственному разведанному горизонту, то ошибки, связанные с распространением содержания в горных выработках на весь горизонт и содержания по горизонту на слой, обычно можно рассматривать как независимые. Ошибка распространения среднего содержания по горизонту на слой характеризуется дисперсией распространения σ_E^2, которая легко определяется с помощью соответствующих графиков. Итак, ясно, что дисперсия оценки $\sigma_{E'}^2$ равна сумме упомянутых выше дисперсий:

$$\sigma_{E'}^2 = \sigma_E^2 + \sigma_S^2 + \sigma_D^2 + \sigma_P^2,$$

где σ_E^2 — дисперсия распространения сечения на слой, σ_S^2 — дисперсия распространения выработок на сечение, σ_D^2 — дисперсия распространения дискретных проб на выработку, σ_P^2 — дисперсия отбора и анализа проб.

Величины этих дисперсий обычно убывают слева направо (при условии, что при опробовании и анализе не внесены систематические ошибки).

Предположим теперь, что мы должны оценить месторождение, вскрытое на нескольких горизонтах. Можно рассматривать как независимые ошибки распространения содержаний, определенных по горизонтам, на слои, но отсюда еще не следует, что ошибки оценки каждого горизонта по горным выработкам также независимы.

На практике, однако, оценки двух смежных горизонтов очень часто можно считать независимыми. Это бывает, например, когда расположение горных выработок на этих горизонтах неодинаково, т. е. либо различны направления рассечек (или скважин), либо при одинаковом направлении различны интервалы их размещения. В тех случаях, когда рассечки (или скважины) на соседних горизонтах размещены параллельно и с одинаковыми интервалами, оценки все равно можно считать независимыми, если только интервалы между рассечками малы по сравнению с расстоянием между горизонтами [1]. В частности, разведка изотропного месторождения скважинами, размещенными по прямоугольной сети, должна изучаться как случай разведки параллельными сечениями; при этом сечениями являются профили наибольшей плотности размещения скважин. Искомая дисперсия определяется как сумма дисперсии распространения на сечение, характеризующей ошибку, вносимую при оценке профиля по индивидуальным скважинам, и дисперсии распространения на слой, характеризующей ошибку, связанную с распространением на слой среднего содержания в сечении (профиле). Когда эти условия соблюдаются, результирующую дисперсию оценки для всего место-

[1] Аналогично, чтобы дисперсия распространения на сечение могла быть представлена суммой $\sigma_D^2 + \sigma_S^2$, необходима некоторая нерегулярность или высокая плотность расположения проб на выработках. — *Прим. ред.*

рождения можно вычислить взвешиванием дисперсий $\sigma^2_{E'}$, определенных для всех слоев.

Но если горизонты разведаны одинаково расположенными выработками, а расстояние между соседними выработками примерно равно расстоянию между горизонтами, описанное выше взвешивание становится неправомерным. Такое расположение горных выработок соответствует схеме размещения скважин по регулярной (квадратной) сети. В этом случае можно, не рассматривая раздельно дисперсий распространения на сечения и на слои, просто ввести дисперсию распространения каждой скважины на ее трехмерную зону влияния, которая представляет собой призму с квадратным основанием. Эти дисперсии распространения вычисляются по общим формулам, выведенным в гл. VIII. На практике их значения легко могут быть определены с помощью графиков. Результирующая дисперсия оценки вычисляется взвешиванием этих дисперсий на квадраты объемов их зон влияния или, если зоны влияния примерно одинаковы, делением элементарной дисперсии распространения на число зон влияния. Все сказанное выше о расчете дисперсии оценки среднего содержания в штоке можно коротко представить в виде последовательных простых действий. При этом в основе всех расчетов будет лежать идея о расчленении всего опробованного поля на зоны влияния единичных проб с независимыми погрешностями распространения.

Итак:

1. Для каждого сечения прежде всего вычисляется дисперсия $\sigma^2_D + \sigma^2_p$, характеризующая точность определения содержания в горных выработках. Она равна сумме двух дисперсий: σ^2_p — дисперсии опробования и анализа, обычно малой по величине, и σ^2_D — дисперсии распространения дискретных проб на полный объем горных выработок. Чтобы получить σ^2_D, вычисляется дисперсия $\sigma^2_{l_i}$ распространения каждой пробы на зону ее влияния в объеме выработки. Дисперсия σ^2_D определяется взвешиванием $\sigma^2_{l_i}$ на квадраты площадей зон влияния проб, отнесенных к квадрату суммы зон влияния, или, если опробование выработок равномерное, путем деления σ^2_l на число проб.

2. Для каждого сечения вычисляется дисперсия распространения σ^2_S истинного содержания в горных выработках на всю площадь горизонта. С этой целью определяются частные дисперсии распространения каждого линейного элемента сети горных выработок (штрека, рассечки, скважины и т. д.) на зону влияния в пределах оцениваемого горизонта. Затем эти дисперсии взвешиваются на квадраты площадей зон влияния, отнесенные к квадрату суммы площадей, или, если размеры зоны одинаковы, элементарная дисперсия распространения делится на число зон.

3. Для зоны влияния каждого сечения вычисляется или находится с помощью соответствующих графиков дисперсия распространения горизонта на слой σ^2_E. Оценка содержания в единичном слое имеет дисперсию

$$\sigma^2_{E'} = \sigma^2_E + \sigma^2_S + \sigma^2_D + \sigma^2_p.$$

4. Дисперсия оценки всего месторождения определяется взвешиванием дисперсий $\sigma^2_{E'}$ по формуле

$$\sigma^2_R = \frac{V_1^2\sigma^2_{E'_1} + \ldots + V_n^2\sigma^2_{E'_n}}{(V_1 + \ldots + V_n)^2},$$

где V_i — объем i-го слоя.

5. Если нужно оценить часть месторождения, заключенную между первым и последним разведанными горизонтами, то n реальных горизонтов заменяются $(n-1)$ фиктивными горизонтами, расположенными на расстоянии полуэтажа от реальных горизонтов, и каждому из них приписываются параметры (площадь, содержание и т. д.), равные среднему из параметров двух ближайших реальных горизонтов.

Б. Пластообразные тела

Общий порядок расчета дисперсии оценки среднего содержания в пластообразном теле не отличается от вышеописанного. Однако необходимо сделать два важных замечания.

Во-первых, идет ли речь о жильном или об осадочном месторождении, пластообразное тело чаще всего обладает зональностью вдоль пласта или жилы. Чтобы исключить влияние зональности, необходимо использовать пробы, пересекающие пласт на полную мощность от подошвы до кровли. При этом границы пласта должны быть определены по геологическим признакам, а не по бортовому содержанию полезного компонента, так как в последнем случае никогда нет уверенности, что такая граница (даже если она существует) будет достаточно проста и непрерывна, чтобы можно было следовать ей при отработке рудного тела. Обычно эта граница весьма неправильна, и в процессе эксплуатации неизбежно возникает разубоживание. В результате среднее содержание оказывается ниже, чем подсчитанное в пределах границ по бортовому содержанию, причем геостатистика не позволяет определить величину разубоживания заранее.

Во-вторых, отбор проб на всю мощность рудного тела (эквивалентный операции восхождения по мощности) позволяет перейти к рассмотрению опробования в двумерном пространстве, где геометрическим полем является некоторая поверхность S, а подлежащими изучению переменными — мощность h и линейный запас A, определяемые по пробам. Общие методы, описанные в гл. VIII, позволяют определить дисперсии оценки средней мощности, среднего запаса и самой площади S. На этой основе определяется точность оценки запасов руды и металла. Дисперсия среднего содержания может быть найдена с помощью косвенных методов, описанных в гл. X, § 4.

Таким образом, при анализе точности подсчета запасов пластовых тел в принципе следует пользоваться вариограммой линейного запаса. Но практически, хотя это и не совсем строго с теоретической точки зрения, часто используют вариограмму средних содержаний, т. е., по существу, отношений A/h для линейных проб, отобранных на полную мощность. По этой вариограмме вычисляются элементарные дисперсии распространения, по сумме которых определяют дисперсию оценки среднего содержания.

Когда залежь соответствует изотропной схеме и разбурена скважинами по квадратной сети, непосредственно вычисляют дисперсию распространения значения признака по скважине на зону влияния скважины, а затем делят ее на число скважин, получая тем самым дисперсию оценки среднего значения признака по всем скважинам.

В случае прямоугольной (но не квадратной) сети скважин или дискретного опробования горных выработок дисперсию оценки получают путем сложения дисперсии распространения значений признака в пробах на горную выработку или на профиль наибольшей плотности размещения скважин и дисперсии распространения значений признака по профилям или горным выработкам на всю разведанную площадь. При этом соблюдаются те же правила композиции дисперсий, что и в случае штокообразного тела.

В. Линзообразные прерывистые тела

Случай прерывистой залежи — наиболее сложный как для геостатистика, так и для геолога. Сложность связана с прихотливостью геометрического поля пространственной переменной. Однако эта проблема ставит перед исследователем различные задачи в зависимости от того, каким способом будет производиться отработка рудных тел: валовым (например, в карьере) или, напротив, селективным (каждой линзы раздельно).

При валовом способе отработки задачи существенно упрощаются, ибо геометрическим полем тогда является весь объем, который предполагается извлечь, т. е. объем, в котором содержатся и рудные линзы, и безрудные прослои (этот объем очень просто определяется или выбирается проектан-

том). В пределах геометрического поля, рассматриваемого как однородное, можно не делать различия между рудой и пустой породой, так как весь объем подлежит извлечению. Экспериментальная вариограмма линейного запаса или содержания в пробах будет обладать эффектом самородков, связанным с наличием безрудных участков между рудными линзами. Оценки для всего объема в целом и соответствующие дисперсии могут быть определены с помощью методов, изложенных в гл. XIV.

Если предполагается селективная отработка рудных тел, то к постановке и решению геостатистических задач следует подходить с крайней осторожностью. В первую очередь необходимо выяснить, имеются ли в действительности участки промышленного оруденения, размеры и формы которых позволяют провести селективную отработку. Если месторождение представлено не сплошным рудным пластом, а отдельными линзообразными телами незначительных размеров, притом размещенных неравномерно как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях, то селективная выемка, которая позволила бы отработать эти рудные тела без потерь и разубоживания, практически невозможна.

При валовой выемке месторождения извлекаются практически все рудные тела, попавшие в контур отработки; оценка запасов металла в пределах этого контура и соответствующая дисперсия оценки могут быть рассчитаны по значениям линейных запасов в разведочных скважинах. Напротив, при планировании селективной добычи нельзя говорить о какой-либо серьезной оценке, если только не подсечены и не оконтурены в достаточном количестве отдельные рудные линзы. Опасная ошибка может возникнуть при подсчете запасов и определении среднего содержания по данным, характеризующим рудные интервалы в скважинах. Почти наверняка и запасы и содержание будут при этом завышены: запасы — из-за невозможности извлечь все, в том числе и мелкие, линзы, а содержание — из-за неизбежного разубоживания. Порядок величины двойной ошибки, которая может быть значительной, нельзя оценить аналитически. При этом не только расчет ошибки теряет всякий смысл, но и сама оценка месторождения становится затруднительной. Единственное, что может рекомендовать геостатистик в таком случае,— это провести дополнительные разведочные работы (лучше горные выработки, чем скважины) с целью уточнения контуров хотя бы нескольких рудных тел с тем, чтобы потом можно было их оценить (с помощью общих методов оценки штокообразных или пластовых тел) как отдельные объекты.

Прежде чем перейдем к изучению различных схем, используемых на практике, рассмотрим проблему, которая является частной, но иногда играет важную роль в подсчете запасов. Речь идет о влиянии плотности руды на результаты подсчета запасов.

Учет плотности руды при подсчете запасов

До сих пор мы действовали так, как если бы плотность руды ρ (или ее удельный вес) была не только независима от содержания, но и постоянна. Однако известно, что это бывает не всегда так. Рудные минералы обычно более плотные, чем вмещающие породы, и тем тяжелее, чем выше содержание в них полезного компонента. В случае бедных (месторождения золота или урана) или очень однородных (некоторые месторождения железа или марганца) руд изменение плотности в зависимости от содержания ничтожно мало. Но если руды при достаточно высоком среднем содержании полезного компонента очень неоднородны, изменение плотности может оказаться существенным. Такая картина наблюдается, например, на богатых месторождениях серы. В подобных обстоятельствах при подсчете запасов следует взвешивать весовое содержание полезного компонента в каждой пробе на соответствующую ей плотность руды. Без такой операции переоценка запаса руд с низким

содержанием и недооценка запаса руд с высоким содержанием приведут к систематическому занижению среднего объемного содержания.

Геологи, впрочем, стараются учитывать изменение плотности руды, если оно имеет значительную амплитуду. Они приписывают пробе с объемом v_i и содержанием x_i количество металла

$$q_i = \rho_i v_i x_i,$$

где ρ_i — удельный вес руды с содержанием x_i. Тогда общее количество металла и среднее содержание вычисляются по формулам типа

$$\left.\begin{aligned} Q &= \sum \rho_i v_i x_i, \\ m &= \frac{\sum \rho_i v_i x_i}{\sum \rho_i v_i}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Очень важно использовать именно эти формулы при оценке m и Q. Можно заметить, что, заменяя весовые содержания x_i объемными содержаниями $\rho_i x_i$ или весом металла на кубический метр руды, мы автоматически учитываем возможное изменение плотности. В принципе именно к пространственной переменной $x_i\rho_i$ следует применять обычные формулы. Нужно, в частности, вычислять дисперсии оценки с помощью дисперсий распространения, рассчитанных для значений объемного содержания $\rho_i x_i$. В природе значение плотности меняется не слишком сильно. Ее дисперсия чаще всего бывает ничтожно малой по сравнению с дисперсией содержания. Поэтому практически почти всегда можно использовать дисперсии распространения весового содержания x_i, т. е. пренебречь изменением плотности при расчете ошибок. Но в общем случае при оценке содержания полезного компонента или запаса металла пренебрегать изменением плотности нельзя. Поэтому кратко рассмотрим, каким способом может быть выражена зависимость плотности руды от содержания в ней полезного компонента.

Возьмем руду, содержащую два рудных минерала A и B, например галенит и сфалерит. Пусть кусок руды в естественном залегании имеет вес, равный единице, и a и b — содержания в руде минералов A и B (т. е. галенита и сфалерита, а не свинца и цинка), выраженные в долях единицы. Обозначим, кроме того, символами u_a и $\rho_a = \frac{1}{u_a}$ — удельные объем и вес минерала A; u_b и $\rho_b = \frac{1}{u_b}$ — удельные объем и вес минерала B; u_0 и $\rho_0 = \frac{1}{u_0}$ — удельные объем и вес породы; u и $\rho = \frac{1}{u}$ — удельные объем и вес пробы с содержаниями a и b.

Удельный объем $u = \frac{1}{\rho}$ пробы с весом, равным единице, равен сумме частичных объемов минералов A и B и породы, т. е.

$$1/\rho = u = au_a + bu_b + (1 - a - b)\,u_0,$$

или

$$\frac{1}{\rho} = a\,(u_a - u_0) + b\,(u_b - u_0) + u_0. \tag{2}$$

Однако если удельные веса минералов A и B точно известны, то нельзя сказать того же относительно удельного веса вмещающих пород, состав которых может меняться. Более того, в породах могут быть различного рода пустоты и полости, которые также влияют на удельный вес пород в естественном залегании. Поэтому действительная плотность может отличаться, и иногда весьма существенно, от теоретического значения. На практике величина $1/\rho$ оказывается пространственной переменной, как и сами содержания a и b. Но эта пространственная переменная находится в тесной корреляционной зависимости от содержаний a и b, и уравнение (2) следует рас-

сматривать как наилучшую оценку величины $1/\rho$ через значения содержаний a и b, т. е. как оценку с минимальной дисперсией.

Обычно a priori предполагают, что оценка величины $1/\rho$ линейна относительно содержаний x и y металлов Pb и Zn (они пропорциональны содержаниям минералов A и B, но более удобны для практического использования), т. е.

$$1/\rho = u = \lambda x + \mu y + u_0, \tag{3}$$

и определяют λ, μ и u_0 методом наименьших квадратов. Если для n проб известны содержания металлов и плотности, мы располагаем n группами из трех чисел x_i, y_i и $u_i = 1/\rho_i$ каждая. Тогда дисперсия оценки (3) приобретает вид

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n}\sum (u_i - \lambda x_i - \mu y_i - u_0)^2$$

и минимальна при следующих значениях параметров:

$$\lambda = \frac{R_{ux} - R_{uy}R_{xy}}{1 - R_{xy}^2} \cdot \frac{S_u}{S_x},$$

$$\mu = \frac{R_{uy} - R_{ux}R_{xy}}{1 - R_{xy}^2} \cdot \frac{S_u}{S_y},$$

$$u_0 = \bar{u} - \lambda\bar{x} - \mu\bar{y},$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum u_i; \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i;$$

где

$$S_u^2 = \frac{1}{n}\sum (u_i - \bar{u})^2; \quad S_x^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2; \quad S_y^2 = \frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})^2;$$

$$R_{ux} = \frac{1}{n}\frac{\sum (u_i - \bar{u})(x_i - \bar{x})}{S_u S_x};$$

$$R_{xy} = \frac{1}{n}\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y};$$

$$R_{uy} = \frac{1}{n}\frac{\sum (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{S_u S_y}.$$

Наконец, дисперсия оценки (3) при этих оптимальных значениях параметров, т. е. остаточная дисперсия величины $1/\rho$, составляет

$$\sigma_u^2 = \frac{1 + 2R_{ux}R_{xy}R_{yu} - R_{ux}^2 - R_{xy}^2 - R_{yu}^2}{1 - R_{xy}^2} S_u^2 \tag{4}$$

и равна нулю, если значение $1/\rho$ точно определяется по формуле (3) заданными содержаниями x и y. Обычно она отлична от нуля и характеризует уклонения реальных значений переменной $1/\rho$ от вычисленных по формуле (3) с оптимальными параметрами μ, λ, u_0 при заданных x и y. Иначе говоря, эта дисперсия характеризует точность, с которой плотность оценивается по формуле (3).

С помощью этой формулы можно построить номограмму для определения плотности руды по известным значениям содержаний. Если по осям координат откладывать содержания x и y, то номограмма представит собой семейство параллельных прямых $\rho = \text{const}$. Достаточно построить такие прямые для ряда значений ρ, чтобы с помощью интерполяции определить теоретическую плотность для любой пробы, в которой известны содержания x и y.

Экспериментальное изучение плотности руды на месторождении серного колчедана в Бени-Саиде (Алжир)

Отыскание зависимости плотности руды от содержаний x и y — обычная практическая задача. Но мы все же приведем для иллюстрации пример такого исследования на месторождении пирита в Бени-Саиде (Алжир). Штокообразное месторождение пирита разведано буровыми скважинами, по которым отбирались керновые пробы. Для некоторого числа керновых проб, кроме содержания железа и серы, был определен удельный вес. Пирит в месторождении частично окислен и содержание железа является суммой содержаний его в пирите и лимоните.

1. По результатам анализа 14 керновых проб, взятых в одной скважине (№ 12), были получены следующие значения определенных выше параметров:

$$\bar{u} = 0{,}328; \quad \overline{\text{Fe}} = 22{,}4\%; \quad \overline{\text{S}} = 18{,}8\%;$$
$$R_{\text{SFe}} = 0{,}992; \quad R_{u\text{S}} = -0{,}943; \quad R_{u\text{Fe}} = -0{,}921;$$
$$S_u^2 = 0{,}00118; \quad S_{\text{Fe}}^2 = 46{,}5; \quad S_{\text{S}}^2 = 91{,}8.$$

Оценка (3) дает следующее выражение:

$$1/\rho = u = 0{,}350 - 0{,}658\frac{\text{S}}{100} + 0{,}454\frac{\text{Fe}}{100} \tag{5}$$

с остаточной дисперсией $\sigma_u^2 = 0{,}0956\, S_u^2$, соответствующей предельной относительной ошибке $\pm 6{,}4\%$ (при вероятности $\sim 95\%$). В табл. 5 приведены значения содержаний и плотности для всех 14 проб.

Таблица 5

Результаты определения плотности пиритов
(Бени-Саид)

Содержание, %		Плотность		Содержание, %		Плотность	
S	Fe	измеренная	вычисленная	S	Fe	измеренная	вычисленная
22,5	25,9	2,9	3,14	15,8	20,7	2,9	2,94
41,1	37,9	3,8	4,14	10,5	16,9	2,8	2,80
29,1	29,1	3,5	3,54	17,3	21,2	3,3	3,02
11,4	19,0	2,9	2,78	14,2	18,9	2,9	2,90
32,0	31,8	3,8	3,52	14,8	18,4	3,0	2,98
7,4	13,4	2,7	2,76	13,2	17,9	2,8	2,90
8,1	14,5	2,8	2,76	25,4	27,8	3,1	3,24

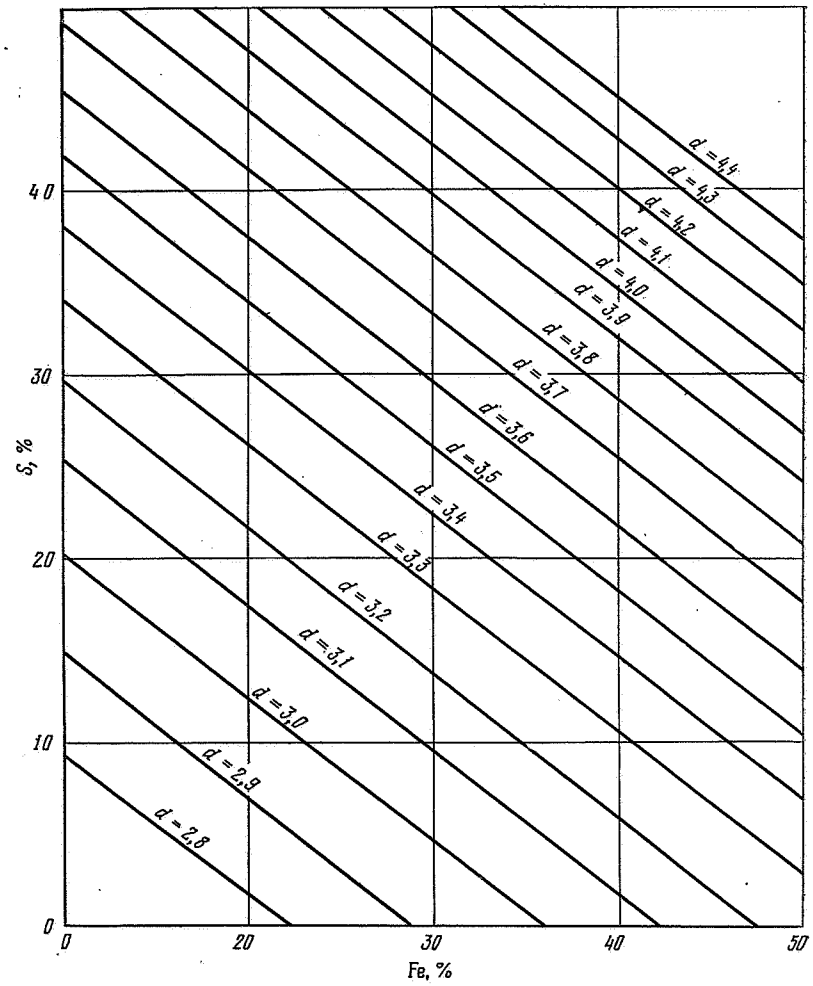
2. По результатам 33 керновых проб, взятых по скважинам № 8, 10, 12, 13 и 15 (по скважине № 12 включены все 14 проб), были получены следующие значения параметров:

$$\bar{u} = 0{,}310; \quad \overline{\text{S}} = 20{,}24\%; \quad \overline{\text{Fe}} = 23{,}38\%;$$
$$S_u^2 = 0{,}00146; \quad S_{\text{S}}^2 = 103{,}8; \quad S_{\text{Fe}}^2 = 57{,}89;$$
$$R_{\text{SFe}} = 0{,}934; \quad R_{u\text{Fe}} = -0{,}884; \quad R_{u\text{S}} = -0{,}900.$$

Эти параметры дают для расчета оценки $1/\rho$ формулу

$$1/\rho = u = 0{,}394 - 0{,}217\frac{\text{S}}{100} - 0{,}172\frac{\text{Fe}}{100},$$

по которой построен график (фиг. 16). Дисперсия этой оценки равна $\sigma_u^2 = 0{,}176 S_u^2$ и существенно больше дисперсии, полученной в первом случае. Это и не удивительно, так как в отличие от первого случая здесь расчет производился по пробам, отобранным в нескольких скважинах. Очевидно, что изменение плотности вмещающих пород, определяющее величину остаточной дисперсии σ_u^2, в пяти различных скважинах должно быть значитель-



Фиг. 16. Плотность руды (d) в зависимости от содержаний железа и серы.

нее, чем в одной. Относительная ошибка определения плотности в этом случае с вероятностью ~95% не превышает ±10%.

3. Поясним смысл коэффициентов λ, μ и u_0. В формуле

$$1/\rho = u = \lambda \frac{S}{100} + \mu \frac{Fe}{100} + u_0$$

постоянный член u_0 — значение величины $1/\rho$ для вмещающих пород. Плотность вмещающих пород $\rho_0 = 1/u_0$ для скважины № 12 равна 2,86, а для пяти упомянутых скважин в среднем — 2,54. Интерпретация коэффициентов μ и λ несколько более трудна. Действительно, наблюдаемое в пробе содержание железа представляет собой сумму содержаний железа, связанного с пиритом и равного $\frac{56}{64}$ S, и железа, находящегося в лимоните, т. е.

$$Fe\% = \frac{56}{64} S + Fe_{(окисленное)}.$$

Поскольку изменение содержания железа, связанного с пиритом, полностью определяется изменением содержания серы, то мы можем рассматривать изменение только окисленного железа; тогда

$$1/\rho = \left(\lambda + \frac{56}{64\mu}\right) \frac{S}{100} + \mu \frac{Fe_{(окисленное)}}{100} + u_0.$$

Введем содержание пирита $P = \frac{120}{64} S\%$:

$$1/\rho = \left(\frac{64}{120}\lambda + \frac{56}{120}\mu\right) \frac{P}{100} + \mu \frac{Fe_{(окисленное)}}{100} + u_0.$$

В этом виде выражение для $1/\rho$ может быть непосредственно сопоставлено с теоретической формулой (2), откуда следует равенство

$$u_P - u_0 = \frac{64}{120}\lambda + \frac{56}{120}\mu,$$

где u_P и u_0 — удельные объемы пирита и вмещающей породы. Значения плотности пирита $\rho_P = 1/u_P$, найденные из этого соотношения, оказались равными 4,75 (для скважины № 12) и 5,05 (для пяти скважин). Последнее значение очень хорошо согласуется с теоретическим значением — 5,10.

Плотность лимонита не может быть вычислена аналогично, так как точное содержание воды в нем неизвестно.

4. Для сравнения нами рассмотрены результаты оценки плотности руды по формулам, отличающимся от выражения (3). Прежде всего мы попытались представить плотность (а не удельный объем) как линейную функцию содержаний железа и серы. Для 14 керновых проб из скважины № 12 метод наименьших квадратов дал уравнение

$$\rho = 2{,}895 + 6{,}776 \frac{S}{100} - 4{,}833 \frac{Fe}{100} \qquad (6)$$

с остаточной дисперсией $\sigma_\rho^2 = 0{,}169 S_\rho^2$, в то время как для оценки по уравнению (3) отношение остаточной дисперсии σ_u^2 к дисперсии S_u^2 равно 0,096, т. е. значительно меньше. Следовательно, оценка (3) оказывается лучшей, чем рассматриваемая. Исследована также и логарифмическая оценка

$$\ln \rho = a \ln x + b \ln y,$$

для которой отношение $\sigma_{\ln\rho}^2$ к $S_{\ln\rho}^2$ оказалось большим и равным 0,237. Оценка логарифмического типа должна была бы дать наилучший результат при логнормальности совместного распределения всех трех величин x, y и ρ. Однако если содержания в действительности часто бывают логнормальными, то этого совершенно нельзя сказать о плотности. Заметим, кроме того, что формула (3) наилучшим образом отражает количественные соотношения между удельными объемами руды и составляющих ее компонент, возникающие в реальных процессах рудообразования [1].

[1] Предлагаемую здесь процедуру оценивания плотности руды с помощью уравнения связи (3) нельзя признать удачной. Это уравнение служит оценкой с наименьшей среднеквадратической погрешностью лишь для удельного объема u, а вовсе не для удельного веса ρ. Оценка ρ по уравнению (3) противопоставляется обычной в рамках линейного регрессионного анализа оценке вида $\rho = \alpha + \beta S + \gamma Fe$. Предпочтительность первой автор обосновывает тем, что результат (5) характеризуется отношением $\sigma_u^2/S_u^2 = 0{,}096$, меньшим, нежели подобное отношение $\sigma_\rho^2/S_\rho^2 = 0{,}169$ для результата (6). Но такое сопоставление неправомерно, поскольку первое отношение указывает долю остаточной дисперсии удельного объема u, но не удельного веса ρ. Из двух последних колонок табл. 5 следует, что для оценки удельного веса ρ через удельный объем (5) доля остаточной дисперсии составляет $\sigma_\rho^2/S_\rho^2 = 0{,}219$. Таким образом, тривиальная оценка (6) эффективней предлагаемой. К тому же обычный регрессионный анализ приводит к заведомо несмещенным результатам, в то время как по уравнению (3) получают заниженную оценку ρ, выступающего в нем в качестве среднего гармонического.— *Прим. ред.*

ГЛАВА XI

Схема де Вейса

Краткое содержание

В § 1 определяется коэффициент абсолютного рассеивания 3α и линейные эквиваленты проб. Приводится график эквивалентности прямоугольного параллелепипеда.

В § 2 рассматривается схема де Вейса в одномерном пространстве.

В § 3 изучается случай разведки маломощного пласта скважинами, размещенными по квадратной сети. Определяется дисперсия распространения значения признака в скважине на зону ее влияния.

В § 4 рассматривается схема де Вейса в двумерном пространстве. Выводится формула для вариограммы линейной схемы де Вейса и приводится соответствующий график.

В § 5 изучается случай разведки жильной залежи горными выработками. Выводятся формулы дисперсий распространения для различных вариантов разведки.

В § 6 рассмотрен случай разведки залежи скважинами, размещенными по регулярной сети, и получено выражение для дисперсии оценки среднего содержания, когда длины рудных пересечений превышают шаг сети.

В § 7 рассматривается случай оценки штокообразного тела. Выведены формулы дисперсий распространения для разведочных сетей различной плотности.

В § 8 даются примеры экспериментального определения коэффициента абсолютного рассеивания для месторождений различных типов.

§ 1. Линейные эквиваленты

Для достаточно большого числа рудных месторождений (или по крайней мере для их геостатистически однородных частей) пространственная изменчивость содержаний может быть описана с помощью схемы де Вейса, т. е. собственной схемы, которая характеризуется полувариограммой $\gamma(h)$, удовлетворяющей соотношению (VI,4,9)

$$\gamma(\lambda h) = \gamma(h) + 3\alpha \ln|\lambda|.$$

Константа 3α называется *коэффициентом абсолютного рассеивания схемы де Вейса*. В практических приложениях чаще всего используется изотропная схема де Вейса, определяемая изотропной функцией собственного рассеивания

$$\gamma(r) = 3\alpha \ln r. \qquad \text{(XI,1,1)}$$

При наличии анизотропии следует пытаться исключить ее либо с помощью соответствующего линейного преобразования координат (при геометрической анизотропии), либо путем разложения $\gamma(h)$ на составляющие; при этом следует руководствоваться правилами, изложенными в гл. VI, § 2 (при зональной анизотропии).

Очевидно, что собственная функция де Вейса не обращается в нуль при $r = 0$, а принимает бесконечное отрицательное значение. В случае точечной переменной это приводит к бесконечным значениям дисперсий распространения или локальных дисперсий. Однако фактически схема де Вейса используется только для описания изменчивости переменных на неточечной геометрической базе, регуляризованных с помощью весовой функции или функции опробования. Так как все вариограммы, получаемые регуляризацией исходной вариограммы типа (XI,1,1), в начале координат обращаются

в нуль, упомянутая выше трудность теряет всякое значение. Действительно, реальные геометрические базы, или объемы отбираемых проб, всегда велики по сравнению с размерами рудных зерен. Содержания на точечной геометрической базе, вообще говоря, также имеют конечные дисперсии, но очень большие по сравнению с дисперсиями содержаний в макроскопических пробах. То, что в схеме де Вейса точечным содержаниям приписывается бесконечная дисперсия, является просто идеализированным выражением этого реального свойства и никак не препятствует описанию изменчивости содержаний на макроскопическом уровне, пригодному для практического применения [1].

Дисперсия пробы v в поле V выражается общей формулой (VI,4,4), которая запишется здесь в виде

$$\sigma^2(v/V) = \frac{3\alpha}{V^2}\int_V\int_V \ln|x-x'|\,dx\,dx' - \frac{3\alpha}{v^2}\int_v\int_v \ln|x-x'|\,dx\,dx'. \qquad \text{(XI,1,2)}$$

В частном случае, когда объемы v и V гомотетичны, эта дисперсия определяется формулой де Вейса (VI,4,10)

$$\sigma^2(v|V) = \alpha \ln\frac{V}{v}. \qquad \text{(XI,1,3)}$$

Эта простая формула неприменима, если v и V имеют произвольные формы, однако ее можно обобщить, если ввести понятие эквивалентности двух проб. Будем говорить, что пробы v и v' эквивалентны (в случае схемы де Вейса), если они имеют в произвольном поле V одну и ту же дисперсию. Положим, что

$$F(v) = \frac{1}{v^2}\int_v\int_v \ln|x-x'|\,dx\,dx'. \qquad \text{(XI,1,4)}$$

Функция $F(v)$, представляющая среднее значение $\ln r$ в объеме v, зависит не только от размера, но и от формы объема v. Формула (XI,1,2) равносильна соотношению

$$\sigma^2(v|V) = 3\alpha[F(V) - F(v)], \qquad \text{(XI,1,5)}$$

из которого следует, что для эквивалентности проб v и v' необходимо и достаточно, чтобы $F(v) = F(v')$.

Эта эквивалентность не зависит от коэффициента абсолютного рассеивания и имеет, следовательно, чисто геометрический смысл. Совокупность всех проб, эквивалентных пробе v, характеризуется общим значением $F(v)$. В частности, среди этих проб имеется отрезок l, такой, что

$$F(l) = \ln l - \frac{3}{2} = F(v).$$

Этот отрезок l называется *линейным эквивалентом* v. Совокупность эквивалентных проб целесообразно характеризовать их общим линейным эквивалентом

$$\ln l = F(v) + \frac{3}{2}. \qquad \text{(XI,1,6)}$$

Обозначим теперь линейные эквиваленты пробы v и ее геометрического поля V через l и L. Внесем (XI,1,6) в формулу (XI,1,5) и получим, что

$$\sigma^2(v|V) = 3\alpha \ln\frac{L}{l}. \qquad \text{(XI,1,7)}$$

[1] Используя теорию обобщенных случайных функций, можно показать, что собственная функция $3\alpha \ln r$ определяет собственную схему обобщенной функции, но как только мы переходим от точечной переменной к регуляризованной, обобщенная случайная функция становится обычной функцией, т. е. пространственной переменной в обычном смысле.

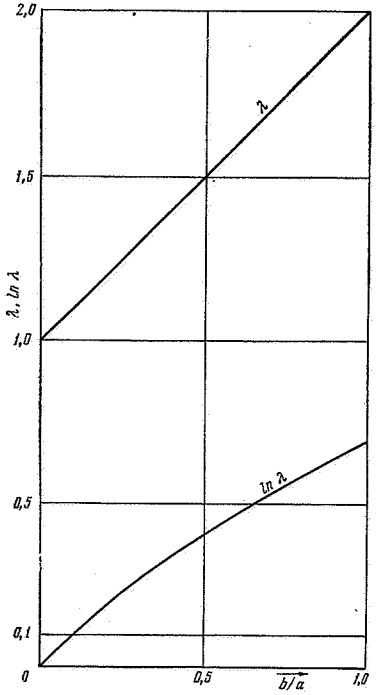
Это обобщение формулы де Вейса позволяет быстро рассчитать дисперсию по известному коэффициенту абсолютного рассеивания 3α или оцехотя бы исходя из экспериментального значения дисперсии, если известны нить 3α, приближенно линейные эквиваленты l и L.

Примеры. Линейный эквивалент $L(a, b)$ прямоугольника со сторонами a и b легко получить из выражения (VII,3,12) для $F(a, b)$ — среднего значения $\ln r$ в прямоугольнике. Для $b \leqslant a$ имеем

$$\ln [L(a, b)] = \ln a + \frac{\pi}{3}\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\left[\ln\frac{b}{a} - \frac{25}{12}\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(k+1)(2k-1)(2k+1)}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}. \qquad \text{(XI,1,8)}$$

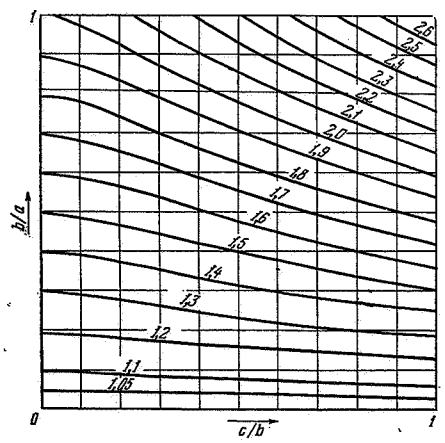
Точные формулы могут быть получены для линейных эквивалентов параллелограмма и треугольника. Методом последовательных приближений можно получить также точное значение линейного эквивалента произвольного многоугольника. Однако эти вычисления весьма сложны и практически чаще всего используются приводимые ниже приближенные выражения.

Линейный эквивалент прямоугольного параллелепипеда со сторонами



Ф и г. 17. График эквивалентности прямоугольника.

Прямоугольник со сторонами a и b ($a \geqslant b$) эквивалентен линейной пробе размером $a\lambda$.



Ф и г. 18. График эквивалентности параллелепипеда.

Параллелепипед со сторонами a, b и c ($a \geqslant b \geqslant c$) эквивалентен линейной пробе размером $a\lambda$. Значения λ указаны над кривыми.

a, b и c выводится с помощью формул гл. VII, § 4. Мы приведем только первые члены его разложения, в котором $a \geqslant b \geqslant c$:

$$L(a, b, c) = \ln a + \frac{\pi}{3}\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a} - \frac{25}{72}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6} + \ldots + \\ + \frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{6}\left(\ln 2 + \frac{1}{12}\right)\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a} - \frac{5}{12}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{216}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{1800}\frac{b^6}{a^6} + \ldots\right] -$$

$$- \frac{\pi}{6}\frac{c^2}{ab}\ln\frac{c}{b} + \frac{\pi}{15}\frac{c^3}{b^3}\left[\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right] + \frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{120}\frac{b}{a} - \frac{127}{1800}\frac{b^2}{a^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{1800}\frac{b^6}{a^6} + \ldots\right] + \frac{1}{30}\frac{c^4}{a^2b^2}\ln\frac{c}{b} + \\ + \frac{c^6}{b^6}\left[\frac{\pi}{2688}\frac{b}{a} - \frac{1}{1008}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6} + \ldots\right] + \ldots \qquad \text{(XI,1,9)}$$

Эта функция табулирована и представлена в виде графиков (фиг. 17 и 18), из которых, в частности, следует, что куб со стороной a эквивалентен линейной пробе длиной $2{,}7a$, в то время как квадрат со стороной a эквивалентен пробе длиной $2{,}004a$, т. е. практически $2a$.

Приближенные линейные эквиваленты

Простые приближенные формулы позволяют с удовлетворительной точностью рассчитать линейные эквиваленты различных многоугольников и многогранников. Например, линейные эквиваленты равны для прямоугольника со сторонами a и b:

$$L = a + b;$$

для параллелограмма со сторонами a и b и площадью $S = ab\sin\varphi$:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 + 2S};$$

для треугольника со сторонами a, b и c и площадью S:

$$L = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 2S};$$

для трапеции с основаниями a и b, площадью S и отрезком m, соединяющим середины оснований,

$$L = \sqrt{l^2 + l'^2 + m^2 - \frac{1}{3}\frac{m^2 l'^2}{l^2} + 2S},$$

где $l = \frac{a+b}{2}$ и $l' = \frac{a-b}{2}$;

для прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$:

$$L = a + b + \frac{c}{2}$$

[эта формула с хорошим приближением дает те же результаты, что и точная формула (XI,1,9)]; для косоугольного параллелепипеда с ребрами r_1, r_2, r_3, гранями S_1, S_2, S_3 и объемом V:

$$L = \sqrt{R^2 + 2S + \frac{V^2R^2}{S^3}},$$

где $R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Эквивалентность проб v и v' означает только равенство дисперсий v и v' в одном и том же поле V, а не равенство дисперсий оценок среднего при отборе проб объемом v или v' по одной и той же сети, так как равенство дисперсий $\sigma^2(v|V)$ и $\sigma^2(v'|V)$ не влечет за собой равенство ковариаций. Однако понятие эквивалентности все же позволяет в общих чертах сопоставлять различные виды опробования. Кроме того, им обычно пользуются при быстрой оценке коэффициента абсолютного рассеивания 3α по экспериментальному значению дисперсии в предположении, что изменчивость изучаемого признака может быть описана изотропной схемой де Вейса.

С другой стороны, понятие эквивалентности позволяет прогнозировать поведение экспериментальной вариограммы при больших расстояниях меж-

ду пробами. Если l — линейный эквивалент используемых проб, дисперсия σ_d^2 разности $[f(x+d) - f(x)]$ содержаний в точках, отстоящих одна от другой на расстояние d, равна

$$\sigma_d^2 = 6\alpha\left[\ln(d/l) + \frac{3}{2}\right] \qquad \text{(XI,1,10)}$$

при условии, что d не менее чем в два-три раза больше l (при выведении этого равенства учтено, что в большом геометрическом поле дисперсия и ковариация проб v и v' равны $A - 3\alpha(\ln l - \frac{3}{2})$ и $A - 3\alpha \ln d$ соответственно).

§ 2. Схема де Вейса в одномерном пространстве

Пусть на отрезке длины L распределение содержания характеризуется собственной функцией $3\alpha \ln h$; тогда вспомогательные функции $\chi(h)$ и $F(h)$, определенные формулами (VIII,3,1), запишутся в виде

$$\begin{aligned} \chi(h) &= 3\alpha[\ln h - 1], \\ F(h) &= 3\alpha\left[\ln h - \frac{3}{2}\right]. \end{aligned} \qquad \text{(XI,2,1)}$$

Выражение $F(h)$ нам пригодится впоследствии: оно означает, что среднее значение $\ln r$ на линейном отрезке h равно $\ln h - \frac{3}{2}$. С помощью этих формул непосредственно выводится выражение дисперсии σ_y^2 среднего содержания на отрезке l в поле L:

$$\sigma_y^2 = F(L) - F(l) = 3\alpha \ln \frac{L}{l}, \qquad \text{(XI,2,2)}$$

которое представляет собою не что иное, как формулу де Вейса (XI,1,3) в линейном случае, так как «объем» линейного отрезка равен его длине, а любые два отрезка всегда геометрически подобны.

Дисперсия распространения σ_E^2 пробы длиной l на зону влияния L', в центре которой она расположена (l мало по сравнению с L'), согласно формуле (VIII,3,2), приближенно равна

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[\ln \frac{L'}{l} + 1 - 2\ln 2\right] = 3\alpha\left[\ln \frac{L'}{l} - 0{,}3863\right]. \qquad \text{(XI,2,3)}$$

Она меньше дисперсии пробы l в зоне ее влияния. Если на отрезке L с постоянным шагом $L' = L/n$ размещены n проб каждая длиной l, то дисперсия оценки среднего по всем пробам в соответствии с формулой (VIII,3,2) будет

$$\sigma_n^2 = \frac{3}{n}\alpha\left[\ln \frac{L}{l} - \ln n - 0{,}3863\right] = \frac{1}{n}[\sigma_y^2 - 3\alpha(\ln n + 0{,}3863)], \qquad \text{(XI,2,4)}$$

что гораздо меньше выражения σ_y^2/n, которое дает обычная статистика. Появление члена с $\ln n$ весьма характерно для схем де Вейса.

Если, наконец, пробу l нельзя считать малой по сравнению с зоной ее влияния L', легко получить выражение для ковариации σ_{yz} содержания y в пробе l и содержания z в зоне ее влияния L', т. е.

$$\sigma_{yz} = A - \frac{2}{L'l}\int_{\frac{L'-l}{2}}^{\frac{L'+l}{2}} h\chi(h)\,dh =$$

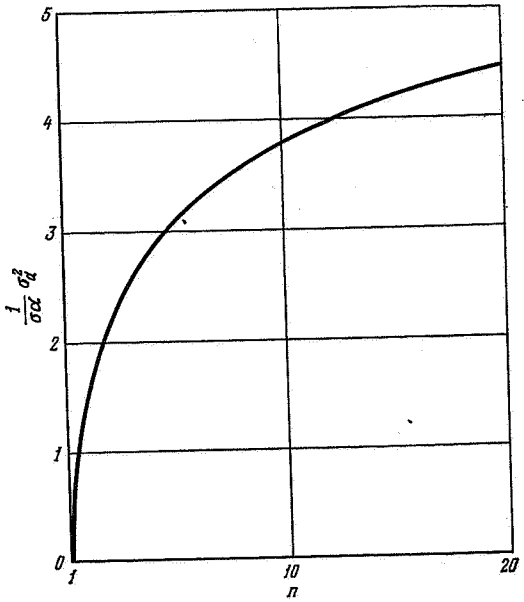
$$= A - 3\alpha\left[\frac{(L'+l)^2}{4lL'}\ln(L'+l) - \frac{(L'-l)^2}{4lL'}\ln(L'-l) - \frac{3}{2} - \ln 2\right],$$

и формула (XI,2,3) заменяется точной формулой

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = \frac{(L'+l)^2}{2lL'}\ln(L'+l) - \frac{(L'-l)^2}{2lL'}\ln(L'-l) - \ln l - \ln L' - 2\ln 2,$$

которая дает нулевое значение дисперсии, когда $l = L'$, т. е. когда проба отбирается по всей зоне L'.

Практически линейная схема может быть использована очень редко. Даже при решении такой задачи, как оценка содержания в горной выработке по равноотстоящим бороздовым пробам, вообще говоря, нет возможности абстрагироваться от второго измерения, т. е. от мощности рудного тела, по которой чаще всего ориентированы бороздовые пробы. Эта схема может быть применена, например, в случае кернового опробования скважин



Фиг. 19. Вариограмма схемы де Вейса в случае линейного расположения выработок.

при условии, что диаметр керновой пробы мал по сравнению с ее длиной. Для сравнения с экспериментальными вариограммами выведем уравнение вариограммы линейной схемы де Вейса, т. е. дисперсии σ_d^2 разности содержаний двух керновых проб длиной l, отстоящих одна от другой на расстояние d. Среднее значение $\ln r$ для этих двух проб равно

$$\frac{1}{l^2}\int_{-l/2}^{l/2} du \int_{-l/2}^{l/2} \ln(d+v-u)\,dv =$$

$$= \frac{1}{2l^2}[(d+l)^2\ln(d+l) - 2d^2\ln d + (d-l)^2\ln(d-l) - 3l^2],$$

откуда следует ковариация $\sigma_{y_1y_2}$ содержаний y_1 и y_2 этих проб. Значение σ_d^2 определяется формулой

$$\sigma_d^2 = 2[\sigma_y^2 - \sigma_{y_1y_2}].$$

Полагая $d = nl$ для проб, отстоящих одна от другой на n интервалов, получим

$$\sigma_d^2 = 6\alpha\left[\frac{1}{2}(n+1)^2\ln(n+1) - n^2\ln n + (n-1)^2\ln(n-1)\right]. \qquad \text{(XI,2,5)}$$

Как только n становится больше 2 или 3, эта формула практически сводится к

$$\sigma_d^2 = 6\alpha\left[\ln n + \frac{3}{2}\right]. \qquad \text{(XI,2,6)}$$

Это последнее соотношение является частным случаем формулы (XI,1,10). Численные значения σ_d^2, рассчитанные по формуле (XI,2,5), представлены в табл. 6 и на фиг. 19.

Таблица 6

Значения функции $\sigma_d^2/6\alpha$

n	$\sigma_d^2/6\alpha$	n	$\sigma_d^2/6\alpha$	n	$\sigma_d^2/6\alpha$	n	$\sigma_d^2/6\alpha$
1	1,386	11	3,898	6	3,292	16	4,273
2	2,171	12	3,985	7	3,446	17	4,333
3	2,589	13	4,065	8	3,580	18	4,390
4	2,879	14	4,139	9	3,697	19	4,444
5	3,107	15	4,208	10	3,803	20	4,496

§ 3. Тонкий пласт, разведанный скважинами по квадратной сети

В упражнении 2 к гл. IX читатель найдет рассмотрение теории периферического опробования круглых блоков. Используя те же идеи и заменив реальные квадратные зоны влияния скважин круглыми, рассмотрим вариант разведки тонкого пласта скважинами, размещенными по квадратной сети.

Пусть тонкий пласт разведан скважинами по квадратной сети с шагом a. Положим, что мощность пласта постоянна и мала по сравнению с a. Обозначим символом l линейный эквивалент скважины (линейный эквивалент l не всегда совпадает с реальной мощностью пласта. Это может быть вызвано наличием геометрической анизотропии, и тогда l представит собой исправленное значение мощности).

Каждой скважине соответствует квадратная зона влияния, которую заменяем кругом той же площади, т. е. кругом радиуса $R = a/\sqrt{\pi}$.

Чтобы вычислить дисперсию распространения скважины на зону ее влияния, т. е. дисперсию σ_E^2, определяющую точность, с которой содержание в зоне влияния Z характеризуется содержанием по скважине, воспользуемся формулой

$$\sigma_E^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 - 2\sigma_{YZ}, \qquad \text{(XI,3,1)}$$

где дисперсии и ковариация относятся к некоторому геометрическому полю S'. Согласно результатам, полученным в упражнении 2 к гл. IX, среднее значение $\ln r$ в круге радиуса R равно $\ln R - \frac{1}{4}$, в то время как среднее значение $\ln r$ для окружности и ее центра равно $\ln R - \frac{1}{2}$. Дисперсия содержания Z и ковариация σ_{YZ} легко определяются, а дисперсия содержания Y выражается через линейный эквивалент l скважины. Таким образом,

$$\sigma_Y^2 = A - 3\alpha(\ln l - 3/2),$$
$$\sigma_Z^2 = A - 3\alpha(\ln R - 1/4)$$

и

$$\sigma_{YZ} = A - 3\alpha(\ln R - 1/2).$$

Подставляя эти значения в формулу (XI,3,1), получим

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left(\ln\frac{R}{l} + \frac{3}{4}\right).$$

Интересно, что эту формулу можно представить в виде равенства

$$\sigma_E^2 = \sigma_Y^2 - \sigma_Z^2 - \frac{3}{2}\alpha, \qquad \text{(XI,3,2)}$$

т. е. дисперсия распространения равна дисперсии скважины в пределах зоны ее влияния, $\sigma_Y^2 - \sigma_Z^2$, уменьшенной на $\frac{3}{2}\alpha$. Последний член связан с размещением скважины в центре зоны влияния. При случайном размещении скважины внутри зоны влияния (случайное слоевое опробование) этот член исчезает. Так как линейный эквивалент квадратной зоны влияния равен $2a$, формулу (XI,3,2) можно записать как

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left(\ln\frac{2a}{l} - \frac{1}{2}\right). \qquad \text{(XI,3,3)}$$

Дисперсия оценки среднего содержания в пределах всей разведуемой площади получается делением дисперсии распространения на число рудных пересечений n:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sigma_E^2.$$

Впрочем, эта формула применима только при отсутствии граничного эффекта, т. е. когда изучаемая рудная площадь S в точности соответствует сумме n зон влияния скважин.

Когда площадь S произвольна (регулярная сеть со случайно расположенной исходной точкой; см. гл. VIII, § 4), уместно увеличить σ_n^2 на член, учитывающий граничный эффект. Если обозначить символом σ^2 экспериментальное значение дисперсии скважин в поле S, а символом σ_S^2 — дисперсию оценки площади S (вычисленную с помощью методов, описанных в гл. III, § 3), этот член будет равным $\frac{\sigma^2\sigma_S^2}{S^2}$, откуда

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sigma_E^2 + \sigma^2\frac{\sigma_S^2}{S^2}.$$

§ 4. Формулы прямоугольника и линейная схема де Вейса

Попытаемся теперь сформулировать законы, описывающие изменчивость содержаний линейных проб в прямоугольном поле. На практике это может быть изменчивость линейного запаса, содержания по профилям в сечении штока или содержания по параллельным горным выработкам, пройденным в пластовой залежи (в последнем случае мощность рудного тела принимается пренебрежимо малой по сравнению с длиной горных выработок).

Рассмотрим прямоугольник $ABB'A'$ (фиг. 20) со сторонами $AB = l$ и $AA' = h$ и углами θ и Φ, определяемыми из соотношений

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{l}{h} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\Phi = \frac{h}{l}.$$

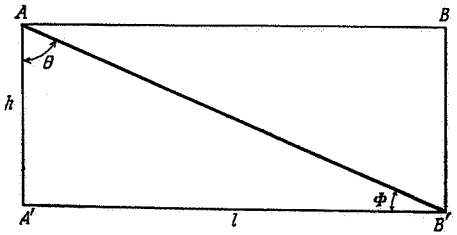
1) Для расчета необходимых дисперсий и ковариаций вычислим прежде всего среднее значение $\ln r$, когда r — расстояние между точкой A и точкой, пробегающей отрезок $A'B'$. Обозначив это среднее символом $I_1(h, l)$, с помощью элементарного интегрирования найдем

$$I_1(h, l) = \ln l - \ln\sin\theta - 1 + \frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta}. \qquad \text{(XI,4,1)}$$

2) Чтобы выразить ковариацию содержаний на двух сторонах прямоугольника AB и $A'B'$, необходимо вычислить среднее значение $\ln r$, когда r — расстояние между двумя точками, независимо пробегающими отрезки AB и $A'B'$. Это среднее значение, $I_2(h, l)$, мы получим путем интегрирования $I_1(h, l)$ по координате точки на AB:

$$I_2(h, l) = \ln l - \ln\sin\theta - \frac{3}{2} + \frac{2\theta}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{\ln\cos\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}. \qquad \text{(XI,4,2)}$$

3) Чтобы выразить ковариацию содержаний в прямоугольнике и на его стороне AB, мы должны вычислить среднее значение $\ln r$, где r — расстояние между двумя точками, одна из которых пробегает сторону AB,



Фиг. 20.

а другая — занимает все возможные положения внутри прямоугольника. Это среднее значение, $I_3(h, l)$, получим также путем интегрирования $I_2(h, l)$ по координате точки на AA':

$$I_3(h, l) = \ln l - \ln\sin\theta - \frac{11}{6} + \frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{\ln\cos\theta}{3\operatorname{tg}^2\theta} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\frac{\operatorname{tg}\theta}{3}. \qquad \text{(XI,4,3)}$$

4) Наконец, чтобы определить дисперсию содержания в прямоугольнике, необходимо вычислить среднее значение $\ln r$, когда r — расстояние между двумя произвольными точками прямоугольника. Это среднее значение, $I_4(h, l)$, находится путем интегрирования $I_3(h, l)$ по координате точки на AA:

$$I_4(h, l) = \ln l - \ln\sin\theta - \frac{25}{12} + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{6}\ln\sin\theta + \\ + \frac{\ln\cos\theta}{6\operatorname{tg}^2\theta} + \frac{2}{3}\frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\operatorname{tg}\theta. \qquad \text{(XI,4,4)}$$

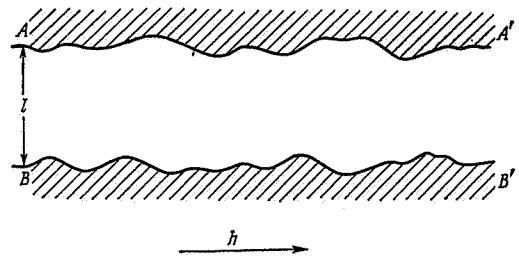
Последняя формула, как и следовало ожидать, симметрична относительно h и l.

Соотношение (XI,4,2) определяет собственную функцию $\gamma(h)$ пространственной изменчивости в одном измерении, когда $l = AB$ рассматривается как постоянная. Одномерная схема с собственными функциями (см. гл. VIII, § 3)

$$\left.\begin{aligned} \gamma(h) &= 3\alpha I_2(h, l), \\ \chi(h) &= 3\alpha I_3(h, l), \\ \Phi(h) &= 3\alpha I_4(h, l) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI,4,5)}$$

эквивалентна схеме де Вейса в двумерном пространстве, описывающей изменчивость содержаний в линейных элементах постоянной длины l перпендикулярных двум прямым AA' и BB', играющим роль зальбандов. Содержание по полным пересечениям (или линейный запас) может рассматриваться как точечная пространственная переменная, геометрическая база которой

пробегает прямую AA' (фиг. 21). Эта одномерная схема может быть использована в качестве первого приближения, даже если мощность l непостоянна, но принимается всюду равной среднему значению.



Фиг. 21.

Точные формулы (XI,4,5) неудобны для практического использования, поэтому представим их в виде разложений по степеням $\frac{h}{l}$ и $\frac{l}{h}$ для $h < l$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3\alpha}\gamma(h) &= \ln l - \frac{3}{2} + \pi\frac{h}{l} + \frac{h^2}{l^2}\ln\frac{h}{l} - \\ &\quad - \frac{3}{2}\frac{h^2}{l^2} - \frac{1}{12}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{60}\frac{h^6}{l^6} + \dots \\ \frac{1}{3\alpha}\chi(h) &= \ln l - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{h}{l} + \frac{h^2}{3l^2}\ln\frac{h}{l} - \\ &\quad - \frac{11}{18}\frac{h^2}{l^2} - \frac{1}{60}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{420}\frac{h^6}{l^6}, \\ \frac{1}{3\alpha}F(h) &= \ln l - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{h}{l} + \frac{h^2}{6l^2}\ln\frac{h}{l} - \\ &\quad - \frac{25}{72}\frac{h^2}{l^2} - \frac{1}{180}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{1680}\frac{h^6}{l^6}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI,4,6)}$$

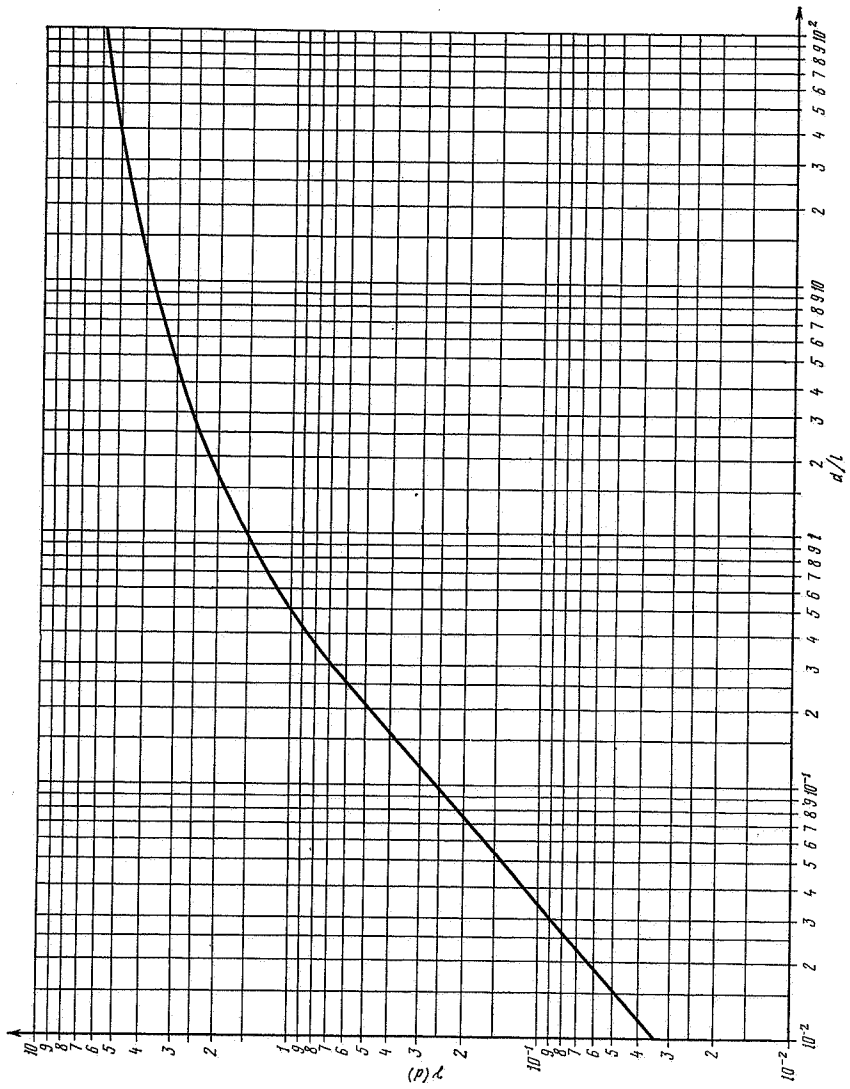
и для $h > l$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3\alpha}\gamma(h) &= \ln h + \frac{1}{12}\frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{60}\frac{l^4}{h^4} + \frac{1}{168}\frac{l^6}{h^6}, \\ \frac{1}{3\alpha}\chi(h) &= \ln h - 1 + \frac{\pi}{6}\frac{l}{h} - \frac{1}{12}\frac{l^2}{h^2} + \frac{1}{180}\frac{l^4}{h^4} - \frac{1}{180}\frac{l^6}{h^6}, \\ \frac{1}{3\alpha}F(h) &= \ln h - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{l}{h} + \frac{1}{6}\frac{l^2}{h^2}\ln\frac{l}{h} - \\ &\quad - \frac{25}{72}\frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{180}\frac{l^4}{h^4} + \frac{1}{1680}\frac{l^6}{h^6}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI,4,7)}$$

Схему, определяемую уравнениями (XI,4,6) и (XI,4,7), назовем *линейной схемой де Вейса*. Она характеризует изменчивость содержаний в линейных пробах длиной l; при малых значениях h ее собственная функция содержит член, линейный относительно h.

Вариограмма линейной схемы де Вейса

Вариограмма линейной схемы де Вейса часто может быть установлена экспериментально. Можно, например, вычислить значения вариограмм содержаний (или линейных запасов) по вертикальным скважинам или по бороздовым пробам, отобранным в горной выработке через равные интервалы. В этой связи можно привести теоретическое уравнение этой вариограммы.



Фиг. 22. Собственная функция линейной схемы де Вейса: $\gamma(d) = \frac{1}{3\alpha}[\gamma(d,l) - \gamma(0,l)]$.

Если l — длина линейных проб, а d — расстояние между ними, то

$$\sigma_d^2 = 2[\gamma(d) - \gamma(0)],$$

что при $d < l$ (см. XI,4,6) дает

$$\sigma_d^2 = 6\alpha\left[\pi\frac{d}{l} + \frac{d^2}{l^2}\ln\frac{d}{l} - \frac{3}{2}\frac{d^2}{l^2} - \frac{1}{12}\frac{d^4}{l^4} + \frac{1}{60}\frac{d^6}{l^6} + \ldots\right], \quad \text{(XI,4,8)}$$

и при $d > l$ (см. XI,4,7)

$$\sigma_d^2 = 6\alpha\left[\ln\frac{d}{l} + \frac{3}{2} + \frac{1}{12}\frac{l^2}{d^2} - \frac{1}{60}\frac{l^4}{d^4} + \frac{1}{168}\frac{l^6}{d^6} + \ldots\right]. \quad \text{(XI,4,9)}$$

В табл. 7 и на фиг. 22 представлена зависимость $\sigma_d^2/6\alpha$ от d/l или l/d. Небольшое различие значений $\sigma_d^2/6\alpha$, наблюдаемое при $\frac{d}{l} = 1$ и $\frac{l}{d}$, объясняется приближенным характером формул (XI,4,8) и (XI,4,9) и позволяет судить о возможной погрешности в наиболее неблагоприятном случае.

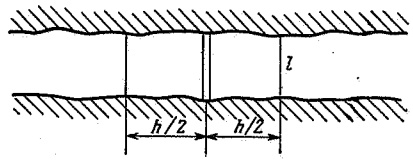
Таблица 7

Вариограмма линейной схемы де Вейса

d/l	$\sigma_d^2/6\alpha$	l/d	$\sigma_d^2/6\alpha$	d/l	$\sigma_d^2/6\alpha$	l/d	$\sigma_d^2/6\alpha$
0,01	0,0308	0,01	6,105	0,20	0,5038	0,20	3,113
0,02	0,0607	0,02	5,412	0,25	0,6047	0,25	2,891
0,04	0,1181	0,04	4,719	0,30	0,6984	0,30	2,712
0,06	0,1766	0,06	4,315	0,40	0,8679	0,40	2,429
0,08	0,2320	0,08	4,026	0,50	1,0176	0,50	2,213
0,10	0,2761	0,10	3,803	0,60	1,1508	0,60	2,039
0,12	0,3243	0,12	3,622	0,70	1,2712	0,70	1,894
0,14	0,3718	0,14	3,468	0,80	1,3806	0,80	1,771
0,16	0,4122	0,16	3,335	1,00	1,5750	1,00	1,572
0,18	0,4612	0,18	3,218				

§ 5. Разведка жилы штреками и восстающими

В рудном теле выделим прямоугольник lh, который будем рассматривать как зону влияния линейной пробы l, размещенной в центре этого прямоугольника параллельно его стороне l. Таким образом, проба l расположена



Фиг. 23.

на расстоянии $\frac{h}{2}$ от сторон прямоугольника (фиг. 23). Прежде всего вычислим дисперсию, характеризующую точность, с которой истинное содержание z в зоне влияния оценивается содержанием y в линейной пробе l. Эта дисперсия имеет вид

$$\sigma_E^2 = \sigma_y^2 - 2\sigma_{yz} + \sigma_z^2 = 2\chi\left(\frac{h}{2}\right) - \gamma(0) - F(h),$$

где функции χ, γ и F определяются формулами (XI,4,5). В приближенном виде можно записать для $h < l$:

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \left[\frac{\pi}{6} \frac{h}{l} - \left(\frac{\ln 2 - 1/4}{6} \right) \frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{288} \frac{h^4}{l^4} - \frac{1}{1920} \frac{h^6}{l^6} \right], \qquad \text{(XI,5,1)}$$

или

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \left[0{,}5236 \frac{h}{l} - 0{,}0739 \frac{h^2}{l^2} + 0{,}0035 \frac{h^4}{l^4} - 0{,}0005 \frac{h^6}{l^6} \right],$$

и для $h > 2l$:

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \left[1 - 2\ln 2 + \ln \frac{h}{l} + \frac{\pi}{3} \frac{l}{h} - \frac{1}{6} \frac{l^2}{h^2} \ln \frac{l}{h} - \frac{23}{72} \frac{l^2}{h^2} + \frac{11}{60} \frac{l^4}{h^4} - \frac{257}{1680} \frac{l^6}{h^6} \right], \qquad \text{(XI,5,2)}$$

или

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \left[-0{,}3863 + \ln \frac{h}{l} + 1{,}0472 \frac{l}{h} - \frac{1}{6} \frac{l^2}{h^2} \ln \frac{l}{h} - \ldots \right].$$

Последняя формула применима только тогда, когда $l < \frac{h}{2}$. В промежуточном случае, когда $\frac{h}{2} < l < h$, следует использовать выражение $\chi\left(\frac{h}{2}\right)$, данное формулой (XI,4,6), и выражение $F(h)$, данное формулой (XI,4,7). Получаемое при этом выражение несколько сложнее двух предыдущих и здесь не приводится, но учтено при составлении табл. 8.

Таблица 8

Дисперсия распространения линейного элемента на прямоугольную зону влияния

h/l	$\sigma_E^2/3\alpha$	h/l	$\sigma_E^2/3\alpha$	l/h	$\sigma_E^2/3\alpha$
0,1	0,0516	1,1	0,491	0,45	0,851
0,2	0,1018	1,2	0,528	0,40	0,926
0,3	0,1505	1,3	0,564	0,35	1,015
0,4	0,1977	1,4	0,599	0,30	1,123
0,5	0,2436	1,5	0,634	0,25	1,257
0,6	0,2885	1,6	0,674	0,20	1,431
0,7	0,3312	1,7	0,699	0,15	1,667
0,8	0,3730	1,8	0,730	0,10	2,021
0,9	0,4135	1,9	0,761	0,05	2,660
1,0	0,4528	2,0	0,787	0,02	3,544

Кривая на фиг. 24 отображает зависимость $\sigma_E^2/3\alpha$ от $\frac{h}{l}$.

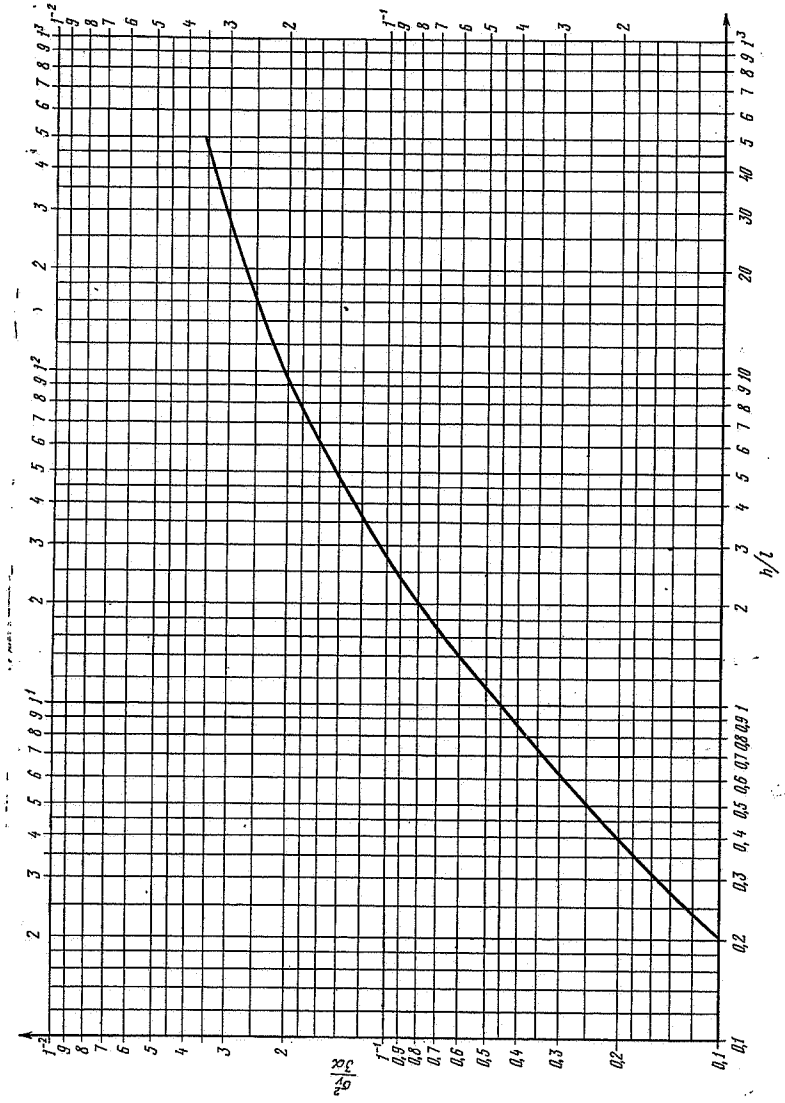
Для малых величин $\frac{h}{l}$ ограничимся линейным членом формулы (XI,5,1), т. е. примем, что

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \frac{\pi}{6} \frac{h}{l},$$

а для очень больших значений $\frac{h}{l}$ — логарифмическим членом формулы (XI,5,2)

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \left[1 - 2\ln 2 + \ln \frac{h}{l} \right] = 3\alpha \left(\ln \frac{h}{l} - 0{,}3863 \right].$$

Если теперь сечение рудного тела S разделить на n прямоугольных зон влияния $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждая из которых освещается линейной пробой,



Фиг. 24. Дисперсия распространения σ_V^2 признака, определенного по выработке, на зону ее влияния.
h — высота зоны влияния; l — длина выработки.

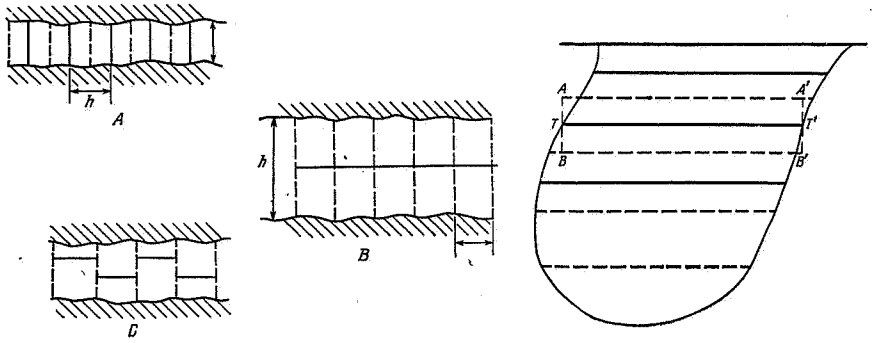
расположенной в центре, то результирующая дисперсия оценки среднего содержания по сечению примет следующий вид:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^{n} S_i^2 \sigma_{E_i}^2.$$

В частности, если все зоны влияния равны, то

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_E^2}{n}.$$

При этом предполагают, что все зоны влияния соприкасаются, а линейные пробы располагаются параллельно одна другой (фиг. 25, *A*), а не продолжают одна другую (фиг. 25, *B*). В последнем случае дисперсии распространения содержаний в линейных пробах на их зоны влияния нельзя считать



Фиг. 25.

Фиг. 26.

независимыми. То же можно сказать и о ситуации, показанной на фиг. 25, *C*. Пробы *B* и *C* (причем *C* — весьма приближенно) следует рассматривать как одну линейную пробу длиной *nl* (при этом нужно учесть, что может иметься параллельная пробе зональность). Схемы опробования, показанные на фиг. 25, *B* и 25, *C*, могут встретиться, когда горной выработкой вскрывается крутопадающее тело большой мощности и производится опробование горизонтальной бороздой по одной или двум стенкам.

Формулу (XI,5,3) можно использовать для оценки точности определения среднего содержания в горной выработке, опробованной *n* равноотстоящими бороздовыми пробами. Она остается верной даже при наличии зональной анизотропии, если пробы отобраны по всей мощности рудного тела. При наличии же геометрической анизотропии длина пробы *l* должна быть умножена на модуль аффинного преобразования.

Наконец, формула (XI,5,3) может служить для оценки точности определения среднего содержания по жиле, разведанной горизонтальными горными выработками. Если высота этажа *h* постоянна, то штрек TT' длиной l_i (фиг. 26) характеризует два полуэтажа, или блок $AA'BB'$; дисперсия распространения при этом определяется формулой (XI,5,1) или (XI,5,2). Дисперсия оценки содержания по *n* горизонтам принимает вид

$$\sigma_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i^2 \sigma_{E_i}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^2}. \qquad \text{(XI,5,4)}$$

В действительности, однако, $\sigma_{E_i}^2$ означает дисперсию распространения l_i не на два реальных полуэтажа, а на воображаемую прямоугольную зону влияния $AA'B'B$, которая может значительно отличаться от реальной зоны влияния выработки (например, в случае наклонного рудного столба). В подобной ситуации, возможно, более правильным было бы принять для *h* расстояние между горизонтами, измеренное не по вертикали, а в плоскости падения рудного тела, т. е. умножить высоту этажа на синус угла падения. В этом случае нужно учитывать возможность геометрической анизотропии, влияние которой, впрочем, может быть устранено умножением значения *h* на модуль соответствующего аффинного преобразования.

Если расстояние *h* между горизонтами мало по сравнению с длиной выработок, можно ограничиться первым членом формулы (XI,5,2) и считать, что

$$\sigma_{E_i}^2 = 3\alpha \frac{\pi}{6} \frac{h}{l_i}.$$

Тогда формула дисперсии оценки (XI,5,4) запишется в следующем простом виде:

$$\sigma_n^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L^2}, \qquad \text{(XI,5,5)}$$

где $L = \sum_{i=1}^{n} l_i$ — суммарная длина выработок, а $S = hL$ — общая разведанная площадь. Эта формула может быть использована при $\frac{h}{l} < 0{,}5$. Когда *h* имеет величину порядка *l*, расчет по формуле (XI,5,5) приводит к завышению дисперсии примерно на 15%. Если $l < h$, следует обратиться к формуле (XI,5,4) и определение индивидуальных дисперсий распространения производить по табл. 8.

Когда оцениваемая часть залежи вскрыта горными выработками на нескольких горизонтах, дисперсия распространения на зону влияния нижнего горизонта имеет смысл только в том случае, если эта зона полностью находится внутри рудного тела. Иногда возникает необходимость оценить часть залежи между крайними разведочными горизонтами. В гл. VIII, § 3, было показано, что блок, заключенный между первым и последним из *n* разведочных горизонтов, оценивается с такой точностью, как при $(n-1)$ горной выработке, каждая из которых расположена в центре зоны ее влияния. Длина воображаемой горной выработки, необходимая для расчета дисперсии распространения, берется равной среднему значению длин двух реальных выработок, ограничивающих рассматриваемый блок. В частности, при использовании формулы (XI,5,5) значение *L* должно вычисляться как

$$L = \frac{1}{2} l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1} + \frac{1}{2} l_n.$$

Разведка штреками и восстающими

Пусть, кроме *N* горизонтальных выработок, по падению рудного тела пройдены N' восстающих, расположенных через интервал h'. Такая прямоугольная сеть выработок, естественно, позволяет получить лучшую оценку, чем по одним только штрекам. Обозначим символами *t* и t' средние взвешенные содержания по штрекам и восстающим соответственно, а σ_N^2 и $\sigma_{N'}^2$ — дисперсии оценок, вычисленные по формулам (XI,5,4) или (XI,5,5) и характеризующие точность, с которой каждое из средних *t* и t' оценивают истинное содержание *z*. С помощью крайгинга можно получить усредненную оценку содержания

$$y = \lambda t + (1-\lambda) t'.$$

Коэффициент λ следует определить таким образом, чтобы дисперсия оценки, $D(y-z)$, истинного среднего содержания в рудном теле z с помощью y была минимальной. Дисперсия разности

$$y-z=\lambda(t-z)+(1-\lambda)(t'-z)$$

равна

$$D(y-z)=\lambda^2 D(t-z)+(1-\lambda)^2 D(t'-z)+2\lambda(1-\lambda)E[(t-z)(t'-z)],$$

где дисперсии распространения $D(t-z)$ и $D(t'-z)$ идентичны σ_N^2 и $\sigma_{N'}^2$. Что же касается ковариации $E[(t-z)(t'-z)]$, ее значение ничтожно мало. Это можно доказать расчетом, однако и так ясно, что завышение или занижение оценки содержания по штрекам не дает нам никакого основания для суждения о поведении оценки содержания по восстающим. Таким образом, оценки t и t' должны рассматриваться как независимые. В итоге находим дисперсию

$$D(y-z)=\lambda^2\sigma_N^2+(1-\lambda)^2\sigma_{N'}^2,$$

которая минимальна при

$$\lambda=\frac{\sigma_{N'}^2}{\sigma_N^2+\sigma_{N'}^2}. \qquad \text{(XI,5,6)}$$

Итак, нужно производить взвешивание с помощью коэффициентов, обратно пропорциональных дисперсиям распространения для соответствующих выработок. Подставляя полученное значение λ в выражение для дисперсии $D(y-z)$, получим минимальную дисперсию оценки, или дисперсию крайгинга:

$$\sigma_K^2=\frac{\sigma_N^2\sigma_{N'}^2}{\sigma_N^2+\sigma_{N'}^2}. \qquad \text{(XI,5,7)}$$

В частном случае, когда расстояния между штреками и восстающими меньше длин соответствующих выработок, дисперсии распространения σ_N^2 и $\sigma_{N'}^2$ рассчитываются по формуле (XI,5,5). Если обозначить символом L' суммарную длину восстающих выработок, формула (XI,5,6) сведется к виду

$$\lambda=\frac{L^2}{L^2+L'^2},$$

и оценка y определится выражением

$$y=\frac{tL^2+t'L'^2}{L^2+L'^2}.$$

Другими словами, взвешивание оценок t и t' следует производить по квадратам суммарных длин соответствующих выработок (а не по самим длинам). Дисперсия оценки (XI,5,7) в этом случае составляет

$$\sigma_K^2=\alpha\frac{\pi}{2}\frac{S}{L^2+L'^2}.$$

Как правило, истинные содержания в горных выработках неизвестны, они оцениваются по результатам дискретного опробования. Предположим, например, что оценка t была получена по N_R бороздовым пробам, отобранным через равные интервалы a на полную мощность рудного тела p, предполагаемую постоянной. Среднее содержание в бороздовых пробах позволяет оценить истинное содержание с дисперсией, определяемой по формулам (XI,5,5) или (XI,5,4) с заменой h и l на a и p соответственно.

Нельзя упускать из виду, что эти формулы применимы, только когда мощность p мала по сравнению с величинами h и l. Если мощность значительна, необходимо обратиться к трехмерной схеме де Вейса и произвести восхождение первого и второго порядков. Кстати, в этом случае возможна анизотропия в направлении мощности, которую следует исключить путем введения соответствующих поправок.

Обозначим символом σ_R^2 дисперсию оценки содержания в горных выработках по бороздовым пробам:

$$\sigma_R^2=\frac{1}{N_R}\alpha\frac{\pi}{2}\frac{a}{p}=\frac{1}{N_R}\sigma_E^2.$$

Здесь применяется принцип композиции дисперсий распространения на профиль и на слой, поэтому общая дисперсия оценки σ_T^2 принимает вид

$$\sigma_T^2=\sigma_N^2+\sigma_R^2.$$

Чаще всего следует добавить еще третий член, представляющий собой дисперсию случайных ошибок отбора и анализа проб, и проследить за тем, чтобы используемые методы отбора и анализа проб не вносили систематической ошибки, так как подобная ошибка, не будучи учтенной при определении дисперсии оценки, может сказаться и на оценке месторождения в целом.

Пример. Пусть разведуемый участок жилы, вскрытый на четырех горизонтах при общей длине выработок 2000 *м* и расстоянии между горизонтами 50 *м* имеет форму прямоугольника 500 × 220 *м*². Примем также, что изменчивость содержания соответствует схеме де Вейса с коэффициентом абсолютного рассеивания $\alpha = 0{,}1$. Мощность рудного тела практически постоянна и равна 1 *м*. Выработки опробованы бороздовыми пробами через 1 *м*.

Вычислим прежде всего дисперсию распространения содержания, определенного по выработкам, на всю площадь участка S, равную 10^5 *м*². Получим $\alpha\frac{\pi}{2}\frac{S}{L^2}=\frac{1}{10}\frac{\pi}{2}\frac{10^5}{4\cdot10^6}=0{,}00393$.

Дисперсия распространения содержания в бороздовой пробе на зону ее влияния в пределах горной выработки определяется по графику (фиг. 24), составленному для $h/l = 1$. Она равна $3\alpha\cdot0{,}45 = 0{,}135$. Разделив ее на число $n = 2000$ бороздовых проб, мы получим 0,00007. Тогда суммарная дисперсия оценки составит

$$0{,}00393+0{,}00007=0{,}00400.$$

Основной вклад в эту дисперсию дает первый член 0,00393, т. е. дисперсию распространения на слой. По сравнению с ней дисперсия распространения на профиль ничтожно мала. Стандартное отклонение, соответствующее этой дисперсии, равно 0,063 и ошибка оценки среднего содержания с вероятностью 95% не превысит $\pm0{,}126$. Если оценка среднего содержания дала величину 1%, то с указанной вероятностью истинное среднее содержание будет не менее 0,874%.

Рассмотрим теперь результат, который был бы получен при простом делении экспериментальной дисперсии содержания на число проб n. Линейный эквивалент разведуемого участка жилы равен 700 *м*, и формула де Вейса дает значение дисперсии содержания в бороздовых пробах на участке, равном $0{,}3\ln 700 \approx 1{,}96$. Тогда по формуле вариационной статистики получаем дисперсию оценки среднего содержания: $1{,}96/2000 = 0{,}00098 \approx 0{,}001$, т. е. в четыре раза меньше найденного выше верного значения 0,004. Таким образом, в подобном случае методы обычной статистики приведут к опасной недооценке величины возможной ошибки.

§ 6. Рудное тело, разведанное скважинами по регулярной сети

Пусть рудное тело разведано n скважинами по регулярной сети с шагом a. Сеть может быть квадратной или шестиугольной; во всяком случае, мы будем считать, что призматическая зона влияния скважины с квадратным или гексагональным основанием может быть заменена цилиндром вра-

щения. Этому цилиндру припишем такой радиус R, при котором площадь круга πR^2 равнялась бы площади квадрата или шестиугольника $\left(\text{в частности, для квадратной сети } R=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)$. Чтобы обобщить результаты, полученные в § 3 этой главы, на случай, когда длина h рудного интервала по скважине не мала по сравнению с шагом сети a, выведем формулу для дисперсии распространения содержания в скважине на зону ее влияния, рассматриваемую как цилиндр вращения высотой h и с радиусом R.

Обозначив символом $F(h, R)$ среднее значение $\ln r$ в цилиндре и символом $C(h, R)$ — среднее значение $\ln r$ между цилиндром и его осью, получим

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[2C(h, R) - F(h, R) - \left(\ln h - \frac{3}{2}\right)\right]. \qquad \text{(XI,6,1)}$$

Элементарное интегрирование дает выражения этих двух вспомогательных функций. Так для F при $h<2R$ имеем

$$F(h, R) = \ln R - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{h^2}{R^2} - \ln\frac{R}{h} + \frac{7}{72}\frac{h^2}{R^2} + \\ + \frac{1}{15}\frac{h^3}{R^3} - \frac{1}{120}\frac{h^4}{R^4} + \frac{1}{1260}\frac{h^5}{R^5} - \frac{1}{76140}\frac{h^7}{R^7} + \ldots,$$

а при $h>2R-$

$$F(h, R) = \ln h - \frac{3}{2} + \frac{128}{45}\frac{R}{h} + \frac{R^2}{h^2}\ln\frac{R}{h} - \\ - \frac{4}{3}\frac{R^2}{h^2} - \frac{5}{36}\frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{120}\frac{R^6}{h^6} + \ldots.$$

Перейдем к функции $C(h, R)$. При $h<R$ получим

$$C(h, R) = \ln R - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{h^2}{R^2} - \ln\frac{R}{h} + \frac{13}{72}\frac{h^2}{R^2} + \frac{1}{60}\frac{h^4}{R^4} + \frac{1}{336}\frac{h^6}{R^6} + \ldots,$$

а при $h>R-$

$$C(h, R) = \ln h - \frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3}\frac{R}{h} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2} - \ln\frac{R}{h} - \frac{7}{8}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{36}\frac{R^4}{h^4} + \frac{1}{240}\frac{R^6}{h^4} + \ldots.$$

Теперь легко вывести выражение дисперсии распространения содержания в скважине на зону влияния этой скважины при $h<R$:

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = \ln\frac{R}{h} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\frac{h^2}{R^2} - \ln\frac{R}{h} + \frac{19}{72}\frac{R^2}{h^2} + \ldots, \qquad \text{(XI,6,2)}$$

а при $h>2R-$

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = 1{,}3444\frac{R}{h} - \frac{5}{12}\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{R^4}{h^4} - \frac{1}{20}\frac{R^6}{h^6}\ldots. \qquad \text{(XI,6,3)}$$

Когда мощность больше радиуса, но меньше диаметра зоны влияния, т. е. когда $R<h<2R$, дисперсия распространения выражается формулой, содержащей как члены с $\frac{R}{h}$, так и члены с $\frac{h}{R}$. В табл. 9 приведены некоторые численные значения дисперсии распространения в зависимости от R/h или h/R. Те же результаты представлены в виде графика (фиг. 27), но в зависимости от a/h, где $a=\sqrt{\pi}R$. При малых значениях $\frac{R}{h}$ можно использовать приближенное линейное выражение

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\cdot 1{,}34\frac{R}{h},$$

Таблица 9

Дисперсия распространения осевой скважины на цилиндрическую зону влияния

R/h	$\sigma_E^2/3\alpha$	h/R	$\sigma_E^2/3\alpha$
0,01	0,0134	1,00	0,994
0,02	0,0267	0,90	1,081
0,04	0,0531	0,80	1,181
0,06	0,0783	0,70	1,254
0,08	0,1049	0,60	1,378
0,10	0,1303	0,50	1,532
0,15	0,1923	0,40	1,730
		0,30	1,995
0,20	0,2523	0,20	2,385
0,25	0,3104	0,10	3,059
0,30	0,3665	0,05	3,747
0,40	0,4730	0,02	4,662
0,50	0,5725	0,01	5,355

которое до $R/h = 0{,}5$ даст погрешность, не превышающую 20%. При значениях $R/h > 10$ пользуются приближенной формулой

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left(\ln\frac{R}{h} + \frac{3}{4}\right),$$

содержащей логарифмический член.

Дисперсию оценки получают при делении дисперсии распространения σ_E^2 на число рудных скважин. При этом иногда необходимо учитывать граничный эффект, как это было сделано в § 3 настоящей главы.

Замечание 1. Если длины рудных интервалов в скважинах сильно меняются, то простого деления на число скважин недостаточно и необходимо производить взвешивание дисперсий распространения по квадратам зон влияния, т. е. по квадратам мощностей. Если все рудные интервалы превосходят шаг сети скважин a, то получится очень простая формула, которая напоминает выражение $\alpha\frac{\pi}{2}\frac{S}{L^2}$ для двумерного случая: дисперсия распространения будет равна

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\cdot 1{,}34\frac{R}{h} = 3\alpha\frac{1{,}34}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{h} = 3\alpha\cdot 0{,}76\frac{a}{h}.$$

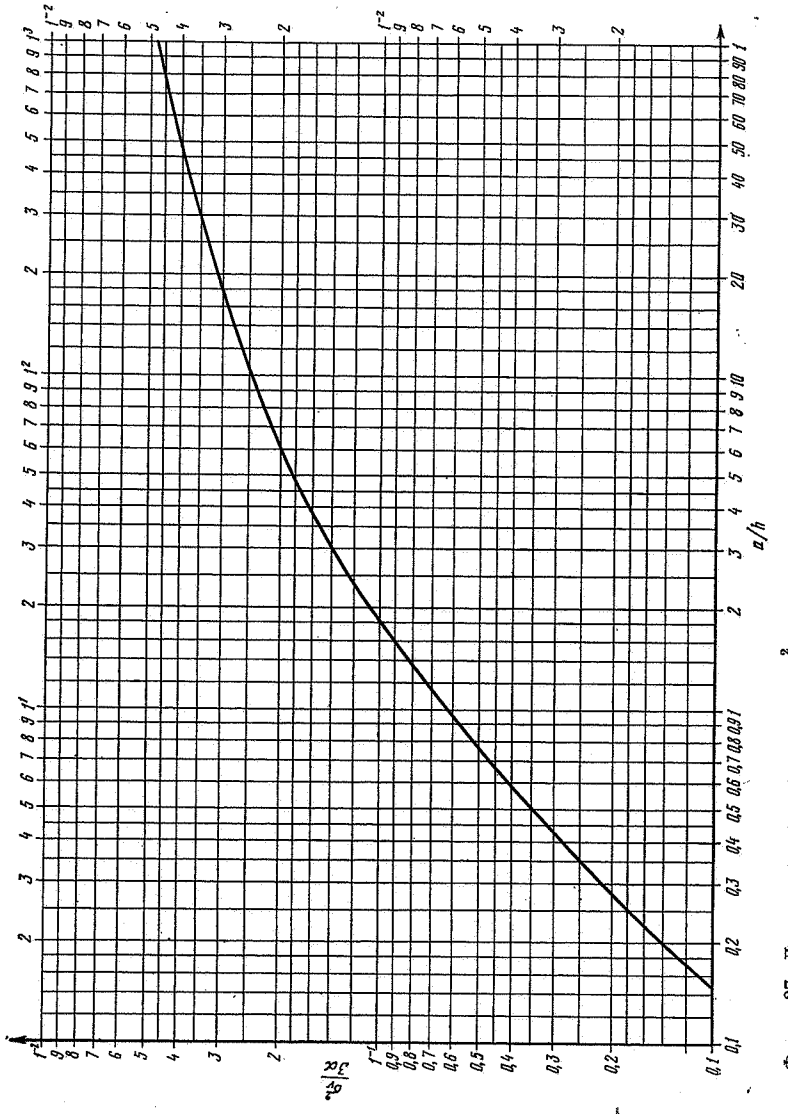
Используя эту формулу и обозначив общую длину рудных интервалов Σh_i символом H, получим выражение для дисперсии оценки среднего содержания:

$$\sigma_n^2 = 3\alpha\cdot 0{,}76\frac{\sum h_i^2\frac{a}{h_i}}{(\sum h_i)^2} = 3\alpha\cdot 0{,}76\frac{a}{H}.$$

А так как общий объем рудной зоны равен $V = Ha^2$, то можно, наконец, записать, что

$$\sigma_n^2 = 3\alpha\cdot 0{,}76\sqrt{\frac{V}{H^3}}. \qquad \text{(XI,6,4)}$$

Замечание 2. В настоящем параграфе выражения для дисперсии распространения выведены в предположении изотропности пространственной переменной. Но они остаются применимыми как в случае вертикальной геометрической анизотропии при условии умножения мощностей h на модуль аффинного преобразования, так и в случае зональной анизотропии при усло-

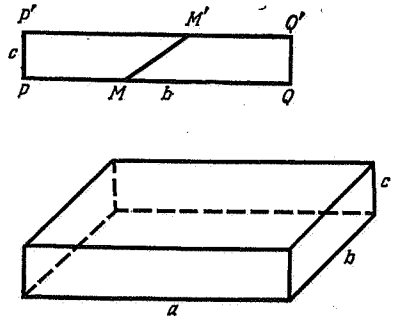


Ф и г. 27. Дисперсия распространения σ_v^2 содержания, определенного по осевой скважине, на зону ее влияния в зависимости от шага сети a и мощности рудного интервала h.

вии, что скважины взяты на всю мощность рудного тела. Если имеется геометрическая анизотропия в плоскости рудного тела, т. е. перпендикулярно направлению скважин, она должна быть рассмотрена отдельно. Подобная геометрическая анизотропия типична, например, для аллювиальных россыпей золота и касситерита, на которых большая ось горизонтального эллипса равных ковариаций располагается параллельно направлению сноса материала (направлению потока). Аффинное преобразование этого эллипса в круг переводит анизотропную схему в изотропную. Модуль такого афинного преобразования может быть назван *коэффициентом потока*. Этот коэффициент не лишен практического значения. Действительно, в классической схеме разведки россыпных месторождений наилучшим размещением шурфов будет такое, при котором отношение расстояния между шурфами в профиле к расстоянию между профилями равно коэффициенту потока. В изотропном варианте, получаемом в результате аффинного преобразования, гомологом этой сети является регулярная сеть, гексагональная или квадратная в зависимости от того, располагаются шурфы в шахматном порядке или нет. Таким образом, при геометрической анизотропии и такой прямоугольной сети шурфов, когда отношение сторон зоны влияния шурфа равно коэффициенту потока, дисперсию распространения можно определить (с учетом произведенного аффинного преобразования) по формулам, выведенным выше.

§ 7. Формулы параллелепипеда

Чтобы рассмотреть проблему оценки штокообразного рудного тела, удовлетворяющего условиям применимости схемы де Вейса, необходимо произвести операцию восхождения второго порядка над функцией $\ln r$, применив общий метод, описанный в гл. VII, § 4. Однако мы не используем здесь эти общие результаты и для упражнения приводим все расчеты.



Ф и г. 28.

Будем рассматривать сечения тела как прямоугольники, а зоны их влияния — как параллелепипеды. Отсюда и название формул этого параграфа по аналогии с формулами прямоугольника, выведенными в § 4 настоящей главы. Читатель простит нам громоздкость и неизящность приводимых в этом параграфе формул, если учтет, что эти формулы в действительности являются приближенными выражениями шестикратных интегралов. Мы постараемся, кстати, наиболее важные из них представить в виде возможно более простых графиков.

Пусть дан параллелепипед со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$ (фиг. 28). Рассмотрим две грани ab («большие сечения»), отстоящие одна от другой на расстояние c. Прежде всего надо вычислить среднее значение $\ln r$, когда r — расстояние

между двумя точками, взятыми на противоположных гранях, т. е. согласно обычной терминологии, собственную функцию $^1/_2\gamma(c)$ средних содержаний больших сечений. Чтобы вычислить эту функцию, рассмотрим каждое из сечений ab как образованное линейными элементами длины a, перемещающимися параллельно самим себе.

Если учесть, что расстояние между двумя любыми из этих линейных элементов, взятых на противолежащих больших сечениях, всегда меньше a, то среднее значение логарифма расстояния между двумя точками, принадлежащими большим сторонам прямоугольника, построенного на таких линейных элементах, можем записать как (XI,4,6)

$$U(r)=\ln a-\frac{3}{2}+\pi\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2}\ln\frac{r}{a}-\frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}-\frac{1}{12}\frac{r^4}{a^4}+\frac{1}{60}\frac{r^6}{a^6}+\ldots, \quad \text{(XI,7,1)}$$

где a — большая сторона прямоугольника, а r — меньшая сторона, равная расстоянию между двумя произвольными точками M и M' на двух противолежащих сторонах b прямоугольника bc. Собственная функция — среднее значение $U(r)$ из (XI,7,1), когда точки M и M' занимают все возможные положения на сторонах PQ и $P'Q'$ длины b, т. е.

$$\frac{1}{3\alpha}\gamma(c)=\frac{1}{b^2}\int_{PQ}dx\int_{P'Q'}U(r)\,dx'.$$

Почленное интегрирование ряда (XI,7,1) хотя и не представляет трудностей, однако громоздко, поэтому, опуская выкладки, приведем результат:

$$\frac{1}{b^2}\int_{PQ}dx\int_{P'Q'}r\,dx'=\frac{1}{3}\sqrt{b^2+c^2}+\frac{2}{3}\frac{c^2}{b^2}\left[c-\sqrt{b^2+c^2}\right]+\frac{c^2}{b^2}\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{c}=$$
$$=\frac{b}{3}+\frac{c^2}{b}\left[\ln\frac{b}{c}+\ln 2-\frac{1}{2}\right]+\frac{2}{3}\frac{c^3}{b^2}-\frac{1}{8}\frac{c^4}{b^3}+\frac{1}{96}\frac{c^6}{b^5}+\ldots;$$
$$\frac{1}{b^2}\int_{PQ}dx\int_{P'Q'}r^2\ln r\,dx'=\left(c^2+\frac{b^2}{6}\right)\ln c-\left(c^2+\frac{b^2}{6}\right)\ln\cos\theta-\frac{13}{12}c^2-$$
$$-\frac{7}{72}b^2+\frac{1}{2}\frac{c^4}{b^2}\ln\cos\theta+\frac{4}{3}\frac{c^3}{b}\theta=\frac{b^2}{6}\ln b-\frac{7}{72}b^2+c^2(\ln b-1)+$$
$$+\frac{2\pi}{3}\frac{c^3}{b}-\frac{7}{8}\frac{c^4}{b^2}-\frac{c^4}{2b^2}\ln\frac{b}{c}-\frac{1}{36}\frac{c^6}{b^4};$$
$$\frac{1}{b^2}\int_{PQ}dx\int_{P'Q'}r^2\,dx'=c^2+\frac{b^2}{6};$$
$$\frac{1}{b^2}\int_{PQ}dx\int_{P'Q'}r^4\,dx'=c^4+\frac{b^2c^2}{3}+\frac{b^4}{15};$$
$$\frac{1}{b^2}\int_{PQ}dx\int_{P'Q'}r^6\,dx'=c^6+\frac{c^4b^2}{2}+\frac{c^2b^4}{5}+\frac{b^6}{28}.$$

Вообще средние значения четных степеней r выражаются в виде полиномов от c и b. Заменив теперь каждый член выражения (XI,7,1) вычисленным средним значением, получим разложение для $\frac{1}{3\alpha}\gamma(c)$. Почленным интегрированием определим также и две другие собственные функции — $\chi(c)$ и $F(c)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\gamma(c)&=\ln a-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{25}{72}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}+\\&+\frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6}+\frac{c^2}{b^2}\left[\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^2}-\right.\\&\left.-\frac{1}{36}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{300}\frac{b^6}{a^6}\right]+\pi\frac{c^2}{ab}\ln\frac{b}{c}+\frac{2\pi}{3}\frac{c^3}{b^3}\left[\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right]+\\&+\frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{8}\frac{b}{a}-\frac{7}{8}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{12}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{120}\frac{b^6}{a^6}\right]-\frac{1}{2}\frac{c^4}{a^2b^2}\ln\frac{b}{c}+\\&+\frac{c^6}{b^6}\left[\frac{\pi}{96}\frac{b}{a}-\frac{1}{36}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{60}\frac{b^6}{a^6}\right]\cdots\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\chi(c)&=\ln a-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{25}{72}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}+\\&+\frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6}+\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{3}\left(\ln 2-\frac{1}{6}\right)\frac{b}{a}+\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{5}{6}\frac{b^2}{a^2}-\right.\\&\left.-\frac{1}{108}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{900}\frac{b^6}{a^6}\right]+\frac{\pi}{3}\frac{c^2}{ab}\ln\frac{b}{c}+\\&+\frac{\pi}{6}\frac{c^3}{b^3}\left(\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{40}\frac{b}{a}-\frac{39}{200}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{60}\frac{b^4}{a^4}+\right.\\&\left.+\frac{1}{600}\frac{b^6}{a^6}\right]-\frac{1}{10}\frac{c^4}{a^2b^2}\ln\frac{b}{c}+\frac{c^6}{b^6}\left[\frac{\pi}{672}\frac{b}{a}-\frac{1}{252}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{420}\frac{b^6}{a^6}\right]\cdots\\\frac{1}{3\alpha}F(c)&=\ln a-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{25}{72}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}+\\&+\frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6}+\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{6}\left(\ln 2+\frac{1}{12}\right)\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{5}{12}\frac{b^2}{a^2}-\right.\\&\left.-\frac{1}{216}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{1800}\frac{b^6}{a^6}\right]-\frac{\pi}{6}\frac{c^2}{ab}\ln\frac{c}{b}+\frac{\pi}{15}\frac{c^3}{b^3}\left[\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right]+\\&+\frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{120}\frac{b}{a}-\frac{127}{1800}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{1800}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{1}{30}\frac{c^4}{a^2b^2}\ln\frac{c}{b}+\frac{c^6}{b^6}\left[\frac{\pi}{2688}\frac{b}{a}-\frac{1}{1008}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6}\right]\cdots\end{aligned}\right\}\quad\text{(XI,7,2)}$$

Эти три собственные функции определяют статистическую схему, которой следуют средние содержания по сечениям ab — большим сечениям. Они верны при условии, что расстояние между сечениями c меньше меньшего размера сечения, т. е. b.

Рассмотрим теперь два промежуточных сечения (две грани параллелепипеда) ac, отстоящих друг от друга на расстояние b. Собственные функции $\gamma(h)$, $\chi(h)$ и $F(h)$ содержания по сечению ac для расстояния $h=b$, т. е. $a\geqslant h\geqslant c$, легко получаются из выражения (XI,7,3). Действительно, функция $F(c)$ представляет собой среднее значение величины $3\alpha\ln r$ в параллелепипеде abc и потому она является функцией симметричной относительно сторон параллелепипеда, в частности $F(c)=F(b)$. С учетом сказанного собственные функции $F(b)$, $\chi(b)$ и $\gamma(b)$ сечения ac запишем в виде

$$F(b)=F(c),\quad \chi(b)=\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{b^2}{2}F(c)\right],\quad \gamma(b)=\frac{\partial^2}{\partial b^2}\left[\frac{b^2}{2}F(c)\right].$$

Тогда, не переписывая для $F(b)$ выражения $F(c)$ из формулы (XI,7,2), для собственных функций промежуточных сечений ac получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\gamma(b)&=\ln a-\frac{3}{2}+\pi\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{12}\frac{b^4}{a^4}+\\&+\frac{1}{60}\frac{b^6}{a^6}+\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{12}\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{36}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{120}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{120}\frac{b}{a}+\frac{1}{60}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{300}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{c^6}{a^6}\left[\frac{\pi}{448}\frac{b}{a}-\frac{1}{336}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6}\right]\cdots\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\chi(b)&=\ln a-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}+\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{11}{18}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{60}\frac{b^4}{a^4}+\\&+\frac{1}{420}\frac{b^6}{a^6}+\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{12}\left(\ln 2+\frac{13}{12}\right)\frac{b}{a}+\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{108}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{600}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{\pi}{12}\frac{c^2}{ab}\ln\frac{b}{c}+\frac{\pi}{30}\frac{c^3}{a^2b}+\frac{c^4}{b^4}\left[\frac{\pi}{240}\frac{b}{a}-\frac{1}{60}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{900}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{c^6}{b^6}\left[-\frac{\pi}{1792}\frac{b}{a}+\frac{1}{1008}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{1680}\frac{b^6}{a^6}\right]\dots\end{aligned}\right\}\quad(\text{XI},7,3)$$

Наконец, нам осталось построить выражения для собственных функций, когда расстояние h между сечениями велико по сравнению с размерами сечений, т. е. для собственных функций малых сечений. Рассмотрим две грани bc, отстоящие одна от другой на расстояние a. Как и ранее, воспользуемся тем, что функция $F(a)$ двух сечений bc равна $F(c)$ из (XI,7,2), и запишем аналогично:

$$F(a)=F(c);\quad \chi(a)=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{a^2}{2}F(c)\right];\quad \gamma(a)=\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\frac{a^2}{2}F(c)\right].$$

Таким образом, для первых двух собственных функций малых сечений имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\gamma(a)&=\ln a+\frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{60}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{168}\frac{b^6}{a^6}+\\&+\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{72}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{180}\frac{b^6}{a^6}\right]+\frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{1}{60}\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{180}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{1}{168}\frac{c^6}{a^6},\ \dots;\\\frac{1}{3\alpha}\chi(a)&=\ln a-1+\frac{\pi}{6}\frac{b}{a}+\frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}-\\&-\frac{1}{840}\frac{b^6}{a^6}+\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{12}\left(\ln 2+\frac{1}{12}\right)\frac{b}{a}-\frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{216}\frac{b^4}{a^4}-\frac{1}{900}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{\pi}{12}\frac{c^2}{ab}\ln\frac{b}{c}+\frac{\pi}{30}\frac{c^3}{ab^2}+\frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{240}\frac{b}{a}+\frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}-\frac{1}{900}\frac{b^6}{a^6}\right]+\\&+\frac{c^6}{b^6}\left[\frac{\pi}{5376}\frac{b}{a}-\frac{1}{840}\frac{b^6}{a^6}\right]\dots.\end{aligned}\right\}\quad(\text{XI},7,4)$$

Дисперсии распространения для зон влияния прямоугольных сечений

Теперь попытаемся определить дисперсию распространения содержания в прямоугольном сечении lp длины l и ширины, или мощности p, на его зону влияния, принимаемую за параллелепипед с основанием lp и высотой h. Предполагается, что сечение занимает медианное положение в зоне влияния и делит ее на два равных параллелепипеда высотой $\frac{h}{2}$.

В зависимости от соотношения размеров l, p и h сечение lp будет большим, если $l>p>h$; средним, если $l>h>p$, и малым, если $h>l>p$. Дисперсия распространения всегда определяется выражением

$$\sigma_E^2=2\chi_1^{\text{I}}\left(\frac{h}{2}\right)-F(h)-\gamma(h).\qquad(\text{XI},7,5)$$

Заменим собственные функции их разложениями, учитывая относительные размеры l, p и h.

1) Дисперсия распространения для большого сечения $l>p>h$. Подставим в (XI,7,5) выражения (XI,7,2) и получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2&=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)\frac{h^2}{pl}-\frac{\pi}{40}\frac{h^3}{p^3}\left(\frac{p}{l}+\frac{p^2}{l^2}\right)+\\&+\frac{h^4}{p^4}\left[\frac{\pi}{192}\frac{p}{l}+\left(\frac{113}{1800}-\frac{\ln 2}{80}\right)\frac{p^2}{l^2}+\frac{1}{288}\frac{p^4}{l^4}-\frac{1}{2880}\frac{p^6}{l^6}\right]-\\&-\frac{1}{48}\frac{h^4}{p^2l^2}\ln\frac{h}{p}+\frac{h^6}{p^6}\left[-\frac{\pi}{3072}\frac{p}{l}+\frac{1}{1152}\frac{p^2}{l^2}-\frac{1}{1920}\frac{p^6}{l^6}\right]\dots,\end{aligned}\right.$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2&=0{,}2320\frac{h^2}{pl}-0{,}0785\frac{h^3}{p^3}\left(\frac{p}{l}+\frac{p^2}{l^2}\right)+\\&+\frac{h^4}{p^4}\left[0{,}0164\frac{p}{l}+0{,}0306\frac{p^2}{l^2}+0{,}0035\frac{p^4}{l^4}-0{,}0033\frac{p^6}{l^6}\right]-\\&-0{,}0208\frac{h^4}{p^2l^2}\ln\frac{h}{p}+\frac{h^6}{p^6}\left[-0{,}0010\frac{p}{l}+0{,}0009\frac{p^2}{l^2}-\right.\\&\left.-0{,}0005\frac{p^6}{l^6}\right]\dots.\end{aligned}\right\}\quad(\text{XI},7,6)$$

Результаты расчетов по формуле (XI,7,6) представлены в виде графика (фиг. 29), на котором по оси абсцисс отложены значения h/p, по оси ординат — p/l, а на поле построено семейство кривых $\sigma_E^2/3\alpha=\text{const}$. Таким образом, значение $\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$, отвечающее паре координат $\frac{h}{p}$ и $\frac{p}{l}$, определяется интерполяцией между двумя ближайшими кривыми.

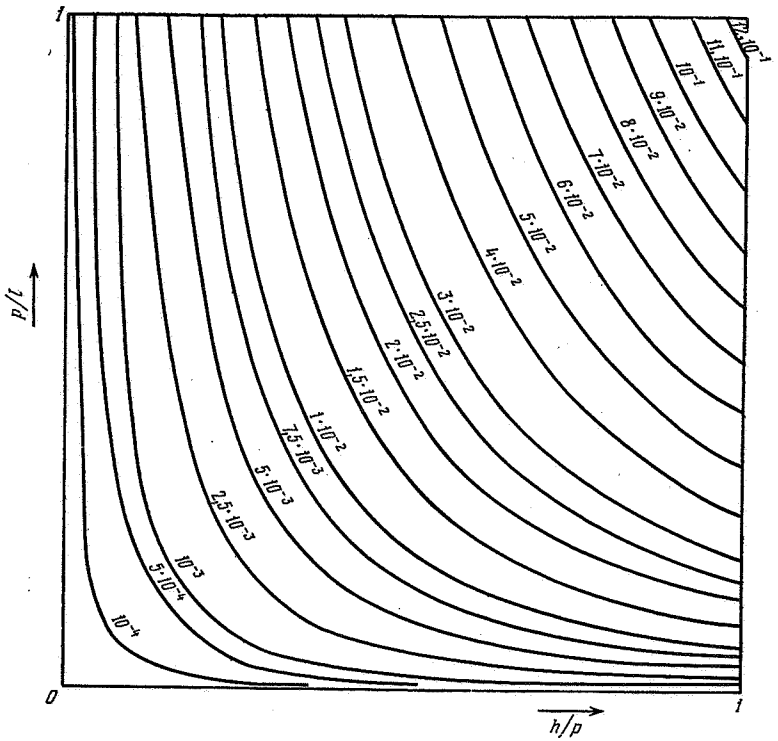
2) Дисперсия распространения для промежуточного сечения ($l>hp$). Как и выше, заменим собственные функции в (XI,7,5) их выражениями из (XI,7,3), полагая $h>2p$ [при $p<h<2p$ можно выразить $\chi\left(\frac{h}{2}\right)$ с помощью формулы для больших сечений, а $F(h)$ с помощью формулы для промежуточных сечений; мы не будем выписывать эти формулы, но учтем их при построении графика]. Для оговоренных условий получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2&=\frac{\pi}{6}\frac{h}{l}-\frac{\pi}{3}\frac{p}{l}-\frac{\ln 2-0{,}25}{6}\frac{h^2}{l^2}+\frac{1}{288}\frac{h^4}{l^4}-\frac{1}{1920}\frac{h^6}{l^6}+\\&+\frac{p^2}{h^2}\left[\frac{\pi}{6}\left(\frac{25}{12}-\ln 2\right)\frac{h}{l}+\left(\frac{7}{72}-\frac{\ln 2}{3}\right)\frac{h^2}{l^2}-\frac{1}{2880}\frac{h^6}{l^6}\right]+\\&+\frac{\pi}{6}\frac{p^2}{hl}\ln\frac{h}{p}+\frac{1}{6}\frac{p^2}{l^2}\ln\frac{h}{p}+\frac{\pi}{15}\frac{p^3}{h^3}\left[-\frac{h}{l}+\frac{h^2}{l^2}\right]+\\&+\frac{p^4}{h^4}\left[\frac{3\pi}{40}\frac{h}{l}-\frac{113}{1800}\frac{h^2}{l^2}\right]-\frac{1}{30}\frac{p^4}{h^2l^2}\ln\frac{p}{h}+\frac{p^6}{h^6}\left[-\frac{97\pi h}{2688l}+\frac{11}{336}\frac{h^2}{l^2}\right]\dots,\end{aligned}\right.$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2&=0{,}5236\frac{h}{l}-1{,}0472\frac{p}{l}-0{,}0739\frac{h^2}{l^2}+0{,}0035\frac{h^4}{l^4}-0{,}0005\frac{h^6}{l^6}+\\&+\frac{p^2}{h^2}\left[0{,}7279\frac{h}{l}+0{,}1388\frac{h^2}{l^2}-0{,}0003\frac{h^6}{l^6}\right]+0{,}5236\frac{h^2}{hl}\ln\frac{h}{p}+\\&+\frac{1}{6}\frac{p^2}{l^2}\ln\frac{h}{p}+0{,}2094\frac{p^3}{h^3}\left[-\frac{h}{l}+\frac{h^2}{l^2}\right]+\\&+\frac{p^4}{h^4}\left[0{,}2356\frac{h}{l}-0{,}0628\frac{h^2}{l^2}\right]+0{,}0333\frac{p^4}{h^2l^2}\ln\frac{p}{h}+\\&+\frac{p^6}{h^6}\left[-0{,}1134\frac{h}{l}+0{,}0327\frac{h^2}{l^2}\right]\dots.\end{aligned}\right\}\quad(\text{XI},7,7)$$

Для практического определения дисперсии распространения в случае промежуточного сечения можно воспользоваться графиком (фиг. 30), на котором в прямоугольной системе координат $\frac{p}{h}$ и $\frac{h}{l}$ построены кривые для различных $\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = \text{const}$. Часть этого графика для малых значений $\frac{h}{l}$ изображена в увеличенном масштабе на фиг. 31.

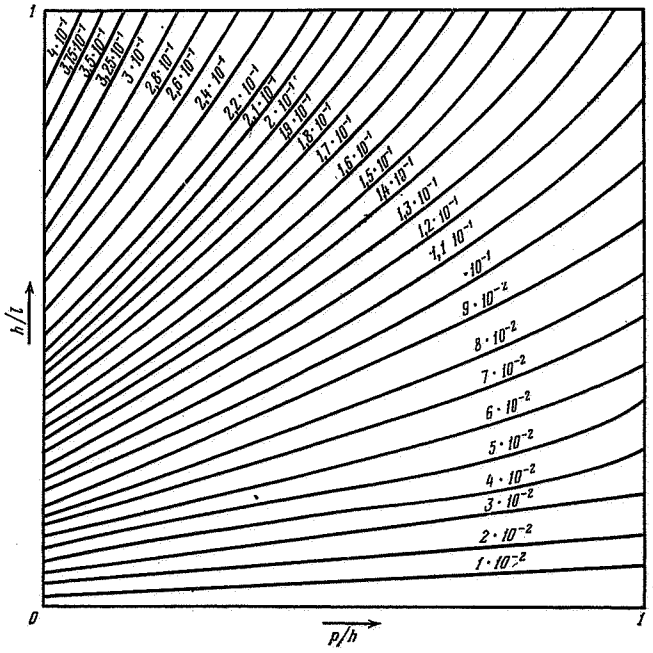


Ф и г. 29. Дисперсия распространения признака, определенного по сечению lp, на зону его влияния высотой h.

Случай большого сечения: $l > p > h$. На кривых указаны значения $\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$.

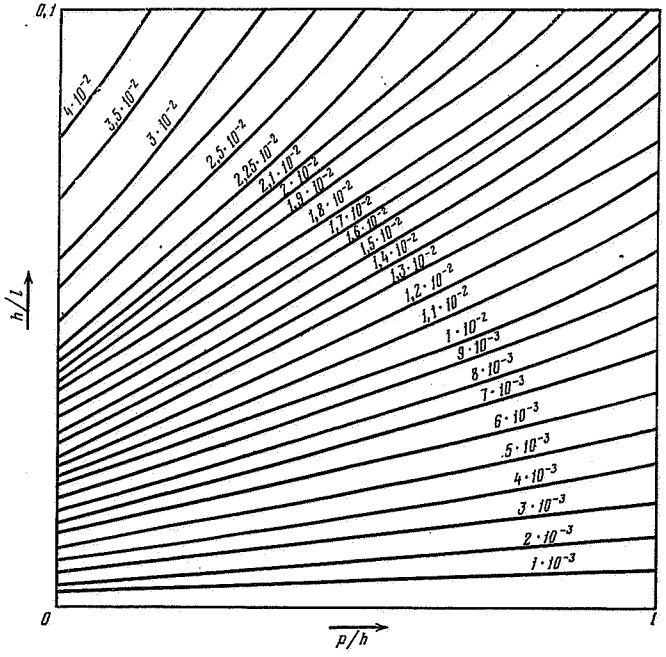
3) Дисперсия распространения для малого сечения ($h > l > p$). Как и выше, заменим собственные функции в (XI,7,5) их разложениями из (XI,3,4) и получим для $h > 2l$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = {} & \ln\frac{h}{l} + 1 - 2\ln 2 + \frac{\pi}{3}\frac{l}{h} - \frac{\pi}{3}\frac{p}{l} - \frac{1}{6}\frac{l^2}{h^2}\ln\frac{l}{h} - \frac{23}{72}\frac{l^2}{h^2} + \\ & + \frac{11}{60}\frac{l^4}{h^4} - \frac{257}{1680}\frac{l^6}{h^6} + \frac{p^2}{l^2}\left[\frac{25}{72} + \frac{\pi}{6}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{h} - \frac{1}{6}\frac{l^2}{h^2}\ln\frac{l}{h} - \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\frac{l^2}{h^2} + \frac{11}{72}\frac{l^4}{h^4} - \frac{257}{1800}\frac{l^6}{h^6}\right] + \frac{p^2}{l^2}\ln\frac{l}{p}\left[\frac{\pi}{6}\frac{l}{h} + \frac{1}{6}\right] + \\ & + \frac{\pi}{15}\frac{p^3}{l^3}\left[\frac{l}{h} - \frac{l^2}{h^2}\right] + \frac{p^4}{l^4}\left[\frac{1}{180} - \frac{\pi}{120}\frac{l}{h} + \frac{127}{1800}\frac{l^2}{h^2} + \frac{11}{60}\frac{l^4}{h^4} - \frac{257}{1800}\frac{l^6}{h^6}\right] - \\ & - \frac{1}{30}\frac{p^4}{h^2 l^2}\ln\frac{p}{l} + \frac{p^6}{l^6}\left[-\frac{1}{1680} + \frac{\pi}{2688}\frac{l}{h} + \frac{1}{1008}\frac{l^2}{h^2} - \frac{257}{1680}\frac{l^6}{h^6}\right] \ldots ,\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI,7,8)}$$



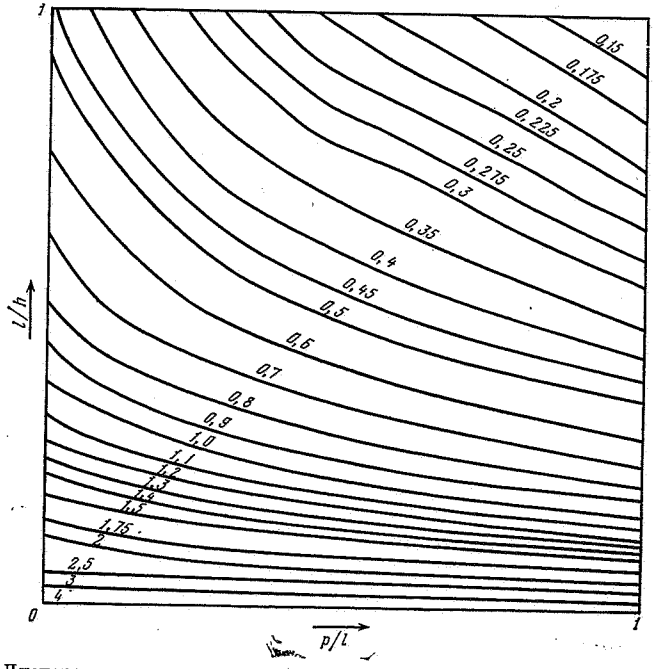
Ф и г. 30. Дисперсия распространения признака, определенного по сечению lp, на зону его влияния высотой h.

Случай среднего сечения: $l > h > p$. На кривых указаны значения $\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$.



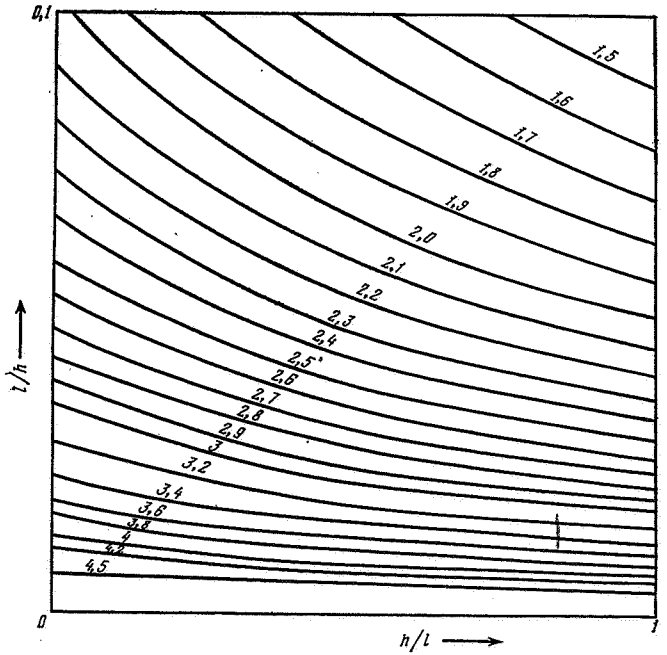
Ф и г. 31. Случай среднего сечения.

Увеличенное изображение части предыдущего графика, соответствующей малым значениям n/l.



Фиг. 32. Дисперсия распространения признака, определенного по сечению lp, на зону его влияния высотой h.

Случай малого сечения: $h > l > p$. На кривых указаны значения $\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$.



Фиг. 33. Случай малого сечения.

Увеличенное изображение части предыдущего графика

или

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = \ln\frac{h}{l} - 0{,}3863 + 1{,}0472\frac{l}{h} - 1{,}0472\frac{p}{l} - \frac{1}{6}\frac{l^2}{h^2}\ln\frac{l}{h} - 0{,}3194\frac{l^2}{h^2} + 0{,}1833\frac{l^4}{h^4} - 0{,}1530\frac{l^6}{h^6} + \frac{p^2}{l^2}\left[0{,}3472 + 0{,}4066\frac{l}{h} - \frac{1}{6}\frac{l^2}{h^2}\ln\frac{l}{h} - \frac{1}{4}\frac{l^2}{h^2} + 0{,}1528\frac{l^4}{h^4} - 0{,}1428\frac{l^6}{h^6}\right] + 0{,}5236\frac{p^2}{hl}\ln\frac{l}{p} + \frac{1}{6}\frac{p^2}{l^2}\ln\frac{l}{p} + 0{,}2094\frac{p^3}{h^3}\left[\frac{l}{h} - \frac{l^2}{h^2}\right] + \frac{p^4}{l^4}\left[0{,}0056 - 0{,}0262\frac{l}{h} + 0{,}0706\frac{l^2}{h^2} + 0{,}1833\frac{l^4}{h^4} - 0{,}1428\frac{l^6}{h^6}\right] - \frac{1}{30}\frac{p^4}{h^2l^2}\ln\frac{p}{l} + \frac{h^6}{l^6}\left[-0{,}0006 + 0{,}0012\frac{l}{h} + 0{,}0010\frac{l^2}{h^2} - 0{,}1530\frac{l^6}{h^6}\right].$$

Если $l < h < 2l$, то эта формула не применима, и дисперсию следует рассчитывать, комбинируя функцию $\chi\left(\frac{h}{2}\right)$ для промежуточного сечения с функцией $F(h)$ — для малого. Мы не приводим соответствующую формулу, численные значения дисперсии для этого случая могут быть определены по графикам (фиг. 32 и 33). На них по оси абсцисс отложены значения p/l, а по оси ординат — l/h, так что каждому малому сечению соответствует точка на графике. Значение $\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$ находим простой интерполяцией между двумя ближайшими кривыми. Фиг. 33 является увеличением нижней части основного графика (фиг. 32).

Благодаря построенным графикам можно быстро определить дисперсию распространения содержания разведанного горизонта на его зону влияния, образованную двумя прилегающими полуэтажами. Если рудное тело разделено на n зон влияния такого типа, то результирующая дисперсия оценки получается взвешиванием по квадратам объемов зон влияния, отнесенным к квадрату общего объема, т. е.

$$\sigma_n^2 = \frac{V_1^2\sigma_{E_1}^2 + \ldots + V_n^2\sigma_{E_n}^2}{(V_1 + \ldots + V_n)^2}.$$

Когда речь идет об оценке части рудного тела, заключенной между первым и последним разведанными горизонтами, применяются те же формулы, но вместо n подставляется $(n-1)$, или, более точно, первый и последний реальные горизонты заменяются одним воображаемым горизонтом со средними характеристиками.

Пример 1. Пусть имеется вертикально падающее рудное тело большой мощности, изменчивость содержаний в котором описывается изотропной схемой де Вейса с коэффициентом абсолютного рассеивания 3α. Предположим, что горизонтальная мощность тела постоянна и равна 30 *м*. Разведка произведена на трех горизонтах, отстоящих один от другого на 50 *м*. Сечение рудного тела на каждом из горизонтов представляет собой прямоугольник с размерами: N_1 — 100 × 30 *м*², N_2 — 150 × 30 *м*² и N_3 — 100 × 30 *м*². Скважины на каждом горизонте пробурены на всю мощность рудного тела, расстояние между соседними скважинами — 25 *м*.

Чтобы вычислить дисперсию оценки, определим сначала дисперсию распространения на сечение. Так как шаг сети скважин меньше их длины, то дисперсия распространения выработок (скважин) на сечение равна

$$\alpha\frac{\pi}{2}\frac{S}{L^2} = \alpha\frac{\pi}{2}\frac{350\times30}{(14\times30)^2} = 0{,}094\alpha.$$

Чтобы получить дисперсию распространения сечения на слой, воспользуемся графиком фиг. 30. Для первого и третьего горизонтов ($p/h = 0{,}6$

и $h/l = 0{,}50$) найдем $\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_3} = 0{,}0104$, а для второго ($p/h = 0{,}6$ и $h/l = 0{,}33$) — $\sigma^2_{E_2} = 0{,}07$. Результирующая дисперсия распространения сечений на рудное тело составит

$$\frac{\sigma^2_{E_1} + \sigma^2_{E_3} + 2{,}25\sigma^2_{E_2}}{(3{,}5)^2} = 0{,}0894\alpha.$$

В целом дисперсия оценки будет равна

$$\sigma^2_N = (0{,}094 + 0{,}084)\,\alpha = 0{,}189\alpha.$$

Для $\alpha = 0{,}1$ соответствующее стандартное отклонение равно 0,122 и ошибка оценки среднего содержания в рудном теле по скважинам с вероятностью 95% не будет превышать $\pm 0{,}244$. Так, если оценка среднего содержания дала значение 1%, то с вероятностью 95% истинное содержание будет не меньше 0,76%.

Рассмотрим, что дали бы в этом случае методы вариационной статистики. Дисперсия содержания по скважине в месторождении (линейный эквивалент которого ≈ 300 *м*) равна $3\alpha \ln \frac{300}{30} = 6{,}9\alpha$. Разделив эту величину на число скважин $n = 14$, найдем дисперсию оценки, равную $\alpha\, 6{,}9/14 = 0{,}49\alpha$, т. е. значительно превышающую правильное значение дисперсии — $0{,}18\alpha$.

Пример 2. Предположим теперь, что шаг сети скважин в примере 1 равен 50 *м*. Имеем 7 скважин, размещенных по квадратной сети 50×50 *м*. Для $a/h = 5/3$ график (фиг. 27) дает значение дисперсии распространения $3\alpha \cdot 0{,}95$. Тогда дисперсия оценки будет равна $0{,}40\alpha$. Для $\alpha = 0{,}1$ стандартное отклонение будет равным 0,2, и ошибка с вероятностью 95% не превысит $\pm 0{,}4$. Если оценка дает 1%, то можно гарантировать лишь, что она не будет меньше 0,6%.

В этом случае классическая статистика дала бы значение дисперсии $\frac{6{,}9}{7}\alpha = 0{,}98\alpha$, которое явно выше истинного значения — $0{,}4\alpha$.

§ 8. Методы экспериментального определения коэффициента абсолютного рассеивания

Чтобы способы расчета дисперсий, рассмотренные в предыдущих параграфах, могли быть использованы при оценивании реальных месторождений, необходимо предварительно узнать коэффициент абсолютного рассеивания 3α. Покажем, как вычисляется значение этого параметра по экспериментальным данным, т. е. по пробам, геометрические параметры и размещение которых известны. Изложим несколько способов в порядке усложнения их практической реализации и увеличения надежности получаемых результатов.

Способ линейных эквивалентов проб

При этом способе требуется только знать дисперсию σ^2 значений признака по пробам v в пределах месторождения V. При этом вычисления просты и нетрудоемки. Рудное тело V рассматривается как параллелепипед со сторонами a, b и c, которые выбираются так, чтобы объем параллелепипеда был равен объему реального рудного тела, и размеры сторон находились бы в таком же соотношении, как и основные размеры тела. Аналогично проба v заменяется малым параллелепипедом со сторонами a', b' и c'. Так как в действительности пробы могут быть различными, стороны a', b' и c' выбираются так, чтобы малый параллелепипед соответствовал средней по размерам пробе (средние размеры, очевидно, могут рассчитываться лишь для однотипных проб, и нельзя, например, определять средние размеры для бороздовых и валовых проб одновременно).

Затем по графику (фиг. 18) определяют линейные эквиваленты пробы и рудного тела (l и L) и, зная экспериментальное значение дисперсии σ^2, определяют коэффициент абсолютного рассеивания из формулы де Вейса

$$\sigma^2 = 3\alpha \ln \frac{L}{l}.$$

Основное преимущество этого способа — минимум необходимых вычислений. Но им нельзя пользоваться, если нет уверенности в отсутствии геометрической или функциональной анизотропии. В случае зональной анизотропии метод дает положительные результаты в том случае, если пробы v отобраны на всю мощность — от кровли до подошвы. Однако, когда месторождение зонально, следует опасаться сочетания этой зональности с геометрической анизотропией. Тем не менее этот упрощенный метод дает обычно удовлетворительные для практических целей результаты.

Способ наклона вариограммы

Более точный способ, позволяющий к тому же выявить геометрическую анизотропию, состоит в построении вариограммы. Если, например, поверхность опробована по квадратной сети со сторонами ячейки a_1 и a_2, оценку полувариограммы в направлении стороны a_1 находят по формуле

$$\gamma(d, a_1) = \frac{1}{N} \sum_i (x_{i+d} - x_i)^2,$$

где x_{i+d} и x_i — содержания в пробах, отстоящих одна от другой на d шагов, т. е. удаленных одна от другой на расстояние $a_1 d$; N — число пар точек, по которым рассчитывается значение полувариограммы $\gamma(da_1)$.

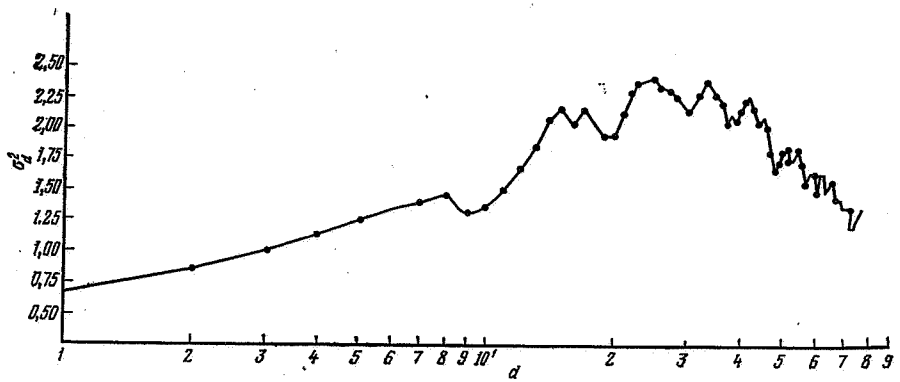
Аналогично вычисляется полувариограмма и во втором направлении, параллельном стороне a_2.

Если месторождение изотропно и размещение содержаний в нем описывается схемой де Вейса, обе полувариограммы должны совпадать, а общее для них уравнение в соответствии с выражением (XI,1,10) принимает следующий вид:

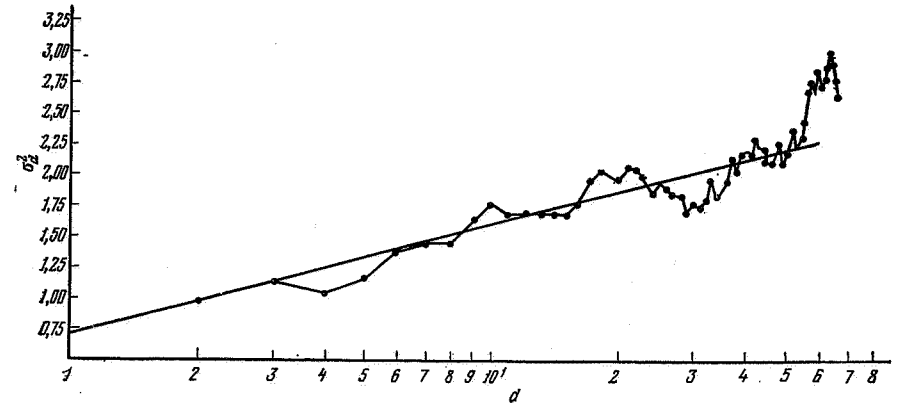
$$\gamma(r) = 3\alpha\left[\ln(r/l) + \frac{3}{2}\right],$$

где l — линейный эквивалент пробы. При логарифмическом масштабе оси абсцисс график этого уравнения представляет собой прямую линию, наклон которой непосредственно определяет коэффициент абсолютного рассеивания. После построения графика можно проверить, соответствует ли полученная вариограмма схеме де Вейса: во-первых, дисперсия, рассчитанная по найденному коэффициенту абсолютного рассеивания и линейным эквивалентам пробы и рудного тела, должна быть близкой к дисперсии содержаний, рассчитанной непосредственно по данным опробования; во-вторых, значение $\gamma(r)$ при $r = l$ должно быть равным $4{,}5\alpha$. Если эти проверки дают отрицательный результат, то даже если вариограммы изотропны (т. е. между вариограммами в двух направлениях нет существенной разницы), следует сделать вывод, что изменчивость содержаний не может быть описана схемой де Вейса. В таком случае можно попробовать описать изменчивость, сочетав схему де Вейса с эффектом самородков.

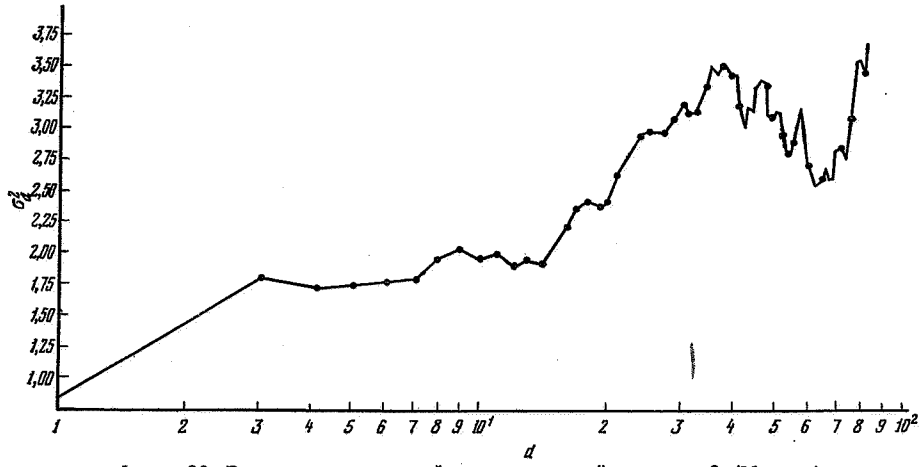
Если наблюдается геометрическая анизотропия, то графики полувариограмм будут параллельными прямыми, смещенными один относительно другого на некоторую величину. Тогда достаточно умножить масштаб расстояний, параллельных направлению стороны a_2, на соответствующий коэффициент λ (модуль аффинного преобразования), чтобы эти прямые совпали. При этом реальное анизотропное поле содержаний заменяется фиктивным



Фиг. 34. Вариограмма логарифмов содержаний по скв. 11 (Мунана)



Фиг. 35. Вариограмма логарифмов содержаний по скв. 19 (Мунана).



Фиг. 36. Вариограмма логарифмов содержаний по скв. 9 (Мунана).

изотропным. После этого остается только рассчитать с учетом коэффициента λ новые линейные эквиваленты фиктивного изотропного поля и пробы в нем, а затем, как и раньше, проверить применимость схемы де Вейса. Для проверки надо сопоставить экспериментальную дисперсию с дисперсией, рассчитанной по формуле де Вейса, а также убедиться, что значение $\gamma(r)$ равно $4{,}5\alpha$ при r, равном новому линейному эквиваленту пробы.

Наконец, возможна функциональная анизотропия, которая проявляется в том, что графики полувариограмм, построенные для разных направлений, имеют различную форму и их нельзя совместить простым перемещением. Если графики вариограмм представлены прямыми, обладающими различными наклонами, то следует ожидать зональности месторождения.

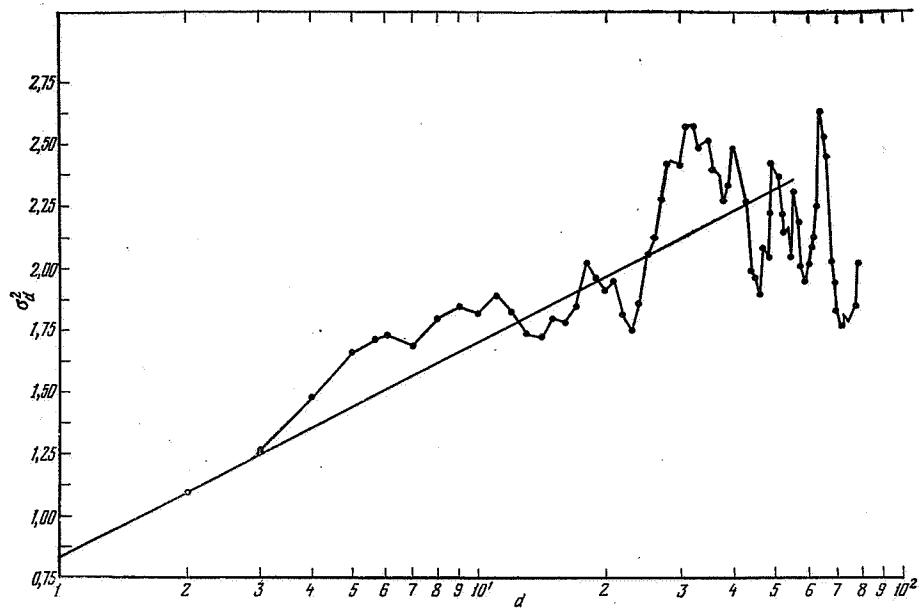
Теперь приведем несколько практических примеров оценки реальных месторождений.

Урановое месторождение Мунана (Габон)

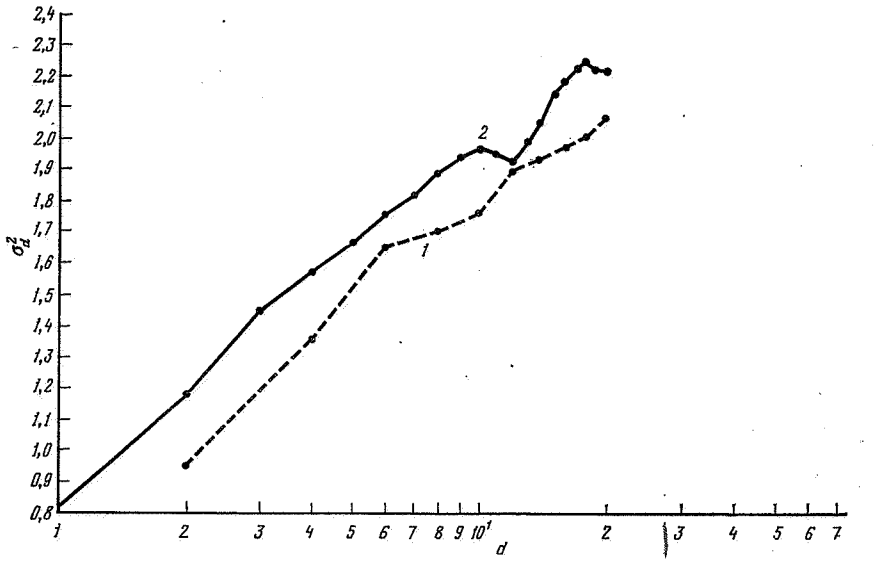
Это месторождение — типичный шток, разведанный вертикальными скважинами. Весь керн с рудных интервалов был разбит на отрезки 50-сантиметровой длины, каждый из которых анализировался на содержание в нем урана. По полученным данным рассчитывались вертикальные вариограммы. Так как статистическое распределение содержаний на этом месторождении хорошо описывается логнормальным законом, вариограммы рассчитывались не для самих содержаний, а для их логарифмов. Это не меняет смысла вариограммы [1]. Наибольший интерес представляют скважины с большой длиной рудных интервалов: они содержат много данных и позволяют получить наиболее длинные вариограммы. Как правило, вариограмму рассчитывают до тех пор, пока расстояние между пробами, по которым вычисляется разность признака, не станет равным или не превысит половины от общей длины рудного интервала. Приведем в качестве примера вариограммы по четырем наиболее длинным скважинам (фиг. 34—37). Одна вариограмма (фиг. 35) хорошо описывается линейным графиком, вторая (фиг. 36) — умеренно, а две последние имеют явные отклонения от линейности, но сохраняют в то же время общий характер логарифмического возрастания. Наличие прогибов вариограммы относительно наклонной прямой является следствием малой периодической составляющей изменчивости содержаний, накладывающейся на общую изменчивость, отвечающую схеме де Вейса. К таким аномалиям следует относиться серьезно, так как они вполне реальны и встречаются периодически. Однако эти аномалии, как правило, имеют явно локальный характер, а амплитуда их проявления никогда не бывает настолько большой, чтобы это могло скомпрометировать практическое значение обращения к схеме де Вейса. Отметим, что наклон вариограмм меняется от скважины к скважине, поэтому коэффициент абсолютного рассеивания следует рассматривать как пространственную переменную, и мы пользуемся средним его значением при условии, что оно вычислено по пробам, отобранным в пределах оцениваемого участка месторождения.

Наконец, на фиг. 38 представлена общая вертикальная вариограмма, построенная по всем скважинам до расстояния между пробами $d = 20$. При расчете вариограммы для $d > 20$ были использованы данные не всех, а лишь наиболее длинных скважин, и поэтому эти значения могут характеризовать не общие, а локальные особенности оруденения. Линейный характер возрастания вариограммы очевиден. Наблюдается только небольшая аномалия при $d = 12$, соответствующая периодической составляющей с периодом 6 *м* и небольшой амплитудой. Реальность существования этой состав-

[1] Но существенно меняет смысл признака, характеризуемого вариограммой, ибо вместо содержания рассматривается его нелинейная функция. Полученная с помощью такой вариограммы дисперсия оценки среднего будет, очевидно, прямо относиться к среднему значению логарифма содержания и лишь косвенно — к среднему содержанию.— *Прим. ред.*



Фиг. 37. Вариограмма логарифмов содержаний по скв. 10 (Мунана).



Фиг. 38. Суммарные вариограммы логарифмов содержания по месторождению Мунана в горизонтальном (1) и вертикальном направлениях.
Единица длинее d равна 0,5 *м*.

ляющей не вызывает сомнения, так как вариограмма рассчитана по весьма многочисленным данным и наблюдаемое отклонение нельзя объяснить лишь статистической погрешностью результатов вычислений. Осреднив точки эмпирической вариограммы прямой линией, получим $3\alpha = 0{,}24$.

На той же фигуре пунктиром показана вариограмма в горизонтальном направлении, полученная по бороздовым пробам (около 150 проб), отобранным по всем горным выработкам. Эта вариограмма примерно параллельна первой, но смещена относительно нее. Однако не следует торопиться делать вывод о наличии геометрической анизотропии. Дело в том, что бороздовая проба имеет длину, равную 1 *м*, т. е. вдвое большую, чем керновая проба. Поэтому даже при изотропном месторождении мы должны ожидать, что горизонтальная вариограмма будет смещена на $6\alpha \ln 2$, т. е. на 0,33, книзу от вертикальной. В действительности наблюдаемое смещение равно примерно 0,25, т. е. на 0,08 меньше ожидаемого. Эта разница может быть вызвана геометрической анизотропией, однако слишком незначительной, чтобы следовало ее учитывать.

Таблица 10

Вариограмма в вертикальном направлении
(месторождение Мунана)

d [1]	n	σ_d^2	d	n	σ_d^2
1	2 186	0,812	11	1 745	1,957
2	2 140	1,183	12	1 697	1,923
3	2 094	1,451	13	1 669	1,987
4	2 039	1,579	14	1 641	2,050
5	1 993	1,670	15	1 551	2,149
6	1 954	1,766	16	1 528	2,181
7	1 899	1,817	17	1 505	2,226
8	1 842	1,890	18	1 482	2,474
9	1 805	1,937	19	1 459	2,184
10	1 775	1,963	20	1 419	2,195

[1] Единица измерения d равна 0,5 *м*.

В табл. 10 и 11 приведены численные значения горизонтальной и вертикальной вариограмм, а также соответствующие числа разностей n, по которым проводились вычисления.

Таблица 11

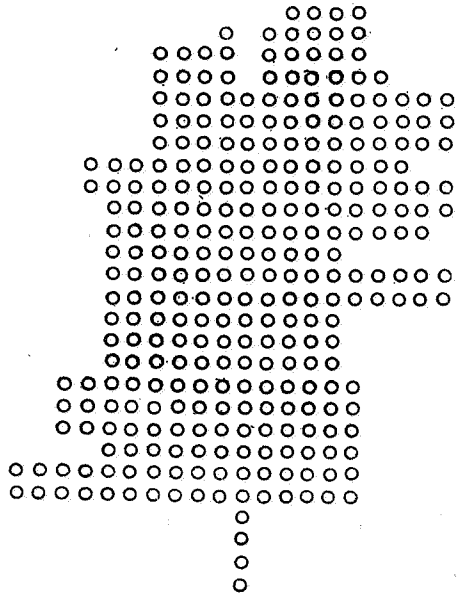
Вариограмма в горизонтальном направлении
(месторождение Мунана)

d	n	σ_d^2	d	n	σ_d^2
1	154	0,951	6	124	1,902
2	148	1,362	7	118	1,937
3	142	1,658	8	112	1,972
4	136	1,702	9	106	1,998
5	130	1,764	10	92	2,067

Месторождение бокситов Мехенгюи. Месторождение бокситов Мехенгюи представлено горизонтальным пластом, мощность которого колеблется от 5 до 10 *м*. Месторождение разведано 300 скважинами, размещенными по квадратной сети с шагом 50 *м*. Кроме того, два квадрата

размером 50 × 50 $м^2$ были разбурены по сети 5 × 5 $м^2$, что дало дополнительно еще по 121 скважине в каждом из них. Размещение рудных скважин схематически показано на фиг. 39.

По скважинам основной сети можно вычислить вариограммы через 50 $м$ в направлениях с севера на юг и с запада на восток. Взяв диагонали, можно



Фиг. 39. Схема относительного расположения 300 скважин, вскрывших оруденение на месторождении Мехенгюи.

вычислить вариограммы через 70 $м$ в направлениях с северо-востока на юго-запад и с северо-запада на юго-восток. Наконец, по тем же четырем направлениям были вычислены вариограммы через 5 и 7 $м$ для каждого из двух детально разбуренных квадратов. Каждая из этих различных вариограмм была построена отдельно с целью выявления возможной анизотропии. Однако какой-либо существенной анизотропии выявлено не было, поэтому мы эти вариограммы не приводим.

Таблица 12

Вариограмма в горизонтальном направлении

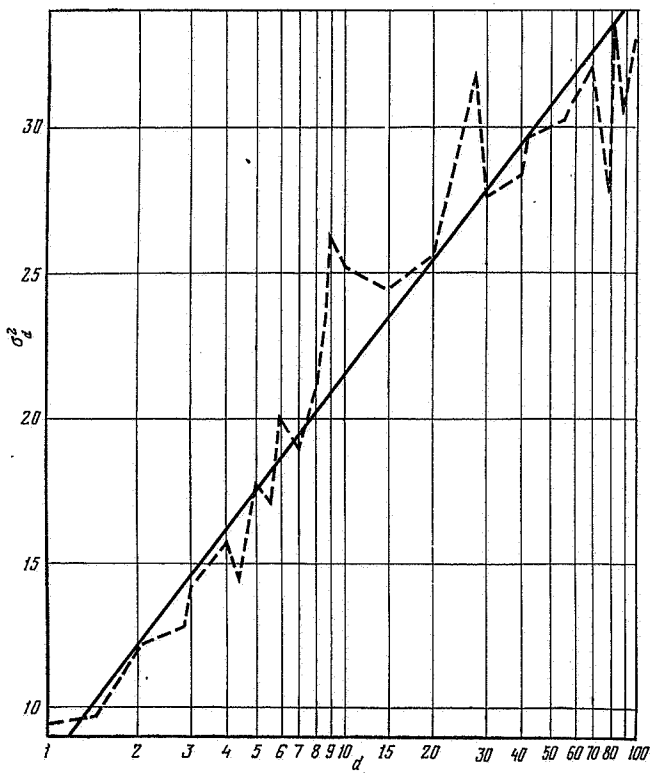
(месторождение Мехенгюи)

d [1]	Число проб	σ_d^2	d [1]	Число проб	σ_d^2
1	440	9,42	14,1	497	24,45
1,41	400	9,60	20	488	25,50
2	396	12,18	28,2	440	31,50
2,83	324	12,90	30	456	27,60
3	352	14,18	40	421	28,50
4	308	15,75	42,5	393	39,70
4,24	256	14,4	50	384	30,1
5	264	17,76	56,5	342	30,3
6	220	20,18	60	344	31,0
7	320	18,95	70	601	32,1
8	132	21,37	80	279	27,8
8,49	100	22,83	84,9	107	33,7
9	88	26,33	90	242	30,5
10	641	25,20	100	398	33,2

[1] Единица измерения равна 5 $м$.

Считая изотропность месторождения установленной, объединим все результаты для различных направлений и получим вариограмму, значения которой представлены в табл. 12 (значения вариограммы для d, равных $5\sqrt{2}$ и $7\sqrt{2}$, осреднены со значениями вариограммы при d, равных 7 и 10 соответственно).

Полученная таким образом горизонтальная вариограмма (фиг. 40) хорошо аппроксимируется прямой линией с угловым коэффициентом $3\alpha = 2{,}88$. Отметим существование весьма значительных аномалий при d,



Фиг. 40. Вариограмма содержаний в горизонтальном направлении.
Единица длины d равна 5 $м$.

равных 9,28 и 80 (т. е. при расстояниях 45, 140 и 400 $м$ соответственно), которые, как мы полагаем, имеют реальный смысл, так как они обусловлены объективными физико-геологическими факторами, а не случайными флуктуациями оценок вариограмм.

Хотя эти периодические аномалии вполне реальны, их амплитуда незначительна и они не исключают возможности применения формул, полученных с помощью схемы де Вейса. Чтобы убедиться в этом, проведем экспериментальную проверку формулы для дисперсии оценки среднего содержания. Экспериментальная вариограмма $7{,}9 + 5{,}76 \ln d$ приводится к форме $6\alpha\left(\ln d/l + \frac{3}{2}\right)$ при $3\alpha = 2{,}88$ и $l = 1{,}14$. Учитывая, что единица измерения

расстояния d равна 5 *м*, получим действительное значение линейного эквивалента скважины $l = 1{,}14 \times 5 = 5{,}7$ *м* (так как действительная мощность залежи равна 7,25 *м*, то геометрическая анизотропия, если она и существует, очень незначительна). Если вместо сети 50 × 50 $м^2$ взять сеть с шагом 200 *м*, то дисперсия распространения содержания по скважине на зону влияния этой скважины будет в соответствии с формулой (XI,3,3) равна 2,88 $(\ln 400/5{,}7 - {}^1/_2) = 2{,}88 \times 3{,}85 = 11{,}0$. Разделив это значение на среднее число скважин (при сети с шагом 200 *м*, $n = 300/16 = 18{,}7$), получим дисперсию оценки, равную 0,59.

С другой стороны, методом разрежения действительной сети скважин 50 × 50 *м* можно получить 16 вариантов сети 200 × 200 *м*. Для каждого варианта вычисляют среднее содержание и дисперсию содержаний в скважинах (табл. 13).

Таблица 13

№ схемы	Число проб	Среднее содержание	Дисперсия	№ схемы	Число проб	Среднее содержание	Дисперсия
1	20	43,58	13,05	9	19	43,94	17,60
2	22	43,54	10,60	10	20	43,15	9,84
3	19	41,79	16,05	11	18	42,11	15,75
4	19	43,00	7,90	12	18	41,79	12,90
5	22	42,73	13,80	13	15	42,93	30,60
6	22	42,86	16,40	14	16	42,75	23,40
7	20	40,90	9,24	15	15	41,60	33,60
8	19	42,73	13,10	16	16	42,31	11,40

Средние значения по отдельным вариантам оказались между 40,90 и 43,94. Интересно отметить, что число скважин, попавших в контур рудного тела, в разных вариантах колеблется от 15 до 22, что дает представление о точности определения запаса руды при сети 200 × 200 *м*. Дисперсии содержаний также сильно различаются. Однако главный интерес для нас представляет распределение средних. Дисперсия 16 оценок среднего содержания равна 0,60 и хорошо согласуется с теоретическим значением (0,59). Заметим, что способ определения дисперсии оценки делением дисперсии содержаний в единичных пробах на число проб (в рассматриваемом случае дисперсия содержаний равна 15,30) дал бы величину 15,30/18,7 = 0,82, т. е. существенно большую, чем действительная дисперсия оценки. Эта формула (σ^2/n) может быть использована для определения дисперсии оценки лишь в случае случайного размещения скважин. При правильной сети оценка содержания обычно находится с меньшей дисперсией.

Интересно рассмотреть 16 полученных оценок дисперсий. Каждая из них является оценкой «истинной» дисперсии $\sigma^2 = 15{,}30$ по 18,7 скважинам («истинная» дисперсия определена по 300 скважинам). Среднее из 16 значений дисперсии составляет 15,95, т. е. мало отличается от «истинной» дисперсии. Но дисперсия 16 оценок дисперсии чрезмерно велика [$D(\sigma^2) = 54{,}4$]. Действительно, если бы все 18,7 скважин были расположены в пределах рудного контура случайно, то оценка дисперсии σ^2 имела бы дисперсию

$$D(\sigma^2) = \frac{2}{18{,}7}\sigma^4 = 25,$$

т. е. вдвое меньшую, чем фактически полученная. В связи с этим отметим, что правильная разведочная сеть не имеет абсолютного преимущества перед случайной сетью: она дает лучшую оценку среднего содержания, но зато менее надежную оценку дисперсии содержаний. Содержания в 18 скважинах, пробуренных по правильной сети, не независимы: они связаны отрицательной корреляцией. При этом средние содержания должны обладать меньшей дисперсией, чем при случайном размещении проб. Действительно, если при данном варианте правильной сети скважинами будет установлено аномально высокое содержание, то в силу отрицательной корреляции содержаний в среднем будет наблюдаться тенденция выявить также и аномально низкое содержание. Соответственно, если в данном варианте нет богатых скважин, то в среднем не будет скважин и с аномально низкими содержаниями. Этим и объясняется увеличение разброса дисперсий содержаний (по сравнению со случайным размещением скважин), которое хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Это явление препятствует практическому использованию обычных статистических критериев при анализе дисперсий, а также приводит к тому, что оценка коэффициента абсолютного рассеивания (которая производится всегда с помощью дисперсий и вариограмм) никогда не будет очень точной. Когда коэффициент абсолютного рассеивания оказывается не одинаковым для различных частей месторождения, иногда бывает трудно сказать, связано это с рассмотренным выше явлением или с действительным непостоянством абсолютного рассеивания в пространстве.

Наконец, интересно сравнить значение коэффициента абсолютного рассеивания, полученное по наклону вариограммы ($3\alpha = 2{,}88$), со значением, которое мы рассчитаем более простым способом линейных эквивалентов. Месторождение может быть уподоблено прямоугольнику со сторонами 670 и 1125 *м*, линейный эквивалент которого равен 1790 *м*. Средняя мощность залежи, как мы уже говорили, равна 7,25 *м*. Возможно, что имеется некоторая зональная анизотропия, но мы ее не учитываем, так как скважины пересекают залежь на полную мощность. Мы пренебрегаем также возможной геометрической анизотропией и используем в качестве линейного эквивалента пробы среднюю мощность залежи 7,25 *м*. Из уравнения

$$15{,}30 = 3\alpha \ln \frac{1790}{7{,}25}$$

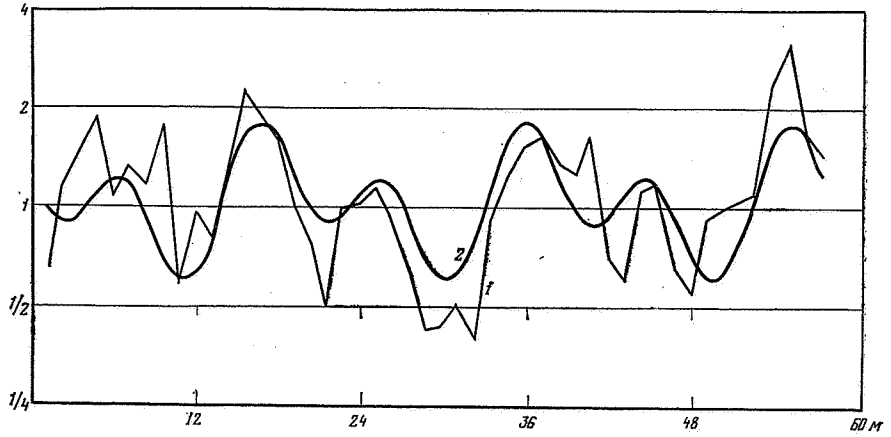
находим $3\alpha = 2{,}78$. Согласованность этого результата с предыдущим представляется достаточно хорошей, особенно если учесть приближенный характер замены реальных контуров месторождения прямоугольником и неизбежную погрешность графической интерполяции при проведении вариограммы по экспериментальным точкам.

В двух рассмотренных выше примерах использовалось большое количество данных опробования, которые к тому же позволяли вычислить вариограммы для широкого диапазона значений d. Для вычисления вариограмм при значениях d от 1 до 100 необходимо, чтобы линия опробования (или профиль) имел длину по крайней мере 150 или 200 d. В полевых условиях весьма редко можно иметь такие данные. Действительно, если в пределах профиля опробования встречается какое-либо геологическое нарушение (сброс, безрудный участок, разделяющий два рудных столба и т. д.), то части профиля, расположенные по разные стороны этого нарушения, следует рассматривать отдельно. В частности, при расчете вариограммы следует учитывать лишь разности, полученные по пробам, взятым из одной и той же части профиля.

Следующие примеры относятся к случаям, когда исследователь располагает вариограммами, рассчитанными для значений d от 1 до 10.

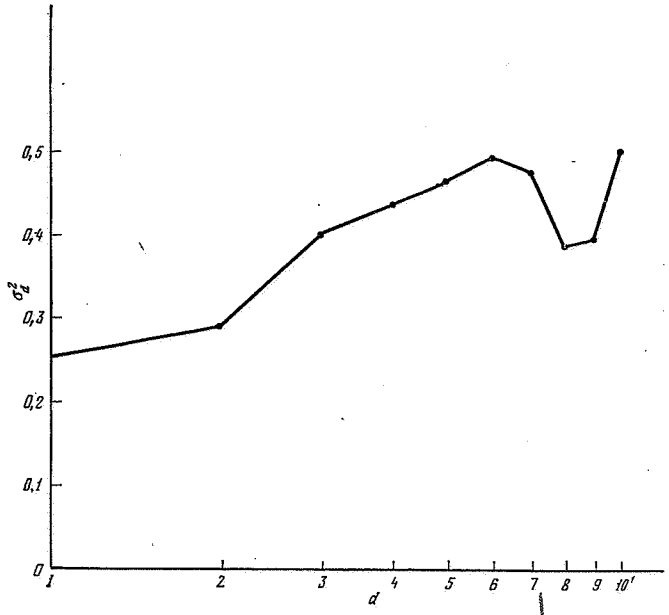
Жильное свинцовое месторождение Бу-Кьяма (Алжир). Это месторождение выбрано для иллюстрации случая, когда периодические аномалии, с которыми практически всегда сталкиваешься, особенно значительны. На фиг. 41 показаны график изменения содержаний свинца в 53 отпалках из горной выработки, пересекающей рудную зону, и периодическая функция, представляющая собой сумму членов третьего и шестого порядков разложения последовательности замеров содержаний

в ряд Фурье. Эти две гармоники достаточно хорошо отражают общую картину изменения содержаний по выработке и с ними связана половина диспер-



Фиг. 41. График изменения содержаний (1) вдоль выработки и ее периодическая составляющая (2). Месторождение Бу-Кьяма (Алжир).
Содержания представлены в логарифмической шкале в единицах среднего содержания.

сии содержаний. Таким образом, перед нами ярко выраженная периодическая аномалия. Можно ожидать, что эта аномалия соответствующим образом



Фиг. 42. Вариограмма логарифмов содержания по 53 последовательным отпалкам. Бу-Кьяма (Алжир).

проявится и на вариограмме. Взяв в качестве единицы длины среднее расстояние между отпалками, получим значения вариограммы, представленные в табл. 14 (как и в случае месторождения Мунана, вариограмма вычислена

для логарифмов содержания) и изображенные на фиг. 42. Расстояния $d = 8 \div 10$ *м*, соответствующие впадине на вариограмме, определяют период шестой гармоники. Если бы мы продолжили вариограмму, то при $d = 16$ проявилась бы (в виде еще более глубокой впадины) и третья гармоника. Однако из-за ограниченного количества исходных данных мы не стали проводить расчета вариограммы при $d > 10$.

Таблица 14

Вариограмма логарифмов линейного запаса
(месторождение Бу-Кьяма)

d, *m*	σ_d^2	d, *m*	σ_d^2
1	0,256	6	0,490
2	0,291	7	0,471
3	0,401	8	0,381
4	0,432	9	0,391
5	0,460	10	0,497

Если, пренебрегая наличием периодической аномалии, аппроксимировать эмпирическую вариограмму прямой линией, то наклон этой линии определит значение коэффициента абсолютного рассеивания $3\alpha = 0{,}08$. Для сопоставления можно вычислить этот коэффициент способом линейных эквивалентов. Дисперсия логарифмов содержаний по 53 отпалкам равна 0,209. Мощность жилы и среднее расстояние между отпалками одинаковы и равны 1,2 *м*, а высота выработки равна 1,8 *м*. С помощью графика (фиг. 18) легко определить, что выработка длиной 63 *м*, и отдельная отпалка имеют линейные эквиваленты, соответственно равные 66 и 3,8 *м*. Из формулы де Вейса находим, что

$$3\alpha = \frac{0{,}209}{\ln 66 - \ln 3{,}8} = 0{,}074.$$

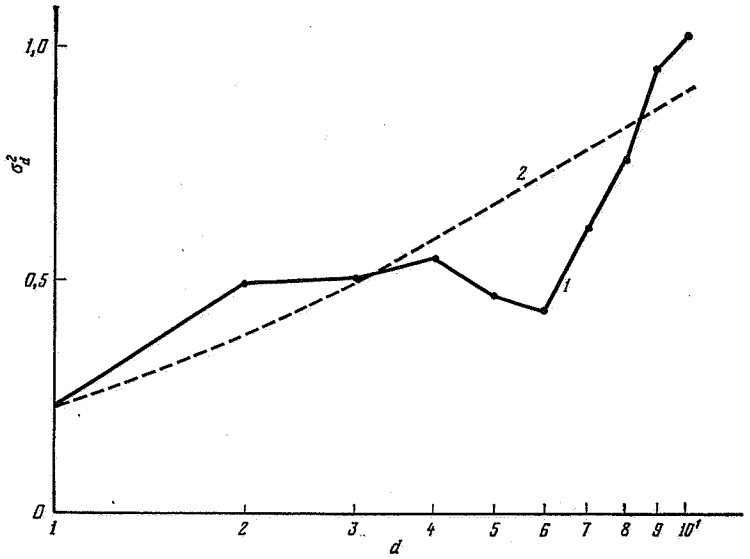
Поскольку замена экспериментальных точек вариограммы прямой линией неизбежно сопровождается внесением погрешности, сходимость значений 3α, определенных разными способами, следует признать удовлетворительной и считать, что месторождение изотропно. Заметим, что в качестве изотропного содержания в данном случае выступал фактически площадной запас (количество металла на 1 $м^2$ площади забоя).

Вольфрамовые гранулиты Монтбелло (Франция). Месторождение представлено крутопадающей почти вертикальной жилой, средняя мощность которой равна примерно 20 *м*. Горизонт 2 был разведан горизонтальными скважинами, пробуренными из штрека вкрест простирания рудного тела. Чтобы исключить влияние возможной зональности оруденения по мощности жилы, две скважины, пробуренные в обе стороны из одной точки штрека и пересекающие жилу на полную мощность, рассматривались как единая проба. При шаге 5 *м* на горизонте получено 35 пересечений. Так как интервал между пересечениями (5 *м*) мал по сравнению с длиной пересечений (20 *м*), то не следует ожидать получения логарифмической вариограммы.

Если мы предположим, что рудное тело изотропно, то горизонт 2, представленный в виде прямоугольника 170×20 $м^2$, будет иметь линейный эквивалент, равный 190 *м*. Дисперсия логарифмов содержаний по 35 пересечениям равна 0,403, и из формулы де Вейса получаем

$$3\alpha = \frac{0{,}403}{\ln 190 - \ln 20} = 0{,}18.$$

Рассмотрим теперь вариограмму, график которой построен по 10 экспериментальным точкам (фиг. 43). Зная теоретические значения вариограммы σ_d^2 и определив по формуле (XI,4,8) теоретические значения $\sigma_d^2/3\alpha$, можно рассчитать величину оценок 6α. Исходные данные и результаты расчета



Фиг. 43. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) вариограммы логарифмов содержаний. Монтбелло (Франция).

приведены в табл. 15. Так как среднее значение $3\alpha = 0{,}178$ хорошо согласуется с найденной ранее оценкой $3\alpha = 0{,}180$, предположение об изотропности месторождения можно считать обоснованным.

Таблица 15

Вариограмма содержаний
(месторождение Монтбелло)

d [1]	σ_d^2 экспериментальная	$\frac{1}{6\alpha}\sigma_d^2$ теоретическая	Оценка коэффициента абсолютного рассеивания, 6α
1	0,224	0,605	0,370
2	0,493	1,02	0,484
3	0,509	1,33	0,382
4	0,553	1,57	0,352
5	0,470	1,77	0,266
6	0,440	1,94	0,228
7	0,625	2,08	0,301
8	0,769	2,21	0,338
9	0,959	2,32	0,412
10	1,027	2,43	0,422

[1] Единица измерения d равна 5 *м*.

Жильное вольфрамовое месторождение Лауни (Центральная Африка). Месторождение представляет собой сложную сеть вольфрамоносных кварцевых жил. Для определения вариограммы

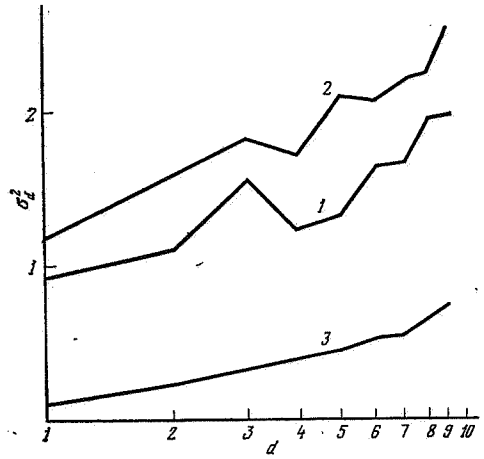
выбран участок горной выработки длиной 96 *м*, на котором было отобрано 88 валовых проб из одной и той же жилы. В среднем валовая проба может быть представлена как параллелепипед размером $1{,}8 \times 1{,}08 \times 0{,}94$ *м*, линейный эквивалент которого равен 3,88 *м* (фиг. 18). Зная эмпирические значения дисперсий мощности, логарифмов содержаний и линейных запасов (σ_h^2, σ_x^2 и σ_a^2) и предположив, что жила изотропна, найдем оценки коэффициентов абсолютного рассеивания всех трех признаков. Из формулы де Вейса получаем

$$3\alpha_h = \frac{0{,}063}{\ln 96 - \ln 3{,}88} = 0{,}0197,$$

$$3\alpha_x = \frac{0{,}945}{\ln 96 - \ln 3{,}88} = 0{,}295,$$

$$3\alpha_a = \frac{0{,}985}{\ln 96 - \ln 3{,}88} = 0{,}307.$$

По данным опробования можно оценить вариограммы для всех трех признаков (табл. 16 и фиг. 44) и определить коэффициенты абсолютного



Фиг. 44. Экспериментальные вариограммы логарифмов содержаний (1), логарифмов площадных запасов (2) и мощностей (3). Лауни (Центральная Африка).

рассеивания по наклону вариограмм. Соответствующие значения равны: $3\alpha_h = 0{,}012$, $3\alpha_x = 0{,}295$ и $3\alpha_a = 0{,}295$. Хорошее согласие коэффициентов абсолютного рассеивания, найденных обоими способами, позволяет говорить об изотропности содержаний и линейных запасов в данной жиле. Различие соответствующих коэффициентов, полученных для мощности, не имеет смысла объяснять геометрической анизотропией. Возможно, изменение мощности, которая является пространственной переменной ярко выраженного геометрического характера, не описывается линейной схемой де Вейса, и собственная функция мощности $\gamma(h)$ представляется при малых значениях h разложением, начинающимся с члена выше второго порядка относительно h. Действительно, численные значения вариограммы при малых d слишком малы по сравнению с теми, которые позволили бы получить величину коэффициента абсолютного рассеивания, выведенную с помощью способа линейных эквивалентов.

Медное месторождение Мпасса (Конго, Браззавиль). Рудный шток Мпасса вскрыт на основном разведочном горизонте штреком и рассечками; из штрека взяты валовые пробы с каждого метра

проходки. Сечение рудного тела на этом горизонте может быть уподоблено прямоугольнику площадью 47,5 × 148 *м* с линейным эквивалентом 195 *м*. Линейный эквивалент валовой пробы, которая может быть представлена

Таблица 16

Вариограммы содержания линейного запаса и мощности

(месторождение Лауни)

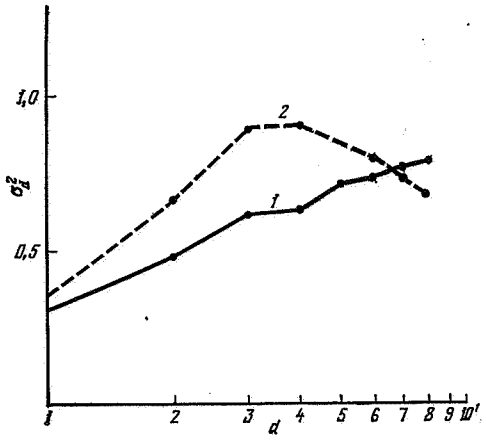
d [1]	σ_d^2		
	для содержания	для линейного запаса	для мощности
1	0,928	1,177	0,0120
2	1,092	1,564	0,0230
3	1,564	1,824	0,0355
4	1,225	1,707	0,0404
5	1,304	2,094	0,0441
6	1,617	2,047	0,0509
7	1,633	2,168	0,0533
8	1,925	2,206	0,0628
9	1,946	2,534	0,0736

[1] Единица измерения d равна 1,08 *м*.

параллелепипедом 1,8 × 1,8 × 1,0 *м*, равен 4,21 *м*. Дисперсия логарифмов содержаний, определенная по 273 пробам, равна 0,44. Оценим коэффициент абсолютного рассеивания методом линейных эквивалентов:

$$0{,}44 = 3\alpha \ln \frac{195}{4{,}21}; \quad 3\alpha = 0{,}115.$$

С другой стороны, по данным опробования штрека и рассечек можно рассчитать 8 первых точек горизонтальной вариограммы (табл. 17 и фиг. 45). Способ наклона вариограммы дает вторую оценку коэффициента 3α, которая не отличается от полученной способом эквивалентов.



Фиг. 45. Экспериментальные вариограммы в горизонтальном (1) и вертикальном (2) направлениях. Мпасса (Конго, Браззавиль).

Аналогично были опробованы несколько шурфов и шахт. Количество проб невелико (около 70), но по ним можно составить некоторое представление о вертикальной вариограмме, обозначенной пунктирной линией на фиг. 45

Таблица 17

Вариограмма в горизонтальном направлении

(месторождение Мпасса)

d, *м*	σ_d^2	d, *м*	σ_d^2
1	0,302	5	0,712
2	0,484	6	0,733
3	0,618	7	0,765
4	0,629	8	0,780

и приведенной в табл. 18. Эта вариограмма гораздо менее регулярна, чем горизонтальная. Однако количество данных, по которым построена вертикальная вариограмма, не настолько велико, чтобы можно было делать какие-либо определенные выводы. Создается впечатление, что ненормально высокие

Таблица 18

Вариограмма в вертикальном направлении

(месторождение Мпасса)

d, *м*	σ_d^2	d, *м*	σ_d^2
1	0,355	5	0,730
2	0,665	6	0,794
3	0,895	7	0,725
4	0,901	8	0,680

значения вариограммы при d 3 и 4 вызваны аномалиями периодического характера, с чем мы уже встречались в многочисленных примерах. Если оставить без внимания эти значения, вертикальная вариограмма приблизится к горизонтальной. В случаях, подобных описанному, можно считать, что имеется изотропия.

У р а н о в о е м е с т о р о ж д е н и е Б р ю ж о (Ф р а н ц и я). Урановое месторождение Брюжо представляет собой штокообразное рудное тело сложной формы. Рудные зоны ограничены достаточно спокойными геометрическими поверхностями. Однако само оруденение похоже на штокверковое; сеть прожилков, содержащих собственно полезный компонент, имеет крайне сложное строение. Чтобы описать размещение рудных жил, в штоке представляется целесообразным ввести вспомогательное понятие — *содержание жильного материала*, которое будет пространственной переменной, определенной внутри оконтуренной рудной залежи. Можно предположить, что аналогично обычному содержанию содержание жильного материала будет следовать схеме де Вейса, как только размеры проб, по которым оно будет определяться, превысят среднее расстояние между соседними оруденелыми прожилками. Чтобы проверить эту гипотезу, мы рассчитали суммарные мощности рудных прожилков по горизонтальным линиям, перпендикулярным большой оси горизонтального сечения. Если наша гипотеза правильна, эти суммарные мощности должны следовать схеме де Вейса. Воспользовавшись подобными планами горизонтов, составленными по дан-

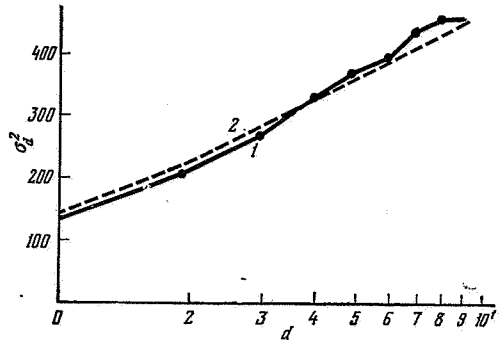
ным ударного бурения, мы определили 235 значений суммарных мощностей рудных прожилков и рассчитали девять первых точек вариограммы (табл. 19). Эту вариограмму, полученную по данным разведки пяти горизонтов, мы сравнили с теоретической вариограммой, рассчитанной для $3\alpha = 78{,}5$ (рас-

Таблица 19

Вариограмма мощностей рудного тела
(месторождение Брюжо)

d, м	σ_d^2	
	экспериментальная	теоретическая
1	139	145
2	216	228
3	274	285
4	335	328
5	370	362
6	395	396
7	435	415
8	456	435
9	455	450

чет произведен для самих значений мощности, а не их логарифмов; суммарные мощности были отнесены к постоянной мощности, равной средней мощности рудных прожилков). Экспериментальная и теоретическая кривые (фиг. 46) очень близки. Этот результат тем более примечателен, что



Фиг. 46. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) вариограммы линейных запасов руды. Брюжо (Франция).

a priori была принята геометрическая анизотропия. Действительно, мы приняли в качестве длины линейных проб, по которым определяли накопления руды, не средний размер пересечения оконтуренной рудной зоны, а среднюю суммарную мощность рудных прожилков. С подобного типа геометрической анизотропией можно встретиться и в случае простого жильного месторождения, если условиться относить линейный запас металла не к полной мощности жилы, а к суммарной длине рудных интервалов в пределах этой мощности. Однако это обстоятельство является сугубо частным, и его не следует возводить в ранг общего правила.

ГЛАВА XII

Дискретный крайгинг схемы де Вейса

Краткое содержание

Эта глава посвящена крайгингу квадратного блока, равного области влияния одной скважины, по ограниченному числу скважин.

В § 1 рассмотрены задачи, решаемые посредством крайгинга, и условия его применимости.

В § 2 приведены численные значения параметров крайгинга для 23 различных вариантов расположения скважин и даны соответствующие асимптотические формулы.

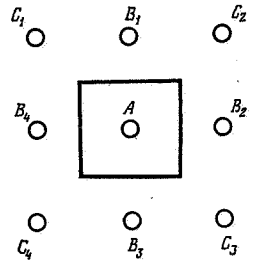
В § 3 дан список всех вариантов крайгинга при учете двух ближайших к блоку ореолов скважин, указана возможность сведения некоторых нерассмотренных вариантов к рассмотренным и приведены графики, позволяющие легко определить параметры крайгинга.

§ 1. Задачи крайгинга и условия его применимости

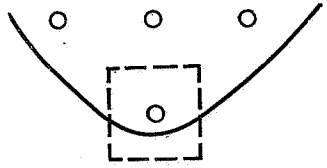
Проблема крайгинга зоны влияния скважины в рудном теле, разбуренном по квадратной сети, состоит в определении весов, которые должны быть приписаны значениям признака в центральной скважине A, в скважинах «первого ореола» B_1, B_2, B_3, B_4 и в скважинах «второго ореола» C_1, C_2, C_3, C_4 (фиг. 47) для получения наилучшей оценки среднего значения признака в зоне влияния скважины A. Мы ограничиваемся учетом только двух ближайших к оцениваемому блоку ореолов, поскольку в большинстве случаев использование данных по более удаленным скважинам не приносит заметного уточнения оценки. Целесообразность применения крайгинга возникает как на стадии разведки, при выявлении участков промышленного оруденения в пластообразной залежи, так и на стадии эксплуатации, когда, например, по данным опробования взрывных скважин решаются вопросы селективной отработки рудных тел. Часто располагают данными лишь по некоторым из скважин ореолов B и C: либо не пробурена часть скважин внутри рудного контура, либо оцениваемый участок располагается на границе рудного тела. Поэтому при решении проблемы крайгинга, кроме простой конфигурации, когда имеются все скважины (фиг. 47), должны быть рассмотрены и различные варианты, при которых недостает тех или других скважин. Так как таких вариантов слишком много, мы рассмотрим лишь некоторые из них. Важно еще отметить, что одна и та же неполная сеть скважин (например, показанная на фиг. 48) может встретиться в двух различных ситуациях. Во-первых, может быть не пробурено или не опробовано несколько скважин в пределах контура рудного тела, т. е. может быть случай, когда пробелы в сети скважин не вызваны разрывом в поле минерализации. Здесь крайгинг следует применять со всей строгостью. Во втором случае сеть скважин, вскрывающих рудный участок, заполнена, но оцениваемая зона влияния расположена на краю рудного тела, и некоторые ореольные скважины оказываются пустыми, попадая за контур рудного тела. Это как раз тот случай, когда непрерывность минерализации внутри оцениваемого блока нельзя гарантировать и дисперсия распространения может оказаться лишенной всякого смысла. При этом возникает неразрывно связанная с крайгингом геометрическая задача, состоящая в оценивании площади рудной минерализации внутри квадратной зоны влияния.

На практике в подобном случае исходят из геологических соображений и вначале проводят границу оруденения и определяют реальную зону влияния P (заштрихованная площадь на фиг. 49) скважины A. После чего нужно произвести крайгинг зоны P по скважине A и скважинам, окружающим эту зону. Но так как зона P в общем случае соответствует лишь части квадратной зоны влияния скважины A, коэффициенты крайгинга не могут быть рассчитаны предлагаемыми нами методами. В принципе можно произвести специальный расчет для каждой конкретной зоны P, но практически это чрезвычайно сложно, поэтому целесообразно воспользоваться одним из следующих приближенных методов.

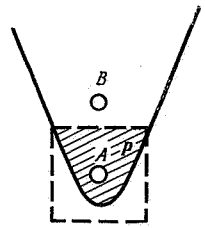
Первый метод состоит в том, что для «истинной» зоны влияния P принимаются те же коэффициенты крайгинга, что и для полного квадрата, т. е. коэффициенты, которые могут быть получены по теории, изложенной



Фиг. 47.



Фиг. 48.



Фиг. 49.

в этой главе. Легко видеть, что при этом (фиг. 49) недооценивается вес скважины B. Оценка z^*, определенная по полученным таким образом коэффициентам крайгинга, должна рассматриваться как оценка содержания для площади зоны P. Иначе говоря, если, например, принятая система эксплуатации приводит к отработке объема, соответствующего всей квадратной зоне влияния a^2, то рудная масса будет разубожена за счет пустой породы, и полученное для зоны P содержание z^* после умножения на поправочный коэффициент, равный отношению площади зоны P к полной площади квадратной зоны влияния a^2, будет оценкой содержания в разубоженной руде.

Второй метод состоит в том, что неполная конфигурация рассматривается как полная и всем безрудным скважинам (которых может и не быть) приписываются нулевые значения признака. Затем производится крайгинг по формулам, соответствующим наличию всех скважин обоих ореолов (фиг. 47). При этом нет необходимости говорить о разубоживании при отработке, так как оно неявно учитывается путем приписывания ненулевых весов безрудным скважинам. Этот метод, очевидно, лишен теоретических оснований, так как безрудные скважины лежат за пределами поля, в котором существуют корреляционные связи, характеризующие пространственную изменчивость признака. Поэтому крайгинг с учетом этих скважин представляет собой фактически неправомочную попытку решить чисто геометрическую проблему — провести контур рудной залежи с привлечением закона собственного рассеивания, имеющего смысл лишь в пределах контура. В частности, в этих условиях при процедуре крайгинга приписывают ненулевое среднее содержание зоне влияния безрудной скважины, если хотя бы одна рудная скважина содержится в ее ореоле B или C. Но все же такой метод очень удобен, ибо при его использовании получают, как правило, весьма осторожные (без завышения) оценки. Если же учесть, что первый метод также не имеет строгого теоретического обоснования и что в полевых

условиях трудно получить уверенную оценку минерализованной площади P, можно признать целесообразность второго метода, считая его чисто условным.

Так как при использовании второго метода все выходящие за контур рудного тела скважины ореолов рассматриваются как обычные внутриконтурные (но с нулевым содержанием), то неполные ореолы могут быть либо когда в сети скважин имеются пробелы, либо когда для крайгинга краевых участков принимается решение использовать первый метод.

Наконец, заметим, что изложенные в этой главе методы применимы только к однородным рудным телам с горизонтальной изотропией, в которых изменчивость признака следует схеме де Вейса. Чисто геометрическая анизотропия в горизонтальной плоскости в принципе не препятствует использованию результатов, полученных этим методом, так как она может быть исключена простым аффинным преобразованием координат. Напротив, функциональная анизотропия в горизонтальной плоскости (ярко выраженный поток) не допускает простого перехода к изотропным условиям и требует выделения зон с учетом геологических предпосылок. Вертикальная зональность практически исключается, если все измерения в скважинах характеризуют полное пересечение рудной залежи. В то же время эффект самородков, линз или штокверка (гл. XIV) весьма сильно искажает результаты крайгинга. Далее будет показано, что в этом случае целесообразно значительно увеличить веса скважин, окружающих блок.

§ 2. Примеры крайгинга при различных конфигурациях сетей скважин

Перейдем теперь к обзору примеров крайгинга при некоторых наиболее употребительных конфигурациях сетей. Мы не будем воспроизводить громоздких, хотя и несложных промежуточных вычислений и приведем только численные результаты, а также формулы для асимптотических значений аргументов. Рассмотрению каждой конфигурации сети посвящен отдельный пункт этого параграфа, имеющий условное обозначение конфигурации, в котором перечисляются участвующие в крайгинге скважины (например, B_1, B_2, B_3, B_4). Каждая конфигурация изображена на соответствующей фигуре. Результаты представлены в таблицах численных значений параметров крайгинга. В каждом пункте одновременно с основной конфигурацией с центральной скважиной A рассматривается конфигурация без центральной скважины. Символы со штрихом всегда относятся к случаю конфигурации без центральной скважины. Обозначения во всех пунктах унифицированы: u — содержание в центральной скважине A, v — среднее содержание во всех имеющихся скважинах ореола B, w — среднее содержание во всех имеющихся скважинах ореола C. Среднее содержание z в оцениваемом блоке рассчитывается по формуле крайгинга

$$z^* = (1-\lambda-\mu)\,u + \lambda v + \mu w,$$

или

$$z^{*\prime} = \lambda' v + (1-\lambda')\,w$$

в зависимости от того, имеется скважина A или нет. Символ λ, например, обозначает вес для среднего содержания в скважинах первого ореола при наличии в конфигурации центральной скважины, а символ λ' — то же, но при отсутствии скважины A. Аналогично (с помощью штриха) различаются дисперсии оценки крайгинга.

Наконец, асимптотические формулы даны для малых значений t (формулы с логарифмическими членами) и больших значений t (формулы, содержащие $1/t$), которые обозначены индексами A и B соответственно. Параметр t всегда означает отношение мощности рудного тела к шагу сети $\frac{h}{a}$.

Схема 1 (А). В данном случае вместо дисперсии крайгинга имеем факти-

Фиг. 50. Схема 1 (одиночная скважина).

чески дисперсию распространения содержания, определенного по скважине A, на зону ее влияния.

Таблица 20

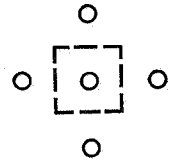
t	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$	t	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2$
0,1	2,4973	3	0,2381
0,2	1,8397	4	0,1813
0,3	1,4793	5	0,1464
0,4	1,2428	7	0,1056
2	0,3465	10	0,0745

Асимптотические формулы:

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = 0{,}1777 - \ln t;$$

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_E^2 = 0{,}7584\,\frac{1}{t}.$$

Схема 2 ($B_1B_2B_3B_4$). Если центральная скважина отсутствует, то $\mu = \mu' = 0$ и $\lambda' = 1$, и тогда достаточно указать дисперсию $\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$. Для конфигурации с центральной скважиной приводятся значения λ и $\frac{1}{3\alpha}$ и σ_k^2.



Фиг. 51. Схема 2 ($B_1B_2B_3B_4$).

Таблица 21

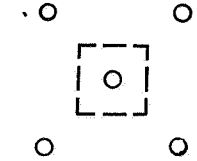
t	λ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,6227	0,7880	1,416
0,2	0,5870	0,6180	1,222
0,3	0,5623	0,5162	1,100
0,4	0,5440	0,4451	1,006
2	0,4570	0,1373	0,432
3	0,4456	0,0955	0,316
4	0,4415	0,0726	0,249
5	0,4363	0,0594	0,205
7	0,4327	0,0430	0,151
10	0,4298	0,0304	0,108

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{0{,}4277 - \ln t}{1{,}5284 - \frac{5}{4}\ln t} \to \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777 - \ln t - \lambda\,(0{,}4277 - \ln t) \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 0{,}8507\,\frac{1}{4} - \ln t \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0{,}424 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}312\,\frac{1}{t} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}140\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 3 ($C_1C_2C_3C_4$). При такой схеме $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu' = 1$.



Фиг. 52. Схема 3 ($C_1C_2C_3C_4$).

Таблица 22

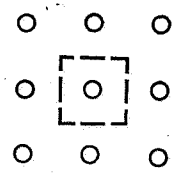
t	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,5671	0,9405	1,848
0,2	0,5237	0,7493	1,651
0,3	0,4938	0,6325	1,522
0,4	0,4715	0,5497	1,421
2	0,3575	0,1801	0,717
3	0,3426	0,1261	0,539
4	0,3336	0,0973	0,433
5	0,3287	0,0791	0,360
7	0,3231	0,0574	0,269
10	0,3191	0,0407	0,194

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{0{,}4277 - \ln t}{1{,}9616 - \frac{5}{4}\ln t} \to \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777 - \ln t - \lambda\,(0{,}4277 - \ln t) \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}284 - \frac{1}{4}\ln t \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 0{,}311 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}418\,\frac{1}{t} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}096\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 4 ($B_1B_2B_3B_4C_1C_2C_3C_4$). Характерно наличие ярко выраженного эффекта экрана при больших значениях t.



Фиг. 53. Схема 4 ($B_1B_2B_3B_4C_1C_2C_3C_4$).

Таблица 23

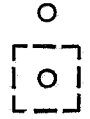
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,4112	0,2487	0,6857	0,6232	1,167
0,2	0,4018	0,2148	0,5561	0,6521	1,052
0,3	0,3953	0,1916	0,4737	0,6748	0,971
0,4	0,3906	0,1743	0,4138	0,6941	0,906
2	0,3860	0,0764	0,1350	0,8592	0,424
3	0,3855	0,0621	0,0944	0,8910	0,313
4	0,3866	0,0544	0,0724	0,9116	0,247
5	0,3875	0,0498	0,0589	0,9240	0,204
7	0,3883	0,0448	0,0428	0,9383	0,150
10	0,3888	0,0413	0,0303	0,9494	0,108

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}5173-\frac{1}{4}\ln t\right)}{0{,}9121-1{,}4739\ln t+\frac{9}{16}\ln^2 t} \to \frac{4}{9}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}0841-\frac{1}{4}\ln t\right)}{0{,}9121-1{,}4739\ln t+\frac{9}{16}\ln^2 t} \to \frac{4}{9}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}0841-\frac{1}{4}\ln t}{0{,}6014-\frac{1}{2}\ln t} \to \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 0{,}8507-\frac{1}{4}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}0841-\frac{1}{4}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}407 \quad \mu = 0{,}017\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}311\,\frac{1}{t}\\
\lambda' &= 1{,}014\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}139\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 5 (B_1). В данной схеме $\mu=\mu'=0$, $\lambda'=1$.



Фиг. 54. Схема 5 (B_1).

Таблица 24

t	λ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3608	1,5068	4,614
0,2	0,3343	1,1439	3,902
0,3	0,3158	0,9383	3,476
0,4	0,3018	0,8002	3,168
2	0,2249	0,2436	1,466
3	0,2113	0,1705	1,113
4	0,2032	0,1314	0,899
5	0,1980	0,1069	0,755
7	0,1914	0,0779	0,573
10	0,1858	0,0555	0,422

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{0{,}4277-\ln t}{3-2\ln t} \to \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\lambda\,(0{,}4277-\ln t)\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}322-\ln t
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}168\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}581\,\frac{1}{t}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 4{,}932\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 6 (C_1). Отметим, что $\lambda=\lambda'=0$, $\mu'=1$.

Фиг. 55. Схема 6 (C_1).

Таблица 25

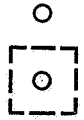
t	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3308	1,5893	5,306
0,2	0,3011	1,2127	4,590
0,3	0,2807	0,9979	4,158
0,4	0,2654	0,8526	3,841
2	0,1818	0,2619	1,975
3	0,1674	0,1834	1,537
4	0,1591	0,1412	1,261
5	0,1536	0,1149	1,071
7	0,1467	0,0837	0,823
10	0,1411	0,0596	0,613

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{0{,}4277-\ln t}{3{,}3466-2\ln t} \to \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\mu\,(0{,}4277-\ln t) \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}669-\ln t \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 0{,}123\ \tfrac{3}{4} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}624\,\frac{1}{t} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 7{,}459\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 7 (B_1C_1). Отметим, что скважина C_1 дает лишь небольшую



Фиг. 56. Схема 7 (B_1C_1).

информацию по сравнению со скважиной B_1, особенно при наличии центральной скважины A.

Таблица 26

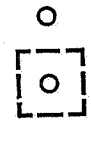
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,2481	0,2067	1,2489	0,5455	3,043
0,2	0,2313	0,1854	0,9721	0,5552	2,671
0,3	0,2196	0,1710	0,8101	0,5628	2,440
0,4	0,2105	0,1601	0,6987	0,5693	2,267
2	0,1614	0,1010	0,2256	0,6251	1,180
3	0,1526	0,0911	0,1596	0,6401	0,917
4	0,1473	0,0854	0,1236	0,6498	0,751
5	0,1439	0,0817	0,1010	0,6566	0,636
7	0,1398	0,0768	0,0739	0,6656	0,488
10	0,1361	0,0730	0,0528	0,6733	0,363

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{0{,}4277-\ln t}{4{,}3267-3\ln t} \to \frac{1}{3} \\ \mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(1{,}3267-\ln t)}{(1{,}6733-\ln t)\,(4{,}3267-3\ln t)} \to \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)\,(0{,}4277-\ln t) \\ \lambda' &= \frac{1{,}6733-\ln t}{3-2\ln t} \to \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}3223-\ln t-(1-\lambda')\,(1{,}3267-\ln t) \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0{,}117\ \ \mu = 0{,}057 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}572\,\frac{1}{t} \\ \lambda' &= 0{,}7011 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 4{,}370\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 8 (B_1C_4).



Фиг. 57. Схема 8 (B_1C_4).

Таблица 27

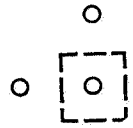
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,2618	0,2252	1,1604	0,5375	2,644
0,2	0,2448	0,2055	0,9024	0,5441	2,275
0,3	0,2352	0,1939	0,7440	0,5485	2,046
0,4	0,2268	0,1845	0,6389	0,5522	1,876
2	0,1828	0,1370	0,1991	0,5762	0,866
3	0,1759	0,1303	0,1392	0,5803	9,647
4	0,1726	0,1265	0,1069	0,5825	0,516
5	0,1696	0,1243	0,0871	0,5839	0,429
7	0,1667	0,1215	0,0634	0,5855	0,321
10	0,1644	0,1193	0,0453	0,5867	0,232

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(2{,}3047-\ln t)}{(3-2\ln t)\,(3{,}3466-2\ln t)-(1{,}0419-\ln t)^2} \to \frac{1}{3} \\ \mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(1{,}9581-\ln t)}{(3-2\ln t)\,(3{,}3466-2\ln t)-(1{,}0419-\ln t)^2} \to \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)\,(0{,}4277-\ln t) \\ \lambda' &= 1-\frac{1{,}9581-\ln t}{4{,}2628-2\ln t} \to \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}3223-\ln t-(1-\lambda')\,(1{,}9581-\ln t) \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0{,}159\ \ \mu = 0{,}111 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}468\,\frac{1}{t} \\ \lambda' &= 0{,}5899 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}570\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 9 (B_1B_4). Здесь $\mu=\mu'=0$, $\lambda'=1$.



Фиг. 58. Схема 9 (B_1B_4).

Таблица 28

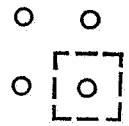
t	λ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,4962	1,1353	2,540
0,2	0,4629	0,8763	2,174
0,3	0,4397	0,7263	1,949
0,4	0,4221	0,6238	1,784
2	0,3281	0,1963	0,826
3	0,3119	0,1383	0,624
4	0,3032	0,1066	0,502
5	0,2959	0,0874	0,422
7	0,2880	0,0639	0,319
10	0,2813	0,0457	0,234

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{0{,}4277-\ln t}{2{,}0767-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\lambda\,(0{,}4277-\ln t) \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}3990-\ln t \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0{,}260 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}484\,\frac{1}{t} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}710\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 10 ($B_1B_4C_1$). При наличии центральной скважины A две скважины первого ореола B_1 и B_4 в значительной степени экранируют влияние скважины C, которой в этом случае приписываются очень незначительные веса. Если скважина A отсутствует, то экран «разрывается», и влияние скважины C существенно увеличивается. Интересно, что при больших значениях t содержание в скважине C учитывается с отрицательным весом.



Фиг. 59. Схема 10 ($B_1B_4C_1$).

Таблица 29

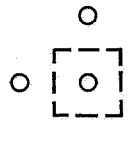
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3970	0,1323	1,0445	0,7501	2,194
0,2	0,3758	0,1132	0,8218	0,7637	1,933
0,3	0,3611	0,1002	0,6890	0,7835	1,767
0,4	0,3501	0,0904	0,5966	0,7962	1,639
2	0,2981	0,0327	0,1948	0,9116	0,815
3	0,2910	0,0219	0,1378	0,9446	0,623
4	0,2889	0,0146	0,1064	0,9671	0,501
5	0,2849	0,0111	0,0873	0,9814	0,421
7	0,2826	0,0054	0,0639	1,0018	0,319
10	0,2805	0,0007	0,0457	1,0198	0,254

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{0{,}4277-\ln t}{2{,}4801-2\ln t} \to \frac{1}{2} \\ \mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}4034-\frac{1}{2}\ln t\right)}{(2{,}4801-2\ln t)\,(1{,}6733-\ln t)} \to \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)\,(0{,}4277-\ln t) \\ \lambda' &= 1-\frac{0{,}4034-\frac{1}{2}\ln t}{2{,}0767-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}3990-\frac{1}{2}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}4034-\frac{1}{2}\ln t\right) \end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0{,}276\quad \mu = -0{,}015 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}484\,\frac{1}{t} \\ \lambda' &= 1{,}0845 \\ \frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}691\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} B$$

Схема 11 ($B_1B_4C_3$). При изменении t коэффициент λ' остается практически постоянным и примерно равным 0,70.



Фиг. 60. Схема 11 ($B_1B_4C_3$).

Таблица 30

t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3916	0,1729	0,9477	0,6937	1,870
0,2	0,3686	0,1595	0,7402	0,6981	1,618
0,3	0,3525	0,1506	0,6173	0,7010	1,458
0,4	0,3402	0,1441	0,5321	0,7032	1,338
2	0,2769	0,1140	0,1667	0,7126	0,603
3	0,2673	0,1110	0,1163	0,7118	0,445
4	0,2629	0,1095	0,0889	0,7111	0,351
5	0,2587	0,1089	0,0725	0,7097	0,291
7	0,2549	0,1082	0,0526	0,7082	0,216
10	0,2521	0,1078	0,0373	0,7067	0,115

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(2{,}3047-\ln t)}{\left(2{,}0767-\frac{3}{2}\ln t\right)(3{,}3466-2\ln t)-(1{,}6733-\ln t)^2} \to \frac{1}{2}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(1{,}0348-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(2{,}0767-\frac{3}{2}\ln t\right)(3{,}3466-2\ln t)-(1{,}673-\ln t)^2} \to \frac{1}{4}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)\,(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{1{,}0348-\frac{1}{2}\ln t}{3{,}3395-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}3990-\frac{1}{2}\ln t-(1-\lambda')\left(1{,}0348-\frac{1}{2}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}246 \quad \mu = 0{,}108\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}380\,\frac{1}{t}\\
\lambda' &= 0{,}7008\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}652\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 12 (B_1B_3). При этой схеме $\mu=\mu'=0$, $\lambda'=1$.

Фиг. 61. Схема 12 (B_1B_3).

Таблица 31

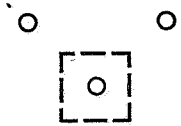
t	λ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,5122	1,0913	2,366
0,2	0,4814	0,8378	2,001
0,3	0,4600	0,6914	1,777
0,4	0,4441	0,5916	1,612
2	0,3669	0,1785	0,679
3	0,3563	0,1241	0,496
4	0,3520	0,0945	0,389
5	0,3477	0,0770	0,321
7	0,3442	0,0558	0,237
10	0,3416	0,0395	0,170

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{0{,}4277-\ln t}{1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\lambda\,(0{,}4277-\ln t)\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}2257-\frac{1}{2}\ln t
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}336\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}404\,\frac{1}{t}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}7902\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 13 (C_1C_2). Здесь $\lambda=\lambda'=0$, $\mu'=1$.



Фиг. 62. Схема 13 (C_1C_2).

Таблица 32

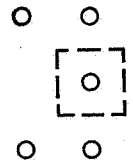
t	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,4536	1,2520	3,058
0,2	0,4153	0,9749	2,689
0,3	0,3890	0,8123	2,459
0,4	0,3691	0,7002	2,285
2	0,2623	0,2245	1,190
3	0,2446	0,1582	0,921
4	0,2343	0,1222	0,753
5	0,2276	0,0998	0,637
7	0,2192	0,0729	0,487
10	0,2122	0,0520	0,361

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= \frac{0{,}4277-\ln t}{2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\mu\,(0{,}4277-\ln t)\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}9189-\frac{1}{2}\ln t
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= 0{,}191\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}550\,\frac{1}{t}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 4{,}3172\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 14 ($B_1B_3C_2C_3$). При наличии центральной скважины с возрастанием величины t коэффициент λ сначала убывает до минимума, а затем



Фиг. 63. Схема 14 ($B_1B_3C_2C_3$).

начинает расти. Таким образом, при больших значениях t влияние скважин C передается скважинам B.

Таблица 33

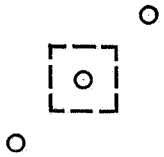
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3439	0,2406	0,8927	0,5884	1,703
0,2	0,3300	0,2141	0,7070	0,6067	1,502
0,3	0,3201	0,1962	0,5946	0,6207	1,371
0,4	0,3127	0,1829	0,5154	0,6325	1,269
2	0,2826	0,1104	0,1657	0,7291	0,597
3	0,2794	0,0995	0,1162	0,7506	0,444
4	0,2783	0,0932	0,0894	0,7644	0,351
5	0,2781	0,890	0,0727	0,7737	0,292
7	0,2782	0,0839	0,0528	0,7854	0,217
10	0,2784	0,0800	0,0375	0,7950	0,156

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(1{,}2390-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t\right)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{2}{5}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t\right)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{2}{5}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t}{1{,}7848-\ln t} \to \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}2257-\frac{1}{2}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda = 0{,}282 \quad \mu = 0{,}068\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 = 0{,}387\,\frac{1}{t}\\
&\lambda' = 0{,}8255\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 = 1{,}6720\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 15 (C_1C_3). В этой схеме $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu = 1$.



Фиг. 64. Схема 15 (C_1C_3).

Таблица 34

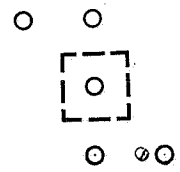
t	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,4670	1,2153	2,885
0,2	0,4302	0,9438	2,516
0,3	0,4048	0,7851	2,286
0,4	0,3858	0,6756	2,113
2	0,2876	0,2127	1,033
3	0,2751	0,1482	0,773
4	0,2668	0,1141	0,622
5	0,2625	0,0926	0,517
7	0,2575	0,0672	0,386
10	0,2541	0,0476	0,279

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= \frac{0{,}4277-\ln t}{2{,}4233-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\mu(0{,}4277-\ln t)\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}7456-\frac{1}{2}\ln t
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mu = 0{,}246\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 = 0{,}488\frac{1}{t}\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 = 3{,}056\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 16 ($B_1B_3C_1C_3$).



Фиг. 65. Схема 16 ($B_1B_3C_1C_3$).

Таблица 35

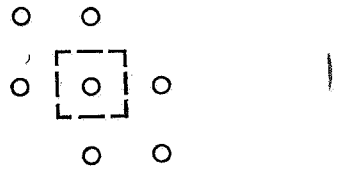
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3350	0,2534	0,8821	0,5693	1,672
0,2	0,3202	0,2280	0,6985	0,5844	1,474
0,3	0,3098	0,2107	0,5874	0,5960	1,345
0,4	0,3019	0,1979	0,5092	0,6057	1,244
2	0,2678	0,1298	0,1635	0,6849	0,583
3	0,2619	0,1221	0,1144	0,6977	0,433
4	0,2600	0,1166	0,0880	0,7088	0,342
5	0,2588	0,1137	0,0715	0,7146	0,284
7	0,2573	0,1105	0,0519	0,7213	0,211
10	0,2560	0,1085	0,0368	0,7261	0,151

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(1{,}0657-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}0934-\frac{3}{2}\ln t\right)\left(2{,}4233-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{2}{5}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}0934-\frac{3}{2}\ln t\right)\left(2{,}4233-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{2}{5}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t}{1{,}6115-\ln t} \to \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}2257-\frac{1}{2}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda = 0{,}254 \quad \mu = 0{,}103\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 = 0{,}378\,\frac{1}{t}\\
&\lambda' = 0{,}7375\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 = 1{,}6123\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 17 ($B_1B_2B_3B_4C_1C_3$). При больших значениях t проявляется эффект экрана как при наличии центральной скважины, так и при ее отсутствии.



Фиг. 66. Схема 17 ($B_1B_2B_3B_4C_1C_3$).

Таблица 36

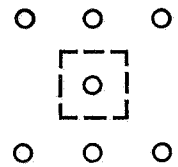
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,4927	0,1529	0,7251	0,7633	1,259
0,2	0,4744	0,1306	0,5804	0,7844	1,117
0,3	0,4616	0,1155	0,4905	0,8007	1,021
0,4	0,4522	0,1043	0,4264	0,8143	0,945
2	0,4178	0,0415	0,1359	0,9218	0,428
3	0,4127	0,0340	0,0949	0,9402	0,315
4	0,4109	0,0295	0,0729	0,9521	0,248
5	0,4101	0,0268	0,0591	0,9591	0,204
7	0,4090	0,0238	0,0428	0,9671	0,151
10	0,4079	0,0220	0,0303	0,9731	0,108

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(1{,}0657-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}5284-\frac{5}{4}\ln t\right)\left(2{,}4233-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{4}{7}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}1708-\frac{1}{4}\ln t\right)}{\left(1{,}5284-\frac{5}{4}\ln t\right)\left(2{,}4233-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{2}{7}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}1708-\frac{1}{4}\ln t}{1{,}2365-\frac{3}{4}\ln t} \to \frac{2}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 0{,}8507-\frac{1}{4}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}1708-\frac{1}{4}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda = 0{,}410 \quad \mu = 0{,}017\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 = 0{,}310\,\frac{1}{t}\\
&\lambda' = 0{,}9860\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 = 1{,}139\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 18 ($B_1B_3C_1C_2C_3C_4$). Хотя скважины второго ореола и не вносят значительного улучшения, эффект экрана отсутствует.



Фиг. 67. Схема 18 ($B_1B_3C_1C_2C_3C_4$).

Таблица 37

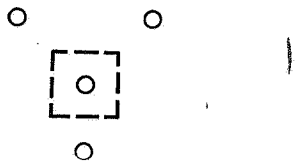
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,2521	0,3719	0,7843	0,4041	1,406
0,2	0,2435	0,3365	0,6322	0,4201	1,265
0,3	0,2372	0,3124	0,5372	0,4325	1,170
0,4	0,2324	0,2947	0,4689	0,4429	1,092
2	0,2130	0,2016	0,1552	0,5297	0,536
3	0,2090	0,1905	0,1089	0,5454	0,401
4	0,2081	0,1833	0,0900	0,5580	0,322
5	0,2075	0,1794	0,0683	0,5648	0,264
7	0,2065	0,1751	0,0496	0,5727	0,196
10	0,2055	0,1619	0,0352	0,5782	0,142

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\left(0{,}4277-\ln t\right)\left(0{,}6040-\frac{1}{4}\ln t\right)}{\left(1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t\right)\left(1{,}9616-\frac{5}{4}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{2}{7}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t\right)\left(1{,}9616-\frac{5}{4}\ln t\right)-(1{,}3576-\ln t)^2} \to \frac{4}{7}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)\,(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t}{1{,}1502-\frac{3}{4}\ln t} \to \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}2257-(1-\lambda)\left(0{,}5458-\frac{1}{2}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}204 \quad \mu = 0{,}144\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}386\,\frac{1}{t}\\
\lambda' &= 0{,}593\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}513\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 19 ($B_3C_1C_2$).



Фиг. 68. Схема 19 ($B_3C_1C_2$).

Таблица 38

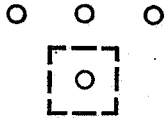
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,2132	0,3358	0,9904	0,3883	2,608
0,2	0,2030	0,3078	0,7762	0,3976	1,752
0,3	0,1957	0,2888	0,6488	0,4043	1,589
0,4	0,1902	0,2749	0,5597	0,4097	1,464
2	0,1618	0,2051	0,1770	0,4459	0,681
3	0,1580	0,1959	0,1235	0,4527	0,506
4	0,1560	0,1910	0,0948	0,4566	0,401
5	0,1550	0,1880	0,0770	0,4591	0,332
7	0,1539	0,1845	0,0558	0,4621	0,246
10	0,1531	0,1820	0,0395	0,4645	0,177

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(1{,}5547-\frac{1}{2}\ln t\right)}{(3-2\ln t)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}0419-\ln t)^2} \to \frac{1}{4}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(1{,}9581-\ln t)}{(3-2\ln t)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}0419-\ln t)^2} \to \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(0{,}4277-\ln t)\,(\lambda+\mu)\\
\lambda' &= 1-\frac{1{,}9581-\ln t}{3{,}5128-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}3223-\ln t-(1-\lambda')\,(1{,}9581-\ln t)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}152 \quad \mu = 0{,}175\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}406\,\frac{1}{t}\\
\lambda' &= 0{,}472\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}890\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 20 ($B_1C_1C_2$).



Фиг. 69. Схема 20 ($B_1C_1C_2$).

Таблица 39

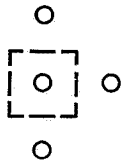
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,1811	0,3294	1,0957	0,3548	2,383
0,2	0,1680	0,2994	0,8667	0,3596	2,130
0,3	0,1587	0,2790	0,7290	0,3633	1,967
0,4	0,1514	0,2638	0,6329	0,3663	1,842
2	0,1099	0,1829	0,2110	0,3894	1,000
3	0,1014	0,1705	0,1499	0,3933	0,782
4	0,0962	0,1635	0,1165	0,3954	0,643
5	0,0928	0,1583	0,0953	0,3968	0,546
7	0,0885	0,1531	0,0700	0,3983	0,421
10	0,0848	0,1486	0,0501	0,3993	0,313

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}9233-\frac{1}{2}\ln t\right)}{(3-2\ln t)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}6733-\ln t)^2} \to \frac{1}{4}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(1{,}3267-\ln t)}{(3-2\ln t)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}6733-\ln t)^2} \to \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)\,(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{1{,}3267-\ln t}{2{,}2500-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 2{,}3223-\ln t-(1-\lambda')\,(1{,}3267-\ln t)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}073 \quad \mu = 0{,}133\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}536\,\frac{1}{t}\\
\lambda' &= 0{,}414\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 3{,}852\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 21 ($B_1B_2B_3$). Хотя все три скважины B принадлежат первому ореолу, фактически крайгинг производится, как если бы было два ореола: $B_1 + B_3$ и B_2. Обозначим через λ_1 и λ_2 их веса. Можно видеть, что для достаточно



Фиг. 70. Схема 21 ($B_1B_2B_3$).

большого значения t скважины B_1 и B_3 обладают гораздо большим весом, чем скважина B_2. Это связано с тем, что на скважины B_1 и B_3 передается также влияние пропущенной скважины B_4. Если сравнить этот случай со схемой 12, можно увидеть, сколь невелика информация, даваемая скважиной B_2.

Таблица 40

t	λ_1	λ_2	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	λ_1'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,3953	0,1811	0,9150	0,6857	1,769
0,2	0,3737	0,1682	0,7107	0,6896	1,518
0,3	0,3588	0,1591	0,5922	0,6927	1,361
0,4	0,3477	0,1523	0,5096	0,2954	1,243
2	0,2976	0,1144	0,1578	0,7223	0,542
3	0,2918	0,1076	0,1103	0,7305	0,399
4	0,2892	0,1034	0,0848	0,7366	0,314
5	0,2880	0,1006	0,0689	0,7411	0,261
7	0,2868	0,0970	0,0500	0,7472	0,193
10	0,2861	0,0940	0,0355	0,7528	0,139

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\,(1{,}8466-\ln t)}{(3-2\ln t)\left(1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}1534-\ln t)^2} \to \frac{1}{2}\\
\lambda_2 &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}7500-\frac{1}{2}\ln t\right)}{(3-2\ln t)\left(1{,}9034-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}1534-\ln t)^2} \to \frac{1}{4}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda_1+\lambda_2)\,(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda_1' &= 1-\frac{0{,}7500-\frac{1}{2}\ln t}{2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t} \to \frac{2}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}2257-\frac{1}{2}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}75-\frac{1}{2}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0{,}286 \quad \lambda_2 = 0{,}084\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}367\,\frac{1}{t}\\
\lambda_1' &= 0{,}771\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}492\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Можно, однако, пойти на упрощение и приписать всем трем скважинам равные веса. При этом часть информации будет потеряна. Но из сравнения с предыдущим вариантом крайгинга видно, что эта потеря будет невелика.

Таблица 41

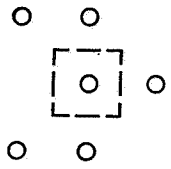
t	λ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2$	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2$
0,1	0,5726	0,9156	1,771
0,2	0,5415	0,7126	1,521
0,3	0,5175	0,5930	1,364
0,4	0,4995	0,5104	1,246
2	0,4100	0,1588	0,547
3	0,3967	0,1111	0,405
4	0,3894	0,0856	0,322
5	0,3849	0,0696	0,266
7	0,3794	0,0507	0,198
10	0,3750	0,0360	0,143

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{0{,}4277-\ln t}{1{,}6919-\frac{4}{3}\ln t} \to \frac{3}{4}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}1777-\ln t-\lambda\,(0{,}4277-\ln t)\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}0146-\frac{1}{3}\ln t
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}353\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 &= 0{,}386\,\frac{1}{t}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{k'}^2 &= 1{,}561\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 22 ($B_1B_2B_3C_1C_4$). В принципе здесь имеются три ореола: B_1+B_3, B_2 и C_1+C_4. Однако чтобы свести рассмотрение к двум ореолам, мы объединяем все скважины B, хотя их роли неодинаковы. Это допущение здесь



Фиг. 71. Схема 22 ($B_1B_2B_3C_1C_4$).

более резонно, чем при схеме 21, так как скважины C_1 и C_4, в некотором роде заменяющие отсутствующую скважину B_4, вносят приблизительную симметрию в схему расположения скважин.

Таблица 42

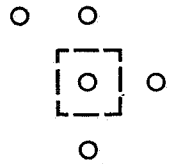
t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{h'}^2$
0,1	0,4243	0,2003	0,7824	0,6794	1,402
0,2	0,4054	0,1790	0,6233	0,6940	1,239
0,3	0,3919	0,1648	0,5255	0,7046	1,130
0,4	0,3816	0,1545	0,4561	0,7131	1,045
2	0,3301	0,1058	0,1461	0,7663	0,482
3	0,3225	0,0998	0,1023	0,7736	0,357
4	0,3179	0,0974	0,0786	0,7766	0,282
5	0,3153	0,0960	0,0638	0,7782	0,233
7	0,3121	0,0945	0,0464	0,7795	0,172
10	0,3095	0,0938	0,0338	0,7801	0,124

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(1{,}3442-\frac{1}{2}\ln t\right)}{\left(1{,}6919-\frac{4}{3}\ln t\right)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}2524-\ln t)^2} \to \frac{1}{2}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}4395-\frac{1}{3}\ln t\right)}{\left(1{,}6919-\frac{4}{3}\ln t\right)\left(2{,}5966-\frac{3}{2}\ln t\right)-(1{,}2524-\ln t)^2} \to \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}4395-\frac{1}{3}\ln t}{1{,}7837-\frac{5}{6}\ln t} \to \frac{3}{5}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_{h'}^2 &= 1{,}0146-\frac{1}{3}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}4395-\frac{1}{3}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda=0{,}304 \quad \mu=0{,}092\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2=0{,}337\frac{1}{t}\\
&\lambda'=0{,}778\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2=1{,}318\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

Схема 23 ($B_1B_2B_3C_1$). Эта схема совершенно лишена симметрии и в принципе требует крайгинга по 4 ореолам. Мы объединяем все скважины B



Фиг. 72. Схема 23 ($B_1B_2B_3C_1$).

в один ореол, что сопровождается несколько большей потерей информации, чем при схеме 22.

Таблица 43

t	λ	μ	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2$	λ'	$\frac{1}{3\alpha}\sigma_{h'}^2$
0,1	0,4858	0,1193	0,8365	0,8029	1,544
0,2	0,4606	0,1064	0,6595	0,8124	1,348
0,3	0,4429	0,0979	0,5529	0,8193	1,221
0,4	0,4295	0,0910	0,4792	0,8244	1,123
2	0,3627	0,0625	0,1513	0,8586	0,508
3	0,3528	0,0590	0,1059	0,8631	0,376
4	0,3471	0,0576	0,0815	0,8648	0,297
5	0,3437	0,0567	0,0662	0,8656	0,246
7	0,3396	0,0559	0,0481	0,8662	0,182
10	0,3362	0,0555	0,0341	0,8664	0,131

Асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(0{,}4277-\ln t)(2{,}0942-\ln t)}{\left(1{,}6919-\frac{4}{3}\ln t\right)(3{,}3466-2\ln t)-(1{,}2524-\ln t)^2} \to \frac{3}{5}\\
\mu &= \frac{(0{,}4277-\ln t)\left(0{,}4395-\frac{1}{3}\ln t\right)}{\left(1{,}6919-\frac{4}{3}\ln t\right)(3{,}3466-2\ln t)-(1{,}2524-\ln t)^2} \to \frac{1}{5}\\
\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2 &= 0{,}1777-\ln t-(\lambda+\mu)(0{,}4277-\ln t)\\
\lambda' &= 1-\frac{0{,}4395-\frac{1}{3}\ln t}{2{,}5337-\frac{4}{3}\ln t} \to \frac{3}{4}\\
\sigma_{h'}^2 &= 1{,}0146-\frac{1}{3}\ln t-(1-\lambda')\left(0{,}4395-\frac{1}{3}\ln t\right)
\end{aligned}\right\} A$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda=0{,}324 \quad \mu=0{,}053\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_h^2=0{,}359\frac{1}{t}\\
&\lambda'=0{,}865\\
&\frac{1}{3\alpha}\sigma_{h'}^2=1{,}413\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\} B$$

§ 3. Атлас диаграмм крайгинга

В атласе приведены диаграммы для 23 вариантов размещения скважин из 51 возможного варианта. Выбранные случаи — наиболее важные для практических приложений. Кроме того, эффект экрана часто позволяет,

Перечень диаграмм крайгинга

Условное расположение конфигураций	Схема расположения скважин	№ диаграммы	Примечание
0В-0С		1	
1В-0С		5	
0В-1С		6	
2В-0С		9	
		12	
0В-2С		13	
		15	
		8	
		7	
3В-0С		21	
0В-3С		—	
2В-1С		—	
		10	
		—	Сводится к № 9
		11	
1В-2С		—	
		20	

Продолжение

Условное расположение конфигураций	Схема расположения скважин	№ диаграммы	Примечание
		—	
		19	
4В-0С		2	
0В-4С		3	
3В-1С		23	
		—	Сводится к № 21
1В-3С		—	
		—	
2В-2С		14	
		16	
		—	
		—	
		—	
		—	Сводится к № 11
		—	
4В-1С		—	Сводится к № 2

Продолжение

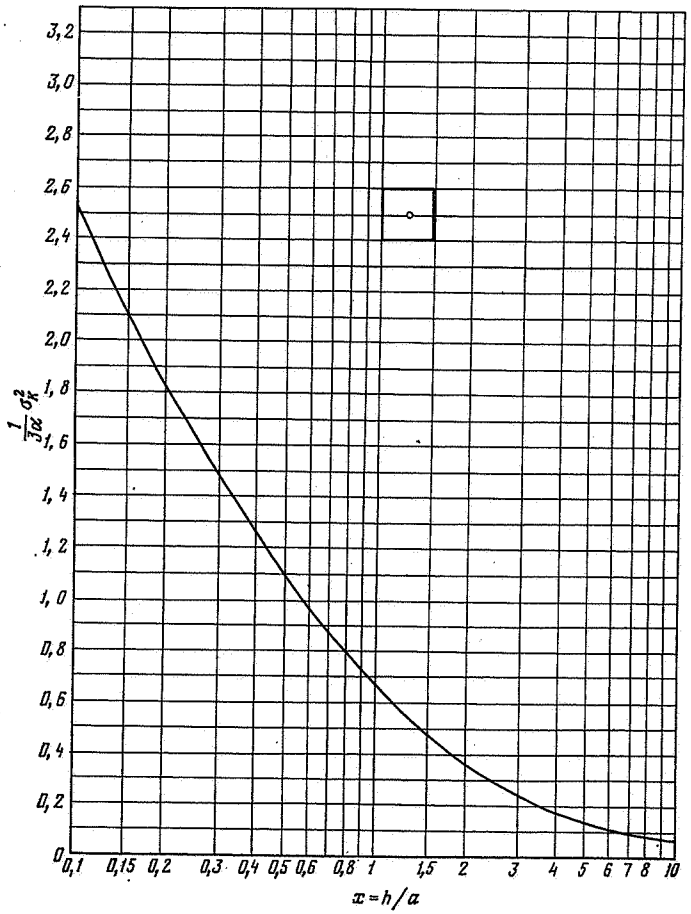
Условное расположение конфигураций	Схема расположения скважин	№ диаграммы	Примечание
1B-4C		—	
3B-2C		22	
		—	Сводится к № 23
		—	Сводится к № 23
		—	Сводится к № 21
2B-3C		—	
		—	
		—	
		—	
4B-2C		—	Сводится к № 2
4B-2C		17	Сводится к № 2
2B-4C		—	
		18	
3B-3C		—	Сводится к № 22
		—	Сводится к № 23
4B-3C		—	Сводится к № 2
4C-3B		—	Сводится к № 22

Продолжение

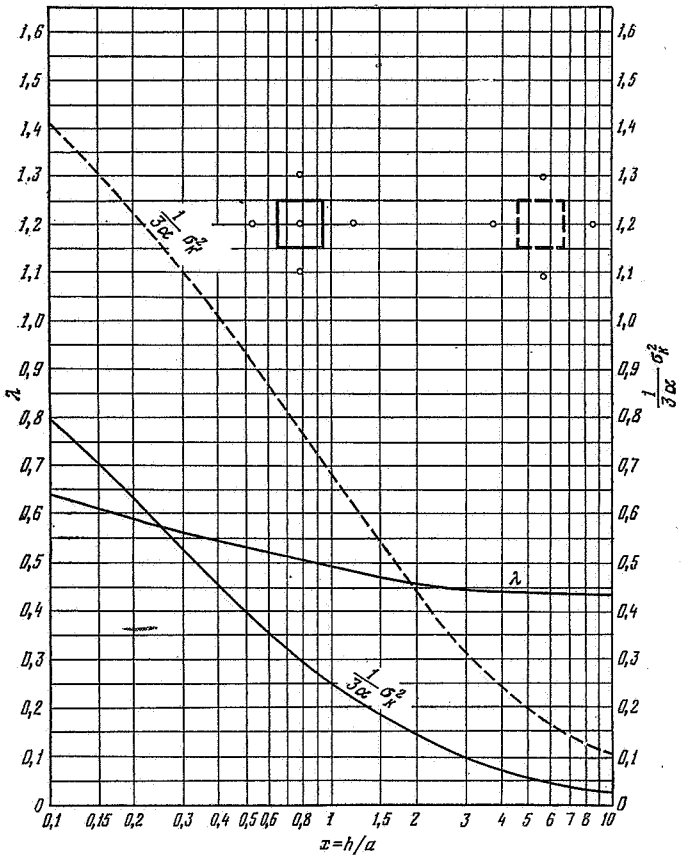
Условное расположение конфигураций	Схема расположения скважин	№ диаграммы	Примечание
4B-4C		4	Сводится к № 2

если он не слишком мал, пренебречь некоторыми скважинами второго ореола, т. е. свести еще 11 вариантов к рассмотренным случаям. Таким образом, остаются не рассмотренными 17 вариантов размещения скважин, практическое значение которых невелико.

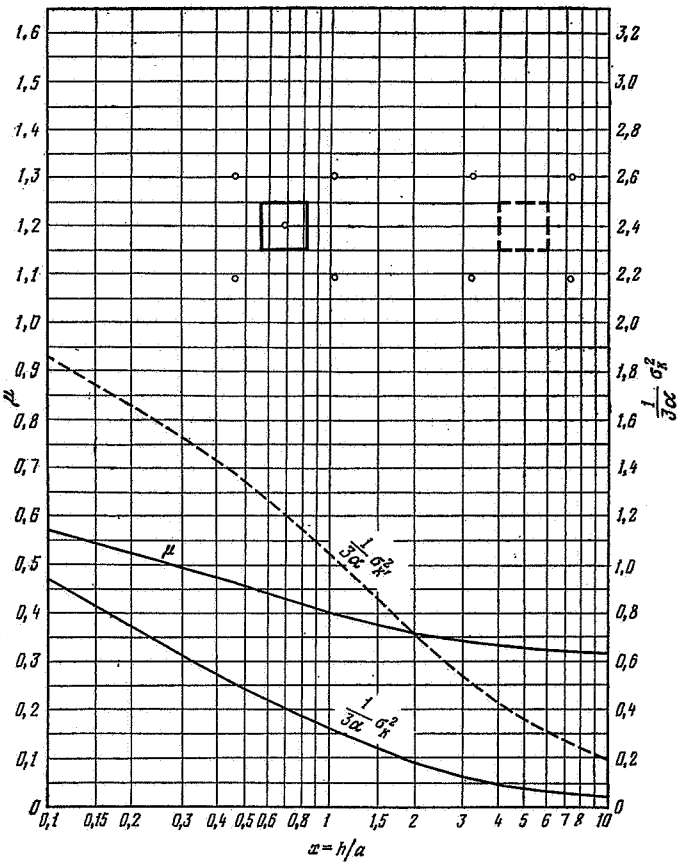
Варианты крайгинга сгруппированы по числу скважин B и C. Например, группа $1B$-$2C$ содержит конфигурации, образованные одной скважиной B и двумя скважинами C.



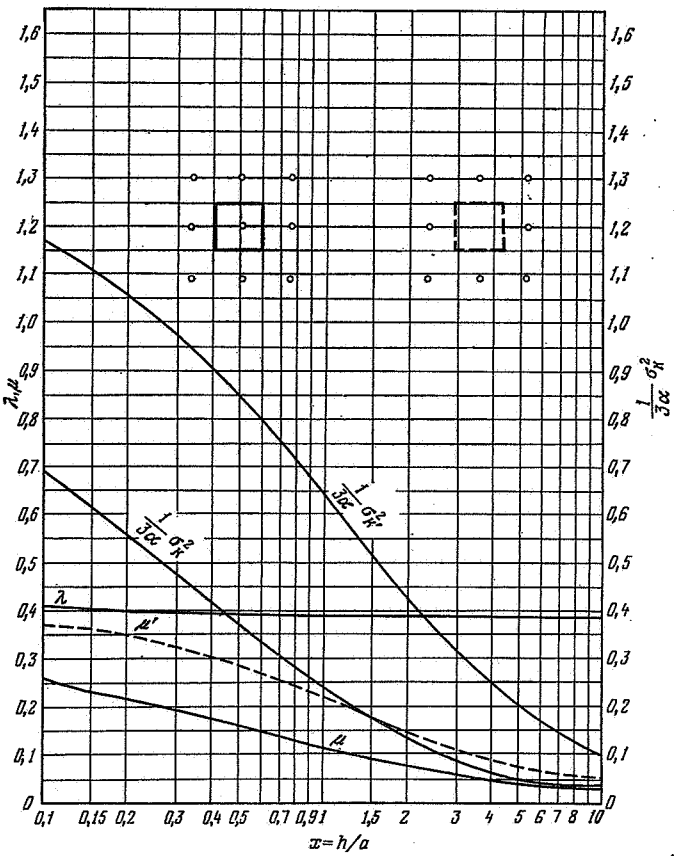
Фиг. 73. Диаграмма 1.



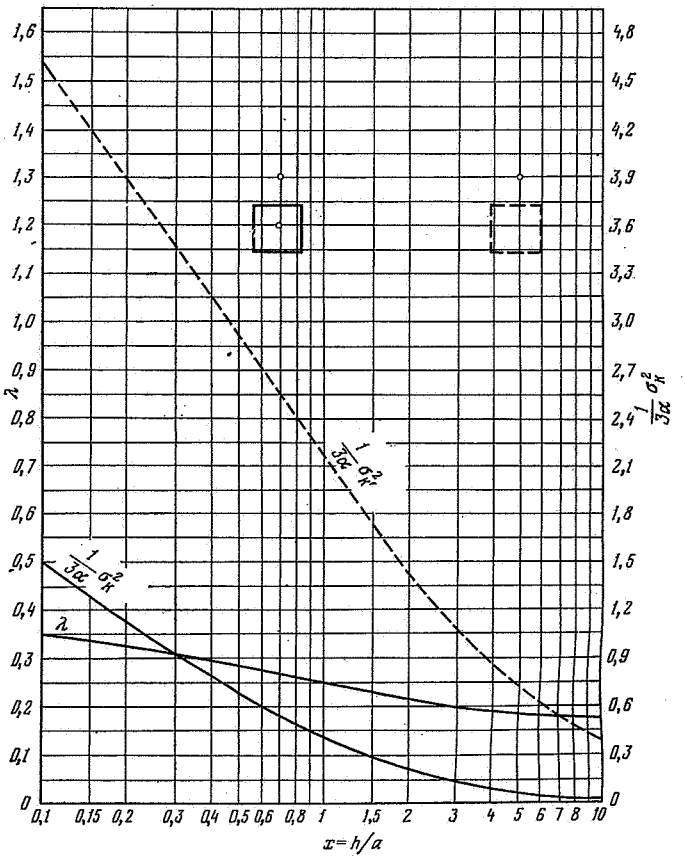
Ф и г. 74. Диаграмма 2.



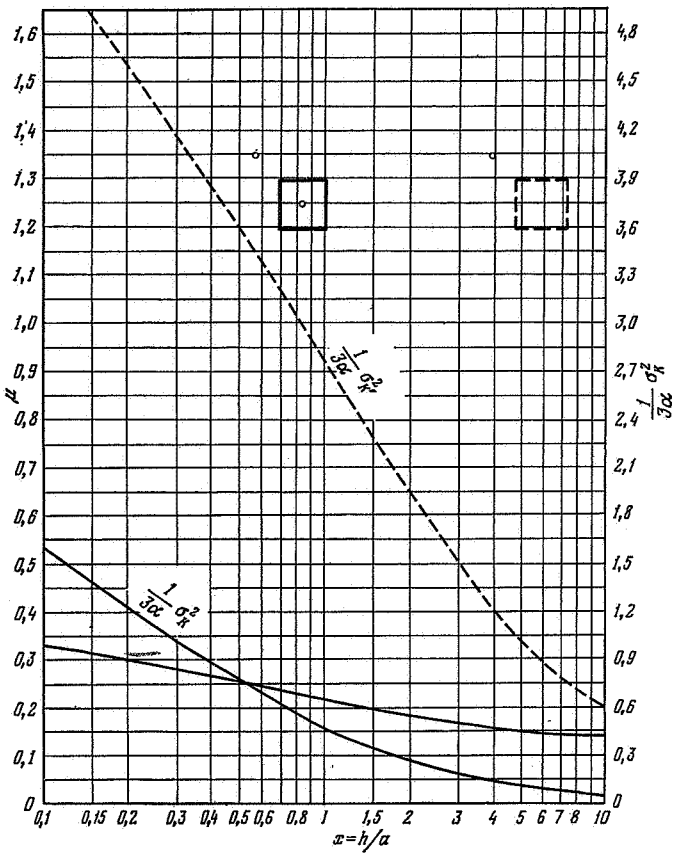
Ф и г. 75. Диаграмма 3.



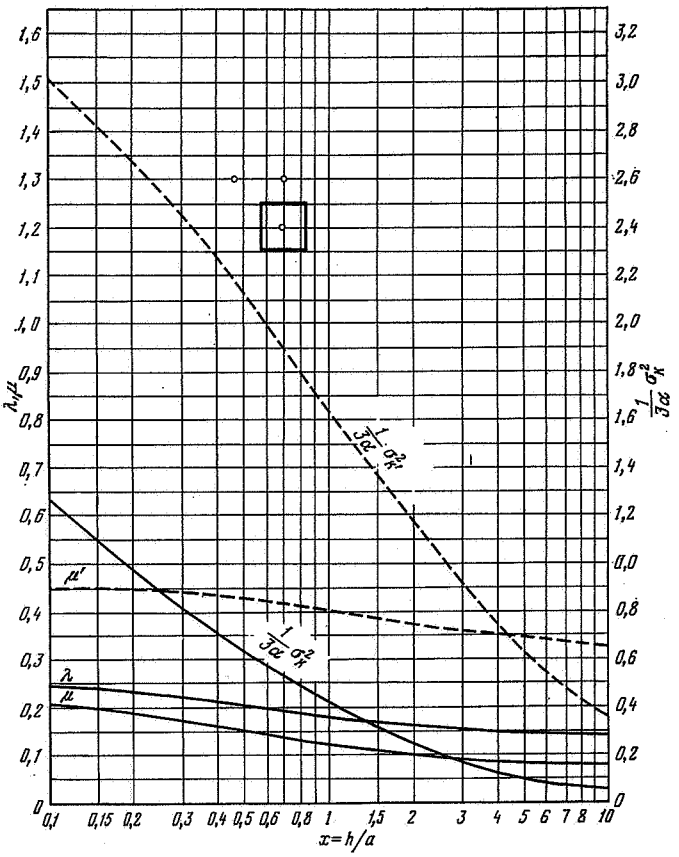
Ф и г. 76. Диаграмма 4.



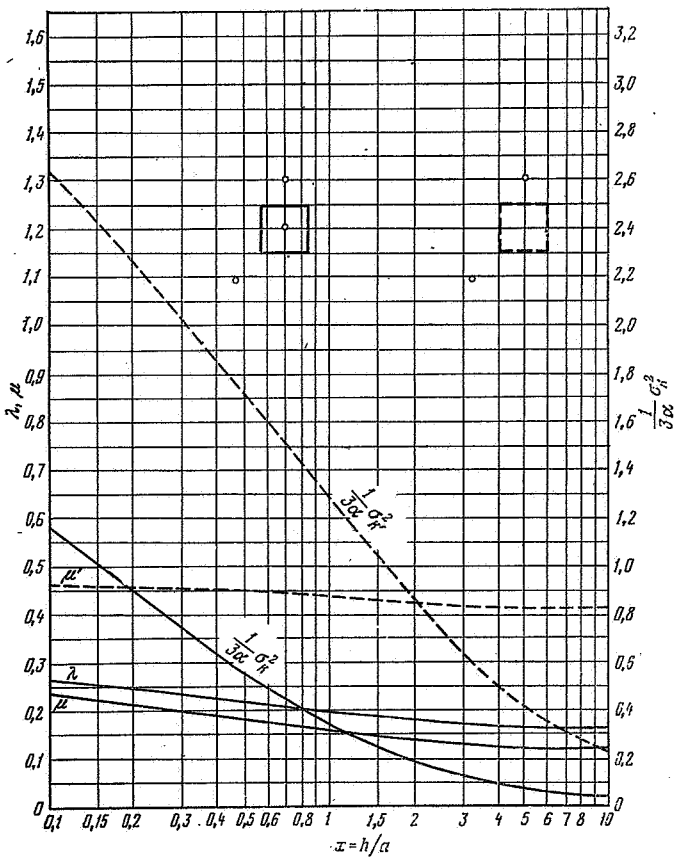
Ф и г. 77. Диаграмма 5.



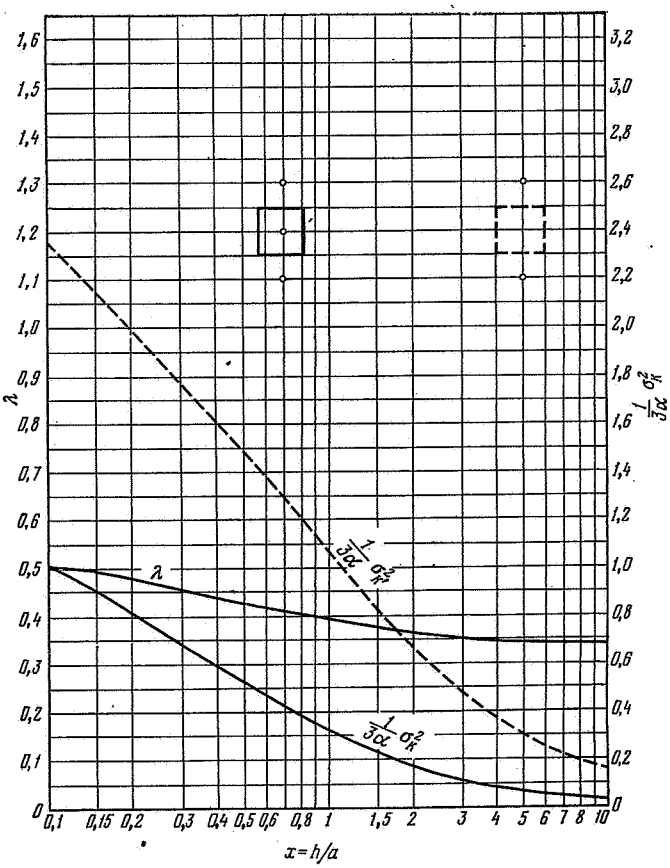
Ф и г. 78. Диаграмма 6.



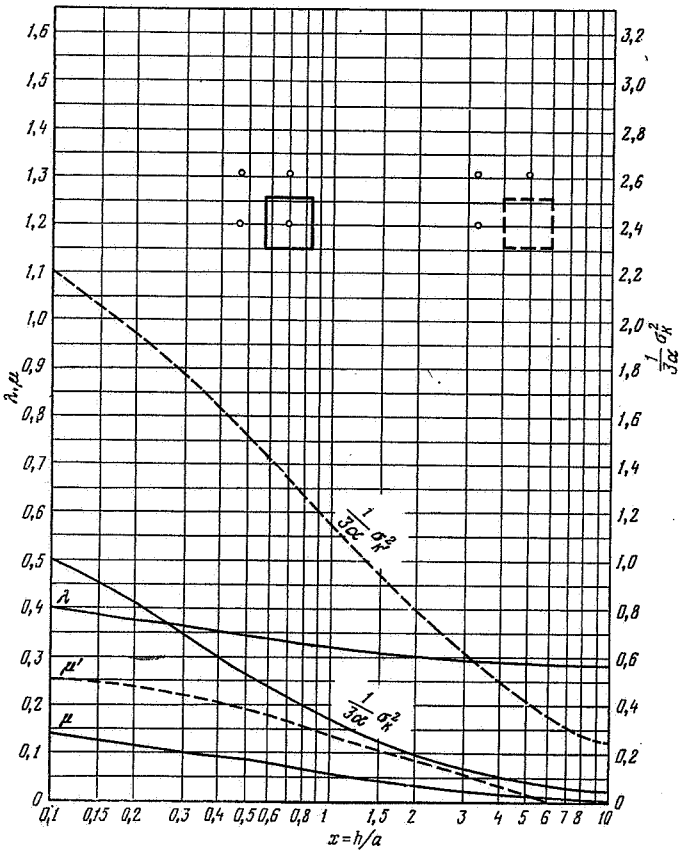
Ф и г. 79. Диаграмма 7.



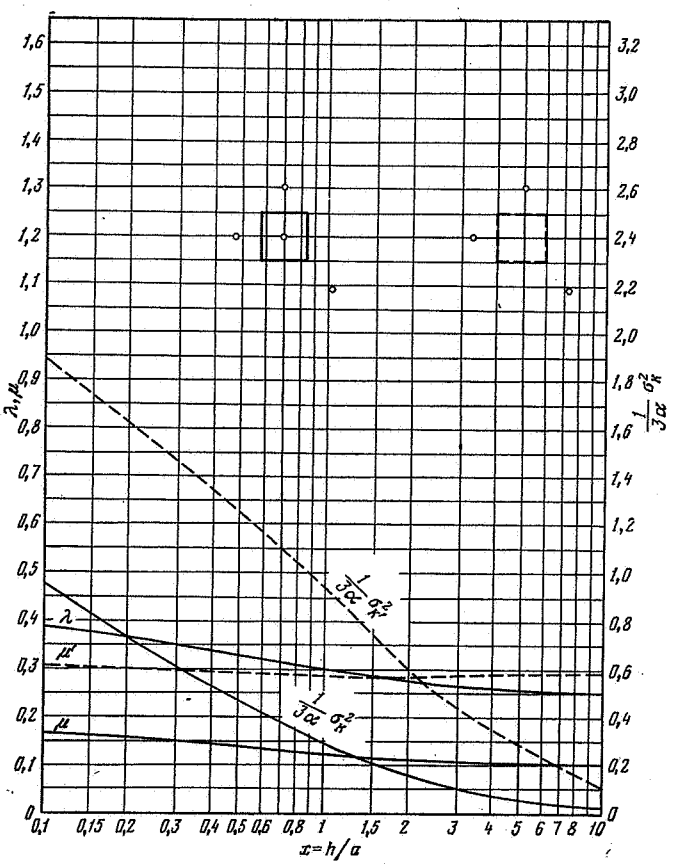
Ф и г. 80. Диаграмма 8.



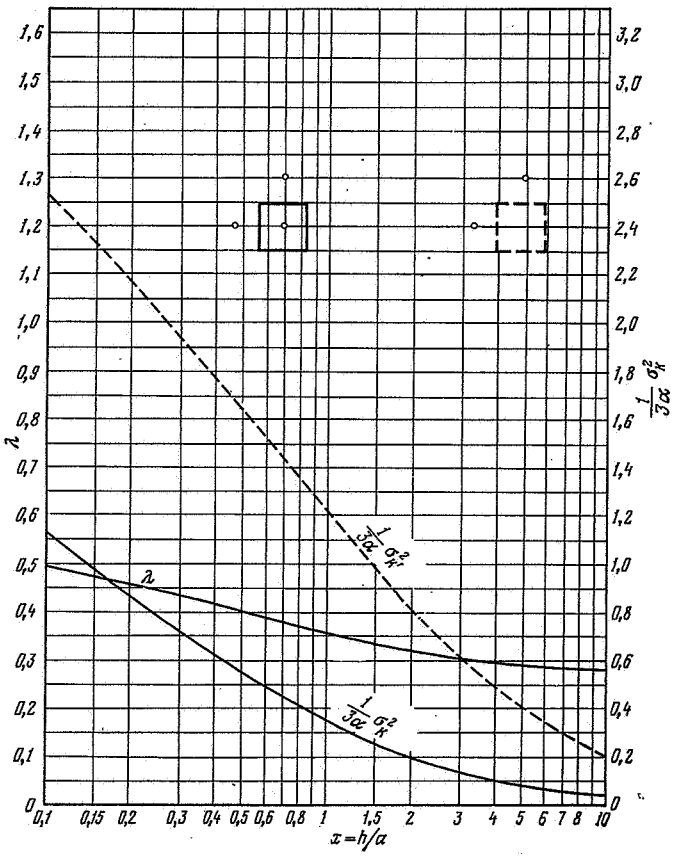
Ф и г. 81. Диаграмма 9.



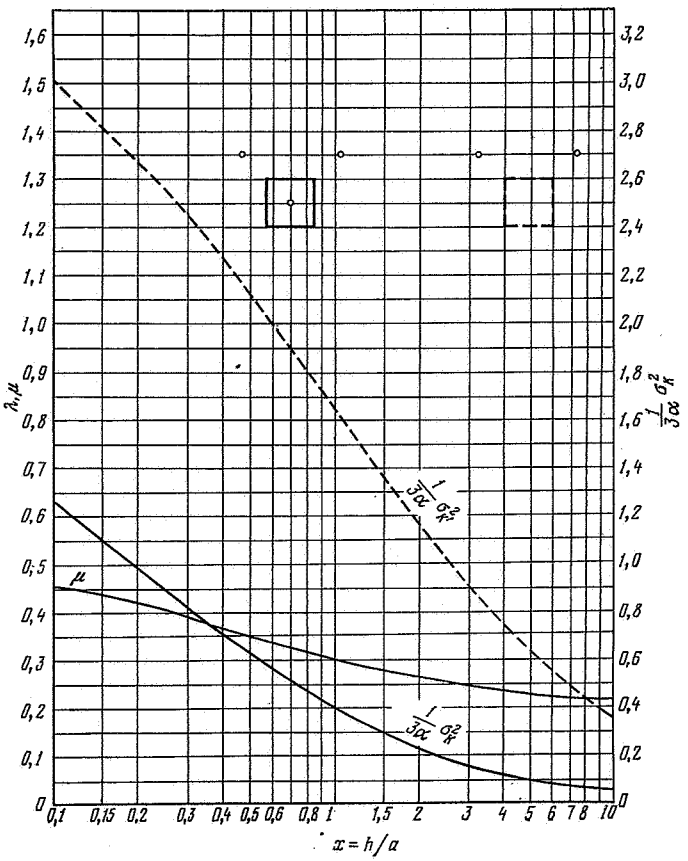
Ф и г. 82. Диаграмма 10.



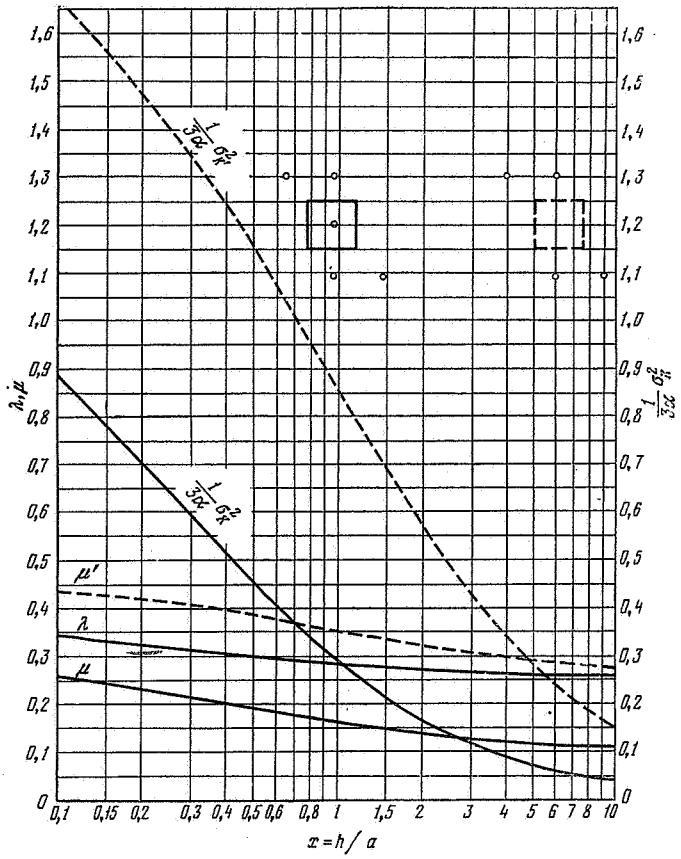
Ф и г. 83. Диаграмма 11.



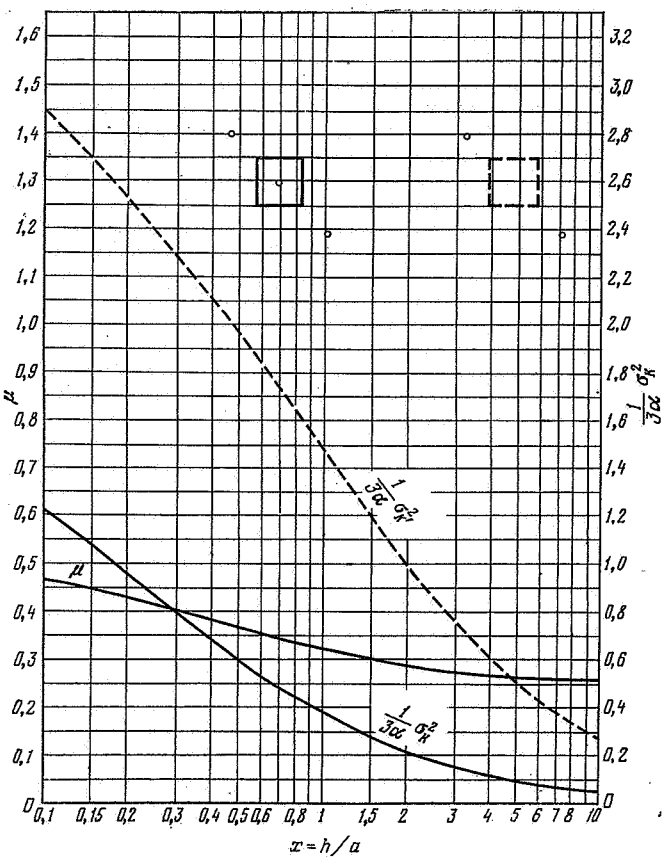
Ф и г. 84. Диаграмма 12.



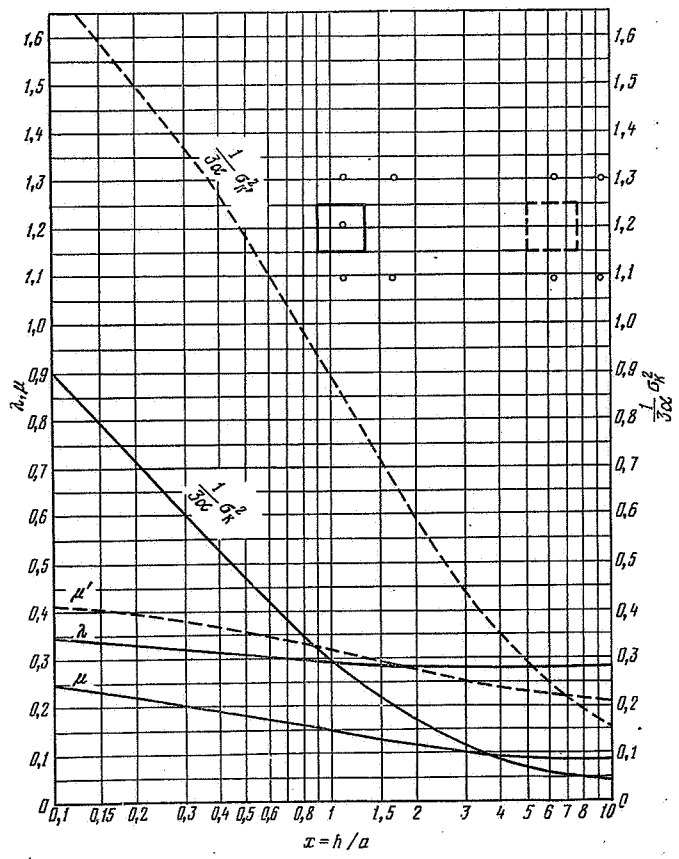
Ф и г. 85. Диаграмма 13.



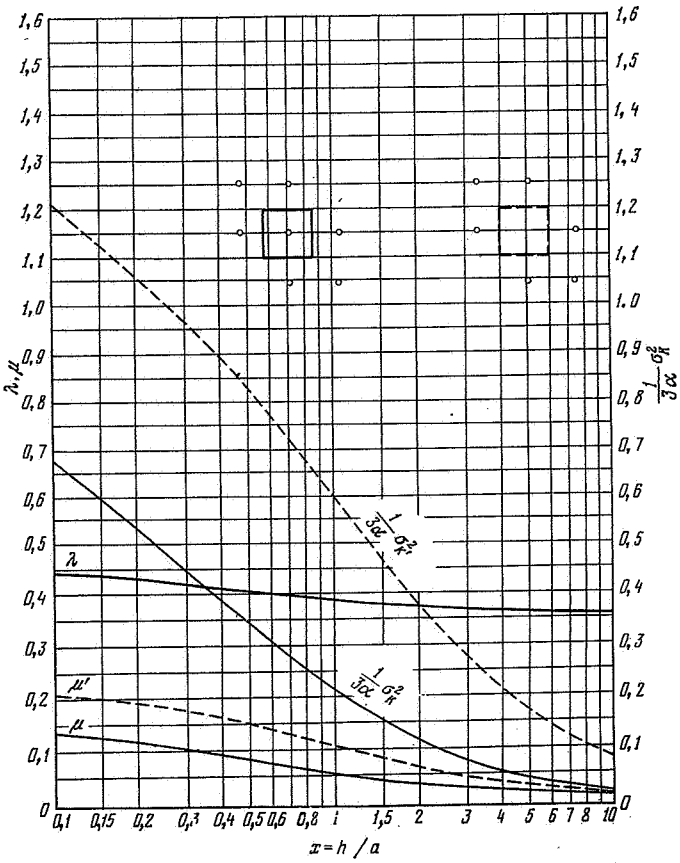
Ф и г. 86. Диаграмма 14.



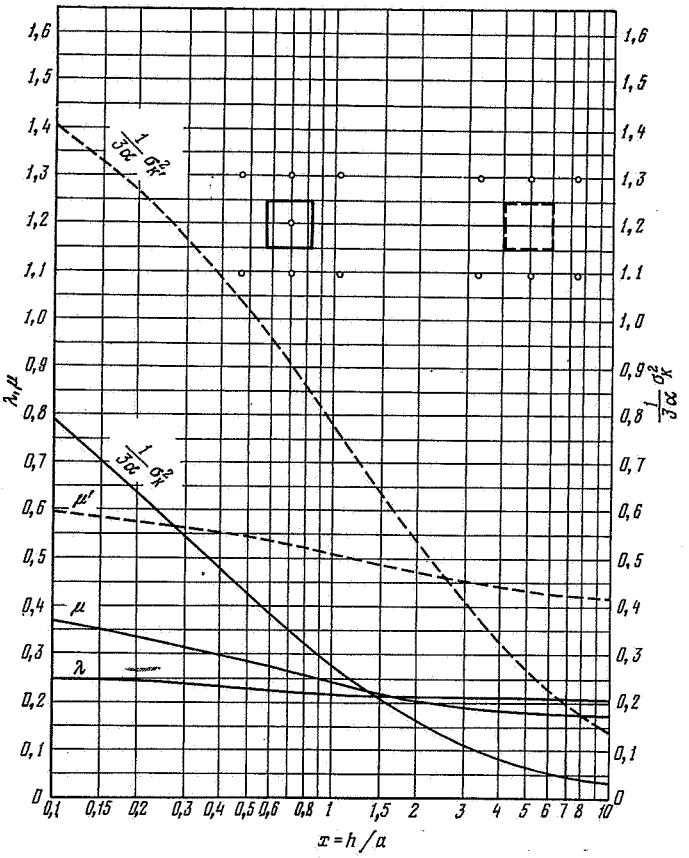
Ф и г. 87. Диаграмма 15.



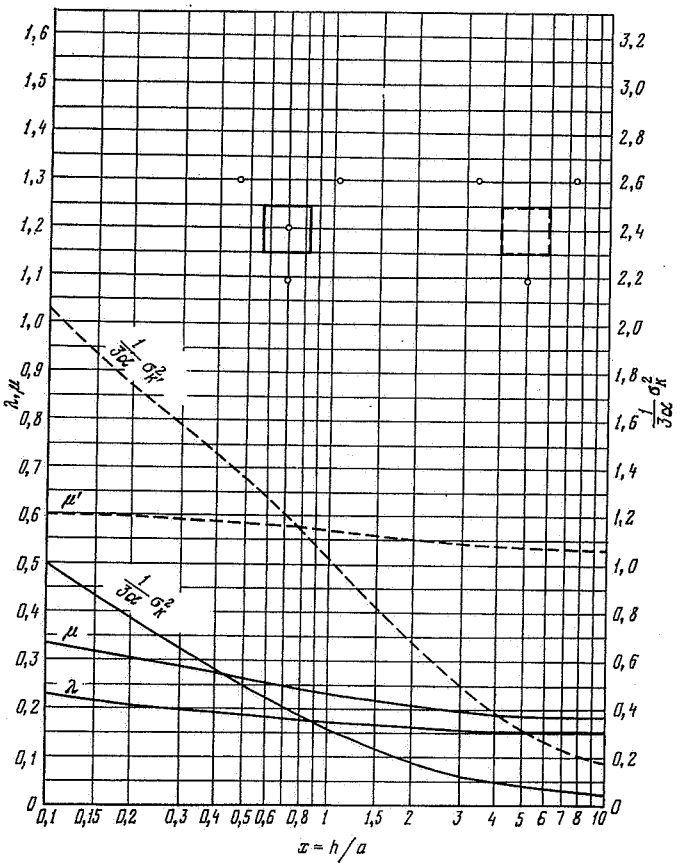
Ф и г. 88. Диаграмма 16.



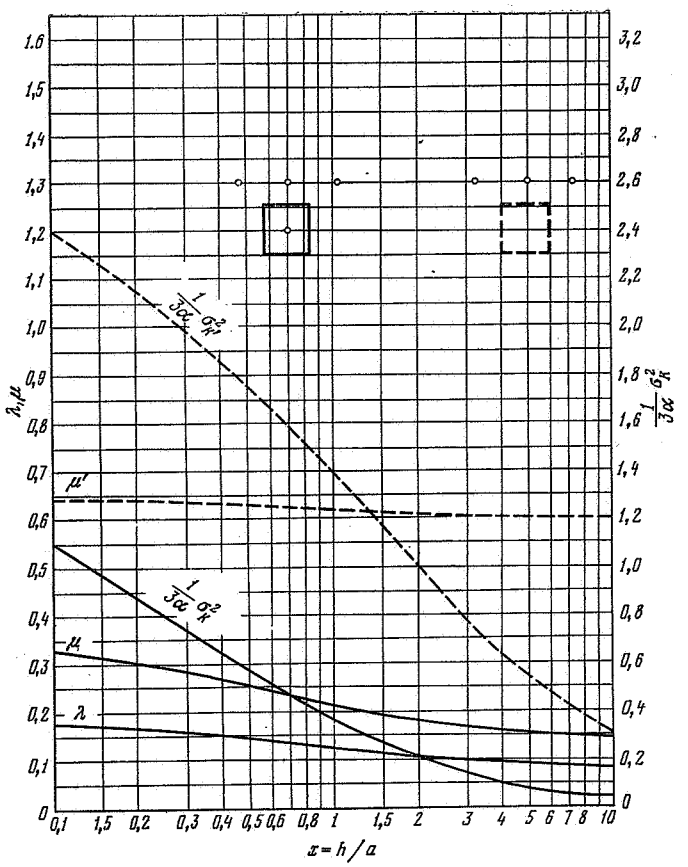
Ф и г. 89. Диаграмма 17.



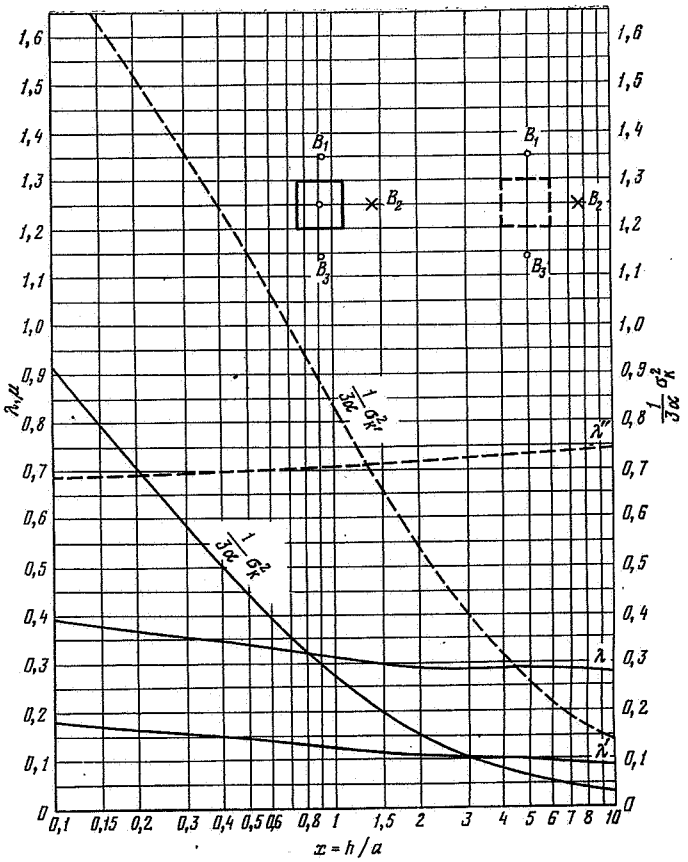
Фиг. 90. Диаграмма 18.



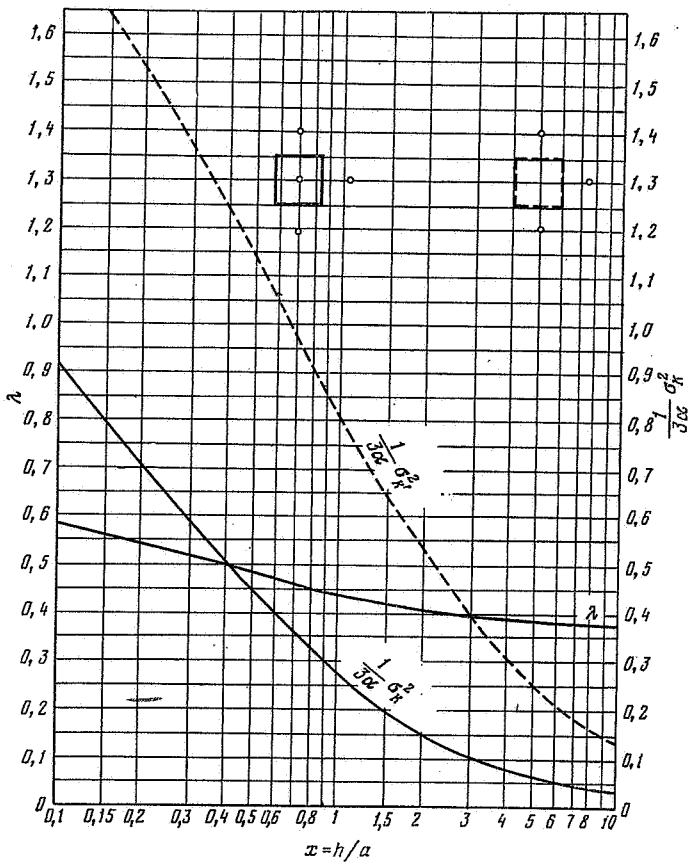
Фиг. 91. Диаграмма 19.



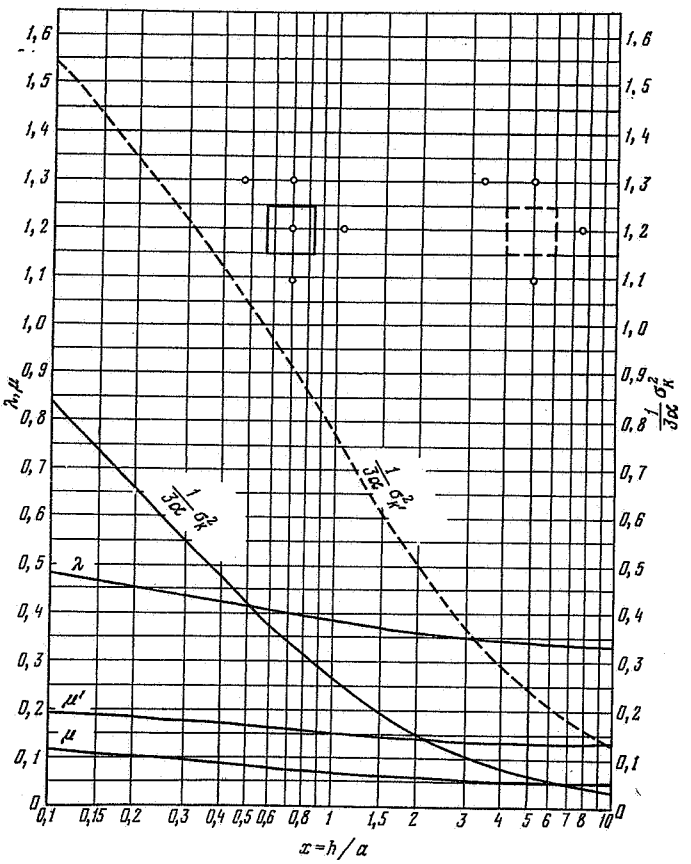
Фиг. 92. Диаграмма 20.



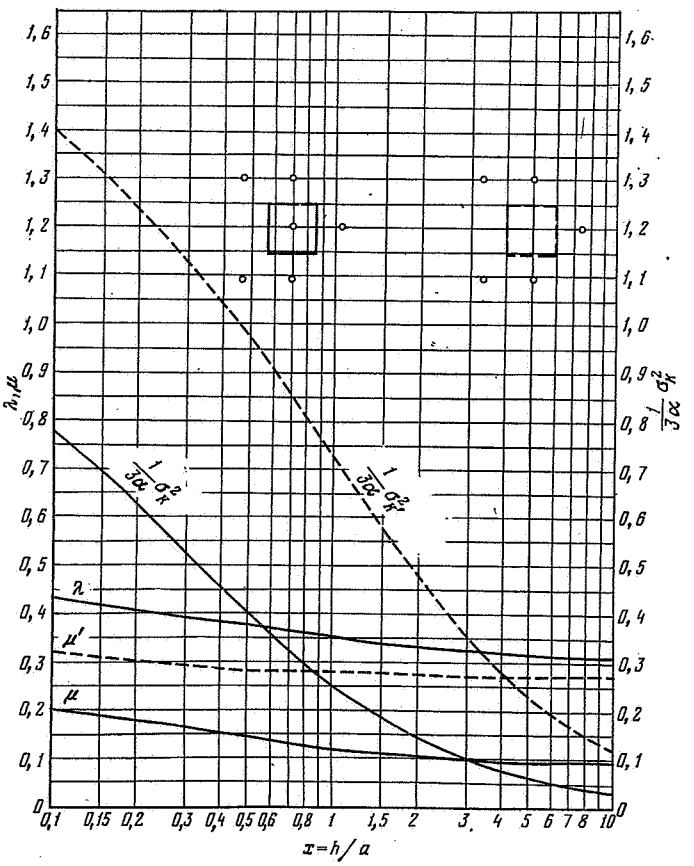
Фиг. 93. Диаграмма 21.



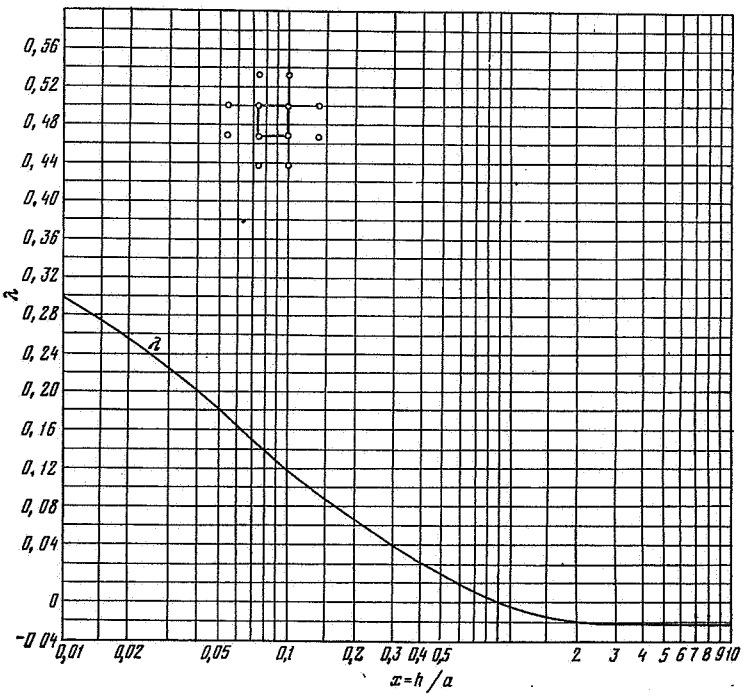
Ф и г. 94. Диаграмма 21а.



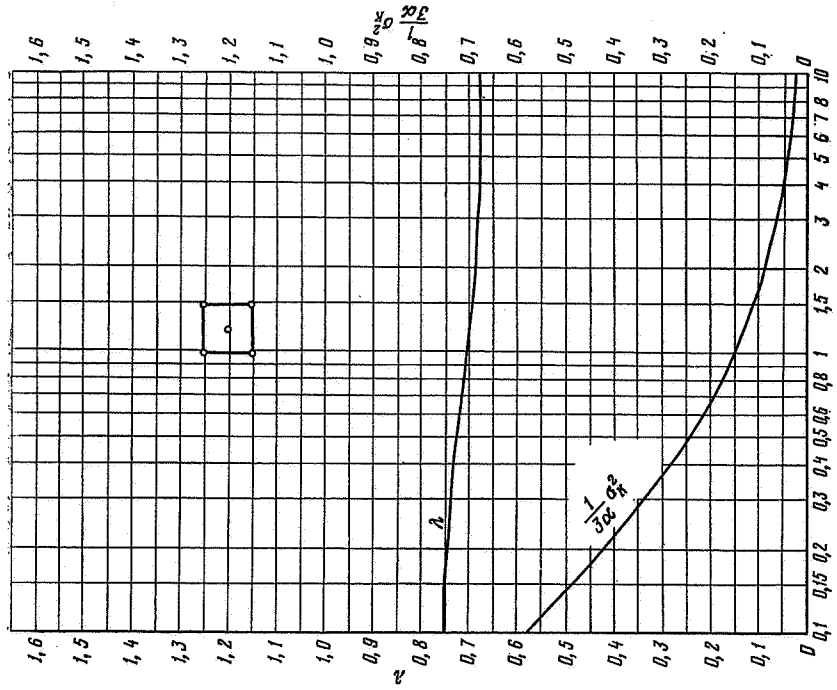
Ф и г. 95. Диаграмма 22.



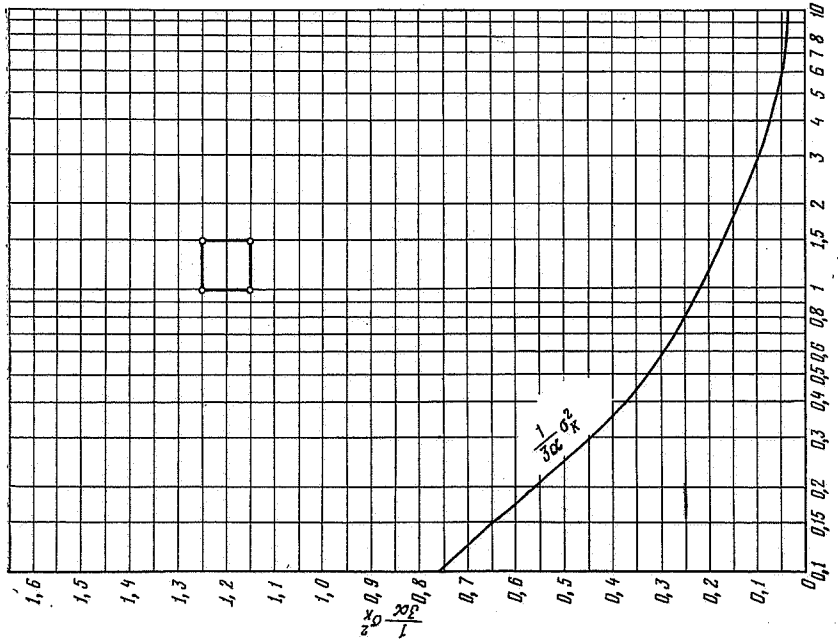
Ф и г. 96. Диаграмма 23.



Ф и г. 97. Диаграмма 24.



Фиг. 99. Диаграмма 26.



Фиг. 98. Диаграмма 25.

ГЛАВА XIII

Непрерывный крайгинг в схеме де Вейса

Краткое содержание

Эта глава посвящена рассмотрению общих уравнений непрерывного крайгинга в случае, когда пространственная изменчивость содержаний описывается изотропной схемой де Вейса. Показана тесная аналогия рассматриваемой проблемы с задачами теории потенциалов (§ 1). Получены решения задачи для случая двух (§ 2), трех (§ 3) и четырех (§ 4) выработок и приведены соответствующие сетки крайгинга, позволяющие осуществить крайгинг участка произвольной формы.

§ 1. Определение и общее уравнение непрерывного крайгинга

В гл. IX, § 3, мы ввели понятие полного крайгинга. Полный крайгинг состоит в получении наилучшей оценки для некоторого участка рудного тела (некоторого подсчетного блока) по всем пробам, отобранным в рудном теле, когда каждая проба входит в оценку среднего в блоке содержания со своим весовым коэффициентом. Может показаться, что при заданном числе и расположении горных выработок мы сможем извлечь бо́льшую информацию об оцениваемом блоке, если отберем из этих выработок большее число индивидуальных проб. Однако было бы наивным полагать, что бесконечное увеличение числа проб беспредельно увеличивает точность получаемых оценок. Существует некоторый предел. При определенных условиях максимальная точность достигается, если в качестве оценки принимается среднее содержание в объеме пройденных выработок (дополнительное изучение содержания в каждой отдельной отпалке не внесет никакого улучшения в оценку). Условия, при которых это строго выполняется, требуют, чтобы все элементарные объемы выработок занимали по отношению к оцениваемому участку и один относительно другого эквивалентные положения. В полной мере эти условия соблюдаются при оценке круглого участка по данным сплошного опробования его периферии. В общем случае, однако, различные отпалки не занимают полностью эквивалентных положений относительно оцениваемого блока и теоретически некоторое улучшение оценки может быть достигнуто путем приписывания каждой отпалке своего веса. В большинстве случаев, впрочем, это улучшение практически настолько незначительно, что оно не оправдывает применения полного крайгинга. Но на самом деле цель такого крайгинга заключается не только в уменьшении дисперсии оценки, которое хотя и реально, но чаще всего мало. Главное назначение этого метода — исключение систематических ошибок, состоящих в завышении оценок каждый раз, когда выбирается блок с содержанием, значительно превышающим среднее по месторождению. Вообще говоря, пройденные горные выработки с максимальной эффективностью будут использованы для оценки содержания в том случае, если весь их объем будет разделен на бесконечное число очень маленьких соприкасающихся элементарных объемов dV, каждый из которых будет отобран в виде пробы и отдельно проанализирован. Полный крайгинг по бесконечно большому числу элементарных смежных объемов мы назовем *непрерывным крайгингом*. Практически роль элементарных объемов dV могут играть отпалки или бороздовые пробы.

Для упрощения математических выводов мы уподобим пройденные горные выработки линейным элементам (отрезкам прямых, представляющим горизонтальные и вертикальные горные выработки, скважины) или, в более общем случае, некоторым кривым, представляющим различные (замкнутые или разорванные, непрерывные или прерывистые) контуры. Вместо элемента объема dV введем элемент дуги ds, представляющий линейный элемент горной выработки TM (travaux miniers — горная выработка), каждую точку M горной выработки будем представлять ее криволинейной абсциссой s. Проблема непрерывного крайгинга состоит в определении оценки z^* вида

$$z^* = \int_{TM} f(s)\, x(s)\, ds \qquad \text{(XIII,1,1)}$$

при

$$\int_{TM} f(s)\, ds = 1, \qquad \text{(XIII,1,2)}$$

где $x(s)$ — содержание, соответствующее элементу ds в точке M, а интегрирование проводится по всей (криволинейной) длине горных выработок. Функция $f(s)$ — плотность взвешивания — представляет собой обобщение коэффициентов a_i общего уравнения крайгинга (IX,2,1) на непрерывный случай, а условие (XIII,1,2) эквивалентно условию (IX,2,2). Плотность взвешивания $f(s)$ должна быть функцией, обеспечивающей минимум дисперсии при соблюдении условия (XIII,1,2). Обозначим символом $K(s, s')$ ковариацию содержаний в двух точках M и M' с криволинейными абсциссами s и s', а $C(s)$ — ковариацию содержаний в точке M и в оцениваемом участке. Дисперсия оценки принимает следующее выражение:

$$D(z - z^*) = \sigma_z^2 - 2\int_{TM} f(s)\, C(s)\, ds + \int_{TM} ds \int_{TM} K(s, s')\, f(s)\, f(s')\, ds', \qquad \text{(XIII,1,3)}$$

являющееся обобщением формулы (XI,2,3). Функция $f(s)$, обеспечивающая минимум дисперсии, должна отвечать линейной системе, аналогичной системе (IX,2,4) и содержащей бесконечное число уравнений с бесконечным числом неизвестных, т. е. она должна отвечать интегральному уравнению, которое записывается как

$$\int_{TM} K(s, s')\, f(s)\, ds = C(s') + \lambda. \qquad \text{(XIII,1,4)}$$

Константа λ определяется из дополнительного условия (XIII,1,2); она играет здесь второстепенную роль. В общем случае интегральное уравнение этого типа не решается, а непрерывный крайгинг не представляет практического интереса. Но в частных случаях, когда можно определить $f(s)$, непрерывный крайгинг представляет собой гораздо более гибкий и мощный инструмент, чем дискретный крайгинг, и, в частности, он позволяет наилучшим из возможных способов решить задачи такого типа, как оценка богатого блока по его периферии.

Аналогия с электростатикой и теорема экрана

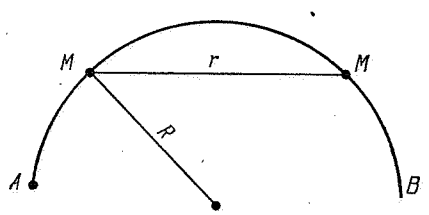
Предыдущее изложение имело весьма общий характер. Рассмотрим теперь двумерное однородное изотропное поле содержаний, удовлетворяющее схеме де Вейса. Собственная функция $3\alpha \ln r$ является гармонической в двумерном пространстве, т. е. она обладает теми же свойствами, что и ньютоновский потенциал в трехмерном пространстве. Таким образом, перед нами весьма близкая аналогия с классической теорией потенциала и, в частности, с электростатикой. При такой аналогии ковариация двух точек M и M'

соответствует потенциалу в точке M, возникающему в том случае, когда единичный заряд помещен в точке M'. Проинтерпретируем с этой точки зрения интегральное уравнение (XIII,1,4) и условие (XIII,1,2). В первую очередь рассмотрим следующий случай, когда оцениваемый участок представляет собой бесконечно малую площадку dS с центром в точке O (фиг. 100), т. е. случай точечного крайгинга. Пусть $M(s)$ — точка горной выработки с текущей координатой s, $r(s, s')$ — расстояние между $M(s)$ и $M(s')$, $R(s)$ — расстояние OM.

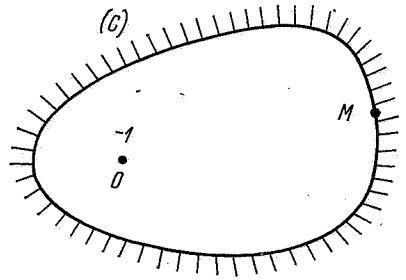
Тогда

$$\left.\begin{aligned} K(s, s') &= A - 3\alpha \ln [r(s, s')], \\ C(s) &= A - 3\alpha \ln [R(s)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII,1,5)}$$

В силу условия (XIII,1,2) постоянная A из интегрального уравнения исключается. Коэффициент абсолютного рассеивания 3α, как и при дискретном



Фиг. 100.



Фиг. 101.

крайгинге, входит лишь в качестве коэффициента пропорциональности и может быть опущен. Функция $f(s)$, как и коэффициенты a_i, имеет чисто геометрический смысл. Итак, интегральные уравнения (XIII,1,2) и (XIII,1,4) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \int_{TM} f(s) \ln [r(s, s')]\, ds &= \ln [R(s')] + \lambda, \\ \int_{TM} f(s)\, ds &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII,1,6)}$$

Если интерпретировать функцию $f(s)$ как линейную плотность электрического заряда, решение системы (XIII,1,6) должно соответствовать такому размещению единичного количества электричества на контуре, при котором потенциал в любой точке $M(s)$ контура с точностью до произвольной постоянной должен быть равным потенциалу в этой точке, создаваемому единичным зарядом в точке O.

Решение этой проблемы в общем случае не известно, но в частном случае, если горные выработки образуют замкнутый контур, она сводится к классической задаче Дирихле.

Предположим, что горные выработки образуют замкнутый контур (C), на котором необходимо определить функцию плотности взвешивания для реализации крайгинга точки O, заключенной внутри контура (фиг. 101). Будем рассматривать контур (C) как внутреннюю поверхность полого проводника. Нужно разместить единичный положительный заряд на внутренней поверхности полого проводника так, чтобы потенциал, создаваемый в любой точке M контура с точностью до произвольной постоянной, был равен $\ln OM$. Представим, что такое размещение уже осуществлено и поместим в точке O

отрицательный единичный заряд. Суммарный потенциал, вызванный в точке M контура зарядом -1, размещенным в точке O, и зарядом $+1$, рассредоточенным по контуру, с точностью до произвольной постоянной равен $\ln OM - \ln OM = 0$. Таким образом, контур (C) эквипотенциален, и, следовательно, функцию $f(s)$ можно интерпретировать как плотность заряда на внутренней поверхности полого проводника, индуцированного зарядом -1, помещенным в точке O. Итак, задача сведена к классической с той только разницей, что мы рассматриваем логарифмический потенциал на плоскости вместо объемного ньютоновского потенциала $1/r$ в трехмерном пространстве. Если необходимо произвести крайгинг некоторого блока S, заключенного внутри контура (C), то функцию $f(s)$ следует рассматривать как плотность заряда, индуцированного на поверхности (C) зарядом -1, равномерно распределенным по площади S. Эта функция получается путем интегрирования плотностей, индуцированных каждой точкой площади S, в соответствии с теоремой суперпозиции, рассмотренной в гл. IX, § 3, и аналогичной хорошо известной теореме электростатики о сложении электрических полей.

Другой результат классической электростатики позволяет четко сформулировать теорему периферического экрана, уже упоминавшуюся нами ранее. Действительно, потенциал, вызванный зарядом $+1$, индуцированным на контуре (C), и зарядом -1, помещенным в точке O вне контура (C), неизбежно будет постоянным, поскольку внешнее от контура пространство (C) является внутренностью идеального проводника. Достаточно отметить, что решение задачи Дирихле в случае внешнего пространства не может дать другой функции, всюду регулярной и постоянной на контуре (C), кроме постоянной величины. Таким образом, индуцированная плотность $f(s)$ вызывает во всех внешних точках такой же потенциал с точностью до произвольной постоянной, как и заряд $+1$, равномерно размещенный по площади оцениваемого блока S; этот вывод остается справедливым и по отношению к точкам, принадлежащим контуру (C).

Возвращаясь к нашей задаче, представим, что для оценивания блока S мы располагаем, кроме оценки z^*, построенной по $f(s)$, еще и величиной содержания u в некотором произвольном элементе S', внешнем по отношению к контуру (C). Осуществим крайгинг оцениваемой площади по этим двум оценкам, т. е. отыщем оценку вида

$$\mu u + (1-\mu) z^*,$$

где параметр крайгинга μ определяется из обычного условия минимума дисперсии по формуле

$$\mu = \frac{\sigma^2_{z^*} + \sigma_{uz} - \sigma_{zz^*} - \sigma_{uz^*}}{\sigma^2_u + \sigma^2_{z^*} - 2\sigma_{uz^*}}.$$

Дисперсия $\sigma^2_{z^*}$ вычисляется как среднее [на контуре (C)] значение потенциала, вызываемого индуцированным зарядом $f(s)$. Она отличается лишь на константу K от среднего (на том же контуре) значения потенциала, вызываемого зарядом $+1$, равномерно размещенным на S, т. е. от σ_{zz^*}; следовательно, справедливо равенство

$$\sigma^2_{z^*} - \sigma_{zz^*} = K.$$

Аналогично ковариация σ_{uz^*} рассчитывается как среднее значение в S' потенциала, вызываемого распределенным на (C) единичным зарядом с плотностью $f(s)$. Она лишь на постоянную K отличается от ковариации σ_{uz}, равной среднему значению потенциала на S', вызванного зарядом $+1$, распределенным на S, т. е.

$$\sigma_{uz^*} - \sigma_{uz} = K.$$

Таким образом, во всех случаях параметр крайгинга μ равен нулю, и, следовательно, наилучшая возможная оценка для площади, расположенной внутри контура (C), получается без учета содержаний во внешних по отношению к этому контуру участках рудного тела. Итак, при непрерывном крайгинге внутреннего участка по замкнутому контуру (C) этот контур представляет собой идеальный экран по отношению ко всем внешним данным.

Аналогичные результаты легко получаются для крайгинга участка, внешнего по отношению к замкнутому контуру, который в данном случае рассматривается как внешний контур сплошного проводника. Функция взвешивания $f(s)$ представляет собой плотность размещения на контуре единичного заряда при условии, что на площади оцениваемого участка равномерно распределен единичный отрицательный заряд. В этом случае контур (C) представляет собой идеальный экран по отношению ко всем внутренним данным. Мы ограничимся сказанным, так как на практике будем иметь дело только с крайгингом внутренних участков.

Наконец, результаты классической теории позволяют определить в явном виде функцию взвешивания $f(s)$. Рассмотрим крайгинг внутреннего участка. Пусть дан контур (C) и точка O внутри него. Тогда значения функции $G(M, O)$ на контуре будут равны нулю; в этом случае выражение $G(M, O) + \ln OM$ представляет собой гармоническую функцию во всех точках (включая точку O) внутри контура для области, ограниченной контуром (C) с полюсом в точке O. Она называется функцией Грина. Известно, что функция Грина позволяет решить задачу Дирихле в общем случае. В частности, она позволяет быстро найти функцию $f(s)$. Действительно, потенциал U, вызванный зарядом -1, помещенным в точке O, и зарядом $+1$, индуцированным на контуре (C), имеет на контуре постоянную величину. Потенцил, вызванный только зарядом $+1$, индуцированным на контуре (C), и равный $U + \ln OM$, является функцией, гармонической внутри контура (C) во всех точках, включая точку индуктора O. Таким образом, потенциал $U(M)$ с точностью до произвольной постоянной равен функции Грина с полюсом в точке O, т. е.

$$U(M) = G(M, O).$$

Непосредственное применение классических результатов позволяет получить функцию $f(s)$; для этого мы должны взять производную по внутренней нормали к контуру (C):

$$f(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{dU}{dn} = \frac{1}{2\pi}\frac{dG(M, O)}{dn}. \qquad \text{(XIII,1,7)}$$

Итак, проблема непрерывного крайгинга решена для всех замкнутых контуров, для которых известен способ построения функции Грина. Простые результаты получаются для окружности или кольца и — с помощью предельного перехода — для бесконечной прямой или двух параллельных прямых.

Рассмотрим сначала контур (C) в виде окружности с радиусом R и центром O (фиг. 102) и определим функцию $f(s)$ для крайгинга точки A, расположенной внутри окружности ($OA = a < R$).

Чтобы получить функцию Грина, представим точку B на таком расстоянии от окружности, при котором

$$OA \cdot OB = R^2,$$

и обозначим

$$r = MA, \quad r' = MB.$$

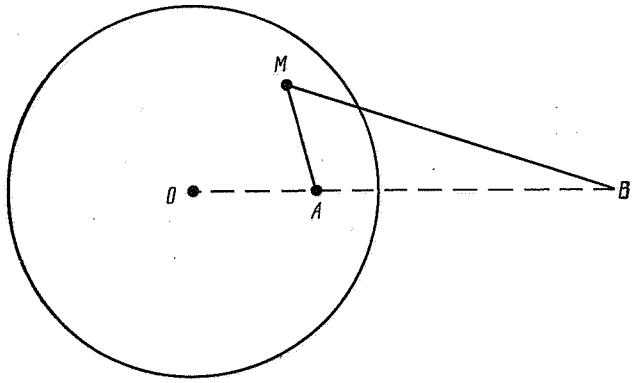
Тогда с точностью до произвольной постоянной функция Грина запишется в виде

$$G(M, A) = \ln \frac{r'}{r}.$$

Это выражение постоянно для всех точек окружности, а сумма $G + \ln r$ является гармонической функцией во всех внутренних точках, в том числе и в точке A. По формуле (XIII,1,7) можно получить значение функции взвешивания —

$$f(s) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - a^2}{r^2},$$

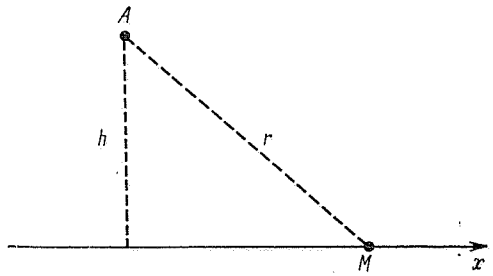
которая полностью решает задачу крайгинга точки A. Переходя от точечного крайгинга к крайгингу некоторой площади, расположенной внутри контура,



Фиг. 102.

весовую функцию $f(s)$ определим путем интегрирования по всем точкам A этой площади.

Если представить теперь, что радиус R окружности неограниченно возрастает, а точка A остается на конечном расстоянии $h = R - a$ от контура



Фиг. 103.

(фиг. 103), то, перейдя к пределу, получим выражение для функции взвешивания

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{h}{r^2},$$

по которому решим задачу крайгинга точки A по бесконечной горной выработке. Для крайгинга произвольной площади необходимо проинтегрировать выражение $h/\pi r^2$ по всем точкам этой площади. Горная выработка, предполагаемая бесконечной, образует экран, отделяющий ее от всех данных, не принадлежащих той полуплоскости, на которой расположена оцениваемая площадь. Но длина горных выработок — величина конечная; функция же

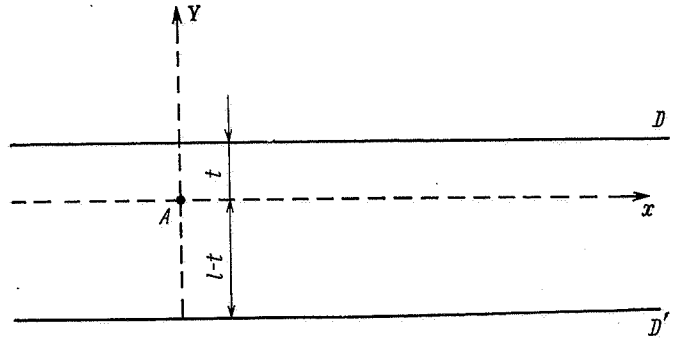
(x) при увеличении x убывает как $1/x^2$, поэтому элементы горной выработки, значительно удаленные от оцениваемого участка, обладают очень малыми весами. Это видно также из предыдущей формулы, которая сводится к равенству

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,d\theta;$$

данное равенство можно использовать не только для гипотетической бесконечной горной выработки, но и для действительной выработки конечной длины, если только она простирается достаточно далеко по обе стороны от оцениваемой площади.

§ 2. Непрерывный крайгинг по двум параллельным горным выработкам

Не останавливаясь на задаче крайгинга для случая кольца, которая не представляет практического интереса, перейдем непосредственно к крайгингу участка, расположенного между двумя параллельными выработками D и D' (фиг. 104).



Фиг. 104.

Уподобим эти две выработки бесконечным прямым и рассмотрим вначале крайгинг точки A, заключенной между этими прямыми. Примем точку A за начало координат, а за единицу длины — расстояние между прямыми h (т. е. $h = 1$) и обозначим через t и $1 - t$ расстояния точки A от прямых D и D'; таким образом, в нашей задаче символ t будет единственным параметром. Теория функций комплексного переменного позволяет легко получить гармоническую функцию

$$G = -\frac{1}{2} \ln \frac{e^{2\pi x} - 2e^{\pi x} \cos \pi y + 1}{e^{2\pi x} - 2e^{\pi x} \cos \pi (y - 2t) + 1}, \qquad \text{(XIII,2,1)}$$

равную нулю при $y = t$ и $y = 1 - t$, т. е. на прямых D и D', и такую, что $G + \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$ будет гармонической функцией в точке A. Таким образом, эта гармоническая функция является функцией Грина для области, ограниченной двумя бесконечными прямыми D и D', с полюсом в точке A. Дифференцированием по y, в соответствии с формулой (XIII,1,7), получим функции взвешивания

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{e^{\pi x} \sin \pi t}{e^{2\pi x} - 2e^{\pi x} \cos \pi t + 1}, \\ f_2(x) &= \frac{e^{\pi x} \sin \pi t}{e^{2\pi x} + 2e^{\pi x} \cos \pi t + 1}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII,2,2)}$$

которые для D и D' соответственно представляют собой решение проблемы точечного крайгинга. Иногда удобно рассматривать разложение функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряд Фурье:

$$f_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\pi x} \sin p\pi t,$$
$$f_2(x) = \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\pi x} (-1)^{p+1} \sin p\pi t. \qquad \text{(XIII,2,3)}$$

В этих формулах x берется по абсолютной величине. Если вместо точечного крайгинга рассматривать крайгинг произвольного участка S, то в соответствии с общей теоремой суперпозиции достаточно проинтегрировать полученные выражения по всем точкам A площади S, чтобы получить функции взвешивания для неточечного крайгинга. Кроме того, согласно теореме периферического экрана, две бесконечные выработки образуют идеальный экран по отношению ко всем внешним данным. Однако выработки имеют конечную длину. Но экспонента в формулах (XIII,2,3) и (XIII,2,2) обеспечивает очень быстрое убывание функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при возрастании x. Если выработки, расположенные по обе стороны оцениваемого участка, имеют длину, превышающую расстояние между выработками h, прямые D и D' можно считать практически бесконечными.

Прежде чем мы получим конкретные решения для различных встречающихся на практике блоков, рассмотрим важный результат, имеющий отношение к определению полных весов каждой из выработок (другими словами, изучим характер распределения единичного индуцированного заряда между D и D'). В общем виде имеем следующее: суммарный вес среднего содержания на конечном отрезке выработки D, ограниченном двумя точками с абсциссами x_1 и x_2, находят путем интегрирования функции $f_1(x)$ по x:

$$p_1(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\, dx = F_1(x_2) - F_1(x_1),$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg} \left[\frac{e^{\pi x} - \cos \pi t}{\sin \pi t} \right].$$

Для выработки D' имеем ту же формулу, но с заменой t на $1 - t$. В частности, для вычисления полных весов p_1 и p_2 выработок D и D' интегрирование проводят от $-\infty$ до $+\infty$, что дает

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 1 - t, \\ p_2 &= t. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII,2,4)}$$

Иначе говоря, общий вес выработки D (или D') равен расстоянию точки A до другой выработки D' (или D), т. е. суммарный вес каждой выработки обратно пропорционален ее расстоянию до оцениваемой точки A. Когда необходимо провести крайгинг площади S, суммарный вес каждой выработки, согласно теореме суперпозиции, получают интегрированием выражения (XIII,2,4) по всей площади S. При этом легко доказать *теорему центра тяжести*: «при крайгинге произвольного участка, расположенного на площади, заключенной между двумя бесконечными параллельными выработками, суммарный вес каждой выработки обратно пропорционален ее расстоянию до центра тяжести оцениваемого участка».

В частности, если S — произвольный треугольник, одна вершина которого лежит на D, а две другие — на D', то вес выработки D равен $^1/_3$, а вес выработки D' равен $^2/_3$. Если S — параллелограмм, две стороны которого лежат на D и D', то очевидно, что $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. В более общем случае, когда

S — трапеция, основания которой a и b расположены на D и D' соответственно, положив

$$L = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad l = \frac{a-b}{2},$$

получим очень простые соотношения

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{l}{L}$$

и

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{l}{L}.$$

Перейдем теперь к проблеме крайгинга произвольного блока S. Встречающиеся на практике блоки обычно могут рассматриваться как трапеции, а так как каждая трапеция может быть разложена на прямоугольник и два прямоугольных треугольника, достаточно найти решение для этих двух фигур и применить теорему суперпозиции. Для удобства используем вспомогательные функции, которые получим из (XIII, 2,3) двойным интегрированием:

$$S(x) = \sum_{p} \frac{1}{(2p+1)^2 \pi^2} e^{-(2p+1)\pi x};$$
$$C(x) = \sum_{p} \frac{1}{4p^2\pi^2} e^{-2p\pi x};$$
$$P(x) = S(x) + C(x) = \sum_{p} \frac{1}{p^2\pi^2} e^{-p\pi x};$$
$$J(x) = S(x) - C(x) = \sum_{p} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2\pi^2} e^{-p\pi x}.$$

Численные значения этих функций приведены в таблице 44.

Таблица 44

x	$S(x)$	$C(x)$	$P(x)$	$J(x)$	x	$S(x)$	$C(x)$	$P(x)$	$J(x)$
0	0,125000	0,041667	0,166667	0,083333	1,0	0,004379	0,000048	0,004427	0,004332
0,1	0,079586	0,015946	0,035532	0,063640	1,1	0,003198	0,000025	0,003224	0,003173
0,2	0,055983	0,007800	0,063783	0,048183	1,2	0,002336	0,000013	0,002349	0,002322
0,3	0,040187	0,004003	0,044190	0,036184	1,3	0,001706	0,000007	0,001713	0,001699
0,4	0,029105	0,002095	0,031200	0,027010	1,4	0,001246	0,000004	0,001250	0,001242
0,5	0,021165	0,001107	0,022272	0,020058	1,5	0,000910	0,000002	0,000912	0,000908
0,6	0,015424	0,000587	0,016011	0,014837	1,6	0,000665	0,000001	0,000666	0,000664
0,7	0,011251	0,000312	0,011563	0,010938	1,8	0,000355	.....	0,000355	0,000355
0,8	0,008214	0,000166	0,008380	0,008047	2,0	0,000189	.....	0,000189	0,000189
0,9	0,005997	0,000089	0,006086	0,005908					

Отметим, что

$$P(0) = \frac{1}{6}, \quad S(0) = \frac{1}{8}, \quad C(0) = \frac{1}{24}.$$

Практически никогда не применяют непрерывный крайгинг в чистом виде, а разбивают горные выработки на отрезки малой (но не нулевой) длины и приписывают каждому из них коэффициент, равный его весу, т. е. значение интеграла от $f(s)$ по этому отрезку. Для удобства расчета этих весов нам

понадобятся следующие интегралы от введенных вспомогательных функций:

$$\Phi(x)=\int_x^\infty P(x)\,dx=\sum\frac{1}{p^3\pi^3}e^{-p\pi x};$$

$$H(x)=\int_x^\infty J(x)\,dx=\sum\frac{(-1)^{p+1}}{p^3\pi^3}e^{-p\pi x};$$

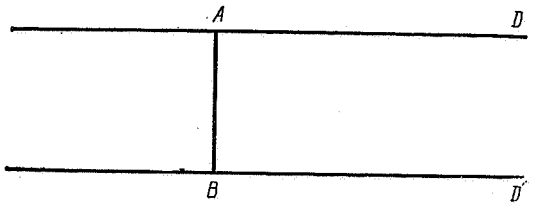
$$A(x)=\int_x^\infty S(x)\,dx=\sum\frac{1}{(2p+1)^3\pi^3}e^{-(2p+1)\pi x}.$$

В таблице 45 приведены их численные значения.

Таблица 45

x	$A(x)$	$\Phi(x)$	$H(x)$	x	$A(x)$	$\Phi(x)$	$H(x)$
0	0,033928	0,038775	0,029081	1,0	0,001394	0,001401	0,001376
0,1	0,024091	0,026416	0,021767	1,1	0,001018	0,001022	0,001014
0,2	0,017404	0,018596	0,016212	1,2	0,000744	0,000746	0,000741
0,3	0,012641	0,013265	0,012016	1,3	0,000543	0,000543	0,000542
0,4	0,009207	0,009537	0,008877	1,4	0,000397	0,000397	0,000396
0,5	0,006715	0,006890	0,006540	1,5	0,000290	0,000290	0,000289
0,6	0,004901	0,004994	0,004808	1,6	0,000212	0,000212	0,000211
0,7	0,003578	0,003628	0,003528	1,8	0,000113	0,000113	0,000113
0,8	0,002613	0,002639	0,002587	2,0	0,000060	0,000060	0,000060
0,9	0,001908	0,001923	0,001894				

В начале рассмотрим крайгинг отрезка прямой AB (фиг. 105), перпендикулярного выработкам D и D'. Интегрированием по t выражения (XIII,2,2)



Фиг. 105.

или (XIII,2,3) получим для D и D' плотность взвешивания

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1+e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}}=\frac{2}{\pi}\sum_p\frac{1}{2p+1}e^{-(2p+1)\pi x}. \qquad \text{(XIII,2,5)}$$

Вес конечного отрезка, ограниченного точками x_1 и x_2, которые расположены по одну сторону от AB, вычисляют интегрированием по x:

$$p(x_1, x_2)=2[S(x_1)-S(x_2)].$$

Из этого равенства, кстати, следует, что вес одной выработки составляет $4S(0)=\frac{1}{2}$.

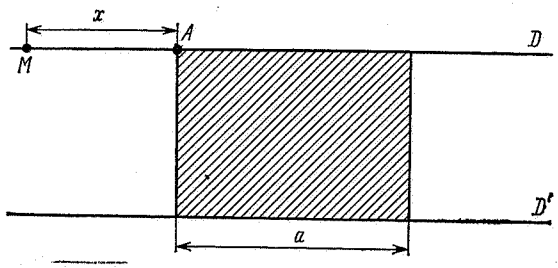
Проинтегрировав формулу (XIII,2,5), получим плотность взвешивания $f(x)$ для крайгинга прямоугольного участка длины a. Так как абсцисса x в экспонентах означает абсолютное значение x, то следует раздельно рассматривать случаи, когда точка M с абсциссой x находится снаружи прямоугольника (фиг. 106) и внутри его (фиг. 107). Принимая это к сведению, запишем суммы для каждого из случаев:

$$f_1(x)=\frac{2}{a}[S(x)-S(x+a)]$$

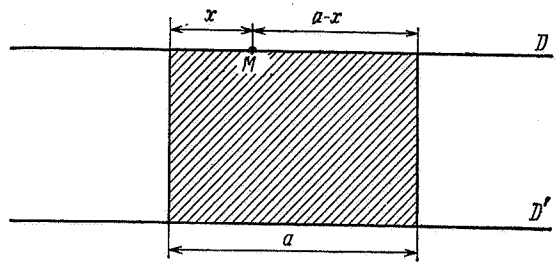
и

$$f_2(x)=\frac{1}{2a}-\frac{2}{a}[S(x)+S(a-x)].$$

Интегрируя эти суммы, можно найти вес для отрезка как не принадлежащего, так и принадлежащего оцениваемому прямоугольнику. Приведем выражение для полного веса $p_1(x)$ отрезка выработки от вершины прямоугольника A, взятой за начало координат, влево до бесконечности (первый случай) и полного веса $p_2(x)$ отрезка, заключенного между M и вершиной прямоугольника (второй случай):



Фиг. 106.



Фиг. 107.

$$p_1(x)=\int_x^\infty f_1(x)\,dx=\frac{2}{a}[A(x)-A(x+a)],$$

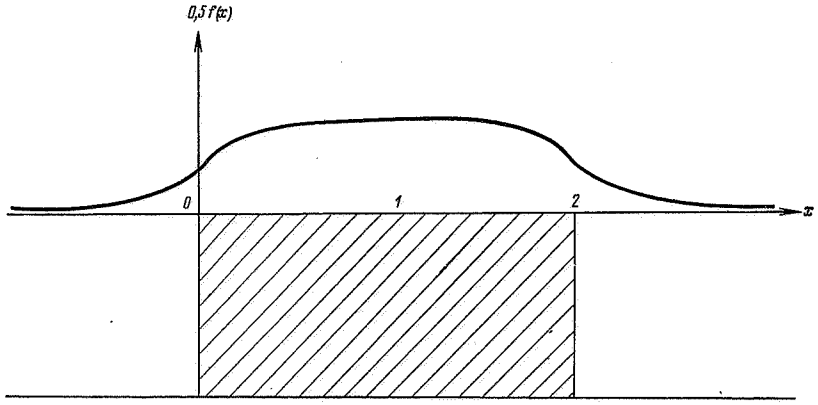
$$p_2(x)=\int_0^x f_2(x)\,dx=\frac{x}{2a}-\frac{2}{a}[A(0)-A(x)+A(a-x)-A(a)].$$

Заметим, что суммарный вес данных, внешних по отношению к оцениваемому прямоугольнику, равен

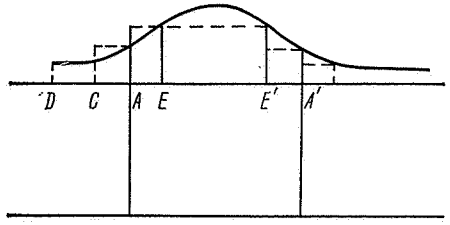
$$4p_1(0)=\frac{8}{a}[A(0)-A(a)].$$

Когда $a>1$, $A(a)$ мало по сравнению с $A(0)$, и

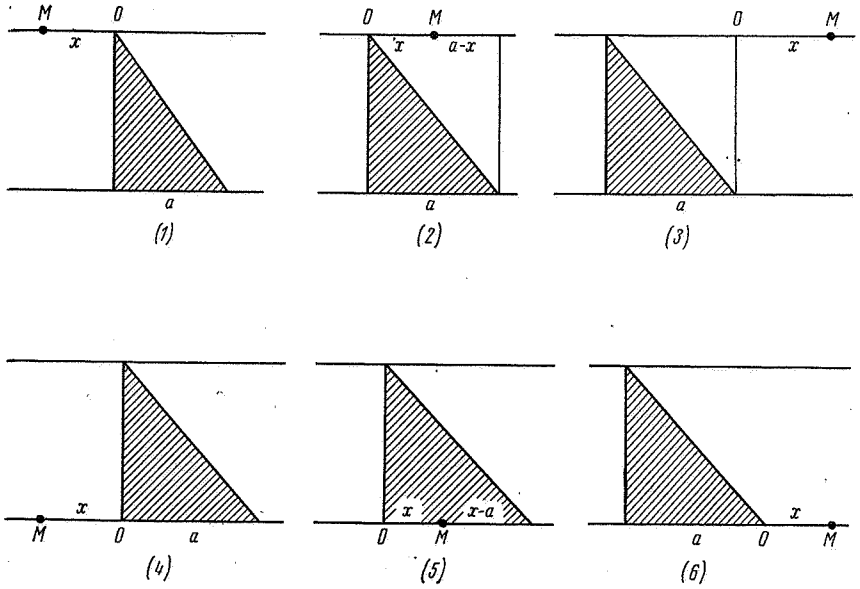
$$4p_1(0)\approx\frac{0,27}{a}.$$



Ф и г. 108. Функция взвешивания $f(x)$ при $a = 2h$.



Ф и г. 109.



Ф и г. 110.

Таким образом, для квадрата внешние данные весят несколько больше четверти, но их вес изменяется обратно пропорционально a, т. е. площади прямоугольника. При $a = 3$, например, вес внешних данных не превышает 0,09. Этот эффект является следствием быстрого убывания экспонент и его, вообще говоря, можно было предвидеть заранее. Более того, почти весь вес этих внешних данных сосредоточен в непосредственной близости от прямоугольника. Вид функции взвешивания показан на фиг. 108. Данные с внешних участков, удаленных от границы оцениваемого участка на расстояния, превышающие единицу (расстояние между выработками), по существу не оказывают влияния на оценку, и при $a > 1$ можно практически ограничиться очень небольшим числом конечных отрезков. Нанесем, например, точки C и D (фиг. 109) на расстояниях 0,2 и 0,4 слева от A, а точку E — на расстоянии 0,2 справа от A. Оказывается достаточным рассчитать четыре веса для отрезков DC, CA, AE и EE', чтобы крайгинг по точности был близок строго непрерывному.

Рассмотрим теперь крайгинг прямоугольного треугольника с вершинами, расположенными на горных выработках. В зависимости от положения точки M относительно треугольника имеем шесть случаев (фиг. 110). Плотность взвешивания для различных случаев получаем интегрированием выражений (XIII,2,3). Мы не воспроизводим здесь вычислений, которые хотя и весьма громоздки, но не представляют трудности. Укажем только, что многочлены от a и x, появляющиеся в случаях 2 и 5, выводятся с помощью разложения в ряд Фурье. Соответствующие плотности взвешивания имеют вид:

$$f_1(x) = \frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{1+a^2}P(x) + I(x) - \frac{1}{1+a^2}I(x+a)\right],$$

$$f_2(x) = \frac{2}{a}\left[-I(x) - \frac{a^2}{1+a^2}P(x) - \frac{1}{1+a^2}I(a-x) + \frac{1}{1+a^2}\frac{(a-x)^2}{2} + \frac{1}{6(1+a^2)}\right],$$

$$f_3(x) = \frac{2}{a}\left[\frac{1}{1+a^2}I(x) - \frac{a^2}{1+a^2}P(x+a) - I(x+a)\right],$$

$$f_4(x) = \frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{1+a^2}I(x) + P(x) - \frac{1}{1+a^2}P(x+a)\right],$$

$$f_5(x) = \frac{2}{a}\left[-P(x) - \frac{1}{1+a^2}P(a-x) - \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{1}{1+a^2}\left(\frac{a^2}{6} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{3}\right],$$

$$f_6(x) = \frac{2}{a}\left[\frac{1}{1+a^2}P(x) - P(x+a) - \frac{a^2}{1+a^2}I(x+a)\right].$$

Интегрируя эти плотности в соответствующих пределах, получим веса отдельных отрезков горных выработок:

$$p_1 = \int_x^\infty f_1(x)\,dx = \frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{1+a^2}\Phi(x) + H(x) - \frac{1}{1+a^2}H(x+a)\right],$$

$$p_2 = \int_0^x f_2(x)\,dx = \frac{2}{a}\left\{\frac{x}{6} + \frac{x(x-a)}{1+a^2}\left(\frac{x}{6} - \frac{a}{3}\right) + H(x) - H(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{1+a^2}[\Phi(x) - \Phi(0)] - \frac{1}{1+a^2}[H(a-x) - H(a)]\right\},$$

$$p_3 = \int_x^\infty f_3(x)\,dx = \frac{2}{a}\left[\frac{1}{1+a^2}H(x) - \frac{a^2}{1+a^2}\Phi(x+a) - H(x+a)\right],$$

$$p_4 = \int_x^\infty f_4(x)\,dx = \frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{1+a^2}H(x) + \Phi(x) - \frac{1}{1+a^2}\Phi(x+a)\right],$$

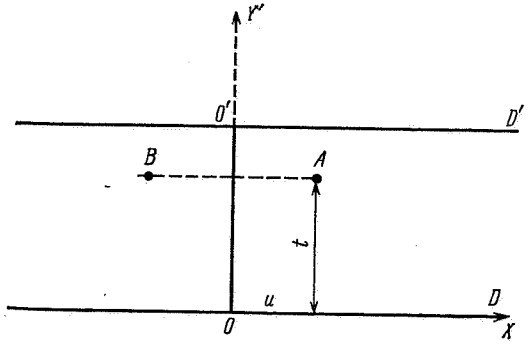
$$p_5=\int_0^\infty f_5(x)\,dx=\frac{2}{a}\left\{\frac{x}{3}+\frac{x}{6}\frac{(a^2-x^2)}{(1+a^2)}+\Phi(x)-\Phi(0)+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2}{1+a^2}[H(x)-H(0)]-\frac{1}{1+a^2}[\Phi(a-x)-\Phi(a)]\right\},$$
$$p_6=\int_x^\infty f_6(x)\,dx=\frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{1+a^2}H(x+a)-\Phi(x+a)+\frac{1}{1+a^2}\Phi(x)\right].$$

Расчет этих плотностей легко может быть произведен с помощью табл. 44 и 45.

Получив формулы плотностей взвешивания для крайгинга прямоугольных и треугольных блоков, мы можем произвести теперь строгий крайгинг любого блока. В § 3 настоящей главы мы рассмотрим простой способ приближенного решения этой задачи.

Непрерывный крайгинг по двум параллельным и одной перпендикулярной к ним выработкам

Пусть имеются две параллельные выработки D и D' и третья — OO', перпендикулярная к ним (фиг. 111). Начало координат в точке O. Решим прежде всего задачу крайгинга точки A с координатами $(u,\ t)$. Теория конформных отображений позволяет легко получить функцию Грина. Так,



Фиг. 111.

потенциал, индуцированный зарядом —1, помещенный в точке A внутри контура, образованного OO' и двумя полупрямыми $O'D'$ и OD, не отличается от потенциала, индуцированного внутри всей полосы, заключенной между прямыми D и D', зарядами —1 и +1, помещенными соответственно в точке A и точке B, симметричной A относительно линии OO'. Приняв во внимание выражение (XIII,2,1), получаем функцию Грина:

$$G(M,A)=-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{e^{2\pi(x-u)}-2e^{\pi(x-u)}\cos\pi(y-t)+1}{e^{2\pi(x-u)}-2e^{\pi(x-u)}\cos\pi(y+t)+1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{e^{2\pi(x+u)}-2e^{\pi(x+u)}\cos\pi(y+t)+1}{e^{2\pi(x+u)}-2e^{\pi(x+u)}\cos\pi(y-t)+1}\right].$$

Дифференцируя по x, получим плотности взвешивания $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для D и D', которые можно также получить непосредственно из выражений (XIII,2,2). Плотность взвешивания $f_3(y)$ для OO' получается аналогично путем диффе-

ренцирования функции Грина по y. В результате имеем

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x)&=\frac{e^{\pi(x-u)}\sin\pi t}{e^{2\pi(x-u)}-2e^{\pi(x-u)}\cos\pi t+1}-\frac{e^{\pi(x+u)}\sin\pi t}{e^{2\pi(x+u)}-e^{2\pi(x+u)}\cos\pi t+1},\\
f_2(x)&=\frac{e^{\pi(x-u)}\sin\pi t}{e^{2\pi(x-u)}+2e^{\pi(x-u)}\cos\pi t+1}-\frac{e^{\pi(x+u)}\sin\pi t}{e^{2\pi(x+u)}+2e^{\pi(x+u)}\cos\pi t+1},\\
f_3(x)&=\frac{1-e^{-\pi u}\cos\pi(y-t)}{1-2e^{-\pi u}\cos\pi(y-t)+e^{-2\pi u}}-\frac{1-e^{-\pi u}\cos\pi(y+t)}{1-2e^{-\pi u}\cos\pi(y+t)+e^{-2\pi u}}.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIII,2,6)}$$

Для удобства интегрирования при переходе от точечного крайгинга к крайгингу произвольного участка целесообразно представить найденные функции в форме разложений в ряды Фурье. Эти разложения получаются при взятии реальной и мнимой частей выражения:

$$\frac{1}{1-e^{-\pi a+\pi it}}=\frac{1-e^{-\pi a}\cos\pi t+ie^{-\pi a}\sin\pi t}{1-2e^{-\pi a}\cos\pi t+e^{-2\pi a}}=\sum_{p=0}^{\infty}e^{-p\pi a+p\pi it},$$

тогда

$$f_1(x)=\sum e^{-p\pi(x-u)}\sin p\pi t-\sum e^{-p\pi(x+u)}\sin p\pi t,$$
$$f_2(x)=\sum(-1)^{p+1}e^{-p\pi(x-u)}\sin p\pi t-\sum(-1)^{p+1}e^{-p\pi(x+u)}\sin p\pi t,$$
$$f_3(y)=\sum e^{-p\pi u}\cos p\pi(y-t)-\sum e^{-p\pi u}\cos\pi(y+t).$$

В приведенных формулах показатель степени $(x-u)$ берут по модулю. Отметим, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны нулю при $x=0$, а $f_3(y)$ — при $y=0$ и $y=1$. Все плотности, кроме того, всегда равны нулю в точках пересечения горных выработок, т. е. в точках O и O'. Это весьма общее условие имеет аналог в электростатике, известный под названием *эффект острия*.

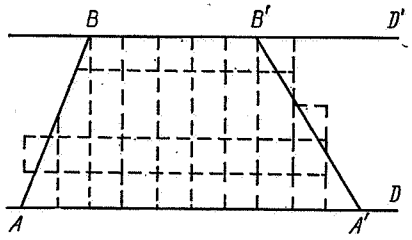
Интегрированием по x или по y предыдущих формул легко получают веса для отрезков конечной длины, а также веса выработок D, D' и OO', равные

$$p_1=\int_0^\infty f_1(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctg}\left[\frac{\sin\pi t}{e^{-\pi u}-\cos\pi t}\right]-\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctg}\left[\frac{\sin\pi t}{e^{\pi u}-\cos\pi t}\right],$$
$$p_2=\int_0^\infty f_2(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctg}\left[\frac{\sin\pi t}{e^{-\pi u}+\cos\pi t}\right]-\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctg}\left[\frac{\sin\pi t}{e^{\pi u}+\cos\pi t}\right],$$
$$p_3=\int_0^1 f_3(y)\,dy=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctg}\left[\frac{\sin\pi t}{e^{\pi u}-\cos\pi t}\right]+\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctg}\left[\frac{\sin\pi t}{e^{\pi u}+\cos\pi t}\right].$$

Данный результат уже не может сравниться по простоте с теоремой центра тяжести. Отметим, что первые члены в выражениях для p_1 и p_2 представляют эффект точки A, а вторые — эффект воображаемой точки B. Если величина u велика (она велика, если $u=1$, т. е. расстоянию между выработками D и D'), то создаются условия, близкие к тем, при которых справедлива теорема центра тяжести. Вторые члены выражений для p_1 и p_2 становятся ничтожно малыми, когда первые члены стремятся к своим предельным значениям $1-t$ и t. Что касается веса p_3, то он с возрастанием значения u очень быстро убывает и стремится к нулю. Таким образом, приходим к практически важному заключению: если расстояние, на котором точка A находится от OO', превышает расстояние между выработками D и D', выработки D и D' при крайгинге можно рассматривать как бесконечные, а выработку OO' не принимать во внимание.

§ 3. Сетки крайгинга по двум параллельным горным выработкам

Общая теорема суперпозиции позволяет решить задачу крайгинга для любого участка очень простым графическим методом. Например, такой блок, как трапеция $AA'B'B$ (фиг. 112), всегда может быть разделен, по крайней мере приближенно, на небольшие элементарные квадраты со стороной a. Операция крайгинга может быть проведена для каждого из этих элементарных квадратов отдельно. Тогда вместо плотностей взвешивания $f_1(x)$ и $f_2(x)$



Фиг. 112.

можно рассматривать веса $p_1(x)$ и $p_2(x)$, приписываемые отрезкам выработок D и D', равным стороне элементарного квадрата a. Эти веса рассчитываются по формулам

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f_1(x)\,dx \\ \text{и} \qquad & \\ p_2(x) &= \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f_2(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII,3,1)}$$

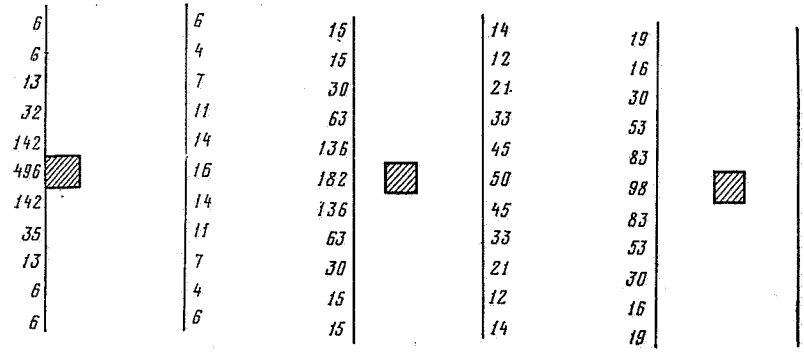
В таком случае простой графической суперпозицией элементарных квадратов и сложением соответствующих весов легко получить суммарный вес, который должен быть приписан каждому отрезку каждой из выработок при крайгинге блока заданной конфигурации. Чтобы не увеличивать чрезмерно числа элементарных квадратов, мы примем стандартный шаг сетки $a = 0{,}2$, т. е. равный одной пятой расстояния между выработками, обеспечивающий детальность, вполне достаточную для практических целей. Имеется всего пять различных положений элементарного квадрата, которым соответствуют ординаты центров тяжести квадратов, равные 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 и 0,9. Для расчета численных значений интегралов (XIII,3,1) используем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные выражениями (XIII,2,2). В первом приближении вместо весов, соответствующих элементарному квадрату, можно взять плотности взвешивания, соответствующие точечному крайгингу его центра тяжести. Так как плотности взвешивания $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются гармоническими функциями относительно координат x и t, ошибка, обусловленная такой заменой, имеет величину порядка 10^{-4} относительно $\frac{a}{2}$. В табл. 46 приведены веса $p(x)$ для отрезка $(x-0{,}1;\ x+0{,}1)$ горной выработки D в зависимости от координаты t центра тяжести элементарного квадрата. Значения округлены до тысячных.

Таблица 46

Крайгинг по двум параллельным выработкам

t	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
(0)	0,496	0,182	0,098	0,050	0,016
(0,2)	0,142	0,136	0,083	0,045	0,014
(0,4)	0,035	0,063	0,053	0,033	0,011
(0,6)	0,013	0,030	0,030	0,021	0,007
(0,8)	0,006	0,015	0,016	0,012	0,004
(1,0)	0,003	0,008	0,009	0,007	0,003
(1,2)	0,002	0,004	0,005	0,004	0,002
(1,4)	0,001	0,002	0,003	0,002	0,001
(1,6)	—	0,001	0,002	0,001	—

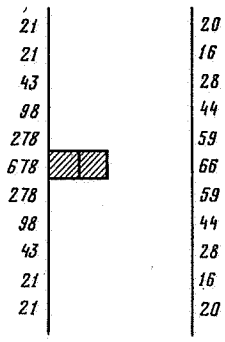
Таким образом с точностью до тысячных могут быть вычислены веса для отрезков выработки, удаленных от элементарного квадрата до 1,6. Так как обычно крайгинг проводится не для одиночного малого квадрата, а для фигур, сложенных из большого количества таких квадратов, то веса, приписываемые наиболее удаленным отрезкам, сильно уменьшаются. При этих условиях



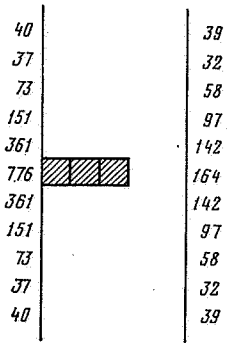
Фиг. 113. Сетка 2,1. Фиг. 114. Сетка 2,2. Фиг. 115. Сетка 2,3.

учет весов для крайгинга элементарного квадрата с точностью до 1% более чем достаточен. Поэтому при проведении крайгинга ограничиваются учетом данных по интервалам, удаленным от элементарного квадрата не далее чем на единицу. При этом последнему квадрату дополнительно приписывают сумму весов всех неучтенных участков, т. е. фактически вместо $p(1, 0)$ (табл. 46) берут $p(1, 0)+p(1, 2)+p(1, 4)+p(1, 6)$.

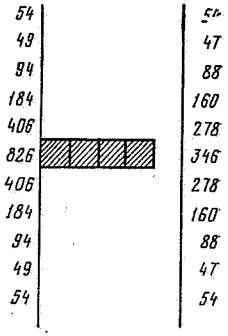
На практике будем использовать три основные исходные сетки (фиг. 113—115), которым присвоим условные номера 2-1, 2-2 и 2-3. Цифры на фигурах означают тысячные доли единиц. Простой графической суперпозицией этих клеток и суммированием весов можно получить коэффициенты взвешивания для крайгинга участка любой формы. Для упрощения процедуры крайгинга на фиг. 116—129 приведены наиболее употребительные сочетания элементарных квадратов и указаны соответствующие суммарные веса для различных отрезков горных выработок. Суммарные веса являются суммами весов для всех составляющих оцениваемую площадь элементарных квадратов. Для определения самих весов отрезков суммарные веса, указанные на фигурах, следует разделить на число элементарных квадратов (получатся веса, выраженные в тысячных долях единицы). Это деление произ-



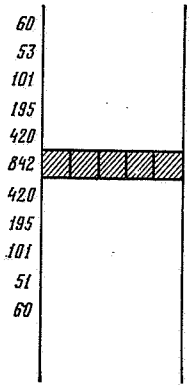
Фиг. 116. Сетка 2,4.



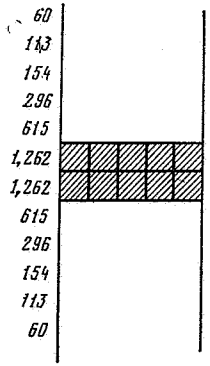
Фиг. 117. Сетка 2,5.



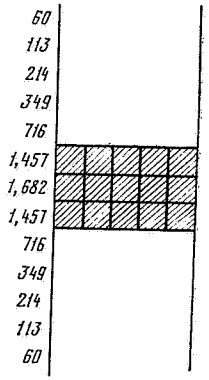
Фиг. 118. Сетка 2,6.



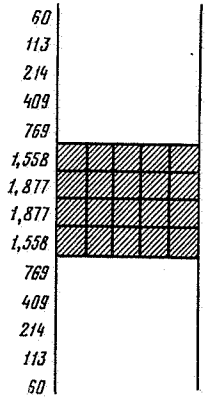
Фиг. 119. Сетка 2,7.



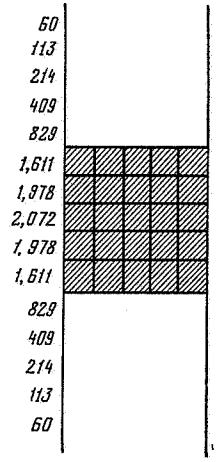
Фиг. 120. Сетка 2,8.



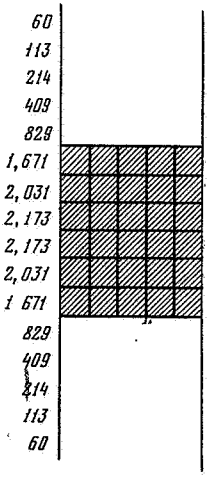
Фиг. 121. Сетка 2,9.



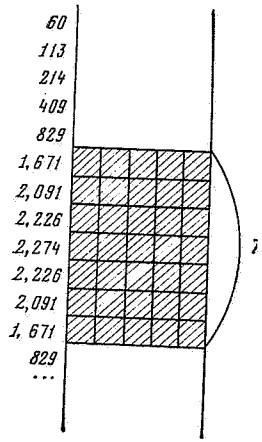
Фиг. 122. Сетка 2,10.



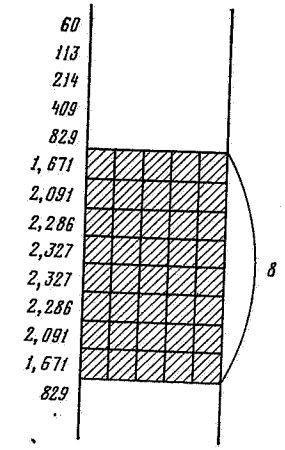
Фиг. 123. Сетка 2,11.



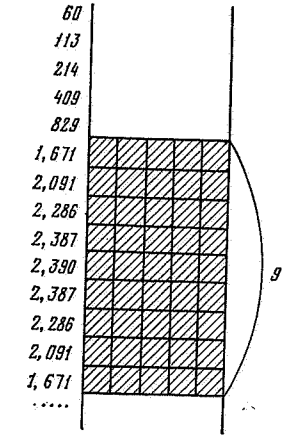
Фиг. 124. Сетка 2,12.



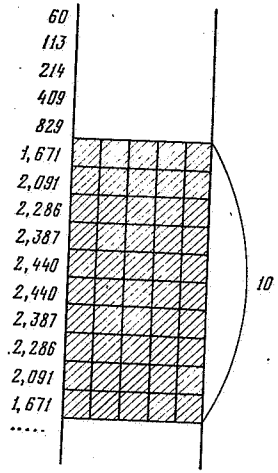
Фиг. 125. Сетка 2,13.



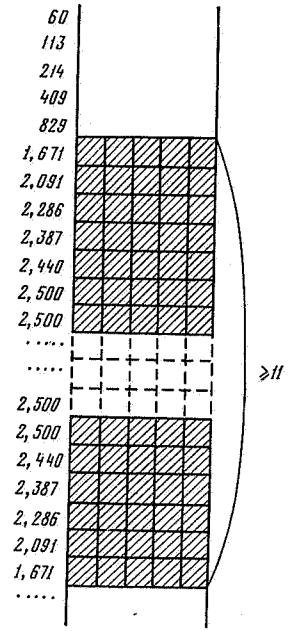
Фиг. 126. Сетка 2,14.



Фиг. 127. Сетка 2,15.

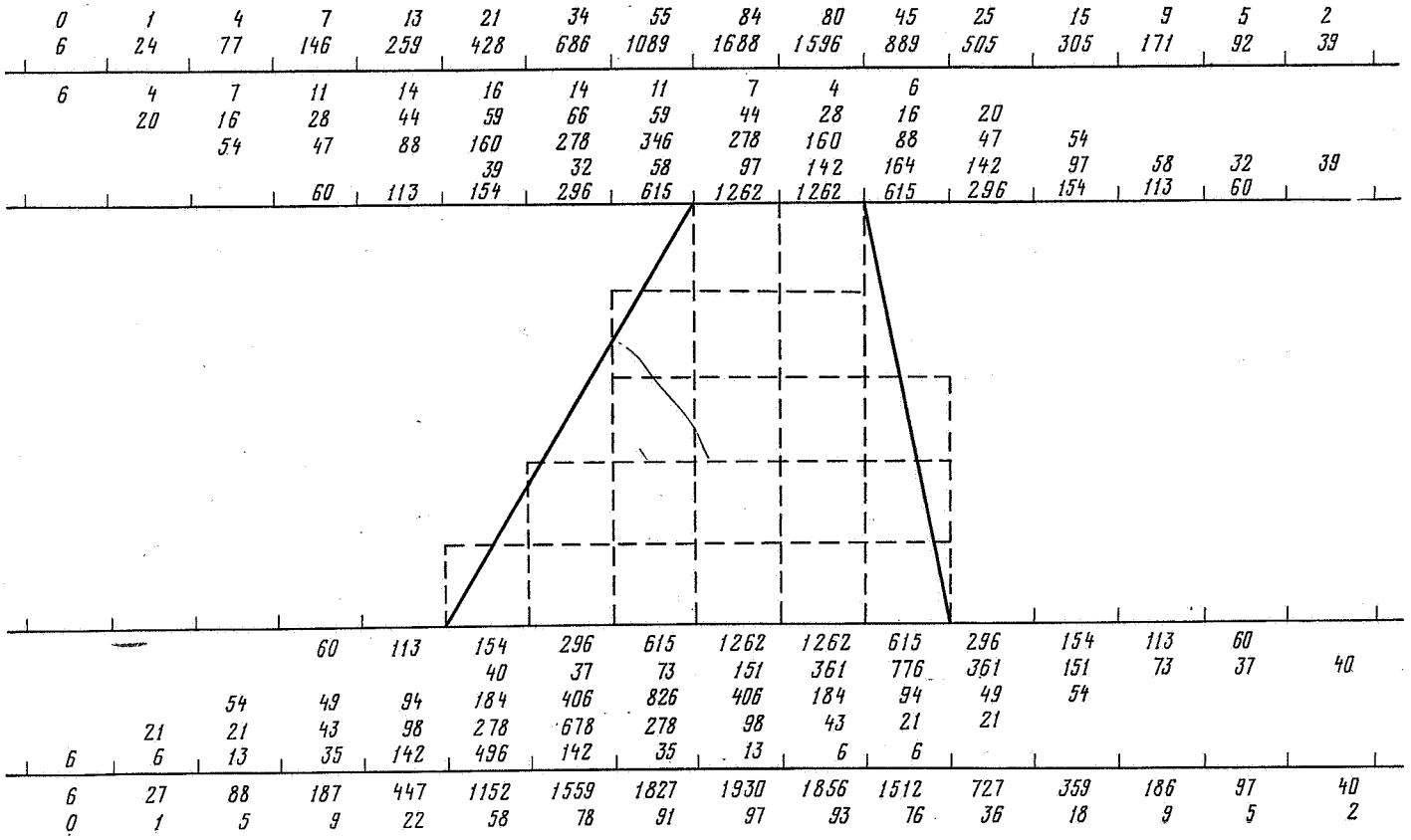


Фиг. 128. Сетка 2,16.

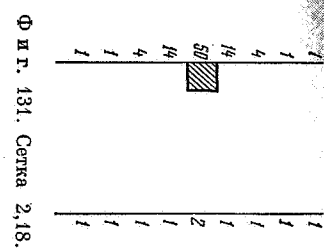


Фиг. 129. Сетка 2,17.

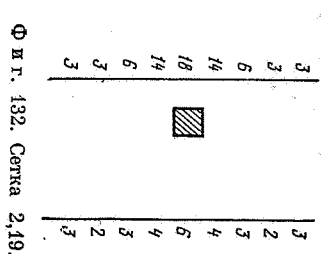
водить не нужно, если с помощью крайгинга оценивать не содержание в блоке, а запас в блоке, что иногда более предпочтительно. Тогда, взяв коэффициенты с сеток, разделив их на 1000 и умножив последовательно на площадь элементарного квадрата, выраженную в квадратных метрах, и на удельный запас, выраженный в килограммах или тоннах на квадратный метр, получим непосредственно вклад каждого отрезка выработки в суммарный запас металла по оцениваемому блоку. На фиг. 130 можно увидеть пример применения этих сеток при крайгинге трапеции с основаниями 1,2 и 0,4



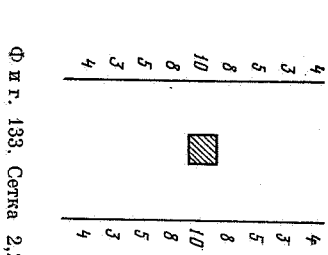
Фиг. 130. Пример сетки крайгинга для трапеции.



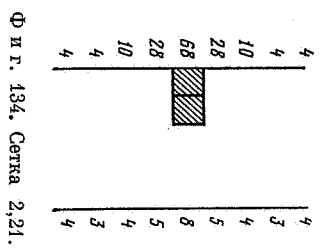
Фиг. 131. Сетка 2,18.



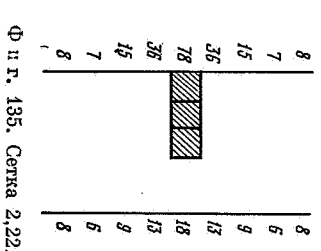
Фиг. 132. Сетка 2,19.



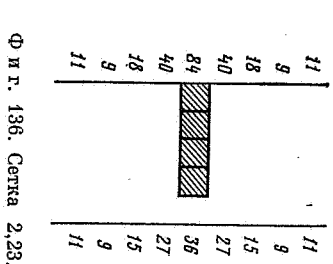
Фиг. 133. Сетка 2,20.



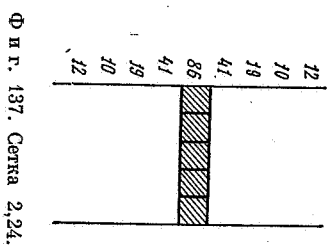
Фиг. 134. Сетка 2,21.



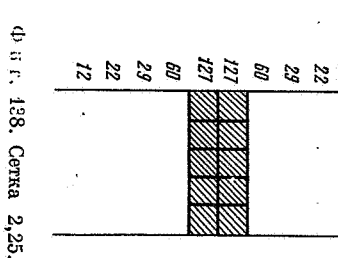
Фиг. 135. Сетка 2,22.



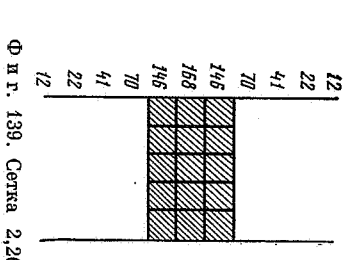
Фиг. 136. Сетка 2,23.



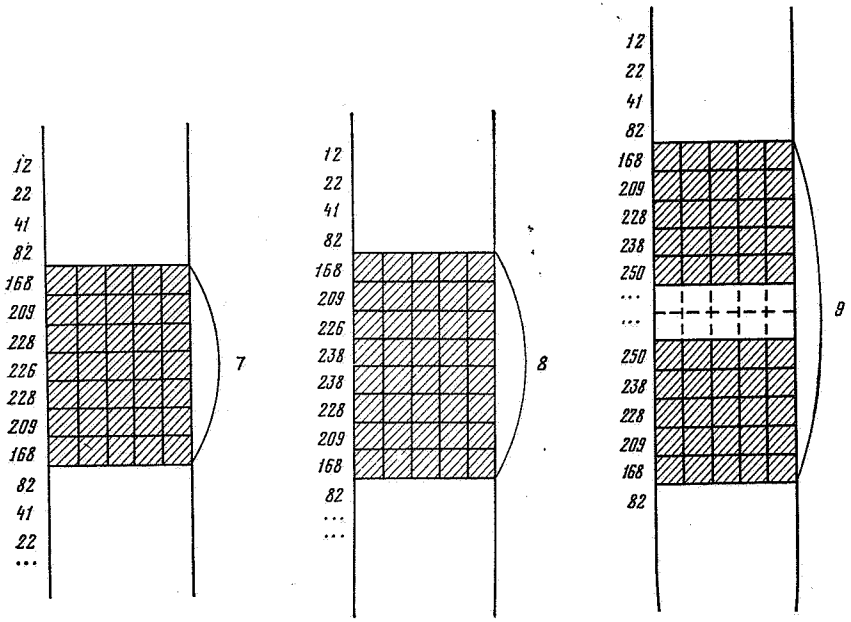
Фиг. 137. Сетка 2,24.



Фиг. 138. Сетка 2,25.

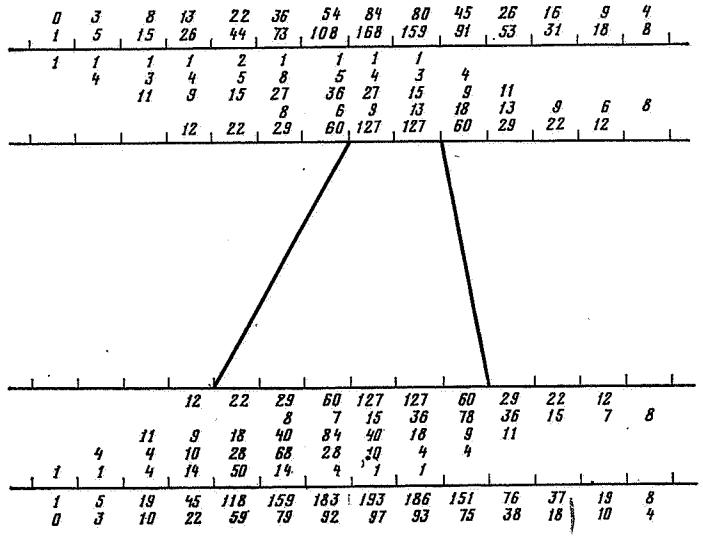


Фиг. 139. Сетка 2,26.



Ф и г. 143. Сетка 2,30. Ф и г. 144. Сетка 2,31. Ф и г. 145. Сетка 2,32.

Трапеция разделена на 20 элементарных квадратов. Выработки расчленены на отрезки длиной 0,2. Для каждого из этих отрезков определена сумма весов,



Ф и г. 146. Пример упрощенной сетки крайгинга для трапеции.

взятых с сеток 2-1, 2-4, 2-5, 2-6 и 2-8 (фиг. 113, 116—118 и 120). Для получения весов каждого отрезка суммы разделены на 20 и представлены в тысячных долях (с округлением до одной тысячной).

Когда оцениваемый участок достаточно большой, и, что особенно важно помнить, когда длина блока превышает расстояние между выработками, нет необходимости учитывать веса с большой точностью. Поэтому можно округлить веса до сотых и уменьшить на единицу число используемых при крайгинге отрезков горной выработки. Полученные таким образом упрощенные сетки с условными номерами от 2-18 до 2-32 (фиг. 131—145) вполне достаточны для большинства практических приложений, в чем можно убедиться, взглянув на фиг. 146, на которой показан крайгинг трапеции (фиг. 130), проведенный с помощью упрощенных сеток. Веса, полученные по упрощенным сеткам и выраженные в тысячных долях, практически эквивалентны полученным ранее по более точным сеткам, хотя оцениваемый участок разбит всего на 20 элементарных квадратов. Для более обширных участков имеется еще больше оснований для того, чтобы использовать упрощенные сетки.

Но не следует увлекаться простотой использования непрерывного крайгинга с помощью предлагаемых сеток. Он применим только для однородного изотропного поля, удовлетворяющего схеме де Вейса. Сетки непрерывного крайгинга нельзя использовать, в частности, если месторождение неоднородно, если оно характеризуется зональностью оруденения или эффектом самородков. Только на основании всестороннего геологического изучения каждого месторождения можно решить, оправдано их применение или нет.

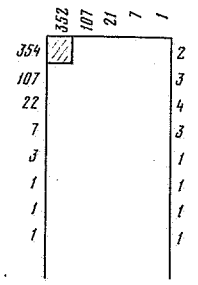
§ 4. Сетки крайгинга по трем и четырем горным выработкам

Случай трех выработок

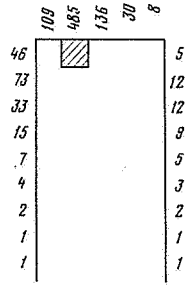
Используя формулы (XIII,2,5), можно построить аналогичные сетки крайгинга элементарного квадрата по двум параллельным выработкам и одной перпендикулярной к ним. Веса, приписываемые третьей выработке, получаются с помощью сеток, о которых говорилось в предыдущем параграфе, с учетом отрицательного отражения оцениваемого участка. Так как искомые веса определяются как разность эффектов действительного и мнимого участков, следует использовать не сетки крайгинга, данные на фигурах, а точные значения, приведенные в табл. 46. Поскольку при наличии трех выработок возможно очень большое число различных по размерам и положению участков, мы приведем только 18 сеток для отдельных элементарных квадратов и 6 для составных фигур (фиг. 147—170). Сеткам присвоены условные номера от 3-1 до 3-14. Веса указаны в тысячных долях. Для квадратов, центры которых удалены от поперечной выработки более чем на $1{,}3h$ (h — расстояние между параллельными выработками), влиянием третьей выработки можно пренебречь и пользоваться сетками согласно предыдущему параграфу. Вносимая при этом относительная ошибка весов не будет больше 2%.

Случай четырех выработок

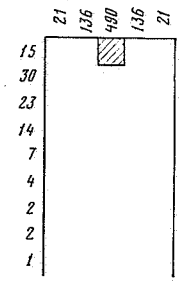
Рассмотрим крайгинг произвольного участка внутри блока, с четырех сторон ограниченного горными выработками. Возможный набор различных конфигураций участков слишком многочислен, чтобы можно было составить полный атлас сеток крайгинга. Но соответствующую сетку легко построить с помощью теории отображений для каждого конкретного случая. Для примера обратимся к крайгингу трапеции T, показанной на фиг. 171, по четырем выработкам AA', BB', AB и $A'B'$ (длина выработок AA' и BB' больше длины выработок AB и $A'B'$). Построим относительно коротких выработок воображаемые отображения S' и S_1 (отрицательные) и T' и T_1 (положитель-



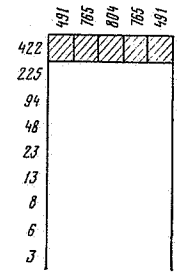
Фиг. 147. Сетка 3,1.



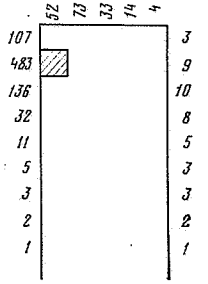
Фиг. 148. Сетка 3,2.



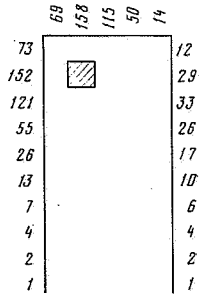
Фиг. 149. Сетка 3,3.



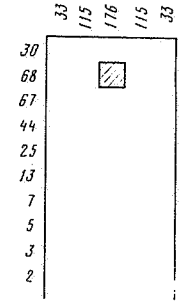
Фиг. 150. Сетка 3,4.



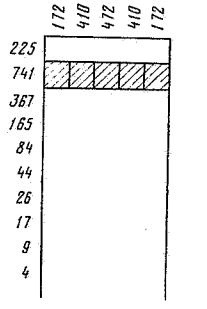
Фиг. 151. Сетка 3,5.



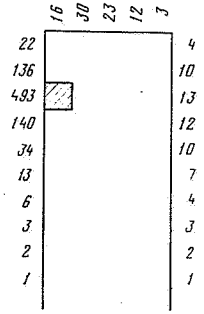
Фиг. 152. Сетка 3,6.



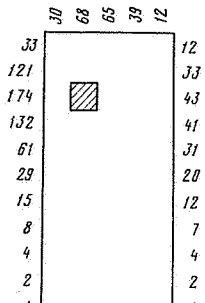
Фиг. 153. Сетка 3,7.



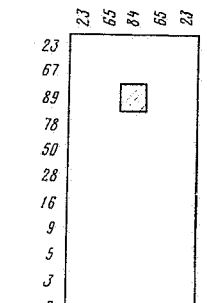
Фиг. 154. Сетка 3,8.



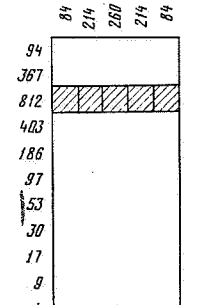
Фиг. 155. Сетка 3,9.



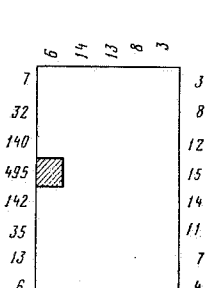
Фиг. 156. Сетка 3,10.



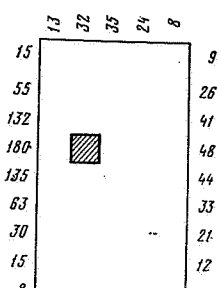
Фиг. 157. Сетка 3,11.



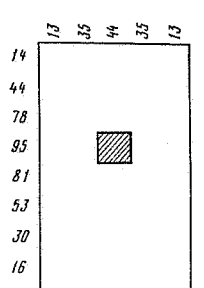
Фиг. 158. Сетка 3,12.



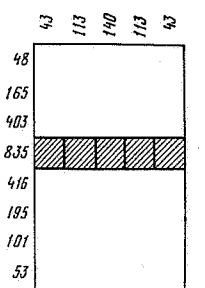
Фиг. 159. Сетка 3,13.



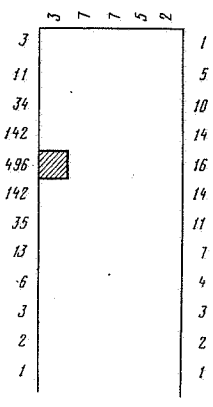
Фиг. 160. Сетка 3,14.



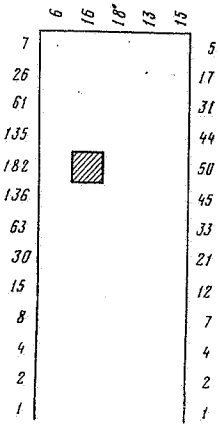
Фиг. 161. Сетка 3,15.



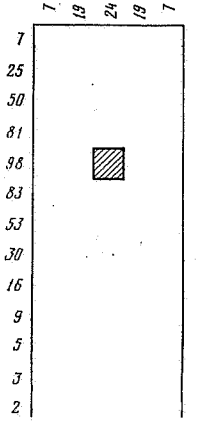
Фиг. 162. Сетка 3,16.



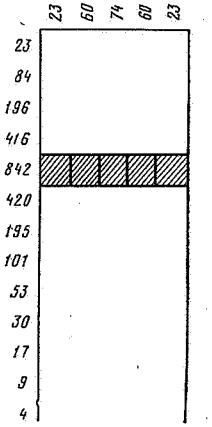
Фиг. 163. Сетка 3,17.



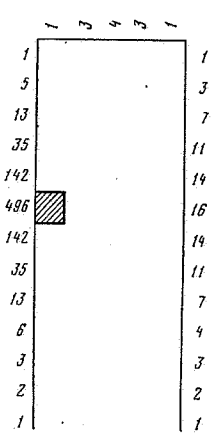
Фиг. 164. Сетка 3,18.



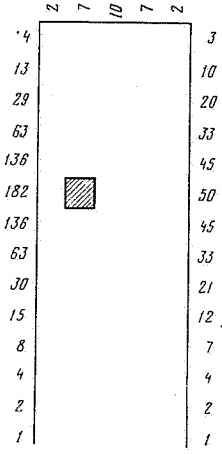
Фиг. 165. Сетка 3,19.



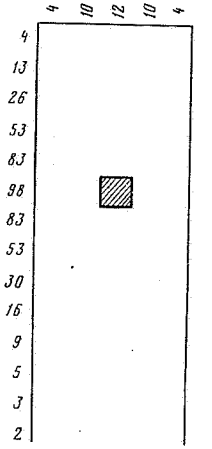
Фиг. 166. Сетка 3,20.



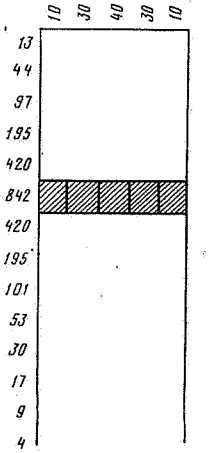
Фиг. 167. Сетка 3,21.



Фиг. 168. Сетка 3,22.

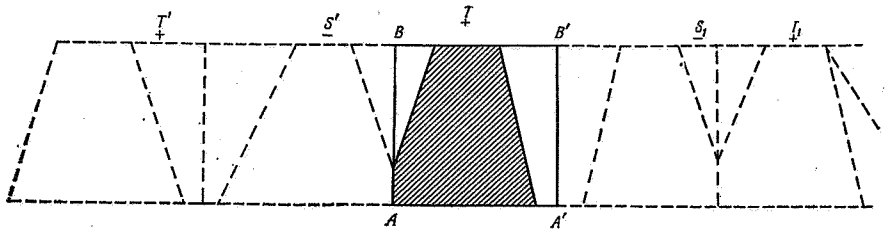


Фиг. 169. Сетка 3,23.



Фиг. 170. Сетка 3,24.

ные) оцениваемой трапеции. Чтобы получить коэффициенты взвешивания для различных участков выработки AB, можно воспользоваться сетками крайгинга для трех выработок (фиг. 147—170), как если бы выработки $A'B'$ не было (при этом влияния отрицательного отображения S_1 можно не учитывать, так как оно достаточно удалено от AB). Аналогично определяют веса для выработки $A'B'$. Чтобы получить веса для выработок AA' и BB', необходимо выполнить несколько операций. Вначале для данной трапеции находим веса по сеткам крайгинга для трех выработок (как если бы выработки $A'B'$ не было). После этого для тех же отрезков выработок AA' и BB' определяем веса, индуцируемые отображением S_1, пользуясь сетками для

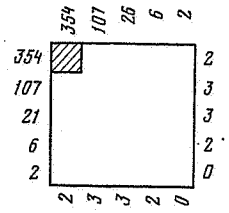


Фиг. 171.

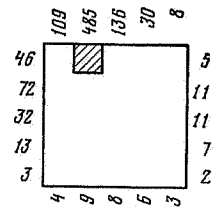
двух бесконечных выработок (фиг. 116—129). Наконец, искомые веса определяем как разность весов, связанных с трапецией T и ее отображением S_1. При необходимости можно увеличить точность расчетов, прибавив к полученным весам веса, связанные с отображением T_1 и определяемые по тем же сеткам, что и веса, полученные от S_1.

Практически, если длина одних выработок больше чем в два раза превышает длину других, влияние отображений становится несущественным. Тогда берут сначала левую половину блока и определяют коэффициенты взвешивания для выработок AB, AA' и BB', связанные с крайгингом этой половины. Затем аналогично (т. е. с помощью сеток для трех выработок) определяют те же коэффициенты для выработок $A'B'$, AA' и BB', связанные с крайгингом правой половины блока. Окончательные веса для выработок AA' и BB' получают путем суммирования весов, полученных от обеих половин блока. Таким образом, сетки, имеющиеся в нашем распоряжении, позволяют полностью решить проблему.

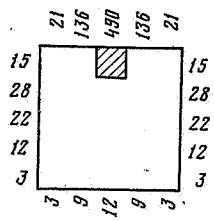
В качестве иллюстрации мы приводим сетки крайгинга для квадратного блока (фиг. 172—182) с условными номерами от 4-1 до 4-11. Сетка 4-10 (фиг. 181), в частности, дает суммарные веса для крайгинга квадратного блока в целом по его периферии, а на фиг. 182 показана та же сетка, но с весами, уменьшенными в 25 раз (таким образом, их сумма становится равной 1000). Обратите внимание на ярко выраженный эффект острия. Отрезки выработок, прилегающие к точкам их пересечений, весят вдвое меньше центральных (3,2% вместо 6,6%). Округляя, можно приписать вес $^1/_{16}$ каждому из 12 внутренних отрезков горных выработок и вес $^1/_{32}$ каждому из 8 отрезков, примыкающих к углам.



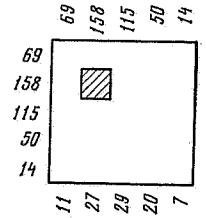
Фиг. 172. Сетка 4,1.



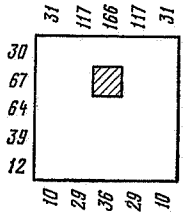
Фиг. 173. Сетка 4,2.



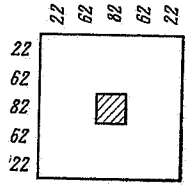
Фиг. 174. Сетка 4.3.



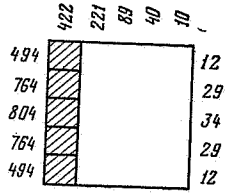
Фиг. 175. Сетка 4,4.



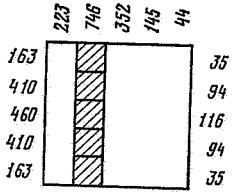
Фиг. 176. Сетка 4,5.



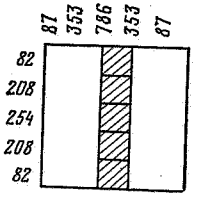
Фиг. 177. Сетка 4,6.



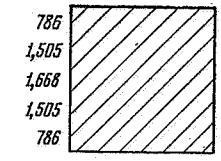
Фиг. 178. Сетка 4,7.



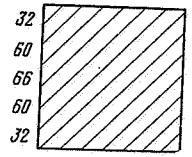
Фиг. 179. Сетка 4,8.



Фиг. 180. Сетка 4,9.



Фиг. 181. Сетка 4,10.



Фиг. 182. Сетка 4,11.

ГЛАВА XIV

Эффект самородков и явления перехода

Краткое содержание

В § 1 определяется понятие эффекта самородков, рассматривается влияние этого эффекта на характер собственной функции (и экспериментальной вариограммы), выбирается математическая форма выражения вариограммы, отражающей эффект самородков, и оценивается влияние этого эффекта на дисперсию макроскопических проб.

В § 2 рассматривается как влияние эффекта самородков на дисперсию распространения, так и применимость процедуры крайгинга при наличии этого эффекта, затем вводится понятие случайного крайгинга.

В § 3 вводится понятие эффекта самородков в широком смысле, связанное с явлениями перехода, и определяется транзитивный тип вариограммы, представляющий собственную функцию явления перехода.

В § 4 рассматривается собственная функция транзитивной схемы в одномерном пространстве, выводятся вспомогательные соотношения, позволяющие производить оценку теоретических параметров по дисперсии и экспериментальным значениям вариограммы, определенной по содержаниям в бороздовых пробах, отобранных вдоль горной выработки.

В § 5 рассматривается транзитивная схема в двумерном пространстве. Основные результаты представлены в виде номограмм, с помощью которых могут быть рассчитаны дисперсии распространения для различных вариантов опробования.

§ 1. Эффект самородков и общие его характеристики

Результаты, полученные в предыдущих главах, и, в частности, все варианты крайгинга, практическая ценность которых очевидна, найдены при некоторых предположениях относительно поведения собственной функции $\gamma(h)$. В схеме де Вейса, которой мы всюду пользовались, пространственной переменной приписывается вариограмма, непрерывная в начале координат при конечном размере проб. Это значит, что различие между содержаниями в пробах конечного размера при уменьшении интервала между точками отбора проб «в среднем» может стать сколь угодно малым. Для проб весом в несколько килограммов такая непрерывность «в среднем» встречается, по крайней мере в первом приближении, на довольно разнообразных рудных месторождениях. Но есть и исключения. К числу наиболее известных из них относятся месторождения самородного золота. В месторождениях этого типа содержания двух очень близких, даже соприкасающихся, проб могут различаться весьма значительно, если в одну из них «случайно» попадает крупный самородок. Эффект самородков проявляется тем ярче, чем меньше размер проб, и его влияние может стать преобладающим, когда объем проб составляет всего несколько литров. В таких случаях постулируемой нами ранее непрерывности в среднем не будет: достаточно смещения геометрической базы всего на несколько миллиметров, чтобы в одну и ту же пробу мог попасть или не попасть крупный самородок, способный изменить содержание полезного компонента в десятки и сотни раз. Попадание или непопадание самородка в данную пробу — событие случайное. Правда, мы убедимся, что содержание можно рассматривать как случайную величину только в локальной области, т. е. только вблизи точки отбора пробы. На бо́льших расстояниях содержание, как обычно, имеет характер пространственной переменной. Если бы это было не так, блоки в несколько сотен тонн (для

которых включение самородков, расположенных у их границы, не имеет решающего значения) должны были бы иметь практически одинаковые содержания. Однако хорошо известно, что даже на месторождениях золота имеются бедные и богатые блоки. Но в локальной области этот случайный эффект настолько резко выражен, что он полностью затушевывает все закономерности, присущие пространственной изменчивости. В литературе, посвященной таким месторождениям, очень часто встречаются такие термины, как «промах» или «ураганная проба», которые выражают предположение о некоторой аномалии в характере оруденения. Разумеется, первые статистики, занявшиеся этой проблемой, установили, что никакой аномалии в этих случаях нет и что проба с исключительно высоким содержанием — вполне реальное событие, частота которого может быть определена по законам теории вероятностей. В историческом аспекте, несомненно, именно наличие эффекта самородков долго препятствовало четкому установлению разницы между пространственными и случайными переменными и приводило к смешению этих понятий. Однако с точки зрения геостатистика, представление об «ураганной» пробе как о некоторой аномалии не совсем лишено смысла. Дело лишь в том, что эта аномалия заключается не в появлении проб с очень высоким содержанием, а в случайном распределении всех содержаний (как больших, так и малых) в локальной области, характеризующейся нарушением пространственных корреляционных связей. Особенность аномалии, выражаемой термином «ураганная проба», заключается в том, что последняя не имеет зоны влияния.

Противопоставляя месторождения с эффектом самородков месторождениям без него, некоторые теоретики (например, Штамбергер [85]) различают два типа месторождений: месторождения со случайной изменчивостью, в которых содержания двух сколь угодно близких проб статистически не зависимы, и месторождения с регулярной изменчивостью, т. е. с непрерывным изменением содержаний в пространстве. Такое представление слишком идеализирует условия. С одной стороны, пространственные переменные, за исключением, пожалуй, чисто геометрических переменных (таких, например, как мощность), характеризуются лишь непрерывностью «в среднем», а с другой — как бы ярко не был выражен эффект самородков, он лишь вуалирует закономерности пространственной изменчивости, которые становятся явными при выходе за пределы локальной области, где эффект самородков является преобладающим.

Аппарат собственных функций и вариограмм позволяет в удобной форме представить всю гамму изменчивости от чисто случайной до функционально определенной.

Следует прежде всего уточнить одно обстоятельство. Собственные функции $\gamma(r)$ в принципе определены с точностью до постоянной, которую всегда можно найти из условия

$$\gamma(0) = 0.$$

Собственная функция, определенная таким образом, совпадает с полувариограммой и как таковая может быть получена по экспериментальным данным. Что касается схемы де Вейса с собственной функцией $\ln r$, то бесконечное значение $\gamma(0)$ не должно вводить в заблуждение — оно не имеет физического смысла. Для расстояний r порядка размеров рудного зерна реальное поведение полувариограммы $\gamma(r)$ не логарифмическое; кроме того, существует конечный предел $\gamma(r)$ при r, стремящемся к нулю. Можно представить, например, что собственная функция имеет вид $\frac{1}{2}\ln(a^2+r^2)$, где a — постоянная величина порядка размеров рудных частиц. Как бы там ни было, эффект самородков нельзя учесть в рамках собственной схемы де Вейса.

Получаемые по экспериментальным данным вариограммы могут быть разбиты на четыре типа, представленные графически на фиг. 8—11. Вариограмма первого типа (фиг. 8) возрастает параболически в окрестности начала координат. Она характеризует весьма регулярные пространственные переменные, например мощность или прокол рудного тела, которые имеют производные по координатам пространства, или содержание, определяемое по большому сечению штока, точечное содержание в котором описывается собственной схемой де Вейса. В последнем случае вариограмма имеет вид $h^2 \ln h$, и содержание, непрерывно изменяющееся в пространстве, не дифференцируемо в пространстве. Для вариограммы второго, или линейного, типа (фиг. 9) характерна наклонная касательная в начале координат, выражающая пространственные переменные, непрерывные «в среднем». Мы встречались с вариограммами такого типа при изучении собственной схемы де Вейса в одно- и двумерном случае. Вариограмма третьего типа (фиг. 10) характеризуется вертикальной касательной в начале координат, или, что с практической точки зрения эквивалентно, разрывом в нуле [вариограмма $\gamma(r)$ имеет конечный положительный предел при стремлении r к нулю, и в то же время всегда $\gamma(0) = 0$]. В этом случае нет даже непрерывности «в среднем», и мы, согласно определению, говорим о наличии эффекта самородков. В пределе получается горизонтальная вариограмма, относящаяся с разрывом в нуле, к четвертому типу (фиг. 11). Такая ступенчатая собственная функция $\gamma(r)$ характеризует случайные (в прямом смысле этого слова) переменные, которые, таким образом, представляют собой предельный случай пространственной переменной с эффектом самородков.

Разрыв, или скачок, полувариограммы точечной переменной, наблюдаемый в начале координат, называется *константой самородков* C. Величина этой константы выражает интенсивность эффекта самородков. Если обозначить символом $E(r)$ единичную ступень, т. е. функцию, определенную равенством

$$E(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r = 0, \end{cases}$$

то полувариограмма может быть представлена в виде суммы двух составляющих —

$$\gamma(r) = CE(r) + \gamma_1(r), \qquad \text{(XIV,1,1)}$$

где $CE(r)$ — эффект самородков в чистом виде, а $\gamma_1(r)$ — непрерывная в нуле функция, характеризующая пространственную изменчивость. Таким образом, при расчете всех необходимых дисперсий и ковариаций точечная пространственная переменная X может рассматриваться как сумма некоторой теоретической пространственной переменной X_0, свободной от эффекта самородков и обладающей собственной функцией первого или второго типа, и чисто случайной переменной ε с нулевым средним и дисперсией C, т. е.

$$X = X_0 + \varepsilon, \qquad \text{(XIV,1,2)}$$

где переменные X_0 и ε статистически независимы одна от другой. Если ограничиться изучением изменения точечного содержания X в области, непосредственно прилегающей к данной точке, т. е. если рассматривать только малые значения расстояний r, то изменение функции $\gamma_1(r)$ в этой области также будет весьма малым, и собственную функцию $\gamma(r)$ можно считать постоянной и равной константе эффекта самородков C. Локальное измерение содержания практически полностью происходит за счет случайной компоненты ε. Поэтому мы говорим, что пространственная переменная ведет себя в локальной области как случайная величина. Но в бо́льших масштабах, т. е. при больших значениях расстояний r, возрастание непрерывной

компоненты собственной функции становится существенным и проявление пространственной изменчивости переменной X_0 становится ощутимым.

Практически единичная ступень $E(r)$ не совсем удовлетворительно представляет случайный аспект локальной изменчивости точечного содержания: член $CE(r)$ теряет всякое влияние на дисперсию пробы ненулевого размера. Он автоматически исключается при интегрировании по неточечной базе, что легко увидеть из общей формулы

$$\sigma^2 = \frac{1}{V^2}\int_V dV_1 \int_V \gamma(r)\, dV_2 - \frac{1}{v^2}\int_v dv_1 \int_v \gamma(r)\, dv_2.$$

Можно также утверждать, что дисперсия среднего значения независимых случайных величин ε в пределах неточечной геометрической базы обязательно равна нулю (так как такая база содержит бесконечное число точек со значениями ε). Таким образом, понятие чисто случайной величины на точечной геометрической базе лишено физического смысла. Реальному физическому явлению не может соответствовать вариограмма с разрывом в точке начала координат. Вместо действительного разрыва в окрестностях точки $r = 0$ существует зона быстрого перехода, т. е. резкого изменения вариограммы. Поэтому введем функцию $C(r)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{ll} C(0) = C, & \\ |C(r)| \leqslant C & \text{при } r \leqslant a, \\ C(r) = 0 & \text{при } r > a, \end{array}\right\} \qquad \text{(XIV,1,3)}$$

где a — постоянная, называемая *носителем эффекта самородков*, указывает порядок величины зоны перехода, т. е. порядок размеров самородков. Представим теперь собственную функцию точечного содержания выражением

$$\gamma(r) = C - C(r) + \gamma_1(r), \qquad \text{(XIV,1,4)}$$

где C — константа самородков, $\gamma_1(r)$ — собственная функция, непрерывная в нуле. Точечное содержание X в этом случае представляется как сумма

$$X = X_0 + \varepsilon \qquad \text{(XIV,1,5)}$$

двух независимых пространственных переменных X_0 и ε, имеющих в качестве полувариограмм функции $\gamma_1(r)$ и $C - C(r)$ соответственно. Но на этот раз значения ε независимы одно от другого только на расстояниях, превышающих носитель a. На расстояниях, меньших a, их изменчивость характеризуется линейной вариограммой. Следовательно, эффект самородков будет отражаться и на пробах ненулевого объема. Если этот объем больше объема a^3 рудных зерен, то зона перехода оказывается включенной в объем v, в пределах которого интегрируется вариограмма, и эффект самородков порождает дополнительную дисперсию, зависящую от a^3/v, т. е. обратно пропорциональную числу зерен, составляющих пробу v. Действительно, если v и V — объемы пробы и залежи, то дисперсия σ_c^2, связанная с эффектом самородков, т. е. дисперсия средних значений ε в пробах v в пределах залежи V, запишется в виде

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{v^2}\int_v dv_1 \int_v C(r)\, dv_2 - \frac{1}{V^2}\int_V dV_1 \int_V C(r)\, dV_2. \qquad \text{(XIV,1,6)}$$

Если все размеры пробы v велики по сравнению с a, то каждая точка, лежащая внутри v, дает следующий вклад в шестикратный интеграл:

$$P = \int C(r)\, dv = 4\pi \int_0^a C(r)\, r^2\, dr.$$

Это строго выполняется только для точек, расположенных дальше чем на расстоянии a от границ v. Но легко видеть, что если отношение a^3/v мало, то близкие к границам точки вносят незначительный вклад. Тогда приближенно имеем

$$\frac{1}{v^2}\int_v dv_1 \int_v C(r)\,dv_2 = \frac{vP}{v^2} = \frac{P}{v}$$

и аналогичное выражение для интеграла по объему V залежи. Из формулы (XIV, 1,6) следует, что дисперсия σ_c^2 имеет вид

$$\sigma_c^2 = P\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V}\right). \qquad \text{(XIV,1,7)}$$

Практически a^3/V обычно ничтожно мало, и дисперсия σ_c^2 зависит в основном от a^3/v, т. е. она обратно пропорциональна числу зерен, составляющих пробу. Это общее обстоятельство весьма характерно. Всегда, когда имеется эффект самородков, т. е. всегда, когда пространственная переменная в локальной области ведет себя случайно, содержания макроскопических проб обладают дополнительной дисперсией, называемой *дисперсией самородков, обратно пропорциональной размерам этих проб*. Дисперсия таких проб может быть записана в виде суммы

$$\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_\theta^2, \qquad \text{(XIV,1,8)}$$

где σ_c^2 — дисперсия самородков, а σ_θ^2 — теоретическая дисперсия, рассчитываемая с помощью непрерывной составляющей $\gamma_1(r)$ собственной функции и интерпретируемая как дисперсия пространственной переменной X_θ из уравнения (XIV, 1,5). Часто будем предполагать, что переменная X_θ может быть описана собственной схемой де Вейса, и поэтому теоретическую дисперсию допустимо рассчитывать общими методами, изложенными в этой работе.

Наоборот, две макроскопические пробы, сколь угодно близко расположенные, если только они не соприкасаются, не имеют никакой дополнительной ковариации, так как на расстояниях, превышающих носитель эффекта самородков, значения ε независимы. Следовательно, экспериментальная полувариограмма, полученная по макроскопическим пробам, будет иметь в начале координат скачок, равный дисперсии самородков σ_c^2, вычисленной выше. Это позволяет на практике выявить и оценить эффект самородков.

Каждый раз, когда это возможно, лучше оценить дисперсию самородков по экспериментальной вариограмме. При наличии эффекта самородков вариограмма смещается вверх на величину $2\sigma_c^2$ относительно теоретической вариограммы, свободной от этого эффекта. В принципе нужно определить ординату экспериментальной вариограммы для ε в начале координат. Однако в схеме де Вейса, когда первая экспериментальная точка вариограммы находится уже в зоне ее логарифмического возрастания, смещение экспериментальной вариограммы вверх за счет эффекта самородков может интерпретироваться так же, как влияние геометрической анизотропии. В этом случае возникает неопределенность. Но если вариограмма построена в арифметическом масштабе по оси расстояний и начальная точка оказывается в зоне линейного возрастания вариограммы, то определение дисперсии самородков не представляет трудности. Заметим, что различные дисперсии анализа, квартования и т. п. будут накладываться на истинную дисперсию самородков и их нельзя исключить без проведения специальных исследований. Впрочем, природа дисперсии самородков во многом аналогична природе дисперсии квартования. Обе они обратно пропорциональны объему пробы и увеличивают дисперсию оценки на величину, обратно пропорциональную числу n анализированных проб.

§ 2. Дисперсия распространения и крайгинг при наличии эффекта самородков

На основе полученных результатов и, в первую очередь, на основе независимости значений ε, относящихся к двум пусть даже очень близким, но различным объемам, легко внести необходимые коррективы в теорию оценки месторождений. В дальнейшем мы будем предполагать, что непрерывная составляющая $\gamma_1(r)$ собственной функции удовлетворяет схеме де Вейса. При этом возможны два крайних случая:

1. Дисперсия случайных членов ε незначительна, так как либо мала постоянная самородков, либо слишком велики объемы всех отобранных проб. При этом эффектом самородков можно пренебречь, и теория оценки останется той же, что и для рассмотренных выше пространственных переменных.

2. Дисперсии случайных членов ε велики по сравнению с дисперсиями непрерывной составляющей X_θ. Тогда все происходит так, как если бы опробование производилось по случайной сети, а содержания в пробах были бы независимы одно от другого. В этом случае дисперсии оценки имеют вид $\frac{1}{n}\sigma_c^2$, т. е. они обратно пропорциональны суммарному объему отобранных проб. Такая картина характерна для алмазных месторождений, но и то лишь в известной степени, так как начиная с того момента, когда размеры проб становятся достаточно большими, эффект самородков ослабляется и проявляется пространственная коррелированность содержаний. Отбор 100 проб объемом по кубическому метру каждая по сети 10×10 м² на площади 10 000 м² практически эквивалентен отбору 10 000 проб объемом по литру каждая по сети 1×1 м². Но всегда лучше отобрать 100 проб по одному кубическому метру каждая, чем одну пробу объемом 100 м³.

Что касается проблемы крайгинга, то эффект самородков (в тех случаях, когда дисперсия самородков преобладает) прорывает все экраны, и наилучшей оценкой содержания в любом блоке будет среднее арифметическое из содержаний всех проб независимо от места их взятия. Понятие непрерывного крайгинга теряет смысл, и в предельном случае какая-либо локальная оценка становится вообще невозможной. В промежуточных случаях (при наличии эффекта экрана, но когда он не является преобладающим) эффект экрана ослабевает, и обычные схемы крайгинга, в которых учитывают один или два ореола ближайших скважин, в значительной мере теряют свою эффективность. Так как учет бо́льшего числа ореолов практически невозможен из-за возникающих при этом вычислительных трудностей, то просто объединяют все внешние ореолы в один, приписывая ему содержание m, равное общему среднему содержанию в месторождении. Учет эффекта самородков приводит нас к «случайному» крайгингу, который первоначально был предложен самим Крайгом для золоторудных месторождений Витватерсранда, где эффект самородков ярко выражен.

Конечно, всегда можно получить теоретическое решение, введя в выражение для дисперсии крайгинга члены C/v и взяв сколь угодно большое число ореолов. Однако это решение, формально более строгое, но сопряженное с весьма трудоемкими вычислениями, на практике часто дает лишь кажущееся увеличение точности. В присутствии значительного эффекта самородков член C/v может оказаться более весомым, чем $\sigma_{E\theta}^2$ — остальная часть суммарной дисперсии распространения. Характер пространственной изменчивости в значительной степени затушевывается эффектом самородков, поэтому можно получить удовлетворительное приближение, рассматривая имеющуюся систематическую сеть опробования как случайную слоеную. Это упрощает решение проблемы оценки, так как пробы, отобранные

в пределах одного блока, считаются независимыми, а корреляция между пробами, отобранными в разных блоках, полностью определяется корреляцией между средними содержаниями по этим блокам. Такой подход оправдывается уже отмеченным выше случайным распределением содержания в локальной области. В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример.

Случайный крайгинг блока небольших размеров

Пусть требуется оценить истинное содержание Z в блоке P по небольшому числу проб, отобранных в пределах этого блока, среднее содержание в которых равно X, и по единственному ореолу, образованному всеми остальными пробами со средним содержанием Y, отобранными по всему рудному телу. Так как число внешних по отношению к блоку P проб очень велико по сравнению с числом проб, отобранных внутри блока, то с допустимой степенью точности можно считать, что величина Y представляет собой истинное содержание во всем рудном теле без блока P. Будем считать, что оцениваемый блок в рудном теле занимает случайное положение. Это допущение, приемлемое с определенной степенью точности, значительно упрощает расчет ковариаций и, кроме того, позволяет ограничиться выводом единой формулы для всех блоков данного размера, независимо от их положения в рудном теле.

С другой стороны, общее среднее содержание m в месторождении известно с большей точностью, чем содержание Z в блоке P, и его можно отождествить с содержанием всех внешних проб. Таким образом, положим $Y = m$ и примем в качестве оценки для Z выражение

$$Z^* = \lambda X + (1-\lambda)\, m.$$

Вычислим дисперсию оценки $D\,(Z^* - Z)$. Так как

$$Z^* - Z = \lambda\,(X-m) - (Z-m),$$

получим, что

$$D\,(Z^*-Z) = \sigma_Z^2 + \lambda^2\sigma_X^2 - 2\lambda\sigma_{ZX},$$

где σ_Z^2 и σ_X^2 — дисперсии содержаний Z и X, а σ_{ZX} — их ковариация в пределах рудного тела.

Так как пробы в пределах блока P размещены случайно, а блок P сам случайно размещен в рудном теле, то ковариация σ_{ZX} равна дисперсии σ_Z^2 и, следовательно,

$$D\,(Z^*-Z) = \sigma_Z^2 + \lambda^2\sigma_X^2 - 2\lambda\sigma_Z^2.$$

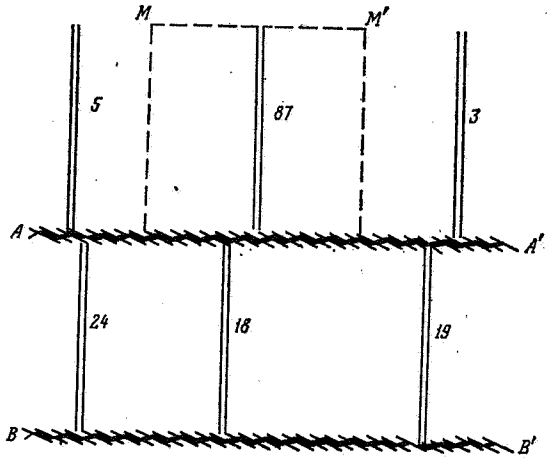
Оптимальное значение λ и соответствующая минимальная величина дисперсии крайгинга σ_k^2 равны

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sigma_Z^2/\sigma_X^2, \\ \sigma_k^2 &= (1-\lambda)\,\sigma_Z^2 = (\sigma_X^2 - \sigma_Z^2)\,\frac{\sigma_Z^2}{\sigma_X^2} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(XIV,2,1)}$$

Таким образом, можно видеть, что дисперсия крайгинга с использованием общего среднего содержания m примерно пропорциональна отношению σ_Z^2/σ_X^2, которое тем меньше, чем резче выражен эффект самородков.

В качестве иллюстрации укажем на порочную практику, применявшуюся при разведке одного из месторождений золота, отработка которого в дальнейшем привела к серьезным разочарованиям. Это была жила, разведанная горными выработками, опробованными бороздовыми пробами между зальбандами AA' и BB' и в самих зальбандах, минерализованных на несколько десятков сантиметров (фиг. 183). Иногда на участке со средними содержаниями в пределах самой жилы и малыми содержаниями в зальбандах

встречались изолированные пробы с высоким содержанием в зальбандах (87 *г/т*, фиг. 183). Ошибка заключалась в распространении высокого содержания, полученного по отдельной пробе, на всю зону ее влияния (зону MM' фиг. 183). Даже при отсутствии эффекта самородков таких приемов следует избегать. Во избежание систематической ошибки среднее содержание в зоне MM' должно определяться посредством крайгинга с учетом содержаний в соседних пробах (3 и 5 *г/т*, фиг. 183). На данном конкретном месторождении возникшая таким образом систематическая ошибка была особенно большой, так как для жильных месторождений золота характерна высокая



Фиг. 183.

константа самородков и, кроме того, размер бороздовых проб был весьма невелик. «Ураганное» содержание 87 *г/т* — это результат локальной случайной флуктуации, связанной с проявлением эффекта самородков, и ему не следует придавать большого значения при оценке содержания в зоне его влияния. Крайгинг с учетом среднего содержания 10—15 ближайших бороздовых проб дал бы в этом случае более реальное значение содержания в зоне влияния «ураганной» пробы.

§ 3. Эффект самородков в широком смысле, или явления перехода

В предыдущем параграфе мы детально изучили эффект самородков, связанный с гранулометрией, т. е. эффект самородков в прямом смысле, для которого характерны малые размеры носителя a зоны перехода. Но весьма сходный эффект, связанный с наличием более или менее случайных разрывов сплошности геометрического поля пространственной переменной, может проявляться в самых различных масштабах. Поэтому стоит говорить об эффекте самородков в широком смысле, или о явлениях перехода, среди которых выделим следующие разновидности: эффект штокверка, обусловленный наличием переплетающейся сети мелких рудных прожилков, пронизывающей опробуемые породы (сюда можно относить и вкрапленные руды); эффект наслоения, связанный с чередованием оруденелых пластов по вертикали; эффект линз, или явление перекрытия пластов, которое довольно часто встречается на крупных осадочных месторождениях и отражает существование на площади отложения осадков более или менее обособленных микро-

бассейнов. Все эти явления могут сопровождаться различного рода анизотропией. Эффект штокверка, например, может обладать зональной анизотропией, заключающейся в преобладании одного или нескольких направлений в системе прожилков. Явление перекрытия пластов может быть связано с геометрической анизотропией, указывающей на наличие главного направления простирания микробассейнов, направления потоков и т. п.

Гранулометрический эффект самородков

Эффект самородков был предметом многочисленных как теоретических, так и экспериментальных исследований, среди которых отметим, в частности, работы П. Жи по опробованию отбитых масс руды и работы П. Лаффита [49] по ошибкам опробования и анализа при изучении руд в естественном залегании [1]. Во всех этих исследованиях, проведенных на основе классических методов изучения случайных величин, эффект самородков рассматривается практически в чистом виде без учета коррелированной пространственной изменчивости. И действительно, все исследования приводят к выводу о том, что дисперсии опробования обратно пропорциональны объему пробы, или числу частиц, попавших в пробу. Впрочем, в отбитой руде эффект самородков проявляется почти в чистом виде, так как вследствие перемешивания руды в процессе ее отбойки и транспортировки она становится однородной или по крайней мере в ней разрушаются в значительной степени корреляционные связи между содержаниями, существовавшие в руде in situ. Что касается опробования руды в массиве, то формулы классической статистики случайных величин, приведенные, например, Лаффитом [49], могут учесть лишь локально проявляемую случайную изменчивость пространственных переменных. Они никак не отражают закона абсолютного рассеивания элементов в горных породах. Несмотря на то что эти формулы не отражают пространственного характера изменчивости, они тем не менее имеют высокую практическую ценность, так как позволяют указать a priori постоянную самородков C и размер носителя a эффекта самородков или дисперсию самородков σ_c^2 для проб конечного размера. Они, кроме того, позволяют учесть различные параметры, характеризующие гранулометрический состав пробы, ее минералогический состав и т. д. Не останавливаясь на этих параметрах, так как связанные с ними вопросы детально изучены в упомянутых выше работах, ограничимся тем, что на возможно более простом примере покажем, как можно с единой точки зрения рассматривать локально проявляемую случайную и общую пространственную изменчивость.

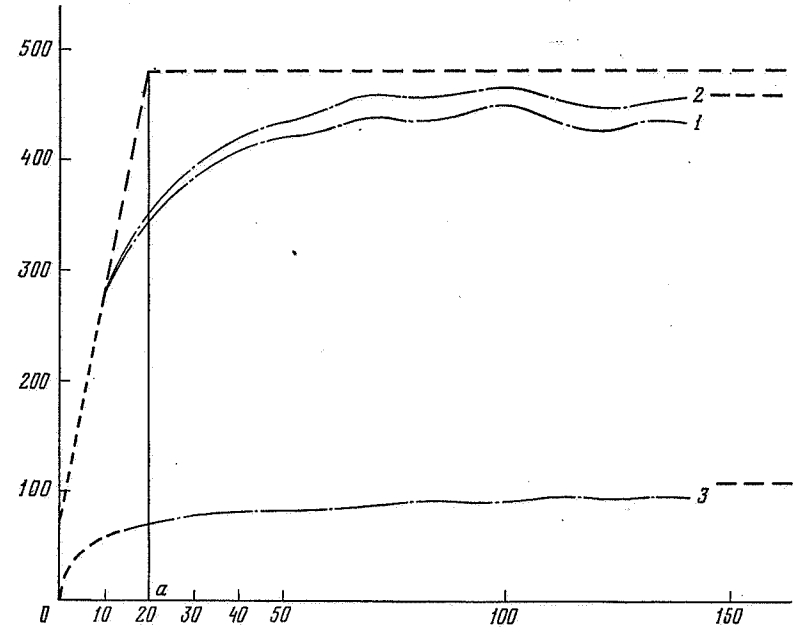
Явления перехода

Выше уже было введено понятие эффекта самородков в широком смысле, или явления перехода, выражающегося более или менее случайной системой разрывов в геометрическом поле пространственной переменной. Эффекты штокверка, наслоения, линз или перекрытия пластов обусловливаются сетью разрывов, которые так или иначе разделяют на части все геометрическое поле. Так, например, толща осадочного месторождения разделена по вертикали на отдельные слои, которые, выклиниваясь по простиранию, также делят эту толщу на отдельные макробассейны. Штокверк образован сложной сетью богатых жил, прожилков и вкрапленностью рудного минерала в слабоминерализованной горной породе. При переходе границ, разделяющих эти разнородные части месторождения, возникают разрывы пространственной переменной, вызывающие эффект самородков в широком смысле (отсюда и название — *явление перехода*). Впрочем, в случае гранулометрического эффекта самородков геометрическое поле также состоит

[1] Более полная библиография дана в работе [80].

из разнородных участков, представленных рудными и безрудными частицами, и именно переход через поверхности, разделяющие эти частицы, сопровождается разрывами в поведении пространственной переменной: таким образом, природа гранулометрического эффекта самородков и явления перехода одна и та же, различны лишь пространственные масштабы их проявления.

При разделении всего геометрического поля на отдельные части каждая такая часть может рассматриваться как однородная зона месторождения.



Ф и г. 184. Теоретическая и экспериментальные вариограммы, отражающие эффект перехода, связанный с миграцией (Лоррен, по данным Ж. Серра).
1 — для карбонатных конкреций; *2* — для межконкреционной руды; *3* — для глинистых прослоев.

Таким образом, эффект самородков может интерпретироваться как проявление неоднородности поля. Если есть реальная возможность выделить и изучить каждую однородную зону месторождения в отдельности, не пересекая при этом разрывов, не приходится говорить ни о каком явлении перехода. В этом случае нужно учитывать изменчивость пространственной переменной только в пределах каждой однородной зоны, отражаемую непрерывной в нуле собственной функцией. Однако чаще всего эти зоны бывают слишком небольшими и многочисленными, чтобы их можно было изучать порознь. Что касается гранулометрического эффекта самородков, то в этом случае вопрос об изучении каждой отдельной частички даже не возникает. В штокверке или осадочном месторождении количество однородных зон столь велико, что оконтуривание каждой из них в отдельности требует практически недостижимой детальности исследования. Кроме того, за исключением случая ультра-селективной отработки, элементарные объемы отбиваемой руды в эксплуатационных блоках состоят из разнородных зон и включают границы, разделяющие эти зоны. Исследование явлений перехода отвечает, таким образом, насущным требованиям практики. С теоретической точки зрения также нельзя ограничиться рассмотрением изменчивости пространственной

переменной только внутри автономных микробассейнов, так как при этом не могут быть выявлены законы макроизменчивости в масштабах всего месторождения, знать которые очень важно, например, при разведке крупных осадочных месторождений.

В работе Ж. Серра можно найти пример систематического использования транзитивных схем для структурного анализа железорудного бассейна в Лоррене при исследованиях в различных масштабах: от рудных шлифов до участков с площадью до десятка километров. При этом Ж. Серра выделяет семь последовательных явлений перехода, наложенных одно на другое и соответствующих структурам весьма различного характера. Полученные им результаты (см., например, фиг. 184) могут представлять интерес для математической геологии.

Транзитивные схемы

Опишем явления перехода вариограммой типа

$$\gamma(r) = C(0) - C(r) + \gamma_1(r), \qquad \text{(XIV,3,1)}$$

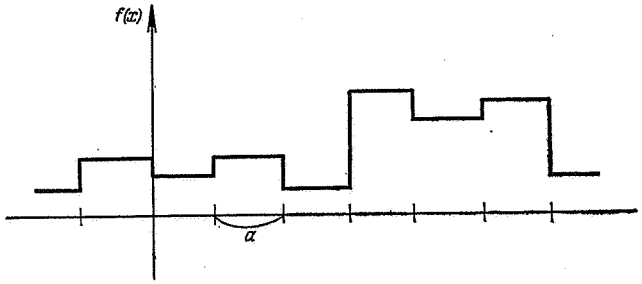
где $\gamma_1(r)$ — непрерывная в нуле собственная функция, характеризующая макроизменчивость, а $C(r)$ — функция, определяемая соотношениями (XIV,1,3) и представляющая собственную функцию явления перехода в чистом виде. Если макроизменчивость отсутствует, то следует говорить о чисто транзитивной схеме, определяемой собственной функцией

$$\gamma(r) = C(0) - C(r), \qquad \text{(XIV,3,2)}$$

где

$$C(r) = \begin{cases} C & \text{при } r = 0, \\ C(r) \leqslant C & \text{при } 0 \leqslant r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

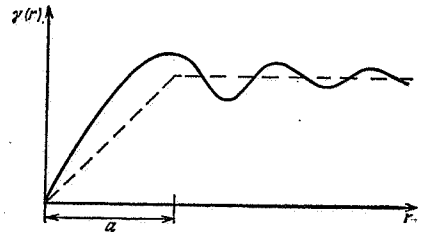
Постоянные C и a представляют собой амплитуду и носитель явления перехода соответственно. В случае одномерного пространства легко построить



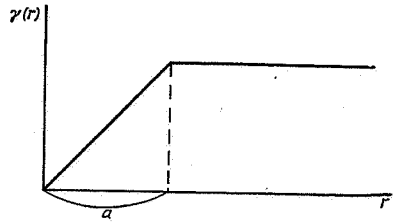
Ф и г. 185.

пространственную переменную, соответствующую транзитивной схеме. Разделим ось OX на одинаковые отрезки, равные носителю a (фиг. 185), и рассмотрим функцию $f(x)$, которая внутри каждого отрезка постоянна и равна реализации случайной величины, характеризующейся произвольным законом распределения с дисперсией C. Если реализацию, приписываемую каждому последующему отрезку a, получать в результате независимого испытания, то полувариограмма пространственной переменной $f(x)$ будет иметь псевдопериодический характер, обусловленный незначительным количеством

отрезков, взятых на оси OX (фиг. 186). При увеличении числа этих отрезков амплитуда флуктуаций будет уменьшаться и в пределе получим полувариограмму, изображенную на фиг. 187. Если длины отрезков, на которые разбивается ось OX, изменяются около среднего размера a, то переход на вариограмме будет более плавным (фиг. 188). Практически полувариограмма,



Ф и г. 186.

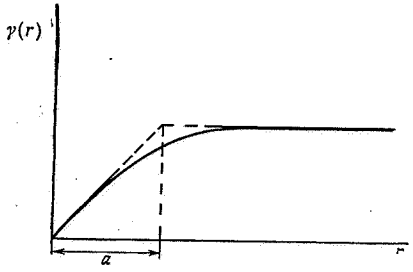


Ф и г. 187.

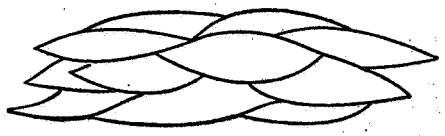
показанная на фиг. 188, может быть заменена идеализированной полувариограммой, представленной на фиг. 187.

В двумерном случае явление перехода может быть представлено в аналогичной форме. Но вариограмма, которая будет иметь вид, показанный на фиг. 188, не может быть заменена вариограммой, представленной на фиг. 187, так как последняя положительно определенная только в одномерном пространстве.

Возможны различного рода проявления анизотропии, и средние значения a не обязательно будут одинаковыми в различных направлениях. Если



Ф и г. 188.

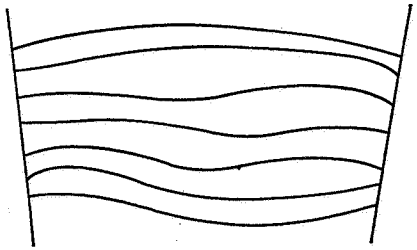


Ф и г. 189.

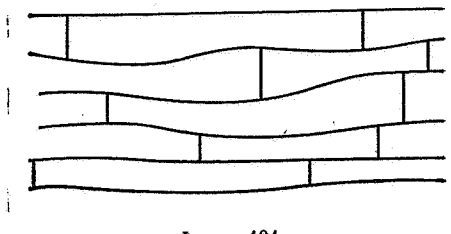
однородные зоны линзообразны, как показано на фиг. 189, то анизотропия имеет геометрический характер, т. е. проявляется лишь в зависимости носителя a от направления (величина C при этом остается постоянной) и может быть исключена посредством подходящего аффинного преобразования. Если однородные зоны представлены лентообразными потоками (фиг. 190), то перед нами будет зональная анизотропия. В этом случае существует преимущественное направление OX (соответствующее направлению протяженности потоков), вдоль которого явления перехода нет, и двумерная собственная функция вырождается в одномерную, имеющую вид $C(y - y')$. Аналогичная анизотропия наблюдается при чередовании слоев в вертикальном направлении (эффект наслоения), когда зональная собственная функция имеет вид $C(z - z')$. Наконец, в трехмерном пространстве может наблюдаться перекрытие залежей (фиг. 191). При этом на эффект наслоения по вертикали накладывается явление перехода в горизонтальной плоскости, которое само может относиться к зональному или, что встречается более

часто, к линзовому типу. Такая ситуация весьма характерна для некоторых крупных осадочных месторождений. При бороздовом или керновом опробовании рудного тела на полную мощность от кровли одного слоя до лежачего бока другого вертикальная зональность, связанная с эффектом переслаивания, исключается и горизонтальная вариограмма содержаний будет иметь транзитивный характер.

Непрерывная собственная функция $\gamma_1(r)$, которую в соответствии с формулой (XIV,3,1) очень часто нужно добавить к чисто транзитивной функции, отражает не только макроизменчивость, но и колебание содержаний в пределах залежей. Хотя это два совершенно различных явления, однако они проявляются в неодинаковых масштабах, и в тех задачах, для которых имеет значение изменчивость в пределах залежи, обычно



Фиг. 190.



Фиг. 191.

макроизменчивостью можно пренебречь, и наоборот. В соответствии с принятым подходом функцию $\gamma_1(r)$ выбирают так, чтобы она выражала одно из этих двух явлений. При решении проблем локальной оценки, если изменение функции $\gamma_1(r)$ происходит достаточно медленно, иногда можно в первом приближении заменить ее константой, представляющей внутреннюю изменчивость [возникает явный парадокс: внутренняя пространственная изменчивость выражается разрывом в нуле, в то время как явление перехода, т. е. причина макроэффекта самородков, выражается вариограммой, непрерывной (фиг. 187) в нуле].

В следующих параграфах мы определим ряд чисто транзитивных схем в одном и двух измерениях. Это позволит вычислять нужные дисперсии, а также ковариации и дисперсии распространения, необходимые для практических целей. Экспериментальные вариограммы часто могут рассматриваться как наложение чисто транзитивной схемы на схему де Вейса. Иногда придется использовать две транзитивные схемы (одну — зональную, другую — изотропную или сопровождающуюся геометрической анизотропией) и схему де Вейса. Каждая из этих компонент вносит в дисперсию распространения собственный вклад, который рассчитывается независимо от других. Дисперсия распространения может быть, например, получена как сумма дисперсии схемы де Вейса и дисперсии транзитивной схемы. В проблеме крайгинга, к сожалению, дело обстоит гораздо сложнее, так как там не просто суммируются, а взаимодействуют различные компоненты.

Так как функция $C(r)$ должна быть положительно определенной в одно-, двух- и трехмерном пространстве, мы примем для нее выражение, пропорциональное транзитивной ковариограмме сферы (см. пример 2 к гл. I). Другими словами, используем сферическую схему с полувариограммой вида

$$\gamma(r)=\begin{cases} C\left(\frac{3}{2}\frac{r}{a}-\frac{1}{2}\frac{r^3}{a^3}\right) & \text{при } r\leqslant a, \\ C & \text{при } r>a. \end{cases} \qquad \text{(XIV,3,3)}$$

§ 4. Сферическая схема в одном измерении

Сферическая схема определяется собственной функцией (XIV,3,3). В линейном случае она будет описывать изменчивость содержаний, например, в осадочном месторождении вдоль штрека, по которому произведено бороздовое опробование. Мы вычислим прежде всего собственные функции $\chi(l)$ и $F(l)$. Функция $\chi(l)$ представляет собой ковариацию содержания на отрезке l с содержанием на одном из его концов, а $F(l)$ — дисперсию содержаний на этом отрезке. Выражения этих функций существенно различаются в зависимости от соотношения размеров a и l, а именно:
для $l<a$ —

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{C}\gamma(l)&=\frac{3}{2}\frac{l}{a}-\frac{1}{2}\frac{l^3}{a^3}, \\ \frac{1}{C}\chi(l)&=\frac{3}{4}\frac{l}{a}-\frac{1}{8}\frac{l^3}{a^3}, \\ \frac{1}{C}F(l)&=\frac{1}{2}\frac{l}{a}-\frac{1}{20}\frac{l^3}{a^3}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV,4,1)}$$

а для $l\geqslant a$ —

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{C}\gamma(l)&=1, \\ \frac{1}{C}\chi(l)&=1-\frac{3}{8}\frac{a}{l}, \\ \frac{1}{C}F(l)&=1-\frac{3}{4}\frac{a}{l}+\frac{1}{5}\frac{a^2}{l^2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV,4,2)}$$

Эти формулы позволяют методом последовательных приближений определить носитель a и амплитуду эффекта перехода C из экспериментальных значений вариограммы и дисперсии, определенной по содержаниям в бороздовых пробах, отобранных вдоль выработки. Наклон полувариограммы, определенный графически, дает величину отношения C/a. Затем путем подбора находят такое значение a, при котором функция $F(h)$ становится равной экспериментальному значению дисперсии.

Дисперсия пробы длиной l в интервале L равна $F(L)-F(l)$. Когда длина пробы l растет, дисперсия убывает линейно. После точки $l=a$ убывание продолжается, но по другому закону, и, наконец, когда длина пробы l больше носителя a, дисперсия становится обратно пропорциональной длине пробы l, как это следует из общей формулы (XIV,1,7).

Наконец, дисперсия распространения точечной пробы (бороздовой) в линейной зоне влияния длины l (отрезке выработки) дается общей формулой

$$\sigma^2_{E_1}=2\chi\left(\frac{l}{2}\right)-F(l).$$

Эта функция от l (фиг. 195) используется при расчете дисперсии оценки среднего содержания на участке профиля (ошибки, вносимой при оценке выработки по отобранным в ней пробам).

§ 5. Сферическая схема в двумерном пространстве

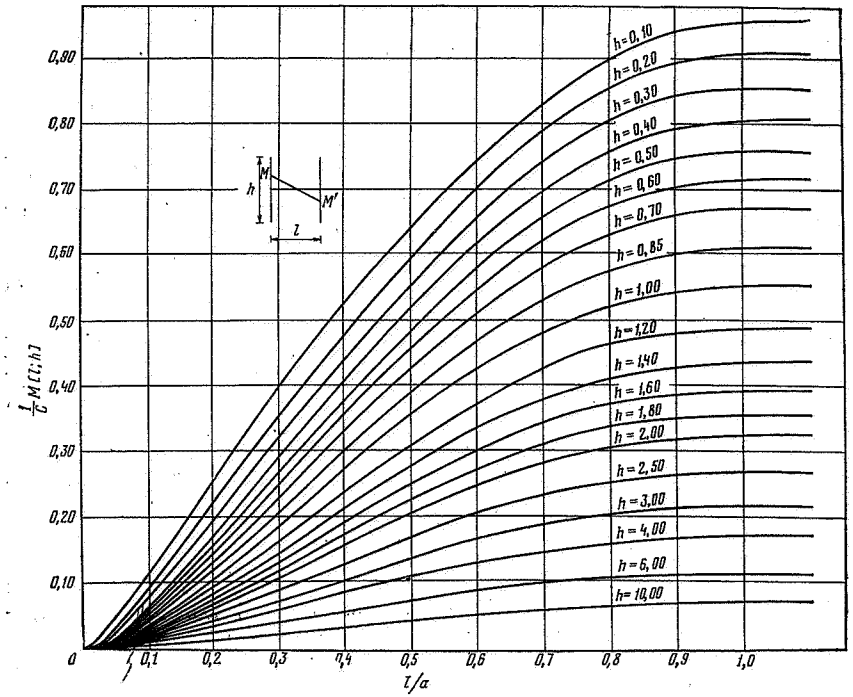
В двумерном пространстве средние содержания в линейных пробах длиной h определяют новую пространственную переменную, закон собственного рассеивания которой выводится из закона для точечных содержаний посредством обычных операций восхождения. Алгорифм

$$\gamma(l,h)=\frac{2}{h^2}\int_0^h(h-x)\,\gamma\left(\sqrt{x^2+l^2}\right)dx$$

дает ковариацию двух отрезков длиной h, отстоящих один от другого на расстоянии l. В зависимости от соотношения между a, l и D, где $D = \sqrt{l^2+h^2}$, имеем три выражения для функции $\gamma(l, h)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\gamma(l;h) = \frac{3}{2}\frac{D}{a} + \frac{3}{2}\frac{l^2}{ah}\ln\frac{h+D}{l} - \frac{D^3-l^3}{ah^2} - \frac{1}{4}\frac{D^3}{a^3} - \\
&\quad - \frac{3}{8}\frac{l^2D}{a^3} - \frac{3}{8}\frac{l^4}{a^3h}\ln\frac{h+D}{l} + \frac{1}{5}\frac{D^5-l^5}{a^3h^2}, \text{ при } a>0 \\
&\frac{1}{C}\gamma(l;h) = 1 + \frac{3}{2}\frac{l^2}{ah}\left(1-\frac{1}{4}\frac{l^2}{a^2}\right)\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-l^2}}{l}\right) - \\
&- \frac{3}{4}\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{h}\left(1+\frac{1}{2}\frac{l^2}{a^2}\right) + \frac{1}{5}\frac{a^2}{h^2}\left(1-\frac{l^5}{a^5}\right) - \frac{l^2}{h^2}\left(1-\frac{l}{a}\right), \\
&\qquad\qquad \text{при } D>a>l \\
&\frac{1}{C}\gamma(l;h) = 1 \text{ при } a>D.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV,5,1)}$$

Из этих формул легко выводится выражение $[\gamma(l, h) - \gamma(0, h)]$ для полувариограммы проб длины h, показанное графически на фиг. 192. Этот

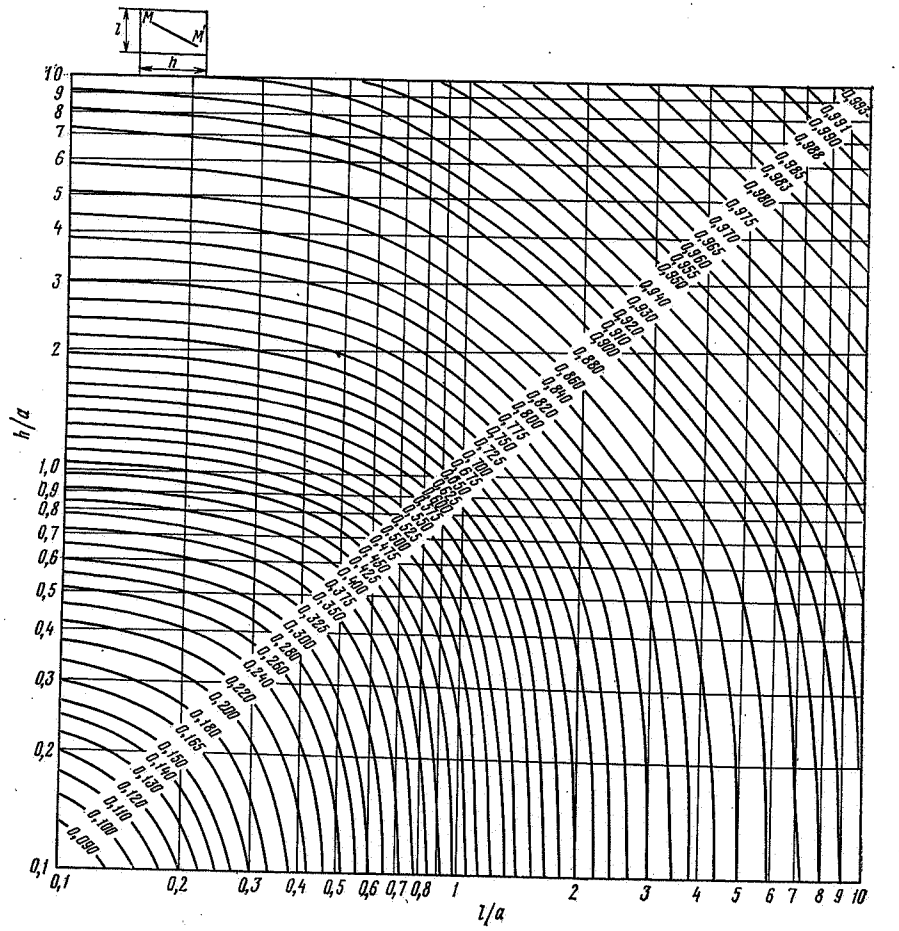


Фиг. 192. Номограмма для определения нормированных полувариограмм $\left(\frac{1}{C}M(l, h) = \frac{1}{C}[\gamma(l, h) - \gamma(0, h)]\right)$ в зависимости от длины пробы h и отношения l/a.

график может использоваться на практике для определения параметров a и C по экспериментальной вариограмме линейных проб.

Интегрируя выражения (XIV,5,1) по l, можно получить вспомогательные собственные функции F и χ. Но число возможных случаев увели-

чивается; так, для симметричной относительно h и l функции F следует различать четыре случая: носитель a больше диагонали D; заключен между диагональю и бо́льшей стороной; заключен между двумя сторонами; наконец,

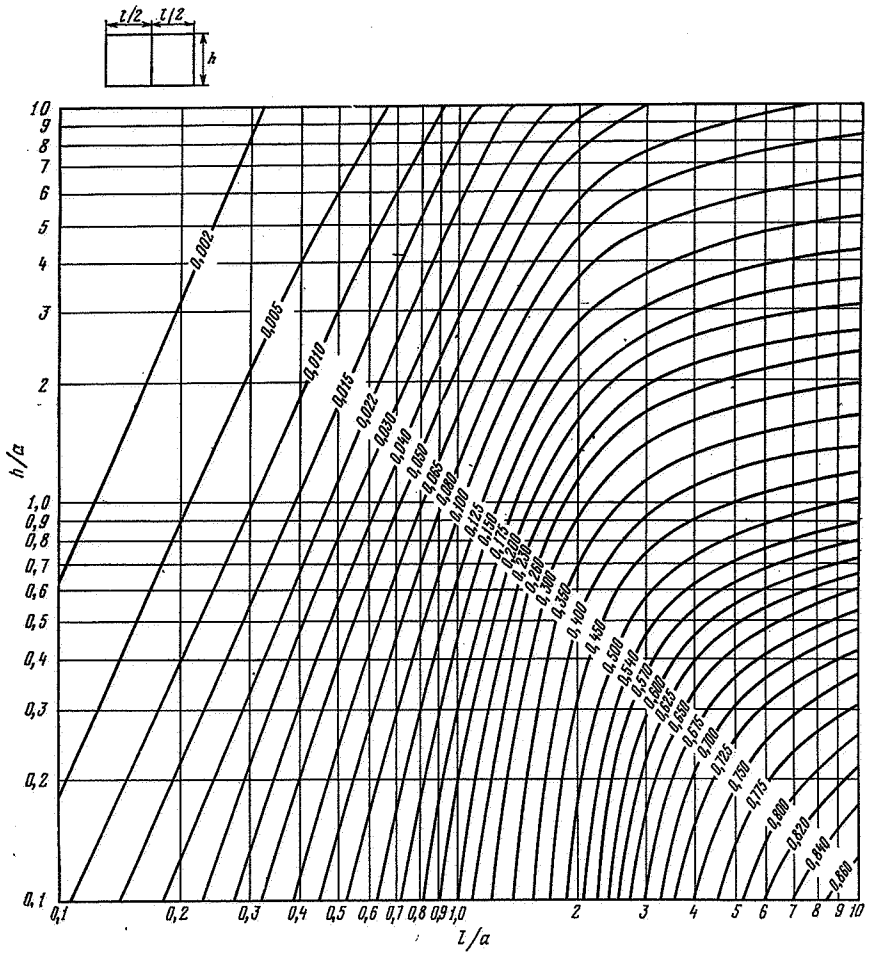


Фиг. 193. Номограмма для определения значений функции $\frac{1}{C}\left(\frac{l}{a}, \frac{h}{a}\right)$ (равной дисперсии точечной пробы в прямоугольнике со сторонами l и h) в зависимости от величины отношений $\frac{h}{a}$ и $\frac{l}{a}$.

меньше меньшей стороны. Для функции χ, которая не является симметричной, имеется пять возможных случаев. Каждая из девяти соответствующих формул заняла бы полстраницы, и читатель извинит нас за то, что мы не приводим их здесь.

Впрочем, эти функции были табулированы Ж. Серра. График фиг. 193 позволяет найти значения функции F в зависимости от отношений h/a и l/a. На практике параметры a и C схемы следует определять графическим путем по экспериментальной вариограмме. С помощью графика (фиг. 193) можно

получить теоретическое значение дисперсии содержаний, определенных по пробам длиной h в пределах прямоугольного участка рудного тела lh. Результат сравнения теоретического и экспериментально найденного значе-

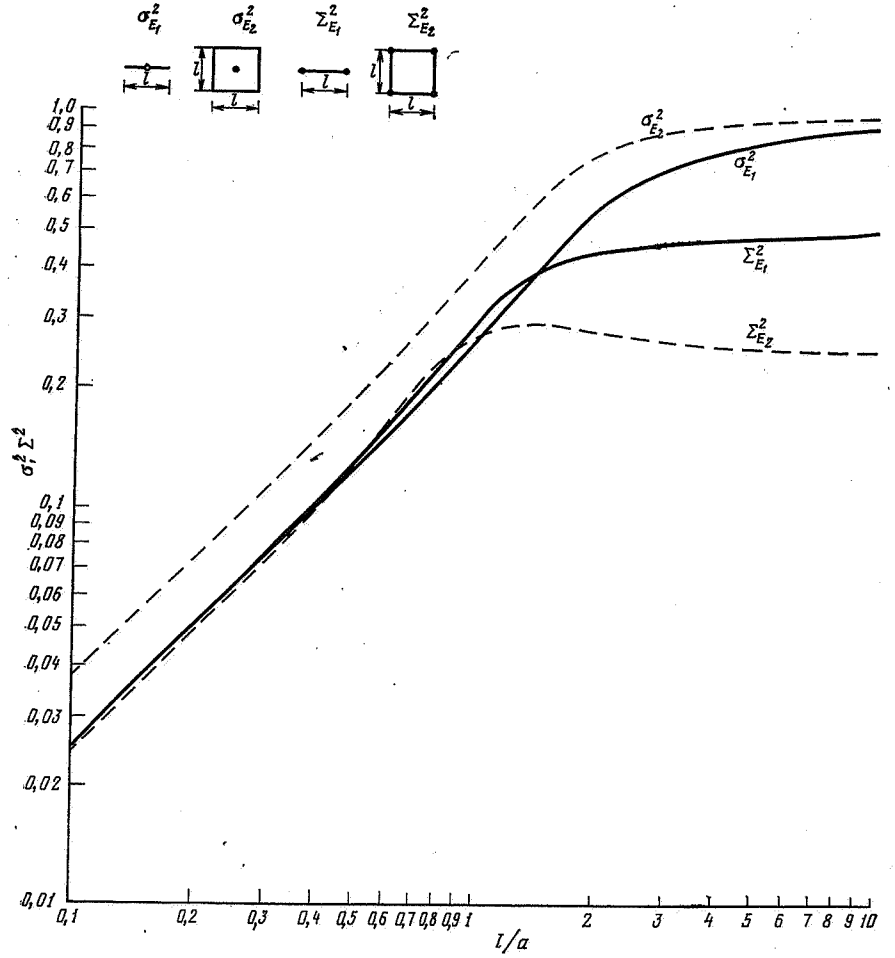


Ф и г. 194. Номограмма для определения дисперсии распространения содержания, найденного по горной выработке h, на прямоугольную зону влияния lh при центральном расположении горной выработки в зоне ее влияния.

ний дисперсии позволит составить представление о применимости избранной теоретической схемы.

Аналогично с помощью функций F и χ может быть получено выражение дисперсии распространения содержания, определенного по горной выработке со средней длиной h, на зону ее влияния, представляемую прямоугольником lh. Эта дисперсия распространения выражена графиком (фиг. 194). Определив дисперсию распространения для одной выработки, достаточно разделить ее на число зон влияния, составляющих оцениваемый участок

(или взвесить их на квадраты площадей этих зон, если они не одинаковы), чтобы получить соответствующую компоненту (элемент слоя) дисперсии оценки.



Ф и г. 195. Номограмма для определения дисперсий распространения содержаний, найденных по точечным пробам, на зоны их влияния.

Наконец, графики, представленные на фиг. 195, позволяют оценить дисперсии распространения содержаний, определенных по точечным пробам, на квадратные зоны влияния. Эти графики могут быть использованы для расчета дисперсии оценки при разведке месторождения скважинами, пробуренными по квадратной сети.

ГЛАВА XV

Законы статистических распределений

Краткое содержание

В § 1 рассматривается возможность разделения изучаемой совокупности на статистически однородные части с помощью полей корреляции, приводятся примеры таких исследований и анализируются полученные результаты.

В § 2 кратко описывается логнормальное распределение одной и двух переменных и излагаются свойства оценок моментов логнормально распределенных величин.

В § 3 исследуются геологические предпосылки возникновения логнормального закона распределения и пределы его применения при геологических исследованиях.

В § 4 на основе принципа подобия де Вейса рассматривается вопрос об устойчивости логнормального распределения.

В § 5 делается попытка построить теорию собственных схем с учетом логнормального распределения.

§ 1. Однородные совокупности и минерализованные ореолы

Геостатистические методы в том виде, как они изложены в предыдущих главах, используют только моменты не выше второго порядка (дисперсии, ковариации, вариограммы). При этом до сих пор не было необходимости обращаться в какой-либо форме к пространственным законам, т. е. к вероятностным законам случайных функций, реализацию которых представляют собой рассматриваемые пространственные переменные. Однако эти законы могут иметь практическую ценность, и мы посвятим настоящую главу изучению некоторых из них.

Можно, впрочем, исходить из двух различных теоретических точек зрения, которые приводят к практически эквивалентным результатам. Так, в рамках теории собственных схем пространственная переменная $f(x)$ интерпретируется как реализация стационарной случайной функции; тогда $Y = f(x)$ в данной точке x — обычная случайная величина, и можно (исходя из стационарности функции) построить закон распределения этой величины по пробам, отобранным в различных точках x_1, x_2, x_3, ... Случайные величины $Y_i = f(x_i)$ подчиняются одному и тому же закону распределения, но не являются независимыми, чем они и отличаются от рассматриваемой в обычной статистике совокупности независимых реализаций случайной величины X. Аналогично в случае двух переменных можно изучать совместный закон распределения $Y = f_1(x)$ и $Z = f_2(x)$, где Y и Z — обычно взаимозависимые содержания двух металлов в пробе, отобранной в точке x.

Второй, более эмпирический, подход состоит в построении статистической гистограммы содержаний Y_i в пробах, характеризуемой обычными параметрами случайной величины. Эта гистограмма, вообще говоря, не имеет вероятностного смысла; однако если проба размещается в точке x, случайно выбранной в пределах месторождения, то содержание $Y = f(x)$ благодаря такому выбору будет истинной случайной величиной, закон распределения которой требуется оценить. Эмпирическая гистограмма дает приближенное представление об этом законе.

Практически эти две точки зрения — пространственно-статистическая и чисто статистическая — могут рассматриваться как эквивалентные. Обе

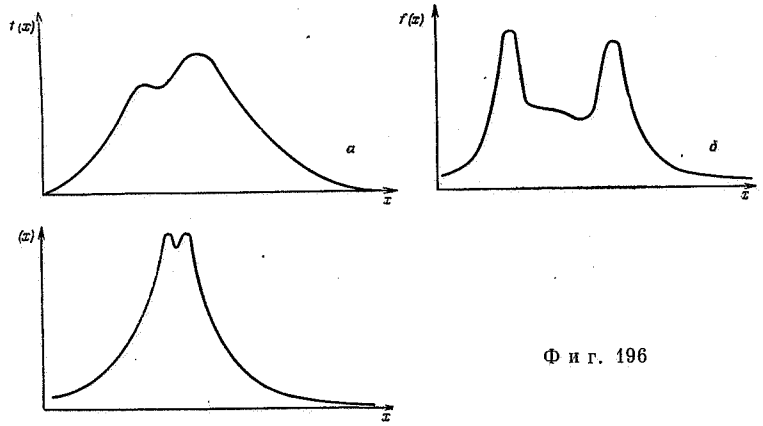
они приводят к одним и тем же вычислениям и дают совпадающие значения дисперсий и других параметров. Обе они будут иметь реальный смысл, если только пробы отобраны в пределах однородного поля, так как лишь при этом условии пробы можно считать принадлежащими одной статистической совокупности. Физическая, или геологическая, однородность поля и единство закона собственного рассеивания — это различные выражения, впрочем, не совсем эквивалентные, одного и того же условия. Таким образом, можно сказать, что статистическая совокупность численных значений пространственной переменной, определенной в физически однородном поле и следующей единому закону внутреннего рассеивания, однородна. На практике, однако, заключения приходится делать в обратном порядке. Построив эмпирическую гистограмму по содержаниям отобранных проб, пытаются оценить непосредственно (интуитивно) или с привлечением каких-либо математических моделей, соответствует ли представленный таким образом закон распределения предположению об однородности совокупности. Если, например, экспериментальная гистограмма имеет два четко выраженных максимума, то в общем случае предполагают неоднородность, так как интуиция подсказывает, что бимодальное распределение описывает не простое явление, а скорее наложение нескольких различных явлений. Если, напротив, гистограмма унимодальна и регулярна, допускают, что она представляет собой простое и четко выраженное явление и (как следствие) что статистическая совокупность однородна или, в еще более широком смысле, что пространственные переменные заданы в однородном геологическом поле и следуют единому закону рассеивания.

Поясним на простом примере общее соотношение между тремя определениями однородности. Представим, что месторождение разведано с помощью проб малого размера, например бороздовых, и что построенная по ним гистограмма имеет две относительно четко выраженные вершины (фиг. 196, *а*). Спрашивается, каким будет распределение содержаний по выемочным блокам? При этом возможны два предположения. Пусть бимодальность гистограммы, построенной по бороздовым пробам, соответствует наличию двух разнородных участков оруденения. Тогда при переходе от бороздовых проб к выемочным блокам дисперсия содержаний на каждом из участков уменьшится, содержания сгруппируются около модальных значений и гистограмма приобретет вид, подобный изображенному на фиг. 196, *б*. В этом случае статистическая неоднородность свидетельствует о неоднородности геометрического поля. Но может также случиться, что бимодальность гистограммы (фиг. 196, *а*) вызвана просто случайными колебаниями, связанными с недостаточным числом отобранных проб, или представляет некоторую особенность формы закона распределения, единого для всего изучаемого месторождения. В этом случае переход к блокам и связанное с этим уменьшение дисперсий приведут к группированию содержаний около единого среднего содержания (фиг. 196, *в*), и статистической неоднородности будет соответствовать физически однородное поле.

На практике для выявления неоднородности используют одновременно статистические, геометрические и геологические критерии. Если гистограмма обладает двумя максимумами, следует попытаться найти геологический критерий, по которому можно было бы разделить всю совокупность проб на две или несколько подсовокупностей. Если затем окажется, что пробы из различных подсовокупностей концентрируются на отдельных участках в пределах месторождения, можно говорить о наличии реальной неоднородности.

Очень часто выявляемая неоднородность бывает связана с наличием ореола рассеяния полезного компонента. Месторождения, характеризующиеся четкими контактами между рудными телами и безрудными вмещающими породами, встречаются редко. Обычно рудные тела окружены минерализованными породами с содержаниями полезного компонента, существенно

превышающими региональный геохимический фон. К таким ореолам рассеяния, в частности, относятся участки, разделяющие рудные столбы. Как и само рудное тело, ореол рассеяния иногда представляет промышленный интерес: некоторые его части могут оказаться рентабельными при отработке,



Фиг. 196

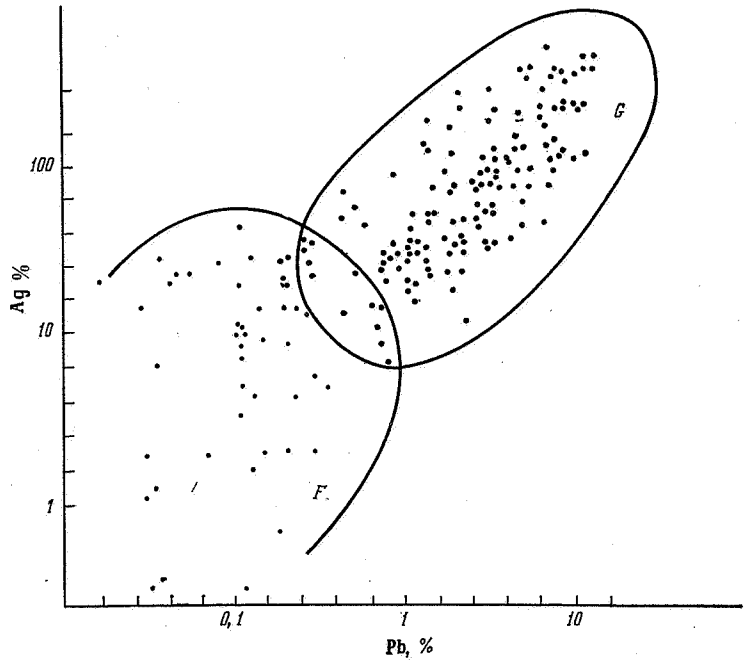
и в этом случае они должны быть включены в отработку. Но нельзя рассчитывать получить однородную совокупность или однородное поле, необходимое для решения геостатистических задач, если тщательно не отделено собственно рудное тело от его ореола рассеяния.

Примеры выявления неоднородности с помощью полей корреляции

Наиболее эффективным и в то же время наиболее простым способом выявления неоднородности служит способ, основанный на построении двумерной гистограммы, или поля корреляции, если, конечно, пробы проанализированы самое меньшее по двум признакам. Каждая проба с содержаниями a и b металлов A и B представляется на поле корреляции одной точкой, поэтому все поле будет состоять из n точек, соответствующих n пробам. Иногда есть смысл, особенно если речь идет о малых содержаниях, использовать по обеим осям логарифмический масштаб. Такое поле точек дает весьма наглядное геометрическое представление о законе распределения. Когда совокупность однородна, точки имеют тенденцию группироваться в одну эллиптическую область, но при неоднородности эти точки группируются в два или большее число полей, и тогда можно оконтурить несколько эллиптических областей, степень пересечения которых определяется интуитивно. Если эти эллипсы не слишком перекрываются, можно разделить пробы, относящиеся к разным совокупностям. Но даже если они сильно перекрывают один другой, геологические факты, указывающие на существование нескольких типов минерализации, позволяют интерпретировать эти поля и построить критерии для эффективного разделения совокупностей. Приведем теперь несколько примеров такого исследования реальных месторождений.

1. Месторождение свинцово-серебряных руд Уэд-эль-Кебир (Алжир)

Свинцово-серебряное месторождение Уэд-эль-Кебир разведано вертикальными скважинами. Керн разделен на пробы одинакового размера, каждая из которых анализировалась на содержание серебра и свинца. Поле корреляции этих двух элементов (фиг. 197) построено в логарифмическом масштабе по осям содержаний. В пределах поля можно выделить две отличные одна от другой области, которые обозначим G и F. Для области G характерна эллиптическая форма, соответствующая пробам, отобранным в пределах основного рудного тела; область F (область малых содержаний) характеризуется беспорядочным разбросом точек и соответствует, в основном, пробам, взятым из ореола рассеяния. Положительная корреляция



Фиг. 197. Поле корреляции свинца и серебра. Уэд-эл-Кебир (Алжир).

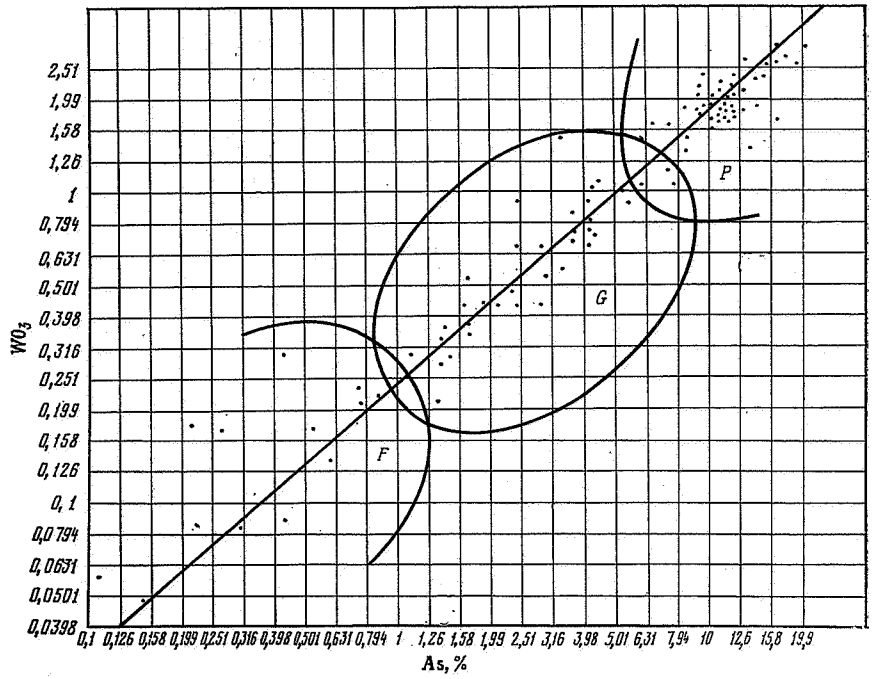
между серебром и свинцом, наблюдаемая в области G, вызвана тем, что в основном рудном теле серебро связано с галенитом. В пределах ореола рассеяния серебро связано с тетраэдритом, чем и объясняется отсутствие корреляции в области F.

2. Месторождение шеелита Кареза (Алжир)

Месторождение шеелита и леллингита Кареза, приуроченное, по-видимому, к контакту массива изверженных пород, располагается в породах типа тактитов (гранат-пироксенитов). Наиболее интенсивное оруденение наблюдается в дайках плагиоклазитов. Корреляционное поле трехокиси вольфрама (WO_3) и мышьяка (As) построено в логарифмическом масштабе (фиг. 198). В пределах поля корреляции выделяются три области концентрации точек, из которых область P соответствует оруденению в плагиоклазитах, а область G — оруденению в нормальных гранат-пироксеновых метасоматитах. Наконец, при малых содержаниях выделяется область F, характерная для ореолов рассеяния оруденения. Этой области соответствуют пробы, отобранные за пределами рудного столба.

Для поля корреляции, показанного на фиг. 198, зависимость между WO_3 и As во всех трех совокупностях может быть аппроксимирована единой прямой линией. Постоянство соотношений между содержаниями WO_3 и As в ореоле рассеяния, в гранат-пироксеновых метасоматитах и в плагиокла-

зитах является следствием закона действия масс с одинаковыми значениями коэффициентов для всех трех совокупностей. Это позволяет сделать вывод о единстве источников мышьяково-вольфрамовой минерализации, что, кстати, подтверждается и многочисленными геологическими аргументами. Более того, физико-химическое равновесие, вызвавшее кристаллизацию рудных минералов, определялось одинаковыми химическими реакциями



Ф и г. 198. Поле корреляции вольфрама и мышьяка. Кареза (Алжир).

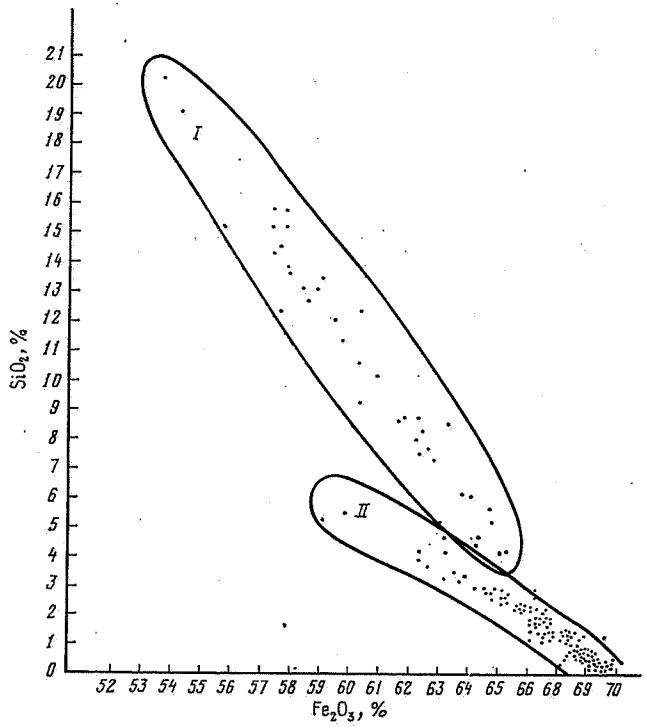
и одной и той же константой равновесия, т. е. одними и теми же термодинамическими условиями для плагиоклазитов, гранат-пироксеновых метасоматитов и сингенетических ореолов. Таким образом, выявилось не только единство источников минерализации, но и идентичность процессов кристаллизации. Причина наблюдаемой неоднородности — различие химического состава гранат-пироксеновых метасоматитов и плагиоклазитов.

3. Месторождение железа Фдерик (Мавритания)

Месторождение железа докембрийского возраста Фдерик разведано скважинами. Для построения полей корреляции (фиг. 199—201) были использованы результаты анализов керновых проб, отобранных только по первичным рудам. В связи с плохим выходом керна была предпринята попытка использовать также результаты анализа шламовых проб. Однако из-за механической неоднородности руды и соответственно различной степени перехода железа, кремния и алюминия в шлам поля корреляции, построенные по шламовым пробам, дали искаженное представление о реальных связях между этими компонентами, в то же время хорошо выявляемых на корреляционных полях, построенных только по керновым пробам. При построении корреляционных полей значения содержаний компонент откладывались по осям координат в линейном масштабе. Это делалось с целью наилучшего выяв-

ления линейных зависимостей между тремя компонентами (Al_2O_3, SiO_2, Fe_2O_3), практически полностью определяющими состав изучаемой руды.

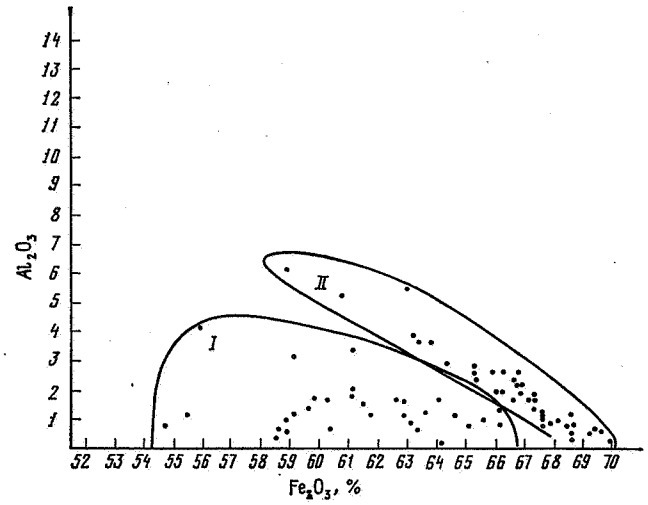
На поле корреляции содержаний окиси кремния и железа (фиг. 199) четко выделяются две совокупности. Точки первой совокупности группируются около прямой, соответствующей уравнению $Fe_2O_3 + SiO_2 = \text{const}$.; содержание железа в пробах этой совокупности находится в пределах 55—66%. Вторая совокупность состоит из проб, в общем более богатых железом и с меньшими содержаниями окиси кремния; на поле корреляции



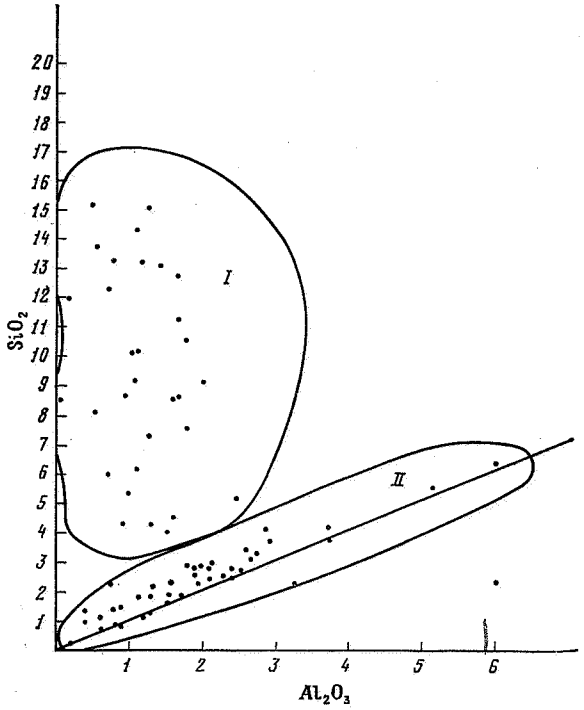
Ф и г. 199. Поле корреляции железа и кремния. Фдерик (Мавритания).

она представлена точками, также группирующимися около прямой линии, но с существенно меньшим наклоном. На поле корреляции содержаний окиси алюминия и железа (фиг. 200) также выделяются две совокупности. Первая совокупность характеризуется сравнительно большим разбросом содержаний железа при низких содержаниях алюминия и отсутствием какой-либо четко выраженной корреляции между ними. Вторая совокупность представлена пробами, в которых содержание алюминия убывает по мере увеличения содержания железа. Содержание железа в пробах второй совокупности находится в одинаковой связи как с содержанием окиси алюминия, так и с содержанием окиси кремния (фиг. 199 и 200).

На поле корреляции содержаний окиси алюминия и окиси кремния (фиг. 200) в соответствии с проведенным выше анализом можно выделить совокупность, характеризующуюся большими и весьма изменчивыми содержаниями окиси кремния, никак не связанными с низкими содержаниями окиси алюминия, и совокупность, в которой содержания обоих окислов находятся в прямой корреляционной зависимости. Эта вторая совокупность



Ф и г. 200. Поле корреляции железа и алюминия. Фдерик (Мавритания).

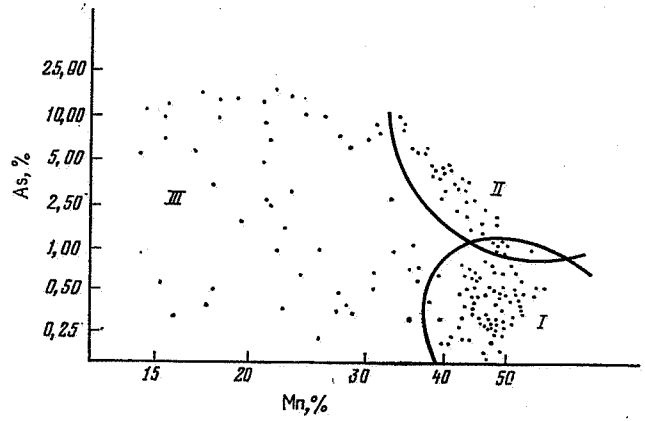


Ф и г. 201. Поле корреляции кремния и алюминия. Фдерик (Мавритания).

представляет собой пробы, состоящие из окислов железа и примерно из равных частей окиси алюминия и окиси кремния, и соответствует чисто гематитовому типу оруденения. Напротив, первая совокупность — это существенно отличный, смешанный тип оруденения, характеризующийся тем, что при слабоизменчивом содержании окиси алюминия содержания окисей железа и кремния меняются так, что их сумма остается практически постоянной.

4. Месторождение марганцевых руд Геттара (Сахара)

Месторождение Джебель-Геттара представлено линзообразными залежами браунита в туфах и аркозовых песчаниках, которые, в свою очередь,



Ф и г. 202. Поле корреляции марганца и мышьяка. Геттара (Сахара).

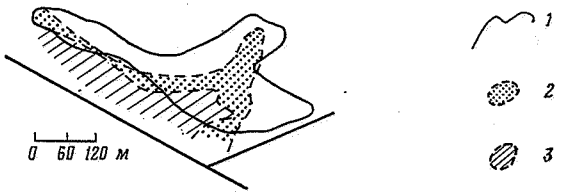
составляют часть мощной осадочно-эффузивной толщи докембрийского возраста. Руды марганца содержат (в количестве до нескольких процентов) мышьяк, входящий в состав довольно редкого минерала тилазита — фторарсената кальция и марганца. Месторождение выходит на поверхность и разведано мелкими шурфами, в которых отобраны валовые пробы. Корреляционное поле содержаний марганца и мышьяка (фиг. 202) построено по результатам анализа валовых проб. При построении корреляционного поля по осям координат был использован логарифмический масштаб. На фигуре видно, что экспериментальные точки разделяются на три хорошо различимые группы. В нижней правой части корреляционного поля видна группа точек, характеризующаяся отсутствием корреляции между содержаниями марганца, меняющимися в диапазоне 38—56%, и содержаниями мышьяка, не превышающими 1,5%. Обозначим эту группу индексом I. Выше выделяется вторая группа (обозначим ее индексом II), имеющая вытянутую форму, свидетельствующую о наличии сильной отрицательной корреляции между содержаниями. В пробах этой группы содержания марганца несколько меньше чем в первой группе и значительно больше (>1%) содержания мышьяка. Линейное соотношение между логарифмами содержаний марганца и мышьяка соответствует приближенному уравнению

$$[As]\,[Mn]^8 \approx \text{const},$$

которое следует интерпретировать как закон действия масс. Наконец, третья, очень рассеянная группа точек в пределах оставшейся части корреляционного поля соответствует слабоминерализованным туфам и аркозовым песча-

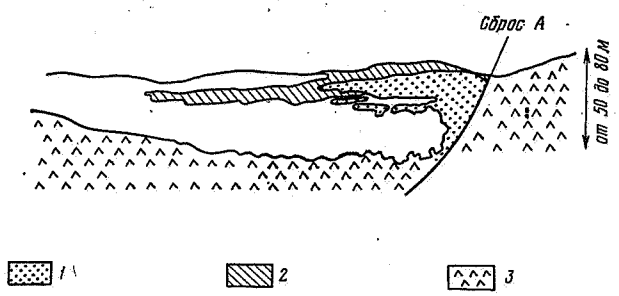
никам, т. е. фактически ореолу рассеяния, в то время как первые две группы представляют собственно рудные тела.

Пересечение областей распространения точек I и II групп относительно невелико, и поэтому не составляет особого труда разделить пробы, относящиеся к этим группам. Нанесение точек отбора проб на план месторождения



Ф и г. 203. Схематический план месторождения.
1 — контур промышленного оруденения; *2* — руды, соответствующие по составу пробам групп I и II; *3* — руды, соответствующие пробам только группы II.

выявило интересную приуроченность различных групп к определенным участкам. Создается впечатление, что из разлома A, который ограничивает лагунный бассейн с юга, привносились мышьяксодержащие растворы, однако этот привнос происходил не на всей площади месторождения (фиг. 203). Разрез месторождения, иллюстрирующий эту схему, показан на фиг. 204. Вероятно, вначале существовало однородное месторождение, минеральный состав которого соответствовал минеральному составу проб группы I.

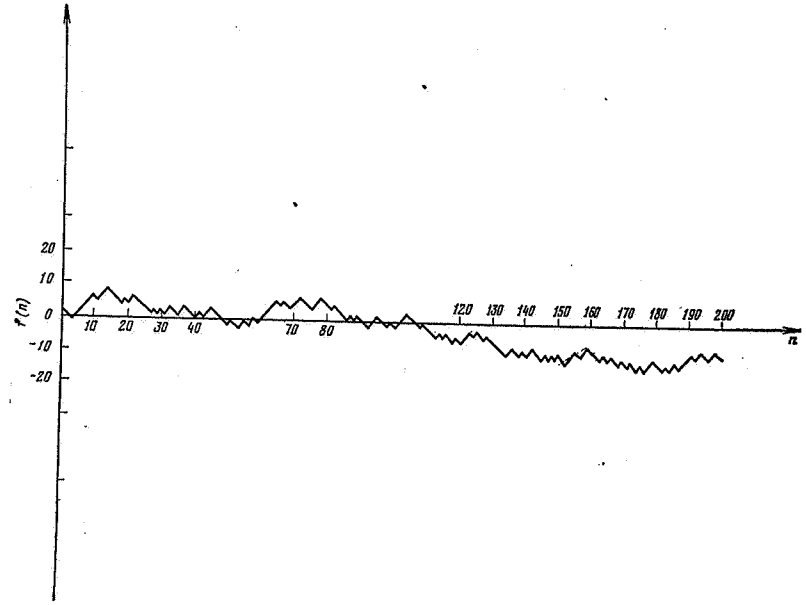


Ф и г. 204. Схематический разрез месторождения.
1 — первичные руды марганца; *2* — руды марганца, обогащенные тилазитом; *3* — риолиты.

В результате последующей гидротермальной деятельности, связанной с движением растворов по сбросу A, в ближайшей к сбросу части месторождения происходило отложение мышьяка, входящего в состав минерала тилазита. Отложение мышьяковых минералов сопровождалось выносом части марганца. При этом количество выносимого марганца в соответствии с законом действия масс находилось в прямой корреляционной зависимости от количества привносимого мышьяка. В результате месторождение перестало быть однородным: одни участки, не подвергшиеся действию растворов, несущих мышьяк, сохранили свой первоначальный характер, другие — лишились части марганца и обогатились мышьяком. Тот факт, что закон действия масс остается справедливым в пределах всей этой зоны, служит указанием на очень быстрое отложение тилазита, или, во всяком случае, на сохранение в период его кристаллизации постоянных физико-химических условий. Геологическое и металлогеническое изучение месторождения подтверждает эти выводы.

5. Пример фиктивной неоднородности

Чтобы доказать существование реальной неоднородности месторождения, совершенно недостаточно обнаружить полимодальность экспериментальной гистограммы. Нужно обязательно найти надежный геологический критерий, который позволил бы разделить данную совокупность на две или несколько однородных подсовокупностей, и убедиться, что выделенные таким образом подсовокупности представлены пробами, отобранными из геологически однородных участков месторождения. Мы рассмотрим численный пример существования кажущейся неоднородности. Этот пример поучителен



Ф и г. 205. Реализация собственной схемы.

также и потому, что в нем ставится вопрос о смысле и реальности существования тенденций («трендов») в изменении переменных. Действительно, в самом понятии тенденции заключено что-то обманчивое. В своей известной книге Феллер [28] показал, что эффект накопления простых независимых случайных вариаций может привести к результатам, противоречащим интуитивным представлениям; например, этот эффект накопления всегда порождает явления, которые часто интерпретируют как реальные тенденции.

На фиг. 205 показан график накопления выигрыша одним игроком при игре в «орла и решку» (этот график в равной степени может характеризовать положение, занимаемое в последовательные моменты времени частицей, находящейся в броуновском движении вдоль оси). Другими словами, если обозначить символами S_n и E_n число «успехов» и «поражений», имевших место в серии независимых испытаний к n-му опыту, то этот график следует рассматривать как реализацию случайной функции $f(n) = S_n - E_n$. Эта случайная функция может быть представлена собственной схемой с полувариограммой $\gamma(h) = \frac{1}{2}|h|$. В табл. 47 приведены гистограммы $f(n)$ для значений n от 1 до 100 и от 101 до 200.

На первый взгляд может показаться, что эти гистограммы представляют две различные совокупности. Впрочем, это заключение нельзя считать

Таблица 47

Гистограммы к фиг. 205

Значения $f(n)$	Частоты для первых 100 бросаний	Частоты для вторых 100 бросаний	Частоты для всей совокупности
—14		4	4
—13		8	8
—12		8	8
—11		11	11
—10		16	16
—9		14	14
—8		7	7
—7		2	2
—6		3	3
—5		7	7
—4		7	7
—3	1	3	4
—2	7	2	9
—1	10	3	13
0	12	2	14
1	15	2	17
2	12	1	13
3	10		10
4	12		12
5	12		12
6	6		6
7	2		2
8	1		1
Σ	100	100	200
Среднее	+2,08	—8,26	—3,09
Дисперсия	6,37	15,15	37,49

ошибочным, если иметь в виду различие средних значений для этих гистограмм. При этом, однако, можно предположить наличие неоднородности в совокупности значений $f(n)$ при изменении n от 1 до 200. Но такое предположение уже не будет соответствовать экспериментальным данным. Действительно, эта неоднородность лишь кажущаяся, так как по построению обе совокупности значений $f(n)$ являются результатом единого процесса (что соответствует одному из определений однородности). Согласно вероятностному закону, описывающему этот однородный процесс, реализации последнего всегда обладают кажущейся неоднородностью.

Точно так же при взгляде на фиг. 205 можно сделать заключение о систематическом убывании значений $f(n)$ начиная с $n = 75$ и интерпретировать это явление как тренд. Однако такой вывод будет неправильным, поскольку наблюдаемый тренд не характерен для рассматриваемого процесса, а является случайным элементом данной его реализации.

Выбор формы закона распределения

Для аппроксимации эмпирических гистограмм, получаемых при исследовании месторождений, предлагалось использовать самые разнообразные законы распределений. Простейший из них — нормальный закон распределения — может быть использован лишь в редких случаях, так как чаще всего реальные кривые распределений обладают значительной асимметрией. Для учета положительной асимметрии распределений содержаний использовались теоретические законы гамма-распределения, биномиального распределения и бета-распределения, которые хотя давали удовлетворительную аппроксимацию эмпирических данных, но обладали тем недостатком, что

в теоретическом плане все они были связаны со схемой независимых испытаний Бернулли. При этом рудные и безрудные частицы в той или другой степени всегда уподобляются черным и белым шарам, которые извлекаются из урны независимо и случайно. Многие авторы и, в частности, представители южно-африканской школы, пользуются логнормальным законом распределения, с которым хорошо согласуется логарифмически-биномиальный закон де Вейса. Предлагались и другие теоретические законы, рассматривать которые мы здесь не будем. Знание математической формы закона распределения необходимо главным образом для того, чтобы более точно сформулировать некоторые проблемы, связанные с корреляцией, изучением смещенности оценок и определением средних значений. Практически только нормальный и логнормальный законы позволяют это сделать.

§ 2. Логнормальный закон

В этом параграфе мы рассмотрим свойства логнормального закона распределения[1], которые представляют определенный интерес для геостатистики. Отрешимся на время от пространственного характера переменных и рассмотрим их как случайные величины. Предположим, что читателю известны общие свойства нормального закона распределения одной и двух переменных, которые содержатся во всех, даже элементарных, руководствах по теории вероятностей и математической статистике.

Мы говорим, что случайная величина распределена логнормально, если логарифм случайной величины характеризуется нормальным законом распределения. Пусть $\ln \gamma$ — среднее, или математическое ожидание, а σ^2 — дисперсия нормально распределенных $\ln x$. Тогда вероятность того, что $\ln x$ попадает в интервал $(\ln x, \ln x + d \ln x)$, а x — в интервал $(x, x + dx)$, определяется выражением

$$f(x)\,dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(\ln x - \ln \gamma)^2}{2\sigma^2}} d \ln x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(\ln x - \ln \gamma)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x}. \quad \text{(XV,2,1)}$$

Функция $f(x)$, определенная таким образом, называется функцией плотности вероятности логнормального закона распределения. В том случае, когда x — содержание, дифференциальное выражение $f(x)\,dx$ означает долю общих запасов руды с содержанием в отдельных порциях, заключенным между x и $x + dx$. Однако как при теоретических выводах, так и при практических расчетах выражение (XV,2,1) очень редко используют. Более удобно произвести замену переменных по формулам

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x}{\gamma} \\ x &= \gamma e^{\sigma z}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XV,2,2)}$$

или

Действительно, случайная величина z является нормированной и центрированной нормально распределенной величиной с нулевым средним и с единичной дисперсией. Плотность вероятности этой величины определяется выражением $\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, и статистические таблицы дают обычно численные значения интеграла

$$G(z) = \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz. \quad \text{(XV,2,3)}$$

[1] Систематическое описание свойств логнормального закона распределения читатель найдет в книге [4].

Логнормальная функция (XV,2,1), как и преобразование (XV,2,2), которое сводит логнормальное распределение к нормальному, зависит от двух параметров — γ и σ^2; рассмотрим их значение. Параметр γ означает *медиану* или *геометрическое среднее* $\ln x$, которые не различаются в случае логнормального распределения. В самом деле, в соответствии с формулой (XV,2,1) $\ln \gamma$ означает среднее значение $\ln x$, так как нормальное распределение симметрично. Параметр σ^2 означает дисперсию натуральных логарифмов x, и мы будем называть ее *логарифмической дисперсией* или, иногда, *дисперсией логнормального закона*. Она примерно соответствует относительной дисперсии x.

Эти два параметра — медиана γ и дисперсия σ^2 — полностью определяют логнормальный закон распределения. Поэтому важно указать оценки этих параметров по имеющимся экспериментальным данным. Если имеется n значений содержаний x_i в пробах, то оценки γ^* и σ^{*2} медианы и дисперсии определяются по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} \ln \gamma^* &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \\ \sigma^{*2} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \ln \gamma^*)^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,2,4)}$$

Подстановка $n-1$ вместо n в формулу оценки дисперсии является традиционной и связана с уменьшением числа степеней свободы на единицу в связи с использованием оценки $\ln \gamma^*$ вместо истинного значения $\ln \gamma$. Оценка σ^{*2} применима в геостатистических целях лишь при условии, что различные значения x_i переменной x рассматриваются как независимые одно от другого. Мы знаем, что в действительности это условие никогда не выполняется. Аналогично приведем традиционные выражения, определяющие дисперсии этих оценок, а именно:

$$\left.\begin{aligned} D(\ln \gamma^*) &= \frac{1}{n}\sigma^2, \\ D(\sigma^{*2}) &= \frac{2}{n-1}\sigma^4, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,2,4')}$$

которые имеют смысл только при выполнении того же условия независимости, а следовательно, практически в геостатистике почти никогда не используются.

Кроме медианы и дисперсии, следует рассмотреть моменты более высоких порядков, численные значения которых полностью определяются значениями параметров γ и σ^2. Напомним, что по определению момент порядка n случайной величины x, подчиняющейся закону распределения с плотностью вероятности $f(x)$, равен математическому ожиданию x^n, и определяется формулой

$$m_n = \int_{\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx.$$

С учетом формул (XV,2, 1) и (XV,2,2) легко получить общее выражение момента порядка n логнормально распределенной величины

$$m_n = \gamma^n e^{n^2\sigma^2/2}. \qquad \text{(XV,2,5)}$$

В частности, среднее значение m переменной x, которое является моментом первого порядка, определяется выражением

$$m = \gamma e^{\sigma^2/2}. \qquad \text{(XV,2,5')}$$

Эта формула показывает, каким образом при логнормальном распределении математическое ожидание выражается через среднее геометрическое и безразмерный множитель $e^{\sigma^2/2}$, который всегда больше единицы. Среднее арифметическое m тем сильнее отличается от среднего геометрического γ, чем больше логарифмическая дисперсия. Так как γ не только среднее геометрическое, но и медиана, то логнормальная кривая всегда будет иметь положительную асимметрию (левая ветвь кривой ограничена абсциссой $x = 0$, а правая растянута и асимптотически приближается к оси абсцисс).

Логарифмическая дисперсия σ^2 иногда может быть использована для определения арифметической дисперсии Σ^2, т. е. дисперсии самих значений x, а не их логарифмов. Для этого служит следующее выражение:

$$\Sigma^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1). \qquad \text{(XV,2,6)}$$

Если σ^2 не очень велико, то в первом приближении будет справедливой формула

$$\sigma^2 \approx \frac{\Sigma^2}{m^2},$$

из которой видно, что логарифмическая дисперсия определяет относительную дисперсию величины x.

Формула (XV,2,6) позволяет очень легко установить существование верхнего предела для дисперсии содержаний. Действительно, в месторождении со средним содержанием наибольшая дисперсия (арифметическая) может быть получена для проб с точечной геометрической базой. В этом случае точечное содержание может принимать только два крайних значения: нулевое, если проба попадает внутрь безрудного зерна, и равное содержанию в рудном минерале x_0, если проба попадает внутрь рудной частицы. Это содержание, конечно, не является логнормальной величиной, так как оно принимает либо значение x_0 (с вероятностью $p = m/x_0$), либо нулевое значение (с вероятностью $1 - p = 1 - m/x_0$). Дисперсия этого содержания равна $m(x_0 - m)$. Когда вместо точечных содержаний рассматриваются содержания в пробах, объем которых v велик по сравнению с размерами рудных выделений, ничто в принципе не мешает этим содержаниям иметь логнормальное распределение с логарифмической дисперсией σ^2. Но их дисперсия Σ^2, определяемая формулой (XV,2,6), меньше дисперсии $m(x_0 - m)$ точечных содержаний, и, следовательно, всегда

$$\sigma^2 < \ln \frac{x_0}{m}. \qquad \text{(XV,2,7)}$$

Полученное неравенство показывает, что чем меньше среднее содержание, тем выше верхняя граница логарифмической дисперсии; это частично объясняет хорошо известный факт, согласно которому для месторождений с большими средними содержаниями обычно характерно слабое колебание содержаний, и наоборот. Однако сказанное касается только содержаний, и никакие верхние пределы не могут быть получены для дисперсий мощности и и линейных запасов.

Логнормальная оценка среднего по n независимым пробам

Предположим (хотя практически этого почти никогда не бывает), что для оценки среднего мы располагаем n взаимно независимыми содержаниями, т. е. содержаниями в пробах, случайно отобранных в пределах месторождения так, что априорная вероятность каждой части месторождения попасть в пробу одинакова. Тогда для оценки среднего содержания, если содержания распределены по логнормальному закону, может быть использована формула (XV,2,5'). В самом деле, рассмотрим оценку

$$m^* = \gamma^* e^{\sigma^{*2}/2}, \qquad \text{(XV,2,8)}$$

в которой γ^* и σ^* представляют собой оценки медианы и дисперсии, определенные формулами (XV,2,4). Так как значения x_i предполагаются независимыми, то оценка γ^* — логнормально распределенная величина с медианой γ и дисперсией $\frac{\sigma^2}{n}$, а σ^{*2} — переменная, которая может считаться нормально распределенной, если n не очень мало, с математическим ожиданием σ^2 и дисперсией $\frac{2\sigma^4}{n-1}$. Следовательно, значения $e^{\sigma^{*2}/2}$ подчинены логнормальному закону с медианой $e^{\sigma^2/2}$ и логарифмической дисперсией $\frac{\sigma^4}{2(n-1)}$. Более того, в классической статистике доказывается, что обе оценки, $\ln\gamma^*$ и σ^{*2}, определенные по одним и тем же экспериментальным значениям x_i, независимы одна от другой. При этих условиях оценка (XV,2,8) оказывается произведением двух независимых логнормальных переменных. Таким образом, сама оценка m^* является логнормальной величиной с параметрами

$$\left.\begin{aligned}\gamma(m^*) &= m,\\ \sigma^2(m^*) &= \frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^4}{2(n-1)}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,2,9)}$$

Выражения (XV,2,9) позволяют сделать два важных вывода. Рассмотрим первый.

Дисперсия логнормальной оценки (XV,2,8) с учетом формул (XV,2,6) и (XV,2,9) равна

$$\sum^2(m^*) = m^2\left[e^{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^4}{2(n-1)}}-1\right] \approx \frac{m^2}{n}\left(\sigma^2+\frac{\sigma^4}{2}\right). \qquad \text{(XV,2,10)}$$

С другой стороны, обычная (не логнормальная) оценка, определяемая как среднее арифметическое экспериментальных значений x_i, т. е.

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

имеет дисперсию, равную

$$\sum^2(a^*) = \frac{m^2}{n}(e^{\sigma^2}-1) = \frac{m^2}{n}\left[\sigma^2+\frac{\sigma^4}{2}+\frac{\sigma^6}{3!}+\frac{\sigma^8}{4!}+\ldots\right], \qquad \text{(XV,2,11)}$$

если только каждое из значений x_i независимо от остальных. Заметим, что дисперсия (XV,2,11) всегда больше дисперсии (XV,2,10), и разница между ними тем больше, чем больше дисперсия σ^2 (особенно существенной она становится, когда $\sigma^2 > 1$). Итак, логнормальная оценка (XV,2,8) более точная, чем простое среднее арифметическое, но этот результат будет верным лишь в тех случаях, когда содержания x_i можно рассматривать как независимые.

Из следующего простого примера читатель извлечет, насколько важно условие независимости содержаний. Пусть месторождение разделено на n объемов v, и нам известно истинное содержание x_i в каждом из них. Тогда среднее арифметическое a^* окажется безошибочной оценкой, совпадающей с истинным средним содержанием m. Следовательно, простая оценка оказывается лучше логнормальной, так как даже в случае, когда распределение содержаний x_i хорошо описывается логнормальным законом, оценка (XV,2,8) не обязательно должна в точности совпадать с истинным средним содержанием m. Но в подобных случаях содержания x_i не будут абсолютно независимыми одно от другого.

Укажем на второй вывод, который сделан на основании выражения (XV,2,9). Математическое ожидание логнормальной оценки вовсе не равняется истинному содержанию m и в соответствии с формулами (XV,2,5) и (X,2,9) определяется выражением

$$E(m^*) = \gamma(m^*)\,e^{\sigma^2(m^*)/2} = me^{\sigma^2/2n+\sigma^4/4(n-1)}.$$

Логнормальная оценка смещена, при этом коэффициент смещения всегда больше единицы, но чем больше n, тем меньше он от нее отличается. Если n не очень мало, но и недостаточно велико, чтобы сделать смещение несущественным (например, $n = 20$ при дисперсии порядка единицы), следует попытаться хотя бы в первом приближении исправить смещение путем деления оценки (XV,2,8) на коэффициент смещения, в выражении которого неизвестное истинное значение σ^2 заменяется его оценкой σ^{*2}. Исправленная логнормальная оценка определяется, таким образом, по формуле

$$m_1^* = \gamma^* e^{\frac{n-1}{n}\frac{\sigma^{*2}}{2}-\frac{\sigma^{*4}}{4(n-1)}}. \qquad \text{(XV,2,12)}$$

Но так как истинное значение смещения заменено его приближенным значением, поправка несовершенна, и оценка (XV,2,12) все-таки может быть смещена на величину порядка $1/n^2$. Можно повторить операцию и ввести последовательно поправки второго, третьего и т. д. порядков. Х. С. Зихель [81—83], использовав метод максимального правдоподобия, непосредственно получил несмещенную оценку среднего. Выражения этой оценки и ее дисперсии весьма сложны, но их численные значения представлены в виде таблиц, достаточно удобных для пользования.

Мы не настаиваем на применении в дальнейшем оценки Зихеля. Действительно, максимально правдоподобная оценка среднего предполагает как обязательное условие независимость экспериментальных содержаний x_i, а мы знаем, что на практике оно выполняется лишь в исключительных случаях. Нельзя даже предсказать заранее знак ошибки, которую вызовет применение этой оценки при зависимых исходных данных. В общем можно сказать, что отклонения, вызываемые взаимозависимостью проб, будут носить противоположный характер в оценках медианы и дисперсии. Читателю предлагаем обратиться к гл. XII, § 8, где экспериментально показано, что оценка среднего содержания, полученная по регулярной сети скважин, характеризуется меньшей дисперсией, чем оценка, полученная по случайно размещенным пробам, тогда как оценка дисперсии в первом случае имеет почти вдвое большую дисперсию, чем во втором. В то же время оценка по способу Зихеля, пренебрегающая геометрией сети и основанная на предположении неразрывной связи между медианой и дисперсией, не позволяет учесть эффект взаимозависимости проб, который не обязательно должен быть ничтожно малым.

Формулы для различных по содержанию классов руды

Если распределения содержаний описываются логнормальным законом, параметры которого, γ и σ^2, оценены с достаточной точностью, можно предрассчитать долю общих запасов, приходящихся на руды с содержанием в отдельных порциях от x_1 до x_2, а также среднее содержание в этой доле руд. Действительно, введем нормированные переменные z_1 и z_2, связанные с граничными содержаниями x_1 и x_2 соотношениями

$$z_1 = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{x_1}{\gamma}, \qquad z_2 = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{x_2}{\gamma}.$$

Тогда, например, запас руды с содержаниями в отдельных порциях, превышающими x_1, будет равным

$$T_1 = TG(z_1),$$

где $G(z_1)$ — определенный интеграл (XV,2,3), а T — суммарные запасы руды. Соответственно запасы руды с содержаниями, заключенными между x_1 и x_2, равны

$$T_{12} = T\,[G(z_1) - G(z_2)]. \qquad \text{(XV,2,13)}$$

Наконец, среднее содержание m_{12} в этом классе руды равно

$$m_{12} = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} xf(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx} = \frac{\int\limits_{z_1}^{z_2} \gamma e^{\sigma z - z^2/2}\,dz}{\int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2}\,dz}.$$

Отсюда легко получить

$$m_{12} = m\,\frac{G(z_1-\sigma) - G(z_2-\sigma)}{G(z_1) - G(z_2)}, \qquad \text{(XV,2,14)}$$

где m — среднее содержание во всей руде. В частности, если положить x_2 бесконечным, т. е. если ограничиться рассмотрением содержаний, превышающих x_1, запас руды и среднее содержание в ней определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= TG(z_1), \\ m_1 &= m\,\frac{G(z_1-\sigma)}{G(z_1)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,2,15)}$$

Запас металла в руде с содержаниями, превышающими x_1, таким образом, окажется равным

$$Q_1 = m_1 T_1 = mTG(z_1-\sigma). \qquad \text{(XV,2,16)}$$

Аналогично тому как интеграл $G(z_1)$ представляет собой долю запасов руды с содержаниями, относящимися к данному классу, так и величиной $G(z_1 - \sigma)$ выражается доля запасов металла в руде с содержаниями в этом классе.

Формулы (XV,2,15) и (XV,2,16) назовем *формулами классов содержаний*. Они позволяют быстро определить (при логнормальном распределении содержания) эффект сортировки руды по содержанию. Но никогда не надо забывать, что полученные таким способом классы руды соответствуют разделению месторождения на объемы v, по которым логарифмическая дисперсия содержаний равна σ^2. Например, для месторождения урана, где возможно оценить содержание в каждой вагонетке с помощью радиометрических измерений, значения $G(z_1)$ и $G(z_1 - \sigma)$ выражают доли руды и металла в вагонетках, содержание в которых превышает x_1, при условии, что σ — стандартное отклонение логарифма содержания в вагонетках и что это содержание подчинено логнормальному закону. Но совершенно напрасно было бы считать, что, применяя формулы классов содержаний с подставленными в них численными значениями медиан и дисперсий, характеризующих распределение содержаний в керновых или бороздовых пробах, мы можем предсказать число блоков (например, по 10000 m каждый) с содержанием, превышающим x_1, и среднее содержание в них. В подобном случае дисперсия содержаний в пробах пригодна только для определения численной величины коэффициента абсолютного рассеивания (гл. XI, § 1). Располагая же значением коэффициента абсолютного рассеивания и пользуясь специальным графиком (фиг. 17 и 18), можно рассчитать дисперсию σ^2 для эксплуатационных блоков заданного размера. И тогда, зная эту дисперсию, можно непосредственно по формулам классов содержаний попытаться определить число блоков с содержаниями выше x_1 и среднее содержание в руде из этих блоков.

Корреляция логнормальных величин

Закон совместного распределения двух случайных величин x и y называется логнормальным, если совместное распределение логарифмов этих величин — $\ln x$ и $\ln y$ — описывается двумерным нормальным законом. В частности, при таком распределении ковариацию σ_{xy} и коэффициент корреляции $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ логарифмов величин x и y определяют как ковариацию и коэффициент корреляции двух нормально распределенных величин $\ln x$ и $\ln y$. Классические результаты, полученные применительно к корреляции между нормально распределенными величинами, переносятся, таким образом, непосредственно на случай логнормального распределения. Известно, что коэффициент ρ, всегда заключающийся между $+1$ и -1, характеризует степень зависимости между двумя переменными. Для независимых величин $\rho = 0$, в то время как предельные значения $+1$ и -1 соответствуют случаям линейной функциональной связи между $\ln x$ и $\ln y$.

Переменные x и y могут быть содержаниями металлов A и B в одной и той же пробе v, т. е. двумя пространственными переменными аналогичной природы и с одной и той же геометрической базой. Они могут также быть двумя переменными различной природы, но имеющими одну и ту же геометрическую базу, как, например, содержание и мощность или линейный запас в одной и той же точке. Наконец, они могут быть переменными одной и той же природы, но с различными геометрическими базами, как, например, содержание одного и того же металла в пробах, отстоящих на некоторое расстояние одна от другой. Строго говоря, логнормальность распределения каждой отдельно взятой переменной x и y не обязательно влечет за собой логнормальность совместного распределения x и y. Однако такая обусловленность, не обязательная с теоретической точки зрения, чаще всего кажется весьма правдоподобной и обычно используется нами на практике.

Оценки ковариации σ_{xy} и коэффициента корреляции ρ вычисляются по наблюденным значениям x_i и y_i, согласно формулам

$$\left.\begin{aligned} \sigma^*_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \ln \gamma^*_x)(\ln y_i - \ln \gamma^*_y) \\ \text{и} \qquad \rho^*_{xy} &= \frac{\sigma^*_{xy}}{\sqrt{\sigma^{*2}_x \sigma^{*2}_y}}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,2,17)}$$

где γ^*_x, γ^*_y, σ^{*2}_x и σ^{*2}_y — оценки (XV,2,4) медиан и логарифмических дисперсий переменных x и y соответственно. Когда наблюденные значения x_i — независимые одна от другой величины, а также от наблюденных значений y_i, можно воспользоваться широко распространенными таблицами закона распределения выборочной оценки коэффициента корреляции ρ_{xy} и, в частности, оценить, насколько отличается найденная оценка от нуля, т. е. проверить статистическую значимость корреляции. Но, как правило, условие независимости не реализуется, и доверительные интервалы для коэффициента корреляции не могут быть определены: теория оценки коэффициента корреляции ρ_{xy} в этом случае еще не разработана.

Вычисление оценки коэффициента корреляции можно несколько изменить, если вместо непосредственного использования формул (XV,2,17) ввести вспомогательную переменную z, определенную как произведение или частное от деления x на y. Положим для примера $z = \frac{x}{y}$. Тогда z будет логнормально распределенной величиной с дисперсией

$$\sigma^2_z = \sigma^2_x + \sigma^2_y - 2\sigma_{xy}. \qquad \text{(XV,2,18)}$$

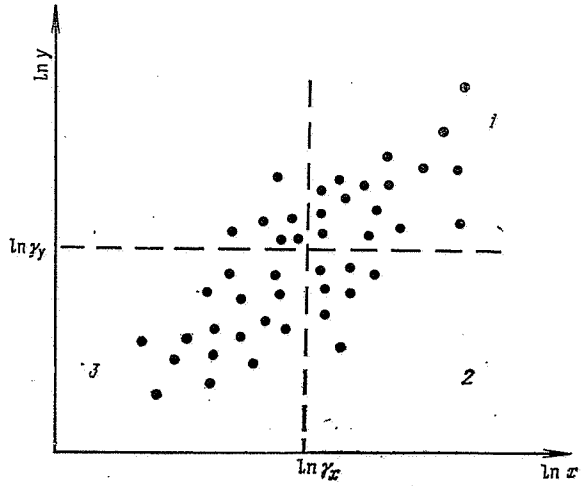
По n] экспериментальным значениям z_i всегда можно найти оценку σ_z^{*2} этой дисперсии и рассчитывать оценку ковариации σ_{xy} по уравнению

$$\sigma_{xy}^{*}=\frac{1}{2}[\sigma_x^{*2}+\sigma_y^{*2}-\sigma_z^{*2}]. \qquad \text{(XV,2,19)}$$

Если примем $z=xy$, то знак перед ковариацией в выражении (XV,2,18) изменится на обратный, и оценку ковариации надо будет вычислять по формуле

$$\sigma_{xy}^{*}=\frac{1}{2}[\sigma_z^{*2}-\sigma_x^{*2}-\sigma_y^{*2}].$$

Есть, кроме того, очень простой и быстрый способ оценки коэффициента корреляции, но он обеспечивает меньшую точность результата и на практике иногда приводит к ошибочным выводам. Этот способ заключается в следующем. Построив корреляционное поле (§ 1 настоящей главы), через точку



Фиг. 206.

с координатами $\ln \gamma_x$ и $\ln \gamma_y$ проведем линии, параллельные осям координат, как это показано на фиг. 206, и подсчитаем количество точек во всех четырех квадрантах. Если обозначим через N_1 суммарное количество точек в первом и третьем квадрантах, а через N_2 — во втором и четвертом, то ориентировочной оценкой коэффициента корреляции ρ_{xy} будет

$$r=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}\right). \qquad \text{(XV,2,20)}$$

Если совместное распределение x и y описывается логнормальным законом, то точки на поле корреляции обычно группируются в области приблизительно эллиптической формы. При этом коэффициент корреляции может быть как близким к нулю, так и весьма отличным от него. Если коэффициент корреляции близок к нулю, большая и малая оси эллипса, описывающего область группирования точек на поле корреляции, будут параллельны осям координат и тогда можно говорить о независимости сопоставляемых переменных. Совокупность, обозначенная индексом I на фиг. 202, может служить примером случая, когда x и y практически независимы один от другого. Если же коэффициент корреляции существенно отличен от нуля, то большая и малая оси эллипса будут наклонны по отношению к осям координат, причем знак тангенса угла наклона большой оси эллипса совпадет со знаком коэффициента корреляции ρ. Если $\rho>0$, то x и y связаны положительной корреляцией. Примером такой корреляции между содержанием свинца и содержанием серебра может служить совокупность G на фиг. 197. Если $\rho<0$ — перед нами отрицательная корреляционная зависимость. Совокупность, обозначенная индексом II на фиг. 202, характеризуется очень сильной отрицательной корреляцией ($\rho=-0{,}97$) между содержанием мышьяка и содержанием марганца.

Регрессия и формула комплексных руд

Поля корреляции, качественный смысл которых мы раскрыли выше, могут быть интерпретированы и количественно. Можно в частности определить условное среднее значение y при фиксированном x (уравнение регрессии y на x) и условную дисперсию y, т. е. дисперсию y при фиксированном x. В более общем случае рассматривают закон распределения y при фиксированном x, или условное распределение y. Именно в получении выражений для условных законов распределения состоит основная цель рассмотрения конкретного закона распределения x и y. Если x и y логнормальны, то используя классические результаты, относящиеся к двумерному нормальному закону распределения, легко показать, что при фиксированном x распределение $\ln y$ является нормальным. Однако при этом среднее значение $\ln y$ будет равным не $\ln \gamma_y$, а

$$\ln \gamma_{y\,|\,x}=\ln \gamma_y+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\ln\frac{x}{\gamma_x},$$

где $\gamma_{y\,|\,x}$ — медиана y при фиксированном x. Кроме того, дисперсия условного распределения $\ln y$ равна

$$\sigma^2_{y\,|\,x}=\sigma_y^2(1-\rho^2),$$

и чем ближе значение ρ к единице, тем больше $\sigma^2_{y\,|\,x}$ отличается от σ_y^2. Отметим, что дисперсия y при фиксированном x не зависит от x.

Отсюда следует, что при фиксированном x медиана и логарифмическая дисперсия логнормальной величины равны соответственно

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{y\,|\,x}&=\gamma_y\left[\frac{x}{\gamma_x}\right]^{\beta},\\ \sigma^2_{y\,|\,x}&=\sigma_y^2(1-\rho^2)=\sigma_y^2-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2},\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,2,21)}$$

где

$$\beta=\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.$$

Следовательно, с учетом формулы (XV,2,5) можно представить условное среднее значение $m_{y\,|\,x}$ величины y при фиксированном x в виде

$$m_{y\,|\,x}=\gamma_y\left[\frac{x}{\gamma_x}\right]^{\beta}e^{\frac{\sigma_y^2(1-\rho^2)}{2}}, \qquad \text{(XV,2,22)}$$

или

$$m_{y\,|\,x}=m_y\left[\frac{x}{m_x}\right]^{\beta}e^{\frac{1-\beta}{2}\sigma_{xy}}. \qquad \text{(XV,2,23)}$$

В частности, при $\rho=\pm 1$ условная дисперсия y равна нулю (что означает наличие функциональной линейной зависимости между x и y)

и по формуле (XV,2,22) имеем

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{x}{\gamma_x}\right]^{\frac{1}{\sigma_x}}&=\left[\frac{y}{\gamma_y}\right]^{\frac{1}{\sigma_y}}\quad\text{при }\rho=+1,\\ \left[\frac{x}{\gamma_x}\right]^{\frac{1}{\sigma_x}}\left[\frac{y}{\gamma_y}\right]^{\frac{1}{\sigma_y}}&=1\quad\text{при }\rho=-1.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XV,2,24)}$$

Формальное сходство этих уравнений с законом действия масс оказывается весьма полезным для термодинамической интерпретации наблюдаемой зависимости между элементами. При такой интерпретации следует выяснить, не существует ли между металлами A и B возможного при данных геологических условиях химического равновесия, при котором коэффициенты при A и B обратно пропорциональны стандартным отклонениям σ_x и σ_y. Практически значение модуля коэффициента корреляции ρ_{xy} никогда не бывает в точности равным единице, так как всегда существует некоторая остаточная дисперсия, связанная с побочными факторами, хотя бы, например, с ошибками химических анализов. Однако если модуль коэффициента корреляции достаточно близок к единице, то, вероятно, закон действия масс играл определяющую роль в процессе рудообразования. Так, например, для совокупности II месторождения Геттара, где коэффициент корреляции равен —0,97, а логарифмические стандартные отклонения относятся как 1 к 8, закон действия масс можно записать в виде

$$[\mathrm{As}]\,[\mathrm{Mn}]^8=\mathrm{const}$$

и попытаться объяснить их химическое равновесие

$$\mathrm{As}+8\mathrm{Mn}\rightleftarrows\ldots\ .$$

Как правило, однако, коэффициент корреляции, будучи отличным от нуля, не настолько близок к единице, чтобы можно было говорить о функциональном соотношении между x и y. В таком случае следует обратиться к условному закону распределения y при фиксированном x, параметры которого определяются формулами (XV,2,21). Рассмотрим иное следствие из стохастической связи между переменными.

Мы можем попытаться получить формулу для среднего значения $m_y(x_1, x_2)$ содержания y в пробах v, в которых содержания x заключены между двумя граничными значениями x_1 и x_2. Используем нормированную величину z, связанную с содержанием x соотношением

$$z=\frac{1}{\sigma_x}\ln\frac{x}{\gamma_x}\ .$$

Запас руды с содержаниями в элементарных объемах v, заключенными между x_1 и x_2 (в долях от общего запаса руды), равен

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}e^{-z^2/2}\,dz=G(z_1)-G(z_2).$$

Дифференциал $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,dz$ представляет собой запас руды с содержаниями, заключенными между

$$x=\gamma_x e^{z\sigma_x}$$

и

$$x+dx=\gamma_x e^{z\sigma_x}(1+\sigma_x\,dz),$$

т. е. элементарный запас руды, в котором среднее содержание металла B равно математическому ожиданию y при фиксированном значении x, определяемому формулой (XV,2,22). Следовательно, среднее значение y для проб

с содержаниями x в конечном интервале (x_1, x_2) равно

$$m_y(x_1, x_2)=\frac{\int_{z_1}^{z_2}m_{y\,|\,x}e^{-z^2/2}\,dz}{\int_{z_1}^{z_2}e^{-z^2/2}\,dz}\ .$$

Это выражение легко можно представить в виде

$$m_y(x_1, x_2)=m_y\frac{G(z_1-\rho\sigma_y)-G(z_2-\rho\sigma_y)}{G(z_1)-G(z_2)}\ .\qquad\text{(XV,2,25)}$$

Эту формулу назовем *формулой комплексных руд* и отметим ее тесную связь с формулой (XI,2,14) для различных по содержаниям классов руды, которая является частным вариантом (XV,2,25), когда $x=y$ и $\rho=1$.

Принимая $x=\infty$, выделяют долю запаса руды с содержанием x металла A, превышающим заданное значение x_1. Среднее значение y, т. е. среднее содержание металла B в этой доле руды, определится формулой

$$m_y(x_1)=m_y\frac{G(z_1-\rho\sigma_y)}{G(z_1)}\ .\qquad\text{(XV,2,26)}$$

Величина $G(z_1-\rho\sigma_y)$ — доля от общего запаса металла B, заключенная во всех возможных пробах объема v, для которых $x>x_1$.

Все эти формулы имеют особенно важное практическое значение для урановых месторождений. Интенсивность γ-излучения x от руды, содержащейся в вагонетке, связана прямой корреляционной зависимостью с содержанием урана y в той же руде. Если совместное распределение x и y логнормально, то уравнение регрессии y на x (XV,2,22) позволит найти вероятное значение содержания в вагонетке с интенсивностью γ-излучения x. Точность такой оценки характеризуется дисперсией $\sigma^2_{y|x}$. С другой стороны, формула (XV,2,26) дает среднее содержание урана в вагонетках, для которых интенсивность γ-излучения превышает заданную величину x_1, что позволяет предсказать эффект сортировки при любом уровне разделения x_1.

Взвешивание при расчете среднего

Пусть даны две логнормальные величины x и h, связанные корреляционной зависимостью (коэффициент корреляции ρ). Иногда необходимо взвесить частоту величины x на соответствующее значение h, т. е. каждое экспериментальное значение x_i учитывать с весом, равным не 1, а h_i/m_h. Например, если месторождение разведано скважинами, то для каждой скважины могут быть определены среднее содержание x_i, мощность h_i и линейный запас x_ih_i (для простоты примем, что удельный вес руды не зависит от содержания). Закон распределения x, установленный по наблюденным значениям x_i (по содержаниям в цилиндрах постоянного сечения, но переменной высоты h_i), дает распределение содержаний в зависимости не от запаса руды, а от площади рудного тела. Но практический интерес представляет иное распределение — распределение объемов или запасов по классам содержаний. Так как x и h распределены логнормально, легко можно перейти от одного распределения к другому.

Действительно, рассмотрим интервал содержаний от x до $x+dx$ и обратимся к нормированной переменной

$$z=\frac{1}{\sigma_x}\ln\frac{x}{\gamma_x}\ ,$$

где σ_x и γ_x — параметры распределения содержаний, полученные по значениям x_i, т. е. параметры распределения содержаний по площади рудного

тела. Так как площадь S рудного тела разделена на большое число элементарных площадок s, равных сечению скважины, то доля этих элементарных площадок с содержанием между x и $x + dx$ равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$.

Но средняя мощность, соответствующая площадкам с заданным содержанием x в соответствии с формулой (XV,2,22) равна

$$h(x) = m_h e^{\rho z \sigma_h - \frac{1}{2}\rho^2 \sigma_h^2},$$

где m_h — среднее значение h для всех площадок s, т. е. средняя мощность рудного тела. Так как тело разделено на цилиндры сечения s, доля запаса руды в цилиндрах с содержанием между x и $x + dx$ равна

$$f(z)\,dz = \frac{h(x)}{m_h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-\rho\sigma_h)^2/2}{2}} dz. \qquad \text{(XV,2,27)}$$

Другими словами, распределение содержания в зависимости от запаса (объема) также логнормально, только нормированная переменная содержания будет не z, а

$$z' = z - \rho\sigma_h = \frac{1}{\sigma_x} \ln \frac{x}{\gamma_x e^{\rho\sigma_h\sigma_x}}. \qquad \text{(XV,2,28)}$$

Из (XV,2,28) следует, что распределение x в зависимости от запаса имеет дисперсию σ_x^2, равную дисперсии распределения x в зависимости от площади, а медиана этого распределения равна

$$\gamma_x' = \gamma_x e^{\rho\sigma_x\sigma_h}. \qquad \text{(XV,2,29)}$$

Следовательно, математическое ожидание для распределения содержания x в зависимости от запаса, т. е. истинное среднее содержание m' в рудном теле (или среднее содержание, взвешенное на мощность), связано со средним (не взвешенным) содержанием m_x соотношением

$$m' = m_x e^{\rho\sigma_x\sigma_h}. \qquad \text{(XV,2,30)}$$

Легко показать, что m' равно m_{hx}/m_h — отношению средних значений линейного запаса и мощности. Действительно, в соответствии с (XV,2,5′)

$$m_h = \gamma_h e^{\sigma_h^2/2}.$$

Что касается линейного запаса hx, которое представляет собой произведение двух логнормально распределенных величин, то он сам является логнормально распределенным с медианой

$$\gamma_{hx} = \gamma_h \gamma_x,$$

логарифмической дисперсией

$$\sigma_{hx}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_h^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_h$$

и средним значением, определяемым в соответствии с (XV,2,5′) выражением

$$m_{hx} = \gamma_{hx} e^{\sigma_{hx}^2/2} = \gamma_h e^{\sigma_h^2/2} \gamma_x e^{\sigma_x^2/2} e^{\rho\sigma_x\sigma_h} = m_x m_h e^{\rho\sigma_h\sigma_x}.$$

Соответственно имеем

$$\frac{m_{hx}}{m_h} = m_x e^{\rho\sigma_x\sigma_h} = m'.$$

Отметим, таким образом, что взвешивание частот логнормальной переменной x на вспомогательную логнормальную величину h не нарушает логнормальности распределения, сохраняет значение дисперсии σ_x^2 и лишь изменяет медиану на множитель $e^{\rho\sigma_h\sigma_x} = e^{\sigma_{hx}}$, как это видно из формулы (XV,2,29).

Мы уже показали применение этого теоретического положения к практически важному случаю взвешивания содержаний на мощности. Также можно говорить о логнормальности распределения руды по классам крупности. Гранулометрический состав руды может быть представлен числом n_i или чаще суммарным весом p_i кусков, попавших в i-класс крупности, характеризующейся средним линейным размером d_i куска. От числа кусков n_i в данном гранулометрическом классе к весу p_i переходят путем умножения n_i на d_i^3. Если логнормально распределены d_i, то также логнормальным будет и распределение d_i^3. При этом дисперсия распределения руды по классам крупности будет иметь одно и то же значение σ_d^2 как для числа кусков n_i, так и для веса p_i, а медианы γ_n и γ_p будут связаны соотношением $\gamma_p = \gamma_n e^{3\sigma_d^2/2}$.

Иногда полезно рассмотреть распределение по классам содержаний не только запасов руды, но и запасов металла. От первого ко второму переходят путем взвешивания частоты распределения x на величину x. Другими словами, если исходное распределение логнормально с параметрами σ_x^2 и γ_x, то и второе распределение будет логнормальным с той же логарифмической дисперсией и медианой $\gamma_x e^{\sigma_x^2}$.

В некоторых случаях может оказаться, что распределение запасов металла лучше аппроксимируется логнормальным законом, чем распределение запасов руды. Как правило, это связано с тем, что в основную совокупность включено некоторое количество бедных проб из ореола рассеяния, влияние которых на распределение запасов руды значительно сильнее, чем на распределение запасов металла. Если исключить эти пробы из рассматриваемой совокупности, то логнормальная аппроксимация даст одинаково хороший результат в обоих случаях.

§ 3. Теоретический смысл и практическое значение логнормального закона распределения

Из опыта известно, что многие явления природы и экономики могут быть выражены положительными величинами, численные значения которых заключены между нулем и бесконечностью, причем распределение частот обладает длинным хвостом в области больших значений. В качестве примеров обычно приводят как распределение богатств в стране, так и распределение жителей в различных департаментах во Франции, площадей, занимаемых различными странами мира, размеров частиц некоторых природных и искусственных материалов, расходов рек, содержаний полезного компонента в месторождении. При этом установлено, что во многих случаях, если вместо самой величины x по оси абсцисс откладывать ее логарифм, кривая частот становится почти симметричной и приближается по форме к кривой нормального распределения. Стоит поразмыслить над тем, что столь многочисленные и различные явления могут быть (по крайней мере в первом приближении) описаны одним и тем же (логнормальным) законом распределения. Вообще говоря, появление логнормального закона связано с эффектом пропорциональности. Возьмем, например, размещение богатств или доходов в стране. Ясно, что человеку, владеющему миллиардом франков, так же легко заработать миллион, как и человеку, владеющему миллионом,— тысячу франков. Аналогично история свидетельствует, что государству, занимавшему площадь 5 000 000 $км^2$, почти так же легко удавалось присоединить к своей территории еще 5000 $км^2$, как и государству, занимавшему 500 000 $км^2$, присоединить всего 500 $км^2$. Другими словами, дифференциальным элементом, наилучшим образом представляющим изменение величины x, является не dx, а скорее $\frac{dx}{x}$. Известно, что сумма достаточно большого числа независимых (или почти независимых) малых по величине

слагаемых, представленных в данном случае приращениями $\frac{dx}{x}$, порождает случайную переменную, распределенную нормально. Поэтому следует ожидать, что величина $\ln x = \int \frac{dx}{x}$ будет распределена нормально, а следовательно, сама величина x — логнормально. Всякий раз, когда какое-либо явление оказывается под преобладающим влиянием эффекта пропорциональности, следует ожидать возникновения хотя бы приближенно логнормального распределения.

Применительно к распределению содержаний в месторождении эффект пропорциональности допускает термодинамическую интерпретацию. Образование месторождения в общем виде объясняется несколькими химическими равновесиями типа

$$\alpha A + \beta B \rightleftarrows \gamma C + \delta D,$$

подчиняющимися физико-химическому закону действия масс. Этот закон, описываемый соотношениями вида

$$\frac{[A]^{\alpha}[B]^{\beta}}{[C]^{\gamma}[D]^{\delta}} = \text{const},$$

содержит (в дифференциальной форме) линейные соотношения между относительными вариациями $\frac{dA}{A}$, $\frac{dB}{B}$, ... концентраций веществ A, B, ... Иначе говоря, каждое случайное изменение концентрации отражается на всех других по принципу пропорциональности. К тому же свободная энергия реакции — это линейная функция логарифмов концентраций, так что логнормальное распределение концентраций соответствует нормальному распределению некоторых величин, отражающих энергетическую сторону процесса. Такая термодинамическая интерпретация логнормальности косвенно подтверждается тем, что уравнение регрессии двух логнормальных переменных и закон действия масс имеют формально идентичный вид.

Из этих общих рассуждений следует, что логнормальный закон может по отношению к реальным распределениям содержаний играть роль идеальной модели подобно тому, например, как закон Ван-Гоффа применим по отношению к сильно разбавленным растворам; естественно, что между идеальной моделью и реальным, экспериментально изучаемым явлением всегда существуют более или менее существенные различия. Действительно, логнормальность очень часто проявляется в распределениях редких элементов, изучаемых геохимией [3], или в распределениях содержаний таких элементов, как уран или золото, месторождения которых характеризуются низкими средними содержаниями. Месторождения золота и урана Витватерсранда исследованы весьма детально в многочисленных работах представителей южно-африканской школы [1], ведущей в этом вопросе. Логнормальность распределений подтверждается, в общем, вполне удовлетворительно. Правда, в одной из своих работ [40] Крайг показал, что существенное улучшение логнормальной аппроксимации достигается в том случае, когда рассматривается распределение не самого содержания x, а величины $x - a$, где a — некоторая постоянная, определяемая в каждом конкретном случае. Систематические работы, предпринятые Комиссариатом по атомной энергии, в свою очередь, подтвердили логнормальность распределений содержаний урана во многих месторождениях [2].

Для месторождений с несколько большими, но все еще малыми содержаниями, например жильных, россыпных или штокообразных месторождений свинца, цинка, меди, вольфрама, олова, логнормальность проявляется все еще довольно часто, но встречаются и существенные отклонения. Отметим, что определить, значимы или не значимы наблюдаемые отклонения, чрезвычайно трудно. Действительно, статистические критерии обычно построены в предположении о независимости исходных данных, а это условие крайне редко осуществляется на практике. В случае же аллювиальных россыпей касситерита эмпирические распределения, которые описаны Грожаном [31] как гамма-распределения, могут быть успешно аппроксимированы и логнормальным распределением, имеющим, кстати, тот же характер асимметрии, что и гамма-распределение.

[1] Сюда относятся работы Крайга [39—48], Зихеля [81—83], Росса [72], де Вейса [90, 91] и др.

[2] Подробную библиографию см. в книге Карлье [25].

Наконец, на месторождениях с очень высокими содержаниями, таких, как месторождения железа, марганца, бокситов и особенно строительных материалов, логнормальную аппроксимацию приходится применять чрезвычайно редко. Более того, если среднее содержание по месторождению приближается к содержанию полезного компонента в чистом рудном минерале, экспериментальное распределение обладает противоположной по сравнению с логнормальным распределением асимметрией, т. е. оно характеризуется максимумом частот в области больших содержаний и длинным хвостом в области низких содержаний. Железорудное месторождение Фдерик обладает именно этой особенностью, что легко можно увидеть по распределению точек на полях корреляции, показанных на фиг. 199 и 200. В этом нет ничего удивительного, так как логнормальный закон представляет распределение величин, изменяющихся от 0 до бесконечности, а содержания полезного компонента заключены между значениями 0 и x_0, соответствующими содержаниям в пустой породе и в рудном минерале. Когда среднее содержание мало, наличие верхней границы не ощутимо сказывается на виде функции распределения, но по мере того как среднее содержание увеличивается и приближается к x_0, следует ожидать появления объемного насыщения, которое проявляется в накоплении частот, соответствующих значениям, близким x_0.

Вообще было бы вернее предположить, что дополнительные величины x и $1 - x$ могут быть распределены по закону одного и того же вида. Но это исключено, если величину x считать логнормальной, так как при этом распределение величины $1 - x$ обязательно имеет отрицательную асимметрию, что мы и наблюдаем на месторождении Фдерик. Можно предположить, что эффект объемного насыщения, проявляющийся по отношению к величинам x и $1 - x$, приводит к тому, что ни одна из них не распределена в точности логнормально, кроме исключительного случая, когда одна из величин принимает только очень малые значения, а другая остается практически постоянной. Если бы частицы руды были материальными точками, обладающими весом, но лишенными объема, этот эффект не играл бы роли, и объемное содержание, или вес металла на единицу объема руды, могло бы быть распределено строго логнормально.

Наконец, кроме проблемы бесконечных содержаний, существует также проблема нулевых содержаний. Как только размер пробы перестает быть очень большим по сравнению с размерами рудных частиц, появляются пробы с нулевыми содержаниями. Но таким содержаниям, соответствующим бесконечным значениям в логарифмическом масштабе, при логнормальном законе распределения вероятностей отвечает нулевая вероятность. В месторождениях с очень низким средним содержанием полезного компонента, но с достаточно крупными размерами рудных частиц нулевые содержания должны появляться даже при весьма значительных объемах проб (например, при объемах проб в несколько литров на месторождениях алмазов).

Аналогичная ситуация возникает, например, при изучении распределения продукции горнодобывающих предприятий по территории какой-либо страны. Если разделить поверхность S страны на элементарные площадки s

и представить объем годовой продукции горнодобывающих предприятий, оказавшихся в пределах элементарной площадки s, величиной y [11—21], то пространственная переменная y, как правило, будет иметь статистическое распределение, описываемое логнормальным законом. Но если элементарная площадка очень мала (например, несколько квадратных километров), то на большинстве площадок месторождения будут отсутствовать и, следовательно, y будет равно нулю. М. Блондель показал, что, исключив площадки с нулевыми значениями y, по остальным мы получим логнормальное распределение y. Однако если бы мы выбрали в качестве элементарных площадок s' много бóльшие, чем s, то нам пришлось бы объединить соседние площадки s как пустые, так и с ненулевыми значениями y. Таким образом, распределение пустых (т. е. с $y = 0$) площадок в пространстве оказывает влияние на распределение ненулевых значений y, соответствующих площадкам s', значительно превышающим s. Следовательно, нужно было бы описать единым законом распределение всей совокупности значений y, нулевых и ненулевых.

Итак, проявлению логнормального закона мешают следующие факторы: эффект объемного насыщения, который проявляется при больших содержаниях и приводит к ограничению возможных значений содержаний сверху; эффект нулевых содержаний, проявляющийся при относительно низких средних содержаниях и не очень малых размерах рудных частиц по сравнению с размерами проб.

Теоретически оба эти фактора сказываются одновременно в каждом случае. Однако практически они исключают один другой. Так, при обычных размерах проб можно считать нереальным как получение нулевого содержания в пробе на месторождении железа, так и содержания, равного 100%, на месторождении алмазов.

§ 4. Теорема де Вейса и устойчивость логнормального закона распределения

Изучаемые нами величины (содержания, линейные запасы и в некоторых случаях мощности) даже и распределенные логнормально, все же остаются пространственными переменными. В частности, они определены на некоторой геометрической базе (объем пробы v), в однородном геометрическом поле (объем части рудного тела V). Замечено, что если пространственная переменная, связанная с пробой объема v, распределена логнормально в пределах некоторой части залежи V, пространственная переменная, представляющая тот же признак, но определенная по пробам другой формы и объема v', как правило, будет распределена в пределах части V' этой залежи также логнормально. При этом параметры логнормальных распределений, медианы и дисперсии будут различаться в зависимости от соотношения размеров и форм проб v и v', а также частей залежи V и V'. Понятно, что дисперсия содержаний в пробах возрастает при увеличении объема залежи или уменьшении размера пробы в соответствии с общими свойствами пространственных переменных. Напротив, выявление причин устойчивости формы закона распределения при изменениях v и V представляет весьма сложную теоретическую задачу. Действительно, если два смежных объема v имеют содержания x_1 и x_2, объем $2v$, полученный при объединении этих двух объемов, будет характеризоваться содержанием $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Если при этом x_1 и x_2 являются независимыми логнормально распределенными величинами, распределение среднего из них уже не будет логнормальным. Но содержания x_1 и x_2 в двух соседних точках никогда не бывают независимыми, и аналитический механизм, благодаря которому среднее содержание $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ сохраняет логнормальность, остается неясным.

Описанная де Вейсом [90, 91] теоретическая схема, рассмотрением которой мы теперь займемся, позволяет понять причины устойчивости и показывает, что последняя весьма тесно связана с принципом подобия или, согласно терминам теории пространственных переменных, с выполнимостью собственной схемы де Вейса, характеризуемой собственной функцией вида $\ln r$.

Ход оригинальных рассуждений де Вейса следующий. Рассмотрим блок руды с содержанием m и разделим его мысленно на два равных блока, содержания в которых обозначим через x_1 и x_2. Введем параметр $d = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$, называемый далее *параметром де Вейса*; если при этом параметре $x_2 > x_1$, то

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m(1-d), \\ x_2 &= m(1+d). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,4,1)}$$

Параметр d определяет относительные отклонения x_1 и x_2, т. е. он является относительным градиентом содержаний. В действительности существует бесконечное множество способов, которыми можно разделить исходный блок на две одинаковые половины, и каждому из этих способов соответствует некоторое значение параметра де Вейса. Таким образом, этот параметр представляет собой случайную переменную пространственного типа. Важное допущение де Вейса состоит в том, что он предполагает независимость среднего значения d от размера исходного блока. Другими словами, среднее значение относительных различий в содержаниях соседних блоков одно и то же независимо от того, содержатся ли в этих блоках по килограмму, тонне или по десяти тонн руды. Очевидно, делая это допущение, де Вейс принимает принцип подобия. Чтобы продвинуться дальше, де Вейс пренебрегает изменчивостью параметра d и использует только его среднее значение. Основываясь на этом и разделив каждый из блоков (XV,4,1) пополам, он получает четыре блока с содержаниями $(1+d)^2 m$, $(1+d)(1-d)\,m$, $(1-d)(1+d)\,m$, $(1-d)^2 m$. При повторении этой операции k раз, получается 2^k блоков, из которых 1 блок имеет содержание $(1+d)^k m$, k блоков имеют содержания $(1+d)^{k-1}(1-d)\,m$, C_k^r блоков имеют содержания $(1+d)^{k-r}(1-d)^r m$ и 1 блок имеет содержание $(1-d)^k m$.

Если мы рассмотрим закон распределения этих содержаний, то увидим, что вероятность для случайно выбранного блока иметь содержание

$$x = (1+d)^{k-r}(1-d)^r m$$

равна

$$P(x) = \frac{C_k^r}{2_k}. \qquad \text{(XV,4,2)}$$

Такая вероятность соответствует той вероятности, с которой можно ожидать, что при k бросаниях монеты «орел» выпадет раз, где r следует биномиальному распределению. Этот закон распределения, стремящийся к нормальному при возрастании k, характеризуется дисперсией, равной $\frac{k}{4}$. В соответствии с формулой (XV,4,2) логарифм содержания x является линейной функцией биномиально распределенной переменной величины r, т. е.

$$\ln x = \ln m + k \ln(1+d) + r \ln \frac{1-d}{1+d}.$$

Итак, логарифм содержания распределен биномиально, и, следовательно, само содержание x распределено по логарифмически биномиальному закону. А так как при увеличении k биномиальный закон стремится к нормальному, то x становится логнормально распределенной величиной. При этом логарифмическая дисперсия x равна

$$\sigma^2 = \frac{k}{4}\left[\ln \frac{1-d}{1+d}\right]^2.$$

Заметим, что величина k пропорциональна логарифму отношения $\frac{V}{v} = 2^k$ объемов исходного блока и блока с содержанием x, и, следовательно, логарифмическая дисперсия может быть записана в виде обычного выражения

$$\sigma^2 = \alpha \ln \frac{V}{v^r},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4 \ln 2} \left[\ln \frac{1-d}{1+d} \right]^2.$$

Полученное выражение показывает, что коэффициент абсолютного рассеивания α и параметр d де Вейса однозначно взаимно связаны и имеют сходный смысл.

Наконец, два соседних блока в месторождении, получаемые при очередном делении, имеют такие содержания x_1 и x_2, при которых показатели степеней в их аналитических выражениях должны отличаться на единицу. Например,

$$x_1 = (1+d)^{k-r}(1-d)^r m,$$
$$x_2 = (1+d)^{k-r-1}(1-d)^{r+1} m.$$

Следовательно, блок объема $2v$, получаемый при объединении двух соседних блоков, имеет среднее содержание, равное

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = (1+d)^{k-r-1}(1-d)^r m.$$

Таким образом, содержания в блоках объема $2v$ также следуют логарифмически биномиальному закону распределения, в котором лишь меняется параметр k на $k-1$. Если k велико, этот закон практически не отличается от логнормального и, следовательно, при укрупнении блоков обеспечивается устойчивость логнормальности распределения.

Итак, описанная выше схема позволяет одновременно показать, что если приемлемо единственное предположение о соблюдении принципа подобия, то, во-первых, формула де Вейса применима для расчета дисперсии [1], во-вторых, распределение содержаний является логарифмически биномиальным (или логнормальным, если k достаточно велико) и, в-третьих, обеспечивается устойчивость формы закона распределения.

Эти три вывода были получены при некоторых допущениях. Мы пренебрегли эффектом нулевых содержаний и эффектом объемного насыщения, т. е. предположили, что k не слишком велико (и, следовательно, объем v блоков остается достаточно большим сравнительно с размерами рудных частиц), а исходное среднее содержание относительно низко [максимальное содержание в блоке, равное $m(1+d)^k$, не оказывается больше теоретически возможного]. Наконец, случайную пространственную переменную мы заменили величиной d, т. е. ее средним значением. Это последнее допущение кажется тем более приемлемым, чем меньше дисперсия величины d по сравнению с логарифмической дисперсией σ^2 содержаний x, т. е. фактически чем больше значение k. Но именно при больших значениях k логарифмически биномиальный закон де Вейса перестает отличаться от логнормального закона распределения. Можно показать, что учет изменчивости величины d приведет к замене дискретного логарифмически биномиального закона распределения непрерывным логнормальным. Во всяком случае,

[1] Обратите внимание на то, что выведенная в настоящем параграфе формула $\sigma^2 = \ln \frac{V}{v}$ характеризует дисперсию *логарифмов* содержаний (логарифмическую дисперсию), тогда как точно так же записываемая формула де Вейса (VI, 4, 10) относится к дисперсии самих содержаний.— *Прим. ред.*

из рассмотренной теоретической схемы следует, что если распределение содержания является логнормальным, то логнормальный закон устойчив всегда, когда удовлетворяется принцип подобия.

Эта теория де Вейса имеет исключительно эвристический характер. В частности, с ее помощью нельзя дать строгое математическое определение случайной функции, которая была бы логнормально распределенной и одновременно следовала бы собственной схеме вейсовского типа. Теоретически же легко показать, что при любой линейной комбинации логнормальных переменных (как статистически связанных, так и независимых) можно получить переменную, закон распределения которой будет отличным от логнормального. Таким образом, устойчивость логнормальности, которая устанавливается экспериментально, является на самом деле лишь приближенной и, в частности, она, конечно, не может существовать, если рассматривать пробы, размер которых соизмерим с масштабами месторождения. Вопросам, касающимся формы законов статистических распределений, теперь придается значительно меньшее значение, чем это делалось прежде. Однако мы кратко рассмотрим теорию собственных схем с учетом логнормальности распределения изучаемой переменной.

§ 5. Теория собственных схем и логнормальное распределение

При попытке изложить теорию собственных схем с учетом логнормального распределения содержания возникают трудности, поскольку в теории собственных схем случайные схемы изучались с точностью до произвольного слагаемого, а такая неопределенность несовместима с логнормальностью переменной, которая по определению должна быть неотрицательной. Мы избежим этих трудностей, если будем рассматривать собственную схему с иным характером неопределенности. Изучим случайную функцию, следующую закону собственного рассеяния и одновременно логнормально распределенную, с точностью не до слагаемого, а до множителя.

Кроме того, в геостатистику введен ряд линейных операций [вычисление среднего значения $f(x)$ в объеме v, различные операции взвешивания и т. д.], поэтому при создании «логнормальной» теории собственных схем возникает двоякое осложнение: с одной стороны, линейная комбинация логнормальных величин не является логнормальной величиной, а с другой — логарифм линейной комбинации $\Sigma \lambda_i f(x_i)$ не совпадает с линейной комбинацией $\Sigma \lambda_i \ln f(x_i)$ логарифмов пространственной переменной.

Мы обойдем и эту трудность, приняв в качестве постулата устойчивость логнормального закона распределения; это допустимо, пока размеры геометрической базы рассматриваемых проб малы по сравнению с размерами разведываемого рудного тела.

Чтобы упростить изложение, рассмотрим случай, когда ковариационная функция существует. Пусть $\varphi(x)$ — нормально распределенная стационарная в широком смысле случайная функция с математическим ожиданием, равным $\ln \mu$, ковариационной функцией $\chi(h)$ и дисперсией $\sigma^2 = \chi(0)$. Положим, что

$$f(x) = e^{\varphi(x)}.$$

Тогда $f(x)$ — стационарная в широком смысле случайная функция, характеризующаяся логнормальным законом распределения и в соответствии с (XV,2,5′) имеющая математическое ожидание

$$m = E[f(x)] = \mu e^{\frac{1}{2}\chi(0)}.$$

Ковариационная функция $K(h)$ случайной функции определяется из соотношения

$$K(h)+m^2=E\left[e^{\varphi(x)+\varphi(x+h)}\right].$$

С помощью расчета, аналогичного тому, которым доказана формула (XV,2,30), найдем, что

$$K(h)+m^2=m^2e^{\chi(h)}. \qquad \text{(XV,5,1)}$$

Перейдем к проблеме оценки. Обозначим символами Y и Z —

$$Y=\frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx$$

и

$$Z=\frac{1}{V'}\int_{V'} f(x)\,dx$$

— средние значения функции $f(x)$ в двух областях V и V' (непрерывных или дискретных). Их математические ожидания равны m, а дисперсии и ковариация определяются, согласно (V,3,11),

$$\left.\begin{aligned} D(Y)&=\frac{m^2}{V^2}\int_V\int_V\left[e^{\chi(x-y)}-1\right]dx\,dy,\\ E\left[(Y-m)(Z-m)\right]&=\frac{m^2}{VV'}\int_V\int_{V'}\left[e^{\chi(x-y)}-1\right]dx\,dy.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV,5,2)}$$

Но дисперсию распространения в данном случае определим не как дисперсию $D(Y-Z)$ разности двух переменных, а как дисперсию разности логарифмов этих величин, т. е. логарифма их отношения:

$$\sigma_E^2=D\left(\ln\frac{Y}{Z}\right).$$

Затем, приняв в качестве постулата устойчивость логнормального распределения, можем рассматривать $\ln Y$ и $\ln Z$ как нормально распределенные величины с соответствующими дисперсиями σ_Y^2 и σ_Z^2 и ковариацией σ_{YZ}. Эти характеристики выводятся из (XV,5,2) с помощью обычных формул для логнормального закона распределения. Логарифмическая ковариация

$$\sigma_{YZ}=\ln\left\{1+\frac{1}{m^2}E\left[(Y-m)(Z-m)\right]\right\}=\ln\left\{\frac{1}{VV'}\int_V\int_{V'}e^{\chi(x-y)}\,dx\,dy\right\}.$$

Значения логарифмических дисперсий σ_Z^2 и σ_Y^2 определяются из полученного выражения, если подставить $V=V'$. Таким образом, логарифмическая дисперсия распространения среднего Z в объеме V' на объем V по принятому нами определению $\sigma_E^2=D\left(\ln\frac{Y}{Z}\right)$, равна

$$\sigma_E^2=\ln\left[\frac{1}{V^2}\int_V\int_V e^{\chi}\,dx\,dy\right]+\ln\left[\frac{1}{V'^2}\int_{V'}\int_{V'}e^{\chi}\,dx\,dy\right]-$$
$$-2\ln\left[\frac{1}{VV'}\int_V\int_{V'}e^{\chi}\,dx\,dy\right]. \qquad \text{(XV,5,3)}$$

Это выражение уже не зависит от среднего значения m, а полностью определяется ковариационной функцией $\chi(h)$. Введем теперь логарифмическую собственную функцию $\gamma(h)$, определив ее как

$$\gamma(h)=\chi(0)-\chi(h).$$

Подставим $\gamma(h)$ в выражение (XV,5,3) и получим

$$\sigma_E^2=\ln\left[\frac{1}{V^2}\int_V\int_V e^{-\gamma}\,dx\,dy\right]+\ln\left[\frac{1}{V'^2}\int_{V'}\int_{V'}e^{-\gamma}\,dx\,dy\right]-$$
$$-2\ln\left[\frac{1}{VV'}\int_V\int_{V'}e^{-\gamma}\,dx\,dy\right]. \qquad \text{(XV,5,4)}$$

Найденное выражение зависит только от собственной функции $\gamma(h)$, поэтому можно принять, что дисперсия оценки, определяемая (XV,5,4), будет существовать даже в том случае, если логарифмическая дисперсия $\chi(0)$ не существует. Эта формула представляет собой выражение дисперсии оценки в теории собственных схем, полученное с учетом логнормальности распределения пространственной переменной.

Вспомним далее, что величина дисперсии оценки связана прежде всего с нерегулярной частью вариограммы. Пусть Ar^λ — член нерегулярной части вариограммы с наименьшим показателем степени λ. Для такого члена

$$e^{-\gamma(h)}=1-A|h|^\lambda+\ldots$$

и

$$\frac{1}{VV'}\int_V\int_{V'}e^{-\gamma}\,dx\,dy=1-\frac{A}{VV'}\int_V\int_{V'}|h|^\lambda\,dx\,dy+\ldots.$$

Главная часть дисперсии оценки σ_E^2 представляется выражением

$$\frac{2}{VV'}A\int_V\int_{V'}|x-y|^\lambda\,dx\,dy-\frac{A}{V^2}\int_V\int_V|x-y|^\lambda\,dx\,dy-$$
$$-\frac{A}{V'^2}\int_{V'}\int_{V'}|x-y|^\lambda\,dx\,dy.$$

Таким образом, дисперсия логарифмической оценки σ_E^2 имеет в качестве главной части дисперсию, вычисляемую с помощью общих геостатических методов по вариограмме $\gamma(h)$ логарифмов изучаемой переменной. Этот результат, однако, получен только для главных частей дисперсии и справедлив лишь в тех случаях, когда дисперсия оценки мала (на практике это условие часто выполняется). С другой стороны, можно показать, что замена дисперсии оценки σ_E^2 ее главной частью приводит к занижению результата (дисперсия оценки всегда больше ее главной части на величину второго порядка малости).

Книга третья

ПОИСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ РАЗВЕДКЕ И ВВОДЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ В ЭКСПЛУАТАЦИЮ

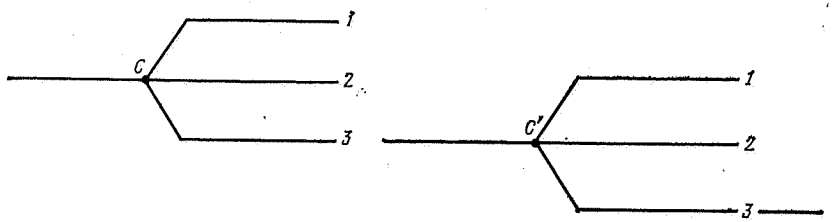
Введение

После того как определены объемы капиталовложений в горную промышленность и значимость риска экономических потерь, никакая компания (или административный орган) не решится ввести месторождение в эксплуатацию без достаточно точной предварительной оценки всех геологических, технических и экономических параметров, обусловливающих рентабельность нового рудника. Эти параметры разнообразны и многочисленны. Предварительное изучение рыночной конъюнктуры дает возможность уточнить экономические факторы (спрос, рынок сбыта и др.). Экспериментальные исследования в лаборатории или на опытной фабрике и детальное изучение различных проектов эксплуатации позволяют выбрать наилучшее техническое решение. Наконец, после разведки месторождения с помощью буровых или горных работ производят подсчет запасов руд и оценку среднего содержания в них полезных компонентов. В идеале было бы желательно знать все эти параметры точно. Но подобная информация стоит дорого. В частности, на проходку горных выработок уходит значительная часть общей суммы капиталовложений. В процессе разведки наступает момент, когда дополнительно получаемая информация перестает окупать затрачиваемые на нее суммы. Между двумя крайними положениями — нулевые затраты на разведку и максимальный риск экономических потерь при отработке, с одной стороны, и полное отсутствие риска и бесконечные затраты на разведку — с другой, обязательно существует третье, компромиссное, соответствующее оптимальному соотношению между затратами и риском потерь. Где лежит этот оптимум и как его определить — вопросы, на которые мы попытаемся здесь ответить. При этом мы ограничимся проблемой определения оптимального объема разведочных работ. Как экономические данные (стоимость руды, возможность сбыта и пр.), так и технические параметры принимаемых методов отработки рудных тел и переработки руды предполагаются известными. Кроме того, рассмотрим влияние на рентабельность двух очень важных технических параметров — размера годовой добычи и минимально промышленного содержания.

Ясно, что абсолютное решение рассматриваемой проблемы не представляется возможным. Оптимальная детальность разведки зависит от характеристик самого месторождения; ее можно определить, если только имеется четкое представление об этих характеристиках, т. е. если уже завершена первая фаза геологоразведочных работ. Последовательность принятия возможных решений может быть представлена графически (фиг. 207). Момент окончания работ, связанных с первой стадией разведки, обозначается на схеме точкой С. В этой точке необходимо принять одно из трех решений: 1) прекратить разведочные работы и не строить горнодобывающее предприятие, 2) сдать месторождение в эксплуатацию и 3) провести дополнительные разведочные работы. В последнем случае после проведения второй фазы разведочных работ вновь возникает необходимость принять одно из трех перечисленных выше решений, но уже на основе более полной информации. В каче-

стве критерия, который позволял бы произвести выбор между этими решениями, мы приняли (как это часто делают) условие максимальности математического ожидания будущей прибыли. Таким образом, в точке C принимается то решение, которое обеспечивает максимальное значение ожидаемой прибыли начиная с момента, соответствующего этой точке. Первое решение всегда приводит к нулевой прибыли. В случае второго решения математическое ожидание прибыли определяется как результат предварительной оценки экономического баланса проекта отработки месторождения, составленного на основе информации, полученной на первой стадии разведки. В третьем случае решение принимается на основе вероятностного предсказания результатов доразведки месторождения в зависимости от соотношения между стоимостью дополнительных разведочных работ и соответствующим уменьшением риска потерь [1].

Используя геостатистические методы, можно на каждом этапе получить объективную меру имеющейся информации в виде дисперсий, характеризующих точность оценок запасов и содержания. Этим дисперсиям придают



Фиг. 207. Схема последовательного анализа данных разведки месторождения.
1 — закрытие месторождения; *2* — ввод месторождения в эксплуатацию; *3* — продолжение разведочных работ.

экономическое выражение и с их помощью определяют численные значения математических ожиданий будущей прибыли.

Но это еще не все. На оптимальный объем разведочных работ, кроме риска потерь, влияют и другие факторы. Действительно, если решение об эксплуатации месторождения уже принято (и, следовательно, риск экономических потерь становится достаточно малым), еще необходимо подготовить наилучший из возможных проект отработки, в котором, в частности, должны быть указаны оптимальные значения годовой производительности предприятия и минимально промышленного содержания в элементарном объеме извлекаемой руды. В свою очередь размер годовой добычи и минимально промышленное содержание зависят от суммарных запасов руды в месторождении. Поэтому ошибка в оценке запасов и содержания ведет к тому, что принятый проект отработки перестает быть оптимальным. В результате появляются экономические потери, вероятное значение которых может быть вычислено и которые должны быть включены в баланс вместе с затратами на дополнительные разведочные работы. Даже если рентабельность месторождения не вызывает сомнения, может быть целесообразно провести дополнительные разведочные работы с целью выбрать наилучший проект отработки месторождения (но, конечно, не с целью уменьшить и без того незначительный риск потерь).

Вопрос об определении размеров предприятия (его годовой производительности) возникает только после того, как будет доказана рентабельность отработки месторождения. Теоретически порядок должен быть обратным, так как лишь после окончания разведки можно определить различные варианты и, сравнивая их, выполнить расчет математических ожиданий будущей прибыли, соответствующей каждому варианту. Иными словами, следует в первую очередь изучить все, от чего зависит рентабельность, а затем решать проблему определения оптимальных размеров.

[1] Вероятностный подход в данном случае — это искусственный прием, смысл и пределы применимости которого мы определим ниже.

Именно такая последовательность положена в основу плана построения книги. Содержание гл. XVI тесно связано с работами Ф. Блонделя; в этой главе изучается рентабельность отработки месторождения, запасы которого считаются известными, и, кроме того, ставятся проблемы выбора оптимальных значений минимально промышленного содержания и годовой производительности предприятия. В гл. XVII определяется оптимальная детальность разведки месторождения при несомненной рентабельности отработки. Во внимание принимается соотношение между стоимостью геологоразведочных работ и экономическими потерями, связанными с ошибочным определением размера годовой отработки. Наконец, в гл. XVIII в расчет принимается риск потерь и делается попытка строго сформулировать схему последовательного принятия решений, изображенную на фиг. 207. Две первые главы посвящены фактически оптимизации технических параметров: размера годовой добычи, минимально промышленного содержания и объема геологоразведочных работ (последние выступают в роли средства, служащего для определения оптимальных значений первых двух параметров). Объектом исследования в гл. XVIII является последовательная, или относительная, оптимизация (оптимизация, зависящая от той информации, которая имеется в наличии к моменту принятия решения, т. е. в точке C). Последовательная оптимизация производится при обязательном учете ненулевого значения нормы актуализации.

ГЛАВА XVI

Выбор минимально промышленного содержания и объема годовой добычи

§ 1. Определение параметров

Предположим, что технологические характеристики месторождения известны точно и однозначно определены наилучшие методы отработки и обогащения руд. Остается выбрать два основных технических параметра: *объем годовой добычи* t и *минимальное промышленное содержание*, или граничное содержание x, по которому производится селективная выемка (сортировка) руд.

Смысл второго параметра необходимо уточнить. Принятие содержания x в качестве граничного означает, что отработке должны подлежать только те блоки (элементарные объемы), в которых средние содержания полезного компонента превышают содержание x. Естественно, что такое определение минимально промышленного содержания имеет смысл только при условии задания размеров этих блоков, т. е. возможной степени селективности при отработке месторождения. Мы считаем, что эти размеры известны, так как они связаны с принятым методом отработки.

Тоннаж руды $T(x)$ и *среднее содержание* $m(x)$ являются убывающей и возрастающей функциями соответственно минимально промышленного содержания x. Если $T(0) = T_0$ — общий тоннаж руды в месторождении при $x = 0$, то дифференциал $\frac{dT(x)}{T_0}$ определяет долю от общих запасов месторождения, которую составляют руды с содержаниями, заключенными между x и $x + dx$. В вероятностном плане этот дифференциал интерпретируется как относительная частота $f(x)\,dx$ появления содержаний от x до $x + dx$ в частотном распределении содержаний по тоннажу руды. Ниже мы откажемся от такой интерпретации, ибо она не поясняет существа рассматриваемого здесь вопроса[1]. Функция $T(x)$ не является вероятностной, так как она

[1] Вероятностная интерпретация функции $T(x)$ возможна лишь при некоторых весьма искусственных предположениях, о которых очень редко упоминают в литературе. Если месторождение может рассматриваться как совокупность бесконечного числа блоков с минимальными для принятого способа отработки размерами, расположенных в пределах минерализованного пространства, то при случайном выборе блока (с равной вероятностью для всех блоков) содержание x в этом блоке окажется случайной величиной с определенной плотностью вероятности $f(x)$. Функция распределения $\int_x^\infty f(x)\,dx$ этой величины имеет лишь отдаленную связь с функцией $T(x)$. Действительно, в процессе эксплуатации месторождение делится на блоки не произвольно, а с учетом закономерностей размещения руд.

В принципе определение функции $T(x)$ можно представить следующим образом. Вначале рассматривают совокупность разбиений P_k минерализованной площади на блоки, размер которых не меньше обусловленных технологией отработки элементарных объемов. При каждом разбиении P_k отбирают блоки (число которых конечно) с содержаниями, превышающими некоторую величину x, получая тем самым функцию $T_k(x)$ и соответствующие значения возможной прибыли $B_k(x)$. Обозначим символом P_i разбиение, при котором величина возможной прибыли $B_i(x)$ при данном значении x_i будет наибольшей (так как нет оснований ожидать, что некоторое разбиение P_i окажется оптимальным для всех граничных содержаний x, то индекс i является функцией этого содержания). Тогда по определению функция $T(x)$ при каждом значении x будет равна величине $T_i(x)$, соответствующей оптимальному разбиению P_i. Понятно, что разбиение месторождения на блоки, осуществляемое горняком при заданном минимально промышленном содержании, не будет

отражает лишь результаты применения данного способа отработки (при некотором значении минимально промышленного содержания x) к конкретному месторождению, т. е. к детерминированному природному объекту. В частности, отношение $T(x)/T_0$ не следует отождествлять с кумулятивной функцией распределения содержаний в отобранных пробах. Даже если сделать допущения, при которых возможен вероятностный подход (см. последнюю сноску), то все равно распределение содержаний в пробах не будет эквивалентным распределению $T(x)$ средних содержаний в блоках, принятых за элементарные объемы при селективной отработке месторождения. Распределение в пробах всегда характеризуется большей дисперсией. Правда, геостатистическими методами можно вычислить дисперсию содержаний по блокам, если известно значение дисперсии, определенное экспериментально по данным опробования месторождения. Если при этом распределение содержаний описывается хотя бы приближенно одним из простых законов (нормальным, логнормальным и др.), легко построить также и функцию распределения $T(x)$. При произвольном законе распределения содержаний в пробах можно получить гистограмму средних содержаний в блоках путем аффинного преобразования гистограммы содержаний в пробах, сохраняя при этом неподвижной точку среднего содержания и беря модуль преобразования равным отношению стандартных отклонений соответствующих распределений. Эти методы применимы в предположении случайного распределения месторождения на блоки.

Однако даже в этом случае необходимо, чтобы месторождение было однородным. В случае, когда месторождение настолько неоднородно, что его нельзя разделить на несколько однородных частей, следует воспользоваться графическим методом. При этом строят план изолиний по содержаниям $X_1, X_2, \ldots$, а затем непосредственно рассчитывают объемы руды, соответствующие этим бортовым содержаниям, по которым легко получить представление о функции $T(x)$. Подобный графический способ иногда дает лучшие результаты, чем аналитический, особенно если месторождение очень неоднородно и характеризуется зональностью или наличием потоков. Но он несет в себе опасность систематической переоценки среднего содержания. Чтобы получить оценку среднего содержания в пределах контура, соответствующего данному бортовому содержанию, следует произвести крайгинг, т. е. при расчете среднего учесть не только внутренние, но и внешние по отношению к контуру данные. Так как при способе изолиний внеш-

идеальным, но оно, как правило, окажется одним из лучших и, во всяком случае, будет существенно отличаться от разбиения, произведенного вслепую.

Кроме того, минимально промышленное содержание x — не единственный критерий при принятии решения об отработке того или другого блока. Изолированный блок с содержанием, превышающим минимально промышленное, может быть оставлен нетронутым отработкой, если на его извлечение потребуются слишком большие затраты. Строго говоря, каждому разбиению P_k минерализованного пространства на N_k блоков соответствует совокупность $1 + C^1_{N_k} + \ldots + C^{N_k}_{N_k} = 2^{N_k}$ вариантов возможной отработки, при которых извлекается различное число $(0, 1, \ldots, N_k)$ блоков. Из этих вариантов только один $S_k(b)$ наилучший при данных экономических условиях, характеризуемых некоторым параметром b. При изменении экономических условий оптимальный вариант отработки $S_k(b)$ при разбиении P_k, а также связанные с ним тоннаж руды $T_k(b)$ и среднее содержание полезного компонента $m_k(b)$ в извлекаемой руде зависят от параметра b. При фиксированном параметре b из всех вариантов $S_k(b)$ может быть выбран наилучший $S_i(b)$, где индекс i — функция параметра b. Тогда, согласно определению, функциями $T(b)$ и $m(b)$ будут функции, равные для каждого значения b величинам $T_i(b)$ и $m_i(b)$ соответственно [т. е. тоннажу и среднему содержанию при оптимальном варианте отработки $S_i(b)$]. Исключив параметр b, получим соотношение $m = f(T)$ между тоннажом извлекаемой руды и средним содержанием полезного компонента. Параметр $x = \frac{dmT}{dT}$, который всегда входит в уравнения оптимума, играет точно ту же роль, что и минимально промышленное содержание, понятие которого только что введено.

ние содержания всегда меньше содержания, соответствующего изолинии, то в оценку вносится систематическое завышение, которое, как правило, корректируется с помощью более или менее произвольного «уменьшения содержания за счет возможного разубоживания». Впрочем, следует признать, что эта проблема очень трудна. Непрерывный крайгинг возможен, если рудное тело (и непосредственно прилегающие к нему участки) геостатически однородно и изотропно. Однако чаще всего он невозможен из-за зональности оруденения или наличия обогащенных потоков — при явной неоднородности оруденения в промышленных блоках процедура крайгинга вообще лишается смысла, так как крайгинг приводит к разубоживанию, величину которого можно определить только экспериментальным путем.

Наконец, можно рекомендовать следующий метод практического определения функций $T(x)$ и $m(x)$. Для заданного минимально промышленного содержания по плану опробования выбирают способ разбивки месторождения на эксплуатационные блоки (имея в виду достижение наилучших возможных результатов при отработке) и определяют среднее содержание в кондиционных блоках (пользуясь процедурой крайгинга или, если крайгинг невозможен, оценивая экспериментально величину разубоживания). Затем повторяют аналогичную процедуру для двух или трех различных значений x и получают в результате соответствующие значения $T(x)$ и $m(x)$. Эти данные позволяют судить о поведении функции $T(x)$ и $m(x)$ в желаемом диапазоне изменения минимально промышленного содержания.

Каковы бы ни были трудности практического нахождения функций $T(x)$ и $m(x)$, эти функции всегда существуют и отражают результат применения к детерминированному природному объекту (месторождению) определенной технологической процедуры (способа отработки), при этом $T(x)$ — убывающая, а $m(x)$ — возрастающая функции x. Каждому значению m, определяемому заданной величиной x, соответствует вполне определенное значение тоннажа руды T. Следовательно, можно найти выражение зависимости тоннажа руды $T(x)$ от среднего содержания m, а не от минимально промышленного x.

Равным образом можно определить функцию $m(T)$, дающую среднее содержание в зависимости от тоннажа извлекаемой руды. Отметим, что всегда справедливо соотношение

$$x = \frac{d(mT)}{dT} = m + \frac{dm}{d\ln T}. \qquad \text{(XVI,1,1)}$$

В самом деле, $d(mT)$ представляет собой тоннаж металла dQ, содержащегося в классе руды dT со средним содержанием, равным x [1]. В некоторых случаях соотношение (XVI,1,1) будет использоваться для определения минимально промышленного содержания. Может случиться, что условия рентабельности отработки будут неодинаковыми для различных частей месторождения. Отработка одного и того же блока с некоторым заданным содержанием может оказаться рентабельной, если блок расположен в богатой части месторождения, и нерентабельной, если он расположен изолированно и его вскрытие требует значительных затрат. В подобном случае нет единого для всего месторождения минимально промышленного содержания, но критерий сортировки x всегда может быть найден из соотношения (XVI,1,1), так как функция $T(m)$ всегда определена.

[1] С чисто формальной точки зрения

$$m(x)\,T(x) = -\int_x^\infty xT'(x)\,dx$$

откуда дифференцированием получаем

$$d(mT) = x\,dT.$$

Функция $m(T)$ иногда представляется в виде очень простого выражения

$$m = \alpha - \beta \ln T, \qquad \text{(XVI,1,2)}$$

известного под названием закона Ласки [50]. Это эмпирически установленное соотношение очень хорошо представляет зависимость содержания от запасов руды (в пределах технически возможного диапазона содержаний: его нельзя экстраполировать в нуль и бесконечность). В допустимых границах содержаний формула (XVI,1,2) может рассматриваться как хорошая аппроксимация соотношения между содержанием и запасом при логнормальном распределении содержаний [58]. Ничего не говоря заранее относительно справедливости этого соотношения в общем случае, отметим, что в практическом отношении закон Ласки представляет собой великолепную интерполяционную формулу и позволяет, в частности, описать поведение кривой $m(T)$ между двумя экспериментальными точками, найденными для двух различных проектов отработки. Используя соотношение (XVI, 1,2), справедливое в практически интересном диапазоне, соответствующем экспериментальным точкам, с помощью формулы (XVI, 1,1) можно представить минимально промышленное содержание в очень простом виде

$$x = m - \beta. \qquad \text{(XVI,1,3)}$$

После того как определены технические параметры — размер годовой добычи t и минимально промышленное содержание x, тоннаж руды $T(x)$ и среднее содержание в извлекаемой руде $m(x)$, необходимо уточнить экономические параметры, среди которых мы выделим три основных: рыночный курс, годовые эксплуатационные затраты, общие капиталовложения.

Рыночный курс, поскольку он не зависит от предпринимателя, может считаться заданной величиной. Для простоты мы будем полагать эту величину известной и постоянной. Впрочем, все предлагаемые ниже уравнения легко могут быть видоизменены с тем, чтобы учесть колебания рыночного курса. При учете сбыта концентрата и производительности перерабатывающего оборудования величина рыночного курса позволяет определить стоимость $V(m)$ металла, извлекаемого из тонны руды с содержанием m. Здесь часто можно использовать формулу

$$V_1(m) = bm - b_0, \qquad \text{(XVI,1,4)}$$

в которой постоянная b_0 всегда может быть объединена с постоянным членом выражения $p(t)$, которое мы определим ниже.

Удельные затраты на эксплуатацию за год равны сумме годовых затрат на добычу, переработку, транспортировку руды и общие расходы, деленной на размер годовой добычи t. Удельные затраты за год представляются функцией $p(t)$ размера годовой добычи t. Эта функция, как правило, предполагается убывающей, и для нее часто используют выражение

$$p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}, \qquad \text{(XVI,1,5)}$$

которое приводит к линейной функции для общих годовых затрат:

$$tp(t) = a_1 + a_0 t,$$

где a_1 и a_0 — фиксированные пропорциональные затраты.

Капиталовложения (капитальные горные работы, перерабатывающая фабрика, иногда — поселок, дороги и т. д.) — это совокупность затрат, которые необходимо сделать до начала добычи. Они представляются возрастающей функцией годовой добычи t. Отношение $I(t)/t$ капиталовложе-

ний к годовой добыче является, наоборот, убывающей функцией [1] размера годовой добычи t. Для приложений можно использовать либо линейное соотношение [2]

$$I(t) = C_0 + C_1 t, \qquad \text{(XVI,1,6)}$$

либо более общее выражение

$$I(t) = C_0 + C_1 t^{\gamma}, \qquad \text{(XVI,1,7)}$$

где показатель степени положителен и не превышает единицы. При $C_0 = 0$ $\gamma = \frac{2}{3}$ формула сводится к эмпирически установленному и широко используемому в различных отраслях промышленности закону, отражающему изменения капиталовложений и производительности пропорционально квадрату и кубу размера предприятия.

Итак, мы будем использовать функции следующих трех экономических параметров: $V(m)$ — стоимости металла, извлекаемого из тонны руды с содержанием m; $p(t)$ — затрат на добычу тонны руды; $I(t)$ — общих капиталовложений.

Целесообразно ввести дополнительный параметр — время жизни N рудника, которое связано с запасом руды $T(x)$ и размером годовой добычи t очевидным соотношением

$$N = \frac{T(x)}{t}. \qquad \text{(XVI,1,8)}$$

Ожидаемый экономический баланс будущей эксплуатации месторождения удобно представить в виде выражения *актуализированного* (приведенного к данному моменту) *значения будущей прибыли*. Обозначим символами i и B_i *норму актуализации и актуализированную* в соответствии с этой нормой *будущую прибыль*. Тогда, очевидно,

$$B_i = [V(m) - p(t)]\, t \frac{1 - e^{-iN}}{i} - I(t)\ ; \qquad \text{(XVI,1,9)}$$

это соотношение в частном, но важном случае при $i = 0$ дает очень простую формулу для неактуализированной прибыли:

$$B = [V(m) - p(t)]\, T(m) - I(t). \qquad \text{(XVI,1,10)}$$

Во всех случаях прибыль может рассматриваться как функция двух параметров m и t, или, с учетом формулы (XVI,1,1), параметров x и t, т. е. минимально промышленного содержания и размеров годовой добычи. Критерием, который должен служить для выбора значений этих параметров, является максимальная прибыль. Остается не выясненным вопрос, нужно ли учитывать при этом норму актуализации? Мы покажем в общем виде, что оптимальные значения всех технических параметров должны определяться при нулевой норме актуализации.

§ 2. Общие уравнения оптимума

Вначале запишем общие уравнения, не конкретизируя значения нормы актуализации. Затем покажем, что принятие нормы актуализации, не равной нулю, приводит к выводам, противоречащим как реальной практике отработки месторождений (каждое месторождение независимо от его размеров должно было бы отрабатываться практически в заранее заданный и весьма короткий срок), так и моральным принципам горного дела (практика «снимания пенок»). Наконец, мы выявим глубокие причины, по которым оптимизация параметров должна производиться при нулевой норме актуализации, и перепишем общие уравнения для этого частного случая.

[1] Если отношение $I(t)/t$, начиная с некоторого критического значения t_c, оказывается возрастающей функцией размера добычи t, то можно показать, что, как правило, имеет смысл разделить эксплуатацию между несколькими участками с годовой производительностью каждого, не превышающей критического значения t_c.

[2] Эта формула принята Блонделем в работе [22], где сформулирована рассматриваемая проблема.

Общие уравнения при произвольной норме актуализации

Приняв за исходное выражение (XVI,1,9), найдем значения m, t и N, при которых актуализированная прибыль B_i будет максимальной. Учитывая уравнение (XVI,1,8), связывающее значения m, t и N, с помощью классического метода Лагранжа получим следующие уравнения оптимума:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial B_i}{\partial t} = \lambda N, \\ &\frac{\partial B_i}{\partial N} = \lambda t, \\ &\frac{\partial B_i}{\partial m} = -\lambda \frac{dT}{dm}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI,2,1)}$$

к которым необходимо добавить уравнение связи (XVI,1,8), позволяющее исключить параметр Лагранжа λ. Чтобы упростить запись, положим

$$b = \frac{dV(m)}{dm}. \qquad \text{(XVI,2,2)}$$

В частных, но практически всегда выполняющихся условиях, справедливо соотношение (XV,1,4), и параметр b, который отражает изменение стоимости металла, извлекаемого из одной тонны руды, с изменением среднего содержания m — величина постоянная. С учетом выражения (XVI,1,9) для B_i систему уравнений (XVI,2,1) и (XVI,1,8) запишем как

$$\left.\begin{aligned} &\left[V - \frac{d}{dt} tp(t)\right] \frac{1 - e^{-iN}}{i} = \lambda N + I'(t), \\ &(V - p)\, e^{-iN} = \lambda, \\ &bt \frac{1 - e^{-iN}}{i} = -\lambda \frac{dT}{dm}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI,2,3)}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что множитель Лагранжа λ можно интерпретировать как актуализированную стоимость (без амортизации) последней тонны руды, которая будет выдана на исходе N лет отработки месторождения. Мы воспользуемся этим, чтобы исключить λ. Кроме того, соотношение (XVI,1,1) позволяет выразить производную $\frac{dT}{dm}$ через среднее и минимально промышленное содержание m и x. Таким образом, после некоторых несложных преобразований система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &(V - p)\left[\frac{1 - e^{-iN} - iNe^{-iN}}{i}\right] = I' + t\frac{(1 - e^{-iN})}{i}\frac{dp}{dt}, \\ &x = \frac{p}{t} + (m - x)\left[\frac{e^{iN} - 1 - iN}{iN}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI,2,4)}$$

Эта система, дополненная уравнением (XVI,1,8) и соотношением между запасом руды и содержанием, достаточно легко решается методом последовательных приближений. В частном случае, когда содержание в расчет не принимается (месторождения типа «все или ничего», т. е. не допускающие селективной обработки), остается одно первое уравнение, которое определяет размер годовой добычи. Если размер годовой добычи t известен, второе

уравнение позволяет рассчитать минимально промышленное содержание x. При этом второй член правой части уравнения играет роль поправочного коэффициента и в частном случае, когда справедлив закон Ласки (XVI,1,3), он сводится к постоянной величине.

Аномалии, связанные с ненулевым значением нормы актуализации

Использование системы (XVI,2,4) с ненулевыми значениями i при решении задач, относящихся к реальным месторождениям, приводит к выводам, которые кажутся ошибочными. Эти аномалии проявляются уже в самих уравнениях (XVI,2,4). Во-первых, из первого уравнения, которое определяет размер годовой добычи, следует, что время жизни рудника не должно превышать некоторой величины N_c, как бы ни были велики запасы руды T[1]. В пределе получается, что бесконечно большое месторождение должно быть отработано за конечное число лет. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что для $i \neq 0$ первое из уравнений (XVI,2,4) не дает решения с N, равным бесконечности. Действительно, при $N = \infty$ и $i \neq 0$ все экспоненты обращаются в нуль, и уравнение принимает следующий вид:

$$V = i\frac{dI}{dt} + \frac{d(pt)}{dt}. \qquad \text{(XVI,2,5)}$$

Так как p и I/t — убывающие функции аргумента t,

$$\frac{dI}{dt} \leqslant \frac{I}{t} \text{ и } \frac{d(pt)}{dt} \leqslant p.$$

Поэтому, если справедливо уравнение (XVI,2,5), выполняется соотношение

$$Vt \leqslant iI + pt,$$

которое свидетельствует об убыточности эксплуатации месторождения в рассматриваемом случае. Следовательно, уравнение (XVI,2,4) приводит к конечному значению времени существования рудника, если только месторождение является промышленным. При численном решении прикладных задач почти всегда оказывается (за исключением случая очень мелких месторождений), что время жизни рудника, определяемое уравнением (XVI,2,4), практически постоянно и равно, как правило, очень небольшому критическому значению N_c. Таким образом, каждое месторождение, независимо от его запасов, должно было бы отрабатываться в очень короткий срок.

Пример. Рассмотрим пример, заимствованный из упоминавшейся выше работы Ф. Блонделя. Речь идет об одном из африканских железорудных месторождений, для которого запасы и содержание практически заданы (месторождение типа «все или ничего»), и поэтому рассматривается только первое из уравнений (XVI,2,4). Из анализа различных проектов отработки месторождения получено

$$V = 15,$$

$$p = 9 + 3 \cdot 10^6 \frac{1}{t},$$

$$I(t) = 50 \cdot 10^6 + 10t,$$

где величины V и p выражены в долларах, а годовая производительность t — в тоннах на год. При этих значениях и норме актуализации $i = 10\%$ предельное время эксплуатации N_c лишь незначительно превосходит семь лет. Из табл. 48, иллюстрирующей зависимость размера годовой добычи

[1] Этот вывод получен П. Массе [54], но при очень частных допущениях (удельные затраты за год p — постоянная величина, а сумма капиталовложений I — пропорциональна размеру годовой добычи).

и времени отработки от суммарных запасов T, видно, что при запасах, превышающих 100 млн. m, время жизни рудника практически постоянно и равно семи годам.

Таблица 48

Запас руды, млн. m	Годовая добыча, млн. m	Продолжительность жизни в годах
20	6	3,3
50	7,7	6,5
100	14,3	7,0
350	48,0	7,2
1 600	219,0	7,3

Чтобы отработать за семь лет запасы в полтора миллиарда тонн, необходимо принять фантастический размер производительности рудника, равный 200 млн. m в год. Могут возразить, что в этом случае добыча должна быть ограничена в связи с неспособностью мирового рынка поглотить такое количество руды. На деле, если даже конъюнктура характеризуется крайним недостатком железных руд, никакая компания не может обеспечить такой громадный масштаб годовой добычи. Кроме того, аномалия, наблюдаемая в случае крупных месторождений железа, в той же степени проявляется и в случае более умеренных по размерам рудных месторождений, разработка которых не может повлиять на мировой рынок.

Таким образом, исследование первого из уравнений (XVI,2,4) выявляет первую аномалию: время жизни месторождения получается практически независимым от общих запасов руды и весьма малым по сравнению с реальным. На практике же годовая производительность горных предприятий всегда увязывается с размерами общих запасов руды. Иногда в литературе упоминают старое эмпирическое правило, согласно которому годовая производительность пропорциональна корню квадратному из размера запасов (во всяком случае, возрастает, хотя и медленнее, чем запасы). Подобные результаты получают, как мы сейчас покажем, если принять норму актуализации равной нулю. В частности, возрастание годовой производительности пропорционально корню квадратному из размера запасов непосредственно выводится из уравнения (XVI,1,6).

Рассмотрим теперь второе из уравнений (XVI,2,4), с помощью которого определяется оптимальное значение минимально промышленного содержания x. Второй член правой части этого уравнения, который при $i \neq 0$ является положительной возрастающей функцией срока отработки N, при $i = 0$ исчезает, и уравнение приобретает вид

$$x = \frac{p}{b}. \qquad \text{(XVI,2,6)}$$

Полученная формула соответствует правилу минимальной рентабельности, согласно которому должна извлекаться каждая порция руды, содержащая металл в количестве, достаточном для того, чтобы можно было окупить все предстоящие расходы по добыче, транспортировке и переработке этой порции (считается, что капиталовложения окупаются за счет богатых участков месторождения). Это правило широко используется на практике всеми горными компаниями. Если принять ненулевую норму актуализации, то минимально промышленное содержание, определяемое по формуле (XVI,2,4), будет завышено из-за влияния второго члена. Использование такого минимально промышленного содержания приведет к практике «снимания пенок», т. е. к хищнической отработке наиболее богатых частей месторождения, противоречащей

моральным принципам горного дела и реальному поведению серьезного предпринимателя.

Таким образом, анализ обоих уравнений системы (XVI,2,4) показал, что лишь при условии принятия нулевой нормы актуализации они приводят к удовлетворительным и соответствующим реальной практике результатам. Как мы увидим, это не случайно.

Оптимизация технических параметров при нулевой норме актуализации

Почти очевидно, что при плановой экономике оптимальные технические параметры должны определяться при норме актуализации, равной нулю. Задача, стоящая перед горнодобывающей промышленностью, заключается в ежегодном производстве при минимальной себестоимости руды или металла в количестве, отвечающем нуждам общества в текущем году; при этом потребности общества и возможности горнодобывающей промышленности рассматриваются в целом, а не для каждого отдельного месторождения. Вся горнодобывающая промышленность рассматривается практически как хозрасчетная. Валовая прибыль всех горных предприятий, занятых эксплуатацией месторождений в течение текущего года, служит для финансирования капиталовложений, которые должны быть произведены в том же году для пуска в эксплуатацию новых месторождений взамен отрабатываемых. Таким образом, капиталовложения на освоение каждого конкретного месторождения амортизируются не за счет будущей продукции этого же месторождения, а за счет всей реализуемой в текущем году продукции эксплуатируемых месторождений. Следовательно, капиталовложения выступают в роли простого взноса на возобновление месторождения, и норма актуализации исчезает, так как сравнению подлежат лишь затраты, произведенные в течение одного и того же года.

И в условиях экономики, подчиняющейся законам конкуренции, эта точка зрения должна быть принята (и принимается, по крайней мере в скрытом виде) крупной горнодобывающей компанией, требующей самоокупаемости своих предприятий. Такой компании нужно, например, столько-то тысяч тонн руды ежегодно для снабжения ее металлургических заводов. При этом единственная проблема, стоящая перед компанией, заключается в обеспечении минимальной себестоимости требуемого количества руды, т. е. в минимизации эксплуатационных затрат и капиталовложений, произведенных за текущий год. Таким образом, размер годовой добычи, минимально промышленное содержание и в более общем случае все технические параметры будут определяться по условию оптимума при $i = 0$. Именно так компания должна делать (и действительно, делает), если она не хочет ежегодно обрекать себя на излишние расходы.

Пример. Для иллюстрации этого положения вновь обратимся к рассмотренному ранее примеру железорудного месторождения. Предположим, что для обеспечения металлургической промышленности имеется большое число одинаковых месторождений с запасами $T = 1$ млрд. m каждое. Если ежегодная потребность в руде составляет 1 млрд. m, то, очевидно, в год должно отрабатываться одно месторождение и одно новое подготавливаться к отработке. С помощью уравнений системы (XVI,2,4) при двух значениях нормы актуализации ($i = 0$ и $i = 10\%$) мы вычислили оптимальные значения годовой добычи t для каждого месторождения, числа $k = N$ одновременно эксплуатируемых месторождений, в данном случае равного времени жизни каждого из них, и общие затраты на эксплуатацию и капиталовложения, необходимые для обеспечения постоянной годовой добычи, равной 1 млрд. m (табл. 49).

Для нормы актуализации $i = 10\%$ эксплуатационные расходы несколько меньше, а капиталовложения существенно больше, чем для $i = 0$. В целом для получения того же результата (т. е. 1 млрд. m руды в год) в одном случае

Таблица 49

	$i = 0$	$i = 10\%$
Годовая добыча, t	$17{,}4 \times 10^6$	143×10^6
Число k одновременно эксплуатируемых месторождений	57,5	7
Затраты на добычу	$9{,}172 \times 10^6$	$9{,}021 \times 10^6$
Капиталовложения	224×10^6	$1{,}480 \times 10^6$
Всего (в долларах)	$9{,}396 \times 10^6$	$10{,}501 \times 10^6$

требуется 10,5 млрд. долларов, а в другом — только 9,4. При $i = 0$ себестоимость одной тонны руды меньше на 10%.

Актуализированное значение будущей прибыли, определенное выражением (XVI,1,9), было принято в качестве экономического критерия лишь вследствие очевидной ошибки. Определять оптимум, максимизируя величину B_i, значит ограничиваться рассмотрением изолированного месторождения. Однако если отдельные месторождения действительно уникальны как геологические объекты, то как источники сырья их всегда можно сравнивать одно с другим, причем критерием сравнения будет служить себестоимость добычи. Нет никаких оснований ограничиваться одним конкретным месторождением. Вполне возможно, что имеет смысл одновременно эксплуатировать несколько месторождений и принимать меньшие размеры годовой добычи для каждого из них. Рассмотрим простую модель, в которой роль месторождений будут играть машины (тем самым мы подчеркнем, что источники снабжения экономически однородны).

Предположим, что в продаже имеется ряд машин различного типа, способных производить один и тот же товар A. Машина типа $M(t)$ производит в год t тонн продукта A, стоимость одной тонны которого равна V. Ее продажная цена равна $I(t)$, необходимые эксплуатационные расходы составляют величину $p(t)$ на тонну товара, а срок службы — $N(t)$ лет. Ход рассуждений, которые привели нас к уравнению (XVI,2,4), заставляют предположить, что будет куплена только одна машина. Актуализированное значение будущей прибыли равно при этом

$$B_i = \frac{1 - e^{-iN}}{i} (V - p)\, t - I. \qquad \text{(XVI,2,7)}$$

Но через N лет машина выйдет из строя и потребуется замена, т. е. фактически каждые N лет придется покупать новую машину. Чтобы учесть бесконечную продолжительность производства [54], необходимо увеличить второй член уравнения (XVI,2,7) на величину $B_i e^{-iN}$ (так как через N лет возникает точно такая же исходная ситуация). Получим следующую, уже лучшую формулу для B_i:

$$B_i = \frac{V - p}{i}\, t - \frac{I}{1 - e^{-iN}}. \qquad \text{(XVI,2,8)}$$

Но почему следует ограничиваться приобретением только одной машины? Если в соответствии с уравнением (XVI,2,8) допускается покупка машины

через N лет, то ничто не мешает купить ее сегодня же. Итак, откроем цех, в котором установим n машин, купленных одновременно. В этом случае

$$B_i = \frac{n}{i}(V-p)\,t - \frac{nI}{1-e^{-iN}}. \qquad \text{(XVI,2,9)}$$

Но целесообразнее рассредоточить покупку машин во времени. Начав с нескольких машин, с помощью которых будет разворачиваться производство, можно прийти к режиму, когда каждые N/n лет приобретается новая машина. В момент такой покупки актуализированная будущая прибыль будет равна

$$B_i = \frac{n}{i}(V-p)\,t - \frac{I}{1-e^{-iN}}\left[1+e^{-\frac{iN}{n}}+e^{-\frac{2iN}{n}}+\ldots+e^{-(n-1)\frac{iN}{n}}\right] =$$

$$= \frac{n}{i}(V-p)\,t - \frac{I}{1-e^{-iN/n}}. \qquad \text{(XVI,2,10)}$$

Если число машин n велико, актуализированная прибыль составит

$$B_i = \frac{n}{i}\left[(V-p)\,t - \frac{I}{N}\right]; \qquad \text{(XVI,2,11)}$$

в это выражение норма актуализации i входит лишь в виде коэффициента, и, следовательно, оно исключается из уравнений оптимума. Что касается числа n, то оно должно быть ограничено, например, условием производства определенной массы товара A (например, $Q = nt$). Если, как и в случае месторождений, принято, что $t = T/N$, то получим

$$B_i = \frac{Q}{iT}[(V-p)\,T - I]. \qquad \text{(XVI,2,12)}$$

Если величина T — постоянная [1], то оптимизация t по максимальному значению B_i приводит к первому уравнению системы (XVI,2,4) при $i = 0$.

Уравнения оптимума при нулевой норме актуализации

Так как минимально промышленное содержание, размер годовой добычи и в общем случае все остальные технические параметры отработки месторождения должны определяться при нулевом значении нормы актуализации, то соответствующие уравнения оптимума можно получить при подстановке значения $i = 0$ в уравнения системы (XVI,2,4). Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} T\frac{dp}{dt} + \frac{dI}{dt} &= 0, \\ x &= \frac{p}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI,2,13)}$$

Эта весьма простая система легко решается методом последовательных приближений, если только известна функция $T(x)$, определяющая количество пригодной для отработки руды в зависимости от минимально промышленного содержания x. Заметим, в частности, что стоимость руды $V(m)$ входит во второе уравнение (через параметр b, отражающий изменение стоимости металла,

[1] Если величина T в выражении (XVI,2,12) является функцией $T(m)$, то оптимизация m по максимальному значению B_i приведет к практике интенсивного «снимания пенок» это естественно, так как предполагается, что в нашем распоряжении имеется бесконечное число месторождений (аналогично каждый год можно выбирать только наилучшие из машин, бесхозяйственно разбазаривая остальные). Так как природные ресурсы ограничены, то, как правило, каждый год эксплуатируют лишь некоторое число k месторождений. В этом случае отношение Q/T заменится постоянной величиной, и тогда уравнение (XVI,2,12) с точностью до постоянной будет совпадать с выражением (XVI,1,10) неактуализированной прибыли.

который извлекается из одной тонны руды, при изменении среднего содержания в ней полезного компонента). Первое уравнение дает зависимость размера годовой добычи от величины запасов T без учета рыночной конъюнктуры. Оно выражает чисто технический оптимум, соответствующий наилучшему определению размеров предприятия для эксплуатации месторождения, запасы которого равны T. Только для очень крупных месторождений условия рынка могут быть в случае необходимости учтены, например, путем ограничения размера добычи в соответствии со спросом.

Если для функций $p(t)$ и $I(t)$ принять выражения (XVI,1,5) и (XVI,1,7), то система (XVI,2,13) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} t &= \left[\frac{a_1 T(x)}{\gamma C_1}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}}, \\ x &= \frac{1}{b}\left(a_0 + \frac{a_1}{t}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI,2,14)}$$

Эту систему решают методом последовательных приближений. В частном случае, когда $\gamma = 1$, первое уравнение соответствует эмпирическому правилу, согласно которому размер годовой добычи должен быть пропорциональным корню квадратному из величины запасов. В большинстве случаев практических приложений для выражения функции $T(x)$ пригоден закон Ласки.

Случай плановой экономики. Система (XVI,2,13) была получена для условий конкурентной экономики. Эта же система получается также и в случае плановой экономики, притом гораздо проще, так как норма актуализации исключается автоматически. Пусть плановое задание состоит в производстве определенного количества металла в год, и пусть для его выполнения эксплуатируется некоторое число месторождений, характеризующееся функциями $T_i(x)$, $p_i(t)$ и $I_i(t)$. В рамках перспективного планирования, которое играет решающую роль, определяют, имеется ли в наличии ресурс разведанных запасов, позволяющий отрабатывать каждый год n_i месторождений категории i. При этом для обеспечения требуемой производительности Q необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_i n_i m_i(x_i)\,T_i(x_i) = Q. \qquad \text{(XVI,2,15)}$$

Ежегодные затраты, необходимые для обеспечения этой производительности, включают, с одной стороны, эксплуатационные расходы, а с другой — капиталовложения, направленные на подготовку n месторождений каждой категории, которые должны вступить в строй через год взамен отработанных. Сумма ежегодных затрат определяется выражением

$$\sum_i n_i\,[p_i(t_i)\,T_i(x_i) + I_i(t_i)]. \qquad \text{(XVI,2,16)}$$

Это выражение удобно минимизировать относительно минимально промышленного содержания x_i и размера годовой добычи t_i месторождений каждого класса i, принимая во внимание соотношение (XVI,2,15). Минимизация приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} T_i\frac{dp_i}{dt_i} + \frac{dI_i}{dt_i} &= 0, \\ x_i &= \frac{p_i}{\mu}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI,2,17)}$$

где μ — параметр Лагранжа.

Количество месторождений различных категорий n_i исключается из этой системы, которая для каждого значения i, т. е. внутри группы месторождений данной категории, аналогична системе (XVI,2,13). Параметр Лагранжа μ играет здесь роль параметра b, т. е. фактически роль рыночной цены.

В отличие от случая конкурентной экономики величина μ устанавливается планирующими органами с учетом условия (XVI,2,15), т. е. в результате решения полной системы (XVI,2,15) и (XVI,2,16) для каждой категории месторождений. При этом величину n_i определяют в рамках экономической политики, направленной на долговременное использование природных ресурсов. Параметр μ выступает как цена, позволяющая оптимизировать всю программу использования сырьевой базы при заданных значениях n_i. Как только цена μ установлена планирующими органами, все параметры эксплуатации каждой из групп месторождений вычисляются точно так же, как и при конкурентной экономике, т. е. с помощью решения системы (XVI,2,13).

§ 3. Соотношение между запасами и минимальным средним содержанием, отвечающее минимальной рентабельности месторождения

Некоторые читатели, возможно, будут удивлены исчезновением нормы актуализации даже в условиях конкурентной экономики. Поэтому необходимо внести некоторые уточнения: только технические параметры (т. е. в основном параметры, которые определяют масштабы добычи) должны оптимизироваться при $i = 0$. На самом деле норма актуализации не ликвидируется. Ее учет обязателен при определении рентабельности каждого отдельного месторождения и при решении о введении его в эксплуатацию. Другими словами, оптимальные технические показатели возможной эксплуатации будут определяться с помощью системы (XVI,2,13), т. е. при $i = 0$, в то время как само решение о вводе месторождения в эксплуатацию будет приниматься после экономического анализа планируемого предприятия, т. е. с учетом нормы актуализации i. Найденные при решении системы (XVI,2,13) значения t и x должны быть подставлены в уравнение (XVI,1,9) для расчета величины актуализированной прибыли B_i, и лишь в том случае, когда значение B_i будет положительным, месторождение может быть введено в эксплуатацию. Таким образом, оптимизация технических параметров производится без актуализации будущей прибыли, а принятие решения о вводе месторождения в эксплуатацию — с актуализацией. Это простое и, как может показаться, противоречивое правило, по-видимому, все же соответствует реальному поведению горнопромышленных компаний в условиях конкурентной экономики. Действительно, нет ничего удивительного в том, что в соответствии с общим законом конкурентной экономики компании актуализируют будущую прибыль к моменту принятия каждого отдельного решения, но мы также видели, что они не учитывают актуализации при определении оптимальных технических параметров, так как в противном случае им пришлось бы тратить каждый год лишние деньги для поддержания производительности на прежнем уровне. В условиях плановой экономики безусловно применима первая половина правила. Что же касается второй его половины, то применимость ее менее очевидна (а действие более ограничено). Во всяком случае, если при прочих равных условиях можно ввести в эксплуатацию одно из двух месторождений, то в первую очередь вводится более рентабельное из них. Такое решение требует учета нормы актуализации, но остается трудность в расшифровке «прочих равных условий».

Во всяком случае, критерием для принятия решения об эксплуатации конкретного месторождения служит знак будущей прибыли B_i, иногда в условиях плановой экономики рассчитываемой при $i = 0$. После определения параметров m и t из системы (XVI,2,13) решение о вводе месторождения в эксплуатацию принимают при условии, что

$$B_i(t, m) \geqslant 0. \qquad \text{(XVI,3,1)}$$

При $B_i = 0$ месторождение находится на грани рентабельности. Для каждого данного значения общих запасов T уравнение

$$B_i = [V(m) - p(t)]\, t \frac{1 - e^{\frac{-iT}{t}}}{i} - I(t) = 0, \qquad \text{(XVI,3,2)}$$

где t — размер годовой добычи, определенный из системы (XVI,2,13), дает минимально рентабельное среднее содержание $m_L(T)$. Если при данных размерах запасов среднее содержание полезного компонента в месторождении меньше величины функции $m_L(T)$, то его эксплуатация окажется убыточной. С другой стороны, каждому значению среднего содержания соответствуют минимальные запасы $T_L(m)$, обеспечивающие рентабельность отработки месторождения (не следует путать минимально промышленное содержание x с минимальным средним содержанием, обеспечивающим рентабельность отработки). Функция $m_L(T)$ определяется решением для каждого значения T уравнения, которое получают из (XVI,3,2) подстановкой в него значения t, найденного из первого уравнения системы (XVI,2,13). Последнее, в свою очередь, может быть представлено, например, в форме (XVI,3,14).

ГЛАВА XVII

Оптимальная разведка для определения технических показателей эксплуатации

§ 1. Постановка задачи

Как уже сказано во введении к третьей книге, в этой главе мы еще не рассматриваем риска потерь, т. е. риска, связанного с возможностью ввести в эксплуатацию месторождение, отработка которого нерентабельна. Предполагается, что рентабельность отработки месторождения сомнения не вызывает, и необходимо оценить технические показатели, чтобы составить определенный проект эксплуатации месторождения и переработки добываемых руд. Технические параметры отработки — размер годовой добычи t и минимально промышленное содержание, по которому ведется сортировка руд, x — определяются (при известном соотношении $T(x)$ между запасами и содержанием) с помощью решения системы (XVI,2,13). Однако к моменту начала эксплуатации может быть известна не сама функция $T(x)$, а лишь ее оценка $T_E(x)$, точность которой зависит от детальности проведенной разведки. Следовательно, оценки t_E и x_E, которые мы определим как решение системы, могут отличаться от параметров t_0 и x_0, оптимальных при действительной, но неизвестной нам функции $T(x)$. Это отличие определяемых по данным разведки параметров t_E и x_E от оптимальных приводит к экономическим потерям, вероятные размеры которых мы попытаемся рассчитать. Можно, конечно, уменьшить потери путем дополнительной разведки месторождения с целью получения более точной оценки функции $T(x)$. Но эти работы требуют значительных затрат. Существует оптимум объема разведочных работ, при котором сумма возможных потерь и затрат на разведку месторождения будет минимальной. Оптимум отражает, как и в предыдущей главе, лишь техническую сторону дела: разведочные работы рассматриваются только как вспомогательное техническое средство для определения оптимальных размеров отработки. При этом, как было показано в § 2 предыдущей главы, следует использовать нулевое значение нормы актуализации i. Так как использование приближенной функции $T_E(x)$ дает решение (x_E, t_E), близкое к действительно оптимальному (x_0, t_0), то следует ожидать, что убытки будут невелики (но вовсе не обязательно, что они будут пренебрежимо малыми). Вероятные значения убытков[1] могут быть выражены как функции от дисперсий оценок величины запасов и среднего содержания.

Так как формулировка основных положений проблемы весьма трудна, мы исследуем сначала наиболее простой частный случай, когда месторождение относится к типу «все или ничего».

[1] Выражение «вероятные значения» несколько неоднозначно в том смысле, что оно кажется связанным с вероятностной моделью. В следующей главе мы еще вернемся к этому вопросу, а пока отметим, что дисперсии оценок, от которых зависят размеры убытков, определяются в геостатистике без каких бы то ни было ссылок на вероятностные модели.

§ 2. Случай месторождения типа «все или ничего»

Под месторождением типа «все или ничего» мы понимаем месторождение, селективная отработка которого невозможна (при этом не обязательно, чтобы содержание было постоянным). В этом случае месторождение либо отрабатывается целиком, либо вообще не эксплуатируется[1]. Соотношение между запасами и минимально промышленным содержанием не играет никакой роли, так как оно фактически однозначно задано природой и мы не имеем другого выбора. В этом случае ошибка в оценке среднего содержания не отражается на определении размеров месторождения, и единственным техническим параметром, подлежащим расчету, будет размер годовой добычи t, который зависит только от суммарных запасов T. Продифференцировав первое уравнение системы (XVI,2,13), увидим, что ошибка δT оценки запасов приведет к отклонению принятой годовой добычи от действительно оптимальной производительности на величину

$$\delta t = -\frac{p'\delta T}{Tp''+I''}.$$

Это отклонение привлечет за собой экономические потери, которые уменьшат возможную при оптимальной отработке неактуализированную прибыль. Величина соответствующих потерь может быть представлена ограниченным разложением вида

$$P = -\delta[(V-p)T-I] = (Tp'+I')\,\delta t + \frac{1}{2}(Tp''+I'')\,\delta t^2.$$

Так как мы рассматриваем отклонение t от оптимального значения, то в соответствии с уравнениями (XVI,2,13) член первого порядка в полученном разложении равен нулю. Следовательно, получаем

$$P = \frac{1}{2}\frac{p'^2}{Tp''+I''}\overline{\delta T^2}.$$

Вероятное значение величины $\overline{\delta T^2}$ является дисперсией σ_T^2 оценки тоннажа, которая может быть вычислена по правилам геостатистики на основании материалов разведки месторождения; следовательно, можно записать, что

$$P = \frac{1}{2}\frac{p'^2}{Tp''+I''}\sigma_T^2. \qquad \text{(XVII,2,1)}$$

При подведении баланса эти потери должны учитываться вместе со стоимостью R разведочных работ, которая представляет собой убывающую функцию дисперсии σ_T^2. Оптимальный объем разведочных работ получим из уравнения

$$\frac{dR}{d\sigma_T^2} + \frac{1}{2}\frac{p'^2}{Tp''+I} = 0, \qquad \text{(XVII,2,2)}$$

которое определяет минимальное значение суммы $P+R$. На практике потери P и затраты R выражают как функции одного или иногда нескольких параметров (числа скважин n, длины выработок l и т. п.). Если для каждого

[1] Месторождения этого типа встречаются очень часто. Участки промышленных руд месторождений типа «все или ничего» не всегда бывают окаймлены безрудной вмещающей породой; они могут быть окружены ореолом рассеяния с непромышленными концентрациями полезного компонента и по геостатистическим характеристикам, отличающимся от самого месторождения. В любом случае промышленные блоки четко отделяются от безрудных и при переходе от этих последних к первым содержание полезного компонента возрастает практически скачкообразно. В связи с этим при изменении минимально промышленного содержания, по которому производится сортировка руд на промышленные и непромышленные, границы эксплуатационных блоков почти не смещают. Следовательно, величина запасов месторождений типа «все или ничего» не зависит от минимально промышленного содержания.

из параметров использовать символ u_i, то решение системы

$$\frac{dR}{du_i}+\frac{1}{2}\frac{p'^2}{Tp''+I''}\frac{d\sigma_T^2}{du_i}=0 \qquad \text{(XVII,2,3)}$$

позволяет найти общий объем оптимальных затрат на разведку и наилучшее распределение затрат между различными видами работ (например, проходкой горных выработок и их опробованием).

Пример. Для иллюстрации метода расчета представим себе крупное осадочное месторождение железа, разбуренное скважинами по адаптированной сети (т. е. по сети с прямоугольными ячейками при отношении между сторонами ячейки, равном отношению основных размеров месторождения). В геостатистике доказывается, что относительная дисперсия σ_T^2/T^2 оценки тоннажа равна сумме двух членов: первый член учитывает граничный эффект и представляет собой дисперсию оценки рудной площади, а второй — дисперсию оценки средней мощности залежи. Дисперсия оценки рудной площади может быть представлена выражением

$$\frac{0{,}244}{n^{3/2}}\sqrt{\frac{D_1D_2}{S}},$$

где n — число скважин, S — рудная площадь, D_1 и D_2 — диаметры площади в двух взаимно перпендикулярных направлениях (или, если площадь S — не выпуклая фигура, диаметриальные полувариации). Если площадь S может быть аппроксимирована эллипсом, то

$$\sqrt{\frac{D_1D_2}{S}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}=1{,}13$$

и первый член сводится к выражению $0{,}276/n^{3/2}$. Второй член может быть представлен в виде A/n, где A — величина несколько меньшая, чем относительная дисперсия мощности залежи, и ее можно рассматривать как постоянную (A — медленно убывающая функция числа скважин n). Таким образом, относительная дисперсия оценки тоннажа руды определяется выражением

$$\frac{\sigma_T^2}{T^2}=\frac{0{,}276}{n^{3/2}}+\frac{A}{n}.$$

Что касается экономических параметров, то для определения значений $p\,(t)$ и $I\,(t)$ можно воспользоваться выражениями (XVI,1,5) и (XVI,1,6). Сумма потерь и затрат, которая должна быть сведена к минимуму, запишется в виде функции от числа скважин n, т. е.

$$\frac{1}{4}\sqrt{a_1C_1T}\left[\frac{0{,}276}{n^{3/2}}+\frac{A}{n}\right]+Cn,$$

где a_1 и C_1 — параметры из формул (XVI,1,5) и (XVI,1,6) соответственно, а C — стоимость бурения одной скважины. Приравнивая нулю производную от этой суммы по числу скважин, получим

$$\frac{1}{4}\sqrt{a_1C_1T}\left[\frac{0{,}414}{n^{5/2}}+\frac{A}{n^2}\right]=C.$$

Если взять $T=1$ млрд. m, $a_1=3\cdot10^6$, $C_1=10$ (как в приведенном выше примере Блонделя), а для A и C принять вполне правдоподобные значения: $A=0{,}10$ и $C=2000$ долларов, то получим $n\approx 60$.

§ 3. Случай, когда следует учитывать соотношение между принятым минимально промышленным содержанием и величиной запасов

Если промышленные блоки должны быть выделены (селективно выбраны) внутри геостатистически однородного месторождения, формулировка рассматриваемой проблемы становится более сложной. Обозначим символами T_0 и t_0 запасы в промышленных блоках и годовую производительность рудника, соответствующие условиям оптимального проекта. Так как нам известно не точное значение функции $T\,(x)$, а лишь ее оценка, то в проект будут включены значения $T_0+\delta T_1$ и $t_0+\delta t_1$, немного отличные от оптимальных. Кроме того, результаты реальной отработки всегда будут отличаться от проектных, и даже при соблюдении запланированной производительности $t_0+\delta t_1$ суммарная добыча $T_0+\delta T_1+\delta T_2$ будет отличаться от предполагаемой $T_0+\delta T_1$. Обозначим символом δT разницу $\delta T_1+\delta T_2$ между добытым и оптимальным количеством руды. Так как мы рассматриваем отклонения от оптимальных значений (T_0 и t_0), то экономические потери, вызываемые этими отклонениями, определяются второй производной (взятой с обратным знаком) от прибыли, т. е.

$$P=-\frac{1}{2}\left[b\frac{dx}{dT}\delta T^2-2\frac{dp}{dt}\delta t\delta T-\left(\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{d^2p}{dt^2}T\right)\delta t^2\right]. \qquad \text{(XVII,3,1)}$$

Так как значения T_0 и t_0 по условию отвечают действительному оптимуму, величина P обязательно будет положительной, и, следовательно, справедливым окажется неравенство

$$p'^2+b\frac{dx}{dT}(I''+Tp'')<0. \qquad \text{(XVII,3,2)}$$

Учитывая, что производная $\frac{dx}{dT}$ отрицательна, получим, в частности,

$$I''+Tp''>0. \qquad \text{(XVII,3,3)}$$

Эти неравенства должны удовлетворяться по крайней мере при $T=T_0$ и $t=t_0$. Для расчета размера потерь по формуле (XVII,3,1) необходимо выразить вероятные значения величин δT^2, $\delta t\delta T$ и St_2 через дисперсии оценок, которые можно было бы определить хотя бы приближенно, воспользовавшись правилами геостатистики. Заметим, что соотношение между дисперсиями ошибок δT и δt и ошибками, вносимыми в оценку тоннажа и содержания, выражается различным образом в зависимости от большей или меньшей гибкости принятой системы отработки месторождения. Мы исследуем крайние случаи, соответствующие абсолютно жесткому и абсолютно гибкому (адаптированному) способам эксплуатации. Абсолютно жесткому способу эксплуатации соответствует открытый (карьерный) способ отработки рудных тел. При этом по данным разведки месторождения определяется суммарный тоннаж запасов и намечаются жесткие границы блоков, подлежащих отработке. Фактически вынутый тоннаж руды отличается от проектного лишь на очень малую величину τ [1], которой часто можно пренебречь. Гибкая эксплуатация, напротив, соответствует селективной выемке руды. При таком способе отработки задается не тоннаж, а минимально промышленное содержание, по которому должна производиться сортировка элементарных выемочных объемов на промышленные и непромышленные.

[1] Величина τ определяется ошибкой оценки тоннажа в эксплуатационных блоках, находимой без учета граничного эффекта, поскольку границы блоков заданы. Например, в случае пластовой залежи площадь предназначенных к отработке блоков будет известна точно, и величина τ будет определяться лишь ошибкой, связанной с подсчетом среднего значения мощности залежи.

Предполагается, что горняк, осуществляющий целенаправленный отбор промышленных участков месторождения, в процессе эксплуатации имеет возможность пересмотреть проектное значение минимально промышленного содержания. Следует ожидать, что экономические потери при гибкой системе эксплуатации, связанные с отличием используемого значения минимально промышленного содержания от оптимального x_0, будут меньше потерь, возможных при жесткой отработке.

Жесткий способ отработки

Для удобства формулировки задачи выберем в качестве основной переменной геометрический параметр S, который в действительности определяется горняком. В случае пластового или жилообразного тела, например, параметр S будет представлять площадь, а в случае штокообразного рудного тела — объем рудных тел, намечаемых к отработке. Исходя из информации, полученной при разведке месторождения, горняк оценивает функции $T(S)$ и $m(S)$, по которым определяются оптимальные значения T и m в зависимости от размеров S, и затем из соотношения (XVII,1,1) получает по ним минимально промышленное содержание $x(S)$. Оценки $T_E(S)$, $m_E(S)$ и $x_E(S)$ отличаются от истинных значений соответствующих параметров на величины $\tau(S)$, $\mu(S)$ и $\xi(S)$, которые, вообще говоря, малы и также являются функциями параметра S, т. е.

$$\left.\begin{aligned} T_E(S) &= T(S)+\tau(S),\\ m_E(S) &= m(S)+\mu(S),\\ x_E(S) &= x(S)+\xi(S). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII,3,4)}$$

В дальнейшем мы будем интерпретировать величины $\tau(S)$ и $\mu(S)$ как ошибки, вносимые при оценке запасов руды и содержания при данном размере площади S [1]. Решение системы (XVII,2,13) относительно переменных S и t, т. е. системы

$$\left.\begin{aligned} &p'T(S)+p'\tau(S)+I'=0,\\ &x(S)+\xi(S)=\frac{P}{b}, \end{aligned}\right\}$$

дает проектные параметры $S_0+\delta S$ и $t_0+\delta t$, немного отличающиеся от оптимальных S_0 и t_0. Отклонения δS и δt (или по крайней мере главные части их разложений) определяются ошибками τ и μ и могут быть найдены решением системы

$$\left.\begin{aligned} &(p''T+I')\,\delta t+p'\frac{dT}{dS}\delta S+p'\tau=0,\\ &b\xi+b'\frac{dx}{dS}\delta S=p'\delta t. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII,3,5)}$$

В рассматриваемом случае отработка будет вестись строго в пределах выбранного проектом контура с площадью $S_0+\delta S$. Этому контуру соответствует тоннаж, который отличается от оптимального на величину

$$\delta T=\frac{dT}{dS}\delta S.$$

[1] Такая интерпретация не абсолютно строгая, так как среди всех возможных площадей одного и того же размера S та, которая выбирается горняком для построения функции T_E и m_E, не обязательно оказывается самой удачной. Но не вполне строгая интерпретация приводит к ошибкам, которые должны рассматриваться как незначительные по сравнению с ошибками τ и μ.

Решив систему (XVII,3,5), получим для δt и δT следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \delta t &= \frac{bp'\left(\xi-\tau\frac{dx}{dT}\right)}{b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')+p'^2},\\ \delta T &= -\frac{p'^2\tau+b(p''T+I'')\xi}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII,3,6)}$$

Достаточно подставить эти выражения в формулу (XVII,3,1), чтобы получить размер потерь P:

$$P=-\frac{1}{2}\left[\frac{-bp'^2\frac{dx}{dT}\tau^2+2bp'^2\tau\xi+b^2(I''+p''T)\xi^2}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')}\right].$$

Неравенство (XVII,3,2) показывает, что величина P всегда положительна, каковы бы ни были τ и ξ. Отметим также, что параметр S исключен, так как производная $\frac{dx}{dT}$ может быть вычислена непосредственно по функции $T(x)$. При переходе к пределу заменим величины τ^2, ξ^2 и $\tau\xi$ дисперсиями σ_τ^2, σ_ξ^2 и ковариацией $\sigma_{\tau\xi}$ и окончательно получим

$$P=-\frac{1}{2}\left[\frac{-bp'^2\frac{dx}{dT}\sigma_\tau^2+2bp'^2\sigma_{\tau\xi}+b^2(I''+p''T)\sigma_\xi^2}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')}\right]. \qquad \text{(XVII,3,7)}$$

Расчет дисперсии σ_τ^2 не представляет особых трудностей, это фактически дисперсия оценки тоннажа $T(S)$ без учета граничного эффекта, которая может быть вычислена по правилам геостатистики. Определение дисперсии σ_ξ^2 несколько сложнее.

В принципе σ_ξ^2 — это дисперсия крайгинга площади S по бесконечно тонкому слою dS, опоясывающему площадь. Производить крайгинг такого рода весьма трудно, поэтому целесообразно воспользоваться приближенными результатами, вытекающими из закона Ласки. Согласно закону Ласки, общее среднее содержание $m=\beta$, общий тоннаж T_0 и тоннаж $T=T(x)$, соответствующий минимально промышленному содержанию x, связаны соотношением

$$T=T_0e^{-x/m}$$

или

$$x=m_0\ln(T_0/T).$$

Как правило, значения запасов T_0 и T определяются с большей точностью, чем значения содержаний. Если величина $\ln(T_0/T)$ рассматривается как заданная, то справедливо равенство

$$\frac{\sigma_\xi^2}{x^2}=\frac{\sigma_{m_0}^2}{(m_0)^2}. \qquad \text{(XVII,3,8)}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\sigma_{\tau\xi}}{Tx}=\frac{\sigma_{T_0m_0}}{T_0m_0}. \qquad \text{(XVII,3,9)}$$

Величины $\sigma_{m_0}^2$ и $\sigma_{T_0m_0}$ представляют собой не что иное, как дисперсию оценки m_0 и ковариацию оценок m_0 и T_0 соответственно для месторождения в целом. Методы геостатистики позволяют просто определить их, а величины σ_ξ^2 и $\sigma_{\tau\xi}$, входящие в формулу (XVII,3,7), могут быть найдены из соотношений (XVII,3,8) и (XVII,3,9).

Оптимальный объем разведочных работ определяют минимизацией суммы возможных потерь P и затрат на разведку R. Если объем различных видов работ при разведке выражается параметрами $u_1, u_2, \ldots$, то решение системы

$$\frac{\partial P}{\partial u_i}+\frac{\partial R}{\partial u_i}=0 \qquad \text{(XVII,3,10)}$$

даст как оптимальный размер затрат, так и наиболее выгодное распределение средств между различными видами разведочных работ.

Способ гибкой (идеально селективной) отработки

При этом способе основное внимание уделяется выбору проектного значения минимально промышленного содержания, которым должен руководствоваться геолог при решении вопроса о селективной выемке того или другого элементарного объема горной массы. Это содержание отличается от оптимального значения x_0 на величину δx, которую следует определить. Как и ранее, истинная форма зависимости тоннажа от содержания $T(x)$ неизвестна. Геолог использует результаты разведки месторождения для изучения вариантов проекта отработки, отвечающих различным значениям параметра S; каждый вариант приводит к своим значениям тоннажа и содержания, оцененным с теми же, что и в уравнениях (XVII,3,4), ошибками $\tau(S)$ и $\mu(S)$. Поставив в соответствие тоннажу $T+\tau$ минимально промышленное содержание $x+\xi$, получим выражение $T(x)+\theta(x)$, которое обычно отличается от истинной функции $T(x)$ на небольшую величину $\theta(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$T(x+\xi)+\theta(x)=T+\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\theta(x)=\tau-\frac{dT}{dx}\xi. \qquad \text{(XVII,3,11)}$$

Ошибка $\theta(x)$ обусловливает различие между действительными оптимальными параметрами (t_0, x_0) и $(t_0+\delta t, x_0+\delta x)$, принятыми в проекте. Действительно, проектные параметры получены в результате решения смещенной системы

$$p'T(x)+p'\theta(x)+I'=0$$
$$x=\frac{P}{b},$$

а отклонения δt и δx удовлетворяют соотношениям

$$p'\theta+p'\frac{dT}{dx}\delta x+(p''T+I'')\,\delta t=0,$$
$$\delta x=\frac{P'}{b}\delta t.$$

Последнее позволяет определить выражения для δt, δx, а также δT — различия между фактически отработанным и оптимальным тоннажем:

$$\delta t=\frac{-p'b\frac{dx}{dT}\theta}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')},$$
$$\delta T=\frac{dT}{dx}\delta x=\frac{-p'^2(\theta)}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')}.$$

Подставив найденные отклонения в формулу (XVII,3,1), получим следующее выражение для экономических потерь:

$$P=\frac{1}{2}\frac{bp'^2\frac{dx}{dT}\theta^2}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')}.$$

Заменив далее отклонение θ его выражением из формулы (XVII,3,11) и перейдя к вероятным значениям, получим, наконец, что

$$P=\frac{1}{2}\frac{b'^2\frac{dx}{dT}\sigma_\tau^2-2bp'^2\sigma_{\tau\xi}+bp'^2\frac{dT}{dx}\sigma_\xi^2}{p'^2+b\frac{dx}{dT}(p''T+I'')}. \qquad \text{(XVII,3,12)}$$

Дисперсии σ_ξ^2, σ_τ^2 и ковариация $\sigma_{\tau\xi}$ вычисляются, как и в предыдущем параграфе, и проблема решается путем минимализации суммы потерь и стоимости разведки $(P+R)$.

Рекомендуем сравнить потери $P_ж$, соответствующие жесткому методу добычи, с потерями $P_г$ (гибкими), определяемыми формулой (XVII,3,12). При прочих равных условиях [при одних и тех же функциях $I(t)$ и $p(t)$, соотношении «содержание — тоннаж» и объеме разведки] эти потери различаются на величину

$$P_ж-P_г=\frac{1}{2}b\frac{dT}{dx}\sigma_\xi^2.$$

Так как $\frac{dT}{dx}$ — величина отрицательная, ясно, что эта разность всегда положительна, т. е., как и следовало ожидать, потери при жестком способе добычи больше.

На практике открытый способ добычи почти полностью соответствует описанному жесткому способу. Напротив, никакая селективная выемка не обеспечивает полностью гибкой отработки: горняку никогда не удается со всей строгостью выдержать принцип сортировки по заданному проектом минимально промышленному содержанию. Кроме открытого способа добычи, все остальные занимают промежуточное положение между абсолютно жестким и абсолютно гибким способами; так как определить степень фактической гибкости способа отработки трудно, имеет смысл во всех случаях использовать формулу (XVII,3,7), по которой можно оценить экономические потери в случае наихудших условий эксплуатации.

ГЛАВА XVIII

Последовательная оптимизация и проблема прекращения разведки

§ 1. Проблема прекращения разведки

Теперь пора рассмотреть риск экономических потерь. В предыдущей главе мы считали, что рентабельность месторождения сомнений не вызывает, и определили оптимальную детальность разведки, исходя из потерь, возникающих в связи с неточным определением размеров предприятия. Таким образом, речь шла о чисто технической оптимизации, которая имеет абсолютный смысл и которую производят без актуализации будущей возможной прибыли. Проблема, которой посвящена эта глава, более важна для практики разведки месторождений. Она сводится к основному вопросу: в какой момент следует прекратить разведку месторождения и сдать его в эксплуатацию или забраковать? Этот вопрос уже не может быть сформулирован без учета всех факторов, влияющих на решение о переходе от одной фазы разведки к следующей. Возвращаясь к схеме, показанной на фиг. 207, предположим, что первый этап разведки TR_1 уже завершен. На основе полученных результатов приближенно подсчитаны запасы и содержание и геостатистическими методами определена точность этих оценок. Исследование рентабельности, в свою очередь, позволяет установить соотношение между величиной запасов и тем содержанием полезного компонента, при котором отработка месторождения может быть экономически целесообразной. В момент, обозначенный точкой C (фиг. 207), возможны три решения: 1) закрыть месторождение, 2) начать отрабатывать месторождение [1] и 3) провести еще одну стадию (TR_2) разведки. Если принимается третье решение, то через некоторое время, необходимое на проведение дополнительной разведки, мы окажемся в точке C', где опять возможны три решения, которые следует принимать с учетом добавочной информации, полученной на второй стадии разведки. Практически, однако, редко возникает вопрос о проведении третьей стадии разведки, поэтому мы ограничимся случаем, когда после второй стадии разведки должно быть принято решение об эксплуатации месторождения.

Оптимизация решений в последовательных точках C, C′ . . . неизбежно имеет дискретный характер. Разведочные работы на второй стадии, если они необходимы, должны быть согласованы с работами на первой стадии. Например, если жильное месторождение разведано горными выработками на горизонтах, расстояние между которыми равно 60 *м*, то работы на второй стадии должны заключаться в разведке подэтажей высотой 30 *м*. На осадочном месторождении, разбуренном по квадратной сети, плотность последней на второй стадии разведки увеличивается вдвое за счет бурения скважин в центрах первоначальных ячеек. Таким образом, вторая стадия разведки не зависит от какого-либо непрерывно меняющегося параметра или от параметра, значение которого выбирается произвольно [1]: она определяется уже произведенными разведочными работами.

Иногда создается впечатление, что оптимизация может производиться не ступенчато, а непрерывно. Например, после разведки месторождения на трех горизонтах с помощью скважин, полностью пересекающих рудную зону, может возникнуть желание получить дополнительную информацию не путем проходки горных выработок на новых горизонтах, а лишь путем сгущения сети скважин на уже разведанных горизонтах. Но известно, что полученная таким путем дополнительная информация почти всегда ничтожно мала, так как основной вклад в дисперсию оценки дает дисперсия распространения параметров, определенных по сечениям, на слои влияния этих сечений.

Геостатистика позволяет не только определить точность подсчета запасов по окончании первой стадии разведки TR_1, но, кроме того, предугадать точность, которая будет достигнута после разведки на второй стадии. Чтобы сформулировать нашу задачу о последовательном принятии решения, припишем дополнительной информации, получаемой на второй стадии разведки, некоторую экономическую ценность и сравним эту ценность со стоимостью дополнительной разведки. Из трех возможных решений нужно выбрать то, которое ведет к максимальному вероятному значению будущей прибыли [2]

[1] Если актуализация не производится, то безразлично, начинать ли добычу сразу или позднее. В противном случае предпочтительнее начать отработку сразу, если только нет оснований ожидать повышения цен на металл в ближайшие годы. Так как изменчивость рыночных цен в этой работе не учитывается, мы не будем рассматривать выжидательных решений, формулировка которых к тому же весьма сложна.

[1] Мы предполагаем, что масштабы месторождения выясняются уже на первой стадии разведки и что дополнительная разведка позволяет лишь уточнить количество запасов и среднее содержание полезного компонента в руде без экстраполяции разведочных данных. Впрочем, проблема экстраполяции все равно не может быть решена математически. Так, например, геолог на основании ряда признаков может предположить, что жильное тело продолжается ниже последнего разведанного горизонта, но эти предположения не являются количественными. Ни геостатистика, ни тем более вариационная статистика не могут компенсировать недостаток информации.

Жильное тело весьма редко удается оконтурить горными выработками по падению. При оценке рентабельности возможного продолжения жилы книзу обычно не учитывают. Основной рентабельности отработки должны служить запасы вскрытой части месторождения. Именно такого взгляда мы придерживаемся в теоретическом рассмотрении поставленной проблемы.

[2] Мы оставляем открытым вопрос о том, должна ли прибыль быть актуализирована. В плановой экономике, без сомнения, не должна. Что касается экономики в условиях конкуренции, то рассуждения, приведенные в гл. XVI, справедливы, по крайней мере теоретически, и для этого случая. Действительно, крупная компания, ставящая своей целью выпускать с минимальной себестоимостью заданное количество металла каждый год, должна была бы сводить к минимуму ежегодные затраты, складывающиеся из эксплуатационных расходов на действующих рудниках, капиталовложений, идущих на подготовку эксплуатации новых рудников взамен отрабатываемых в текущем году, и из средств, затраченных на поиски новых месторождений. Такой подход логически привел бы к неактуализированному выражению прибыли при последовательной оптимизации разведки (при этом параметр b означал бы не рыночную цену, а внутреннюю, определяемую горной компанией с целью оптимизации плана производства в целом).

Все сказанное казалось нам бесспорным, когда мы изучали (гл. XVI и XVII) вопросы технической оптимизации, так как этот ход рассуждений приводил к правильному описанию действий, которые должны предприниматься владельцем рудника. При последовательной оптимизации в условиях конкурентной экономики реальное поведение предпринимателей, напротив, соответствует ненулевому значению нормы актуализации. На самом деле, при конкурентной экономике решение о вводе месторождения в эксплуатацию принимается только в том случае, когда актуализированное значение будущей прибыли положительно. Поэтому мы будем пользоваться выражением (XVII,1,9), которое получено для нормы актуализации $i \neq 0$. К нулевой норме актуализации легко перейти, подставив $i = 0$ и заменив далее член e^{-iN} единицей, а член $\frac{1}{i}(1 - e^{-iN})$ — числом N.

Экономисты очень большое внимание (и не без основания) уделяют выбору экономического критерия. Кроме выражения прибыли (актуализированной или нет), могут быть рассмотрены и другие критерии, в большей или меньшей степени приводящие к «сниманию пенок». Например, чисто капиталистический подход, состоящий в стремлении получить наибольшую удельную прибыль, привел бы к поиску оптимума, максимизирующего отношение B_i/I. Кроме того, с более наивной точки зрения, свойственной иногда производственникам, имело бы смысл определять оптимум по минимизации себестоимости килограмма

с момента C, т. е. при учете тех затрат, которые будут сделаны после момента C, в частности затрат на вторую стадию разведки TR_2. Но в данном случае понятие «вероятное значение» неясно. Мы должны его строго определить, указав пределы допустимости вероятностного подхода, и только затем перейти к рассмотрению самой проблемы.

§ 2. Переход к вероятностному рассмотрению

Известно, что запас и содержание полезного компонента в месторождении никогда не бывают случайными величинами [1]. Например, среднее содержание физически вполне определенно и уникально, хотя эксперимент не позволяет найти его величину без ошибки. Вопрос о том, какова вероятность того, что среднее содержание в данном месторождении превосходит 10%, лишен смысла. При содержании 11% эта вероятность равна 100%, а при содержании 9% — нулю. Но так как истинное содержание неизвестно, такое рассуждение имеет чисто формальный характер [2]. Чтобы продвинуться в решении интересующей нас задачи последовательной оптимизации, нам необходимо определить понятие вероятных значений и рассматривать некоторые величины как случайные переменные. Всякий переход к вероятностным рассмотрениям в этой области искусствен и в значительной степени произволен. Чтобы уменьшить степень произвола, следует сократить число привлекаемых вероятностных постулатов до действительно необходимого. Поэтому припишем свойство случайной переменной только ошибкам, т. е. разностям между оценками и истинными значениями содержаний (а не самим этим оценкам или истинным содержаниям). Чтобы упростить изложение, будем говорить о содержании. Но все рассуждения и доказательства будут иметь общий характер и могут быть отнесены также и к тоннажу или соотношению между тоннажем и содержанием. В первую очередь определим геостатистическое понятие дисперсии оценки, которое имеет строгий физический смысл и для введения которого не требуется искусственный вероятностный подход. Наконец, попытаемся с наименьшей степенью произвола подойти к вероятностной интерпретации ошибок, позволяющей придать смысл понятию вероятного значения.

Геостатистическое понятие дисперсии оценки

Чтобы уяснить геостатистическое понятие дисперсии оценки, представим месторождение G с неизвестным средним содержанием m, разведанное горными выработками. Пусть G — часть жильной залежи, расположенной

металла, т. е. по минимизации выражения $\frac{(V-p)\,T-I}{Tm}$. Ж. Лезурн [53] показал в общей форме, что критерии типа B/I — плохие экономические критерии. В рассматриваемой проблеме мы можем выбирать только между нулевым или ненулевым значением нормы актуализации в выражении (XVII,1,9).

[1] Это положение лежит в основе геостатистики.

[2] Подойти к определению содержания с вероятностных позиций можно лишь при некоторых предположениях. Следует, прежде всего, определить среди реальных месторождений некоторые классы (проблема классификации — давний предмет спора специалистов в области металлогении), отобрать совокупность месторождений, относящихся к тому же классу, что и изучаемое месторождение, определить процедуру случайного выбора, и тогда это месторождение можно рассматривать как случайно выбранное из совокупности месторождений данного класса. В такой ситуации содержание следовало бы принимать как случайную переменную, функция распределения которой непосредственно зависит от способа классификации. Возникает вопрос, не ведут ли геологические критерии к построению нетранзитивных отношений (т. е. таких отношений, при которых из положений «A аналогично B» и «B аналогично C» не следует, что «A аналогично C»). Возможно, что это обстоятельство и является основной причиной тех непреодолимых трудностей, которые встают перед металлогенистами при классификации рудных месторождений.

выше нижнего разведочного горизонта. Для оценки m мы располагаем содержанием z в пробах, отобранных в разведочных выработках. При таком подходе содержание m уникально и не является случайной величиной. Аналогична ситуация и для оценки содержания z, так как размещение горных выработок относительно оцениваемого участка G не произвольно, а уникально и определенно. Закон распределения z при фиксированном m так же не имеет смысла, как и закон распределения m при фиксированном z. Ни один из этих законов не существует.

Чтобы обойти эту трудность, геостатистик рассматривает одновременную изменчивость истинного содержания m и его оценки z, считая, что участок G выбран из большого месторождения K, в пределах которого имеет силу закон собственного рассеивания, определяемый вариограммой. Нет смысла (с точки зрения статистика) рассматривать закон распределения содержаний в месторождении K. Если участок G вместе с разведочными выработками перемещается в месторождении K, то и m и z становятся пространственными переменными. Определим теперь дисперсию оценки m с помощью z как среднее значение [1] выражения $(m-z)^2$ в поле K:

$$D(m-z)=\frac{1}{V_K}\int\limits_K\int\int\int (m-z)^2\,dv, \qquad \text{(XVIII,2,1)}$$

где V_K — объем месторождения K. Эта дисперсия может быть вычислена по вариограмме, а собственный характер закона рассеивания гарантирует нам, что она не зависит от формы и размеров K. Она выражается интегралом вариограммы по объему G или объему разведочных выработок. Это чисто геометрическое определение, не требующее ссылки на какой бы то ни было гипотетический вероятностный закон. Дисперсия оценки имеет объективный физический смысл в той же мере, что и вариограмма, которая служит для расчета дисперсии.

Соотношение аддитивности дисперсий

Представим, что после первой стадии разведки, которая дала нам первичную оценку z, решено провести еще одну стадию исследований. Новые разведочные выработки заданы в той же системе, по которой расположены выработки, пройденные на первой стадии. Содержание u, которое мы определяем по вновь пройденным выработкам, подобно содержаниям m и z, является уникальным и физически определенным, и в то же время его можно рассматривать как пространственную переменную по отношению к полю K. Дисперсии оценок σ_z^2 и σ_u^2 и ковариация σ_{uz} ошибок $(m-z)$ и $(m-u)$ определяются с помощью формул, эквивалентных выражению (XVIII,2,1):

$$\sigma_z^2=D(z-m),$$
$$\sigma_u^2=D(u-m),$$
$$\sigma_{uz}^2=[(m-z)\,(m-u)].$$

Символ E означает здесь операцию осреднения в пределах поля K. Так же, как и выражение (XVIII,2,1), эти дисперсии и ковариация зависят только от вида вариограммы и от геометрических характеристик оцениваемого блока месторождения и разведочных выработок.

После завершения второй стадии разведки можно получить новую оценку z' среднего содержания, т. е.

$$z'=\lambda u+(1-\lambda)\,z,$$

---

[1] Отметим, что формула (XVIII,2,1) также представляет дисперсию оценки z с помощью m. Это естественно, так как m и z входят в формулу симметрично.

где z и u — оценки среднего содержания, полученные по горным выработкам первой и второй стадий разведочных работ соответственно.

Параметр λ определяется, как и при обычной процедуре крайгинга, из условия минимизации дисперсии оценки z' среднего содержания m. Эта дисперсия записывается в виде следующего выражения:

$$\sigma^2_{z'} = \frac{1}{V_K}\int\int\int_K (z'-m)^2\,dV = \lambda^2\sigma^2_u + 2\lambda(1-\lambda)\,\sigma_{uz} + (1-\lambda)^2\,\sigma^2_z,$$

которое минимально при

$$\lambda = \frac{N}{D} = \frac{\sigma^2_z - \sigma_{uz}}{\sigma^2_z + \sigma^2_u - 2\sigma_{uz}}.$$

Знаменатель D — дисперсия $D(z-u)$, т. е. дисперсия оценки u с помощью z. Для этого значения λ дисперсия оценки m посредством z' запишется в виде

$$\sigma^2_{z'} = \sigma^2_z - \lambda N = \sigma^2_z - \lambda^2 D. \qquad \text{(XVIII,2,2)}$$

Но оценка z' сама является пространственной переменной в поле K, и можно определить дисперсию σ'^2, связанную с оценкой содержания z' посредством величины z, т. е.

$$\sigma'^2 = D(z-z').$$

Как легко видеть, эта дисперсия равна

$$\sigma'^2 = \lambda^2 D(z-u) = \lambda^2 D,$$

поэтому соотношение (XVIII,2,2) представляется в виде

$$\sigma'^2 = \sigma^2_z - \sigma^2_{z'}. \qquad \text{(XVIII,2,3)}$$

Таким образом, дисперсия оценки среднего содержания z', полученного после завершения второй стадии разведки с помощью среднего содержания z, найденного по результатам первой стадии, равна разности дисперсий оценок σ^2_z и $\sigma^2_{z'}$, характеризующих точность оценки среднего содержания m по данным только первой и обеих стадий разведки соответственно.

Дисперсия σ'^2 служит хорошим показателем информативности дополнительных разведочных работ.

Соотношение (XVIII,2,3), или соотношение аддитивности, весьма полезно при формулировании интересующей нас проблемы. Оно является абсолютно общим и следует из свойств операции крайгинга. Это соотношение имеет объективный физический смысл и не требует никакой произвольной вероятностной интерпретации.

Вероятностная интерпретация ошибок

До сих пор мы не делали никаких предположений вероятностного характера и рассматривали дисперсии, которые имеют строгий физический смысл. Для определения понятия вероятного значения с минимумом произвольных допущений мы ограничимся вероятностной интерпретацией только ошибок, так что разности типа $(m-z)$ будут рассматриваться как случайные величины [1]. Переменной $y = m - z$, рассматриваемой в качестве случайной величины, мы припишем закон распределения с плотностью вероятности $f(y)$. Математическая форма функции $f(y)$ произвольна, но она должна быть выбрана так, чтобы среднее значение величины y и ее дисперсия равнялись соответственно нулю [1] и дисперсии оценки σ^2_z, определенной выше, т. е.

$$\left.\begin{aligned} E(y) &= 0,\\ D(y) &= \sigma^2_z. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII,2,4)}$$

Если среднее значение и дисперсия случайной величины y фиксированы, то численные результаты, получаемые в практических приложениях, не должны зависеть от конкретной формы закона распределения этой величины. В зависимости от обстоятельств мы будем использовать то нормальный, то логнормальный закон распределения.

При таком подходе неизвестное истинное содержание m можно представить в виде суммы

$$m = z + y,$$

где z — фиксированная величина, численное значение которой определяется по данным разведки, а y — случайная величина с плотностью вероятности $f(y)$. Следовательно, неизвестную величину m, хотя она и не является на самом деле случайной величиной, можно рассматривать как случайную и характеризовать вероятным значением и дисперсией, равными

$$\left.\begin{aligned} E(m) &= z,\\ D(m) &= \sigma^2_z \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII,2,5)}$$

соответственно.

До сих пор мы совершенно не касались ни закона распределения величины z при фиксированном значении m, ни закона распределения m при фиксированном значении z, относительно которых известно лишь, что объективно их определить нельзя. Можно говорить только о вероятностном распределении ошибки $y = m - z$. Если бы содержание m было известно, а мы искали оценку z, то по аналогии с (XVIII,2,5) следовало бы писать

$$\left.\begin{aligned} E(z) &= m,\\ D(z) &= \sigma^2_z. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII,2,6)}$$

Некоторые ортодоксальные статистики, возможно, будут шокированы подобным ходом рассуждения. В сущности, нет никаких оснований ожидать, что аппарат классической теории вероятностей может быть перенесен в геостатистику. Несмотря на это, мы покажем, что и рассуждения, построенные на классической теории вероятностей, в пределе также неизбежно приводят к соотношениям (XVIII,2,5). Читатели, которых не смущает кажущаяся противоречивость соотношений (XVIII,2,5) и (XVIII,2,6), могут перейти непосредственно к § 3.

Сторонник классической статистики стал бы рассматривать содержания m и z как действительно случайные величины, не пытаясь при этом уточнить необходимые для такого подхода предположения. Он строго различил бы условный закон распределения величины m при фиксированном значении z и условный закон распределения величины z при фиксированном значении m. При таком подходе соотношения (XVIII,2,5) и (XVIII,2,6) оказываются

[1] В данном случае неявно принимается, что рассматриваемый класс месторождений разведан с одной и той же дисперсией σ^2_z и что одно из них выбирается случайно. Тогда разность $(m - z)$ истинного содержания и оценки будет случайной величиной с дисперсией σ^2_z. Ввиду того, что признак, по которому месторождения объединяются в класс, определен однозначно, влияние произвольных допущений на получаемый результат сведено к минимуму.

[1] Чтобы убедиться в этом, достаточно представить весьма протяженное поле K. В таком поле средние значения пространственных переменных m и z совпадают и, следовательно, среднее значение $(m - z)$ будет равным нулю. В случае, когда участок G представляет собой промышленный блок, отличающийся от окружающих его участков более высоким содержанием, нельзя забывать, что оценка z должна быть оценкой крайгинга, т. е. определяться с учетом результатов опробования более бедных, внешних по отношению к этому блоку, участков.

несовместимыми. Действительно, предположим, например, что величины m и z распределены нормально с одинаковым средним m_0, дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 и коэффициентом корреляции ρ. Вероятное значение z при фиксированном значении m определялось бы выражением

$$E[z \mid m] = m_0 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(m - m_0).$$

Сторонник классической статистики охотно допускает, что вероятное значение z равно m, т. е. признает соотношение (XVIII,2,6) справедливым. Отсюда следует, что

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Но тогда вероятное значение m при фиксированном z равно

$$E[m \mid z] = m_0 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(z - m_0) = m_0\left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} z. \qquad \text{(XVIII,2,7)}$$

Оно отличается от z, так как при наличии статистического разброса между z и m оба коэффициента регрессии не могут одновременно быть равными единице.

Чтобы придать конкретный смысл величинам m_0, σ_1^2 и σ_2^2, будем интерпретировать их как среднее значение и дисперсии переменных m и z в большом месторождении K, из которого исключен участок G. Вообще говоря, в таком предположении нет строгости, так как эти параметры будут принимать различные значения в зависимости от того, какую долю от всего месторождения K составит выделенный блок G. Но предположим, что месторождение K очень велико. Тогда обе дисперсии будут содержать постоянную A, зависящую от размера поля K и бесконечно растущую с его увеличением. В пределе уравнение (XVIII,2,7) переходит в выражение

$$E[m \mid z] = z,$$

т. е. вторая линия регрессии сливается с первой, и мы получаем соотношение (XVIII,2,5). Аналогично можно показать, что дисперсия переменной z при фиксированном значении m в пределе равна геостатистической дисперсии оценки. Если бы ортодоксальный статистик захотел использовать уравнение (XVIII,2,7) для практических расчетов, то ему потребовалось бы определить численные значения дисперсий и генерального среднего m_0. Что касается расчета среднего содержания m_0, то в принципе возможны два случая. В первом случае оцениваемый участок G представляет собой все месторождение и, следовательно, все отобранные в пределах месторождения пробы используются при вычислении оценки z. Генеральное среднее m_0 может быть оценено лишь посредством самой оценки z, и уравнение (XVIII,2,7) дает $E[m \mid z] = z$. Во втором случае оцениваемый участок G составляет лишь часть более обширного месторождения и, следовательно, часть имеющихся проб отобрана за пределами G. Тогда генеральное среднее m_0 представляет собой среднее содержание в месторождении и должно оцениваться общим средним содержанием по всем имеющимся пробам как внутренним, так и внешним по отношению к участку G. При этом уравнение (XVIII,2,7) становится фактически уравнением крайгинга, т. е. уравнением, позволяющим найти оценку содержания внутри блока при раздельном учете влияния внутренних и внешних проб. Правда, крайгинг, реализуемый уравнением (XVIII,2,7), далек от совершенства, так как введение в него общего среднего m_0 не обеспечивает взвешивания, наилучшим образом учитывающего влияние внешних данных на участок G. Действительно, всегда есть смысл приписать каждой внешней пробе свой вес, зависящий от расстояния этой пробы до оцениваемого участка и вычисленный из условия минимума дисперсии оценки. Но на практике

именно с помощью такой процедуры крайгинга всегда получается сама оценка z. А так как все внешние пробы наилучшим образом учитываются при расчете оценки z, ортодоксальному статистику ничего не остается для определения оценки генерального среднего m_0.

§ 3. Последовательная оптимизация в случае оценки месторождения типа «все или ничего»

Теперь, после неизбежного теоретического введения, перейдем к вопросу о прекращении разведки в простейшем случае, когда зависимость тоннаж — содержание $T(x)$ не принимается в расчет, т. е. в случае месторождения типа «все или ничего». Вначале выведем общие уравнения, затем запишем их для некоторых конкретных условий, и, наконец, подробно рассмотрим наиболее простой, но часто встречающийся случай, когда учитывается только содержание или только запас.

Общая постановка задачи

Отработка месторождения с запасом T и содержанием m приносит прибыль, актуализированное значение которой $B_i(T, m)$ задано, например, уравнением (XVI,1,9), где величина годовой добычи t определена в соответствии с правилами, изложенными в гл. XVI.

Последствиями неточного определения размеров предприятия можно пренебречь, так как соответствующие потери (вычисляемые по формулам, выведенным в гл. XVII) ничтожно малы по сравнению с риском потерь, и их учет привел бы к практически бесполезному усложнению общих уравнений. Поэтому в дальнейшем размер годовой добычи t рассматривается как простая функция величин T и m, определяемая решением системы (XVI,2,13). Аналогично величины p и I в первом приближении часто можно рассматривать как постоянные.

С учетом сказанного вернемся к схеме последовательного принятия решений (фиг. 207). В точке C, т. е. после завершения первой стадии разведки, имеются оценки T_1 и m_1 тоннажа и содержания. Соответствующие истинные значения τ и μ, хотя и являются физически определенными, нам неизвестны и, как было показано, могут быть интерпретированы как случайные величины с параметрами:

$$\left.\begin{aligned} E(\tau) &= T_1,\ E(\mu) = m_1, \\ D(\tau) &= \sigma_{T_1}^2,\ D(\mu) = \sigma_{m_1}^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII,3,1)}$$

Дисперсии $D(\tau)$ и $D(\mu)$ — геостатистические дисперсии оценки. Кроме того, иногда нужно учитывать ковариацию $\sigma_{T_1 m_1}$, поскольку ошибки в определении тоннажа и содержания могут быть зависимыми. Плотность вероятности $f_1(\tau, \mu; T_1, m_1)$ величин τ и μ может быть выбрана достаточно произвольно при условии, что она будет обеспечивать выполнение соотношений (XVIII,3,1), а в случае необходимости — и равенство теоретической и экспериментальной ковариаций $\sigma_{T_1 m_1}$.

Точно так же после завершения второй стадии разведки, т. е. в точке C′, станут известными оценки T_2 и m_2.

Истинные значения τ и μ в этот момент могут рассматриваться как случайные величины с параметрами

$$\left.\begin{aligned} E(\tau) &= T_2,\ E(\mu) = m_2, \\ D(\tau) &= \sigma_{T_2}^2,\ D(\mu) = \sigma_{m_2}^2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII,3,2)}$$

отвечающими закону распределения $f_2(\tau, \mu; T_2, m_2)$, выбор которого произволен в рамках ограничений, подобных тем, которые накладываются на выбор закона $f_1(\tau, \mu; T_1, m_1)$.

Однако в точке С вторая стадия работ еще не осуществлена. Оценки T_2 и m_2, хотя в принципе физически определены, все же еще неизвестны, и их можно рассматривать как случайные величины, удовлетворяющие условиям (XVIII,2,3) и (XVIII,2,4), которые здесь могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{c} E(T_2)=T_1,\ E(m_2)=m_1, \\ \sigma_T^2=\sigma_{T_1}^2-\sigma_{T_2}^2,\ \sigma_m^2=\sigma_{m_1}^2-\sigma_{m_2}^2. \end{array}\right\} \qquad \text{(XVIII,3,3)}$$

Закон распределения $g(T_2, m_2; T_1, m_1)$ величин T_2 и m_2 должен обеспечивать выполнение условий (XVIII,3,2) и равенства

$$f_1(\tau, \mu; T_1, m_1)=\int\int f_2(\tau, \mu; T_2, m_2)\, g(T_2, m_2; T_1, m_1)\, dT_2\, dm_2, \qquad \text{(XVIII,3,4)}$$

где интеграл берется по всему полю возможных значений T_2 и m_2.

Теперь рассмотрим три решения, возможных в точке С, и для каждого из них вычислим математическое ожидание будущей прибыли $B(\tau, \mu)$. Первое решение — закрыть месторождение — ведет к нулевой прибыли:

$$E(B_1)=0. \qquad \text{(XVIII,3,5)}$$

Второе решение — прекратить разведку и отрабатывать месторождение — ведет к прибыли $B(\tau, \mu)$, вероятное значение которой выводится из закона распределения $f_1(\tau, \mu; T_1, m_1)$, когда T_1 и m_1 известны:

$$E(B_2)=\int\int B(\tau, \mu)\, f_1(\tau, \mu; T_1, m_1)\, d\tau\, d\mu. \qquad \text{(XVIII,3,6)}$$

Интегрирование производится по всем возможным значениям τ и μ.

Для третьего решения дело обстоит несколько сложнее. Предвосхищая результаты T_2 и m_2 второй стадии разведки, мысленно перенесемся в точку С′, где возможны только два решения: закрыть или отрабатывать месторождение. С этими решениями свяжем два уравнения, аналогичные (XVIII,3,5) и (XVIII,3,6):

$$\left.\begin{array}{l} E'(B_1)=0 \\ \text{и} \\ E'(B_2)=\int\int B(\tau, \mu)\, f_2(\tau, \mu; T_2, m_2)\, d\tau\, d\mu. \end{array}\right\} \qquad \text{(XVIII,3,7)}$$

В точке С′ будет принято решение закрыть месторождение, если $E'(B_2)<0$, или сдать его в эксплуатацию, если $E'(B_2)>0$. Однако в момент С вторая стадия разведки еще не производилась, поэтому следует, воспользовавшись законом распределения $g(T_2, m_2; T_1, m_1)$ величин T_2 и m_2 при известных значениях T_1 и m_1, найти вероятное решение, которое будет принято в точке С′. При этом необходимо принять во внимание затраты R, которые потребуются на проведение второй стадии разведки. Тогда для математического ожидания прибыли, соответствующей принятию третьего решения, получим следующее выражение:

$$E(B_3)=\int\int_D E'(B_2)\, g(T_2, m_2; T_1, m_1)\, dT_2\, dm_2 - R. \qquad \text{(XVIII,3,8)}$$

Выражение $E'(B_2)$ под знаком интеграла определено вторым из уравнений (XVIII,3,7), а область интегрирования D соответствует значениям T_2 и m_2, для которых выполняется соотношение

$$E'(B_2)\geqslant 0. \qquad \text{(XVIII,3,9)}$$

Если бы сумма затрат R равнялась нулю, величина $E(B_3)$ всегда была бы больше $E(B_2)$, так как дополнительная информация, полученная на второй стадии разведки, позволила бы уменьшить вероятность ввода в эксплуатацию фактически нерентабельного месторождения. Введение в уравнение (XVIII,3,8) стоимости дополнительных разведочных работ позволяет учесть соотношение между затратами на разведку и ее экономическим эффектом. Таким образом, критерий для принятия решения очень прост: принимается то из трех возможных решений, при котором значение прибыли, рассчитываемое по формулам (XVIII,3,5), (XVIII,3,6) и (XVIII,3,8), будет максимальным.

Конкретизация общих уравнений

В общем случае сложность численных расчетов по уравнениям зависит от принятого вида распределений f_1, f_2 и g. Эти распределения могут быть выбраны произвольно при условии совпадения их математических ожиданий и дисперсий с заданными значениями. Для практических применений выбирают такой вид закона распределения, при котором в наибольшей степени упрощаются расчеты.

Рассмотрим в первую очередь выражение (XVIII,3,6) для математического ожидания прибыли $E(B_2)$. Воспользуемся для функции прибыли $B(\tau, \mu)$ уравнением вида (XVI,1,9). Исследуя вопрос о принятии решения в точке С, можно считать, что потери, связанные с неточным определением размера предприятия (гл. XVII), ничтожно малы по сравнению с риском потерь.

Размер годовой добычи можно принимать за постоянную величину, так как последствия ее возможных изменений кажутся весьма незначительными и трудно поддающимися расчету в момент С. Поэтому и капиталовложения I, и затраты p на тонну руды следует рассматривать как заданные постоянные величины. Итак, принимается следующее выражение прибыли:

$$B(\tau, \mu)=(b\mu-p)\, t\,\frac{1-e^{-i\tau/t}}{i}-I. \qquad \text{(XVIII,3,10)}$$

В этом выражении μ входит в линейный член, а τ — в экспоненциальный. Поэтому удобно рассматривать μ как логнормальную величину, а τ — как нормальную (тогда член $e^{-i\tau/t}$ также будет логнормальным). Чтобы не загромождать изложения, мы не приводим всех деталей расчетов, в результате которых получается следующее выражение для прибыли $E(B_2)$:

$$E(B_2)=(bm_1-p)\, t\,\frac{1-e^{-iN_1}}{i}-I, \qquad \text{(XVIII,3,11)}$$

где $N_1=T_1/t$. Это уравнение по форме полностью совпадает с уравнением (XVII, 3,10), только истинные величины τ и μ заменены их вероятными значениями T_1 и m_1.

Перейдем теперь к более сложному расчету прибыли $E(B_3)$, определяемой уравнением (XVIII,3,8).

Прибыль $E'(B_2)$ вычислим по формуле, аналогичной формуле (XVIII,3,11):

$$E'(B_2)=(bm_2-p)\, t\,\frac{1-e^{-iN_2}}{i}-I. \qquad \text{(XVIII,3,12)}$$

Это выражение для $E'(B_2)$ подставим в уравнение (XVIII,3,8). Точный расчет интеграла весьма сложен, так как область интегрирования D, определенная неравенством (XVIII,3,9), ограничена весьма сложной кривой $E'(B_2)=0$, соответствующей предельно рентабельному соотношению между запасами и содержанием. Удобно перейти от двойного интегрирования к одинарному путем введения новой переменной

$$X=E'(B_2),$$

закон распределения которой $H(X; T_1, m_1)$ в принципе может быть получен из f_2 и g, и тогда

$$E(B_3) = \int_0^\infty XH(X; T_1, m_1)\,dX - R, \qquad \text{(XVIII,3,13)}$$

где интеграл берется от нуля до бесконечности. Что касается закона распределения H, то его довольно трудно выразить через законы распределения f_2 и g, так как эти последние имеют произвольную форму. Вообще говоря, можно приписать закону распределения H простейший вид, предусмотрев только, чтобы среднее значение и дисперсия переменной X, распределенной по этому закону, в точности совпадали с заданными значениями. Вероятное значение X — это не что иное, как $E(B_2)$ из уравнения (XVIII,3,11). Дисперсию определить несколько сложнее. Прямым расчетом получим следующее выражение:

$$\sigma_X^2 = t^2 b^2 \sigma_m^2 \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i}\right)^2 + (bm_1 - p)^2 e^{-2iN_1}\sigma_T^2. \qquad \text{(XVIII,3,14)}$$

Будем считать X нормально распределенной величиной с дисперсией σ_X^2 и вероятным значением

$$X_0 = (bm_1 - p)\,t\frac{1-e^{-iN_1}}{i} - I.$$

Обозначим символом $G(z)$ обычный гауссовский интеграл

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

Запишем (XVIII,3,12) в виде

$$E(B_3) = X_0 G\left(-\frac{X_0}{\sigma_X}\right) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_0^2}{2\sigma_X^2}} - R. \qquad \text{(XVIII,3,15)}$$

Таблицы функций нормального распределения облегчают численный расчет величины $E(B_3)$. Если значение X_0 в три или четыре раза превосходит величину стандартного отклонения σ_X, можно воспользоваться асимптотическими формулами, приведенными в приложении к этой главе.

Частный случай, когда учитывается только содержание

Иногда ошибкой в определении запасов можно пренебречь и принять решение только на основании полученной оценки содержания. Такая ситуация часто возникает при разведке жильных месторождений [1]. Формулы, выведенные выше, существенно упрощаются. Если минимально промышленное содержание равно m_0, а истинное содержание — μ, то прибыль всегда может быть представлена в виде

$$B = bT(\mu - m_0), \qquad \text{(XVIII,3,16)}$$

где T — тоннаж, а b' — стоимость единицы металла в тонне руды. Применив соотношения (XVIII,2,5), найдем, что

$$\left.\begin{aligned} E(B_1) &= 0, \\ E(B_2) &= bT(m_1 - m_0). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII,3,17)}$$

[1] В действительности при разведке жильных месторождений горными выработками почти всегда есть перспектива продолжения промышленной рудоносности ниже последнего разведанного горизонта. Но так как количественные оценки этой части запасов не представляются возможными, изучение рентабельности эксплуатации касается только разведанной части месторождения. Аналогично следует поступать и при отыскании оптимального объема разведочных работ, т. е. учитывать только разведанный запас.

Если бы выбор в точке C ограничивался двумя первыми решениями, месторождение следовало бы сдать в эксплуатацию или забраковать в зависимости от того, превышает истинное содержание μ уровень минимально промышленного содержания m_0 или нет. Для расчета прибыли $E(B_3)$, необходимого при наличии трех возможных решений, положим, как и ранее, что m_0 — логнормально распределенная случайная величина со средним значением m_1 и дисперсией $\sigma^2 = \frac{\sigma_m^2}{m_2^2}$. Тогда

$$E(B_3) = bT[m_1 G(z-\sigma) - m_0 G(z)] - R, \qquad \text{(XVIII,3,18)}$$

где G — интеграл Гаусса, а z — нормированное содержание сортировки, связанное с минимально промышленным содержанием m_0 соотношением

$$z = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{m_0}{m_1} + \frac{1}{2}\sigma.$$

Пример. Пусть месторождение свинца, цинка и серебра разведано на поверхности и на одном подземном горизонте и в нем определены запасы руды, составляющие 400 000 m. Возможно, что месторождение продолжается ниже разведанного горизонта, но мы этого в расчет не принимаем. Стоимость свинца, цинка и серебра, содержащихся в тонне руды, оценена в 3000 старых франков [1]. Минимально промышленное содержание полезных компонентов соответствует стоимости руды, также равной 3000 старых франков за тонну, т. е. месторождение находится на грани рентабельности. Принимая во внимание возможные колебания рыночной стоимости металлов, проведем расчет для трех значений минимально промышленного содержания m_0 — 2700, 3000 и 3300 франков. Среднее содержание известно с погрешностью, характеризующейся стандартным отклонением $\sigma_{m_1} = 0{,}15$. Вторая стадия разведки, которая должна вскрыть рудное тело еще на одном горизонте, стоила бы 40 млн. франков и уменьшила бы стандартную ошибку среднего в два раза [2]. Отсюда следует, что стандартная ошибка оценки содержания m_2 с помощью m_1 равна

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_{m_1}^2 - \sigma_{m_2}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{m_1} = 0{,}13.$$

Результаты расчета математических ожиданий прибыли по формулам (XVIII,3,17) и (XVIII,3,18) для трех значений минимально промышленного содержания приведены (в миллионах старых франков) в табл. 50.

Таблица 50

m_0	2700	3000	3300
$E(B_1)$	0	0	0
$E(B_2)$	+120	0	—120
$E(B_3)$	136—40=+96	56—40=+16	20—40=—20

Если минимально промышленное содержание составляет 2700 франков, месторождение следует ввести в эксплуатацию, если 3300 франков — отбраковать без дополнительной разведки. Если же минимально промышленное содержание составляет 3000 франков, то при условии проведения второй стадии разведки теоретически возможна небольшая прибыль (например, в 16 млн. франков). Такое положение является достаточно общим: дополнительная информация, получаемая на второй стадии разведочных работ,

[1] Так как месторождение многокомпонентное, целесообразно учитывать суммарную стоимость всех металлов, содержащихся в тонне руды.

[2] В зоне линейного возрастания вариограммы новая дисперсия равна одной четверти старой.

наиболее важна тогда, когда по данным предварительной разведки месторождение оказывается на грани рентабельности. Ценность этой информации быстро убывает при увеличении разности между средним по месторождению и минимально промышленным содержанием (независимо от того, будет ли среднее содержание больше или меньше граничного). Поэтому, если имеется уверенность в том, что истинное среднее содержание полезного компонента в месторождении существенно больше (или меньше) минимально промышленного, следует принять решение о вводе месторождения в эксплуатацию (или о его закрытии), и нет никакой нужды проводить дополнительную разведку.

Частный случай, когда учитывается только запас

В некоторых случаях можно считать, что содержание определено практически точно, а основная ошибка связана с оценкой тоннажа. Так обстоит дело для ряда осадочных месторождений, а также для месторождений, в которых участки промышленного оруденения образуют сложную сеть линз и прослоев в однородном массиве непромышленных вмещающих пород. В такой ситуации рентабельность отработки месторождения зависит от того, достаточен ли общий запас промышленных руд для амортизации капиталовложений.

Если V — стоимость тонны руды, то в прежних обозначениях прибыль $E(B_2)$ запишется как

$$E(B_2) = \frac{1 - e^{-i\frac{T_1}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_{T_1}^2}{t^2}}}{i}(V-p)\,t - I. \qquad \text{(XVIII,3,19)}$$

Отметим, что это математическое ожидание всегда меньше того, которое получилось бы при σ_T^2, т. е. в случае точно известного запаса. Таков эффект актуализации прибыли. Действительно, хотя истинный запас с равными шансами может оказаться как меньше, так и больше оценки T_1, потери, которые предприятие понесет в первом случае, оказываются ближе во времени к текущему моменту, чем выигрыш, который оно может получить во втором случае; поэтому потери лучше выражать в актуализированном виде. Однако эффект актуализации обычно проявляется очень слабо, и, как правило, член $\frac{i^2}{2} \times \frac{\sigma_{T_1}^2}{t^2}$ бывает ничтожно малым.

Если принимается третье решение, то в результате разведки на второй стадии будет получена новая оценка T_2 с дисперсией $\sigma_{T_2}^2$, и ожидаемая прибыль, отнесенная к точке C′, запишется в виде

$$E'(B_2) = \frac{1}{i}\left(1 - e^{-i\frac{T_2}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_{T_2}^2}{t^2}}\right)(V-p)\,t - I.$$

Тогда в точке C′ будет решено эксплуатировать месторождение или забраковать его в зависимости от того, положительно или отрицательно значение $E'(B_2)$, т. е. превышает тоннаж T_2 предельное значение T_L, соответствующее равенству $E'(B_2) = 0$, или нет. Предельное значение тоннажа, определяемое выражением [1]

$$T_L = -\frac{t}{i}\ln\left[1 - \frac{iI}{(V-p)\,t}\right] + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_{T_2}^2}{t^2}, \qquad \text{(XVIII,3,20)}$$

[1] Это выражение отличается от выражения, выведенного для предельного значения тоннажа (гл. XVI), на поправочный член $\frac{t^2}{2}\frac{\sigma_T^2}{t^2}$. Так как величина поправочного члена обычно мала, оба определения для предельного тоннажа практически эквивалентны.

тем меньше, чем меньше дисперсия $\sigma_{T_2}^2$, т. е. чем детальнее проведена разведка. Это также одно из проявлений эффекта актуализации. Следствием проведения разведочных работ на второй стадии является снижение предельного значения тоннажа на величину

$$\frac{i^2}{2}\frac{\sigma_{T_1}^2 - \sigma_{T_2}^2}{t^2} = \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_T^2}{t^2}.$$

В точке C оценка T_2 рассматривается как нормально распределенная величина со средним значением T_1 и дисперсией $\sigma_T^2 = \sigma_{T_1}^2 - \sigma_{T_2}^2$. Экспонента $e^{-iT_2/t}$ является логнормальной величиной, и выражение (XVIII,3,13) легко вычисляется с помощью интегрирования по T от T_0 до бесконечности. В результате получаем выражение

$$E(B_3) = \frac{(V-p)\,t}{i} - IG\left(\frac{T_L - T_1}{\sigma_T}\right) -$$

$$-\frac{(V-p)\,t}{i}e^{-i\frac{T_1}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_T^2}{t^2}}G\left(\frac{T_1 - T_L}{i\sigma_T} - \frac{i\sigma_T}{t}\right) - R, \qquad \text{(XVIII,3,21)}$$

численное значение которого легко найти с помощью таблиц интеграла Гаусса.

§ 4. Последовательная оптимизация в случае, когда учитывается соотношение тоннаж — содержание

Когда необходимо учесть соотношение тоннаж — содержание $T(x)$, то при желании сформулировать проблему строго, она становится практически неразрешимой. Напротив, когда в точке C принято решение пренебречь ошибкой в определении минимально промышленного содержания x и размера годовой добычи t (что в первом приближении вполне допустимо), задача сводится к случаю «все или ничего». Действительно, к моменту C известна оценка соотношения $T(x)$ между тоннажем и минимально промышленным содержанием, полученная по данным первой стадии разведки. С учетом этого соотношения намечается предварительный план эксплуатации месторождения, включающий основные показатели: минимально промышленное содержание x_1, тоннаж T_1 и среднее содержание m_1. Примем (из осторожности), что отработка месторождения производится жестким способом, т. е. что выемка руды производится из заранее оконтуренных блоков. Так как при таком способе отработки граничного эффекта не будет, то разница между количеством реально добытой руды и запроектированной, т. е. T_1, не должна превышать величины, характеризуемой дисперсией σ_T^2 (например, дисперсией оценки средней мощности). Аналогично среднее содержание в проектных контурах отработки характеризуется оценкой m_1 с дисперсией $\sigma_{m_1}^2$, которая может быть рассчитана.

По завершении разведки на второй стадии будет получена новая оценка $T_2(x)$ соотношения тоннаж — содержание, которая может быть положена в основу составления нового проекта (x_2, T_2, m_2) с несколько отличными от первоначальных контурами эксплуатационных блоков. Однако это отличие не влияет в первом приближении на новые дисперсии оценок $\sigma_{T_2}^2$ и $\sigma_{m_2}^2$. Дальше следует рассуждать точно так же, как и в случае месторождения «все или ничего». В момент C значения T_2 и m_2 неизвестны, но их можно рассматривать как случайные величины, удовлетворяющие условиям (XVIII, 3,3), а расчет математических ожиданий всех прибылей производить в соответствии с правилами, описанными выше («Конкретизация общих уравнений» в § 3 настоящей главы). Кроме того, так как влияние граничного эффекта исключено, ошибка в определении тоннажа часто бывает столь малой, что ею можно пренебречь и вернуться к уже рассмотренному случаю, когда учитывается только содержание.

Приложение. Асимптотические формулы

В выражении (XVIII,3,15) содержится интеграл Гаусса $G(u)$, где аргумент u представляет собой нормированную и центрированную нормально распределенную величину. Если абсолютное значение аргумента u мало (случай, когда месторождение близко к границе рентабельности), следует пользоваться соответствующими таблицами функций нормального распределения. Но если величина $|u|$ равна нескольким единицам (например, больше трех или четырех), можно воспользоваться асимптотической формулой

$$G(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{u\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\left[1-\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1\cdot3}{u^4}-\dfrac{1\cdot3\cdot5}{u^6}+\dots\right] & \text{при } u>0,\\ 1-G(-u) & \text{при } u<0.\end{cases}$$

Например, если $X_0>\sigma_X$, то формула (XVIII,3,15) может быть записана в виде

$$E(B_3)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X_0^2}{2\sigma_X^2}}\left[\dfrac{\sigma_X^2}{X_0^2}-1\cdot3\left(\dfrac{\sigma_X}{X_0}\right)^4+\dots\right]-R \text{ при } X_0<0,\\ X_0+\dfrac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X_0^2}{2\sigma_X^2}}\left[\left(\dfrac{\sigma_X}{X_0}\right)^2-1\cdot3\left(\dfrac{\sigma_X}{X_0}\right)^4+\dots\right]-R \text{ при } X_0>0.\end{cases}$$

Очень быстрое убывание значений экспоненты приводит к тому, что если разность между средним и минимально промышленным содержанием по абсолютной величине в несколько раз превышает стандартную ошибку, то проведение дополнительных разведочных работ практически теряет всякий смысл.

Упражнения

Упражнения к гл. I

Упражнение 1. Найти ковариограмму геометрической переменной для прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что геометрическая ковариограмма для отрезка длины l имеет вид

$$g(h)=\begin{cases}l-|h| & \text{при } |h|<l,\\ 0 & \text{при } |h|\geqslant l,\end{cases}$$

а для прямоугольника со сторонами a и b, параллельными осям координат x и y, соответственно

$$g(h)=\begin{cases}(a-|x|)(b-|y|) & \text{при } |x|<a,\ |y|<b,\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant a,\ |y|\geqslant b.\end{cases}$$

Упражнение 2. А) Определить геометрическую ковариограмму $g(r)$ для круга радиуса R. Продифференцировать ее по радиусу-вектору r и проинтерпретировать полученный результат.

Б) То же для сферы радиуса R.

В упражнении 2, Б ковариограмма $g(r)$ является многочленом третьей степени относительно r.

Упражнение 3. А) Пусть V — выпуклое тело, α — фиксированное направление, $g(r,\alpha)$ — геометрическая ковариограмма объема V в полярных координатах. Совокупность проекций прямых, пересекающих V и параллельных направлению α, образует на плоскости, перпендикулярной этому направлению, проекцию видимого контура V площадью S_α.

Показать, что

$$S_\alpha=-g'_r(0,\alpha).$$

Б) Назовем пересечением длину отрезка прямой, заключенную внутри тела V. Тогда прямые, пересечения которых превышают некоторую длину r, выделяют в проекции S_α часть площади, равную $-g'_r(r,\alpha)$. Если в пределах S_α случайно выбрать след одной из прямых, то соответствующее этой прямой пересечение будет случайной величиной с функцией распределения, выражаемой через $-g'_r(r,\alpha)$.

Показать, что при фиксированном направлении α и положительном значении r ковариограмма $g(r,\alpha)$ будет выпуклой функцией.

В) Та же задача, но в случае двумерного пространства (в качестве «тела» рассматривается выпуклая область на плоскости).

Упражнение 4. А) Пусть в одномерном пространстве задана функция

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{при } |x|\leqslant b,\\ 0 & \text{при } |x|>b.\end{cases}$$

Определить ее ковариограмму.

Б) То же для функции

$$f(x)=\begin{cases}b^2-x^2 & \text{при } |x|\leqslant b,\\ 0 & \text{при } |x|>b.\end{cases}$$

Дважды продифференцировать полученную ковариограмму, сравнить с результатом, полученным в упражнении 4, А, и проинтерпретировать.

Упражнение 5. Произвести восхождение второго порядка над ковариограммой, полученной в упражнении 2 для сферы радиуса R. Сравнить результат с результатом упражнения 4.

Упражнение 6. Пусть дана функция

$$f(r)=\begin{cases}(b^2-r^2)^{\lambda} & \text{при } r<b,\\ 0 & \text{при } r\geqslant b.\end{cases}$$

Показать, что операция восхождения первого порядка приводит к функции вида $A\,(b^2-r^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}$. Доказать, что операция восхождения привела к регуляризации ковариограммы в окрестности $r=b$.

Упражнение 7. А) Произвести восхождение первого и второго порядков над нерегулярной частью функции $f(r)=e^{-\lambda r}$.

Б) То же для функции $f(r)=e^{-\lambda r^2}$.

Упражнение 8. Показать, что правило почленного восхождения может быть записано в виде

$$\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)r^{\lambda}\to\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)r^{1+\lambda}$$

$\left[\text{использовать формулу } \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\right]$.

Заменить r^{λ} на $r^{\lambda}-r^{2p}$ (что допустимо, так как правило соответствия дает результат восхождения для всего ряда за вычетом членов с целыми четными показателями степеней) и перейти к пределу $\lambda\to 2p$. Вывести основную последовательность переходов (см. конец гл. I).

Упражнение 9 (эффект самородков). Пусть в одномерном пространстве задан отрезок длиной $L=nl$, разделенный на n отрезков l. Функция $f(x)$ равна нулю вне отрезка L и принимает внутри каждого отрезка l_i постоянное значение X_i. Предполагается, что $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с общим средним значением m и одинаковыми дисперсиями σ^2. Тогда ковариограмма $g(h)$ является случайной функцией.

Доказать, что математическое ожидание $E(g)$ ковариограммы $g(h)$

$$E(g)=\begin{cases}0 & \text{при } |h|\geqslant L,\\ m^2(L-|h|) & \text{при } l<|h|<L,\\ m^2(L-|h|)+n\sigma^2(l-|h|) & \text{при } |h|\leqslant l.\end{cases}$$

Построить кривую и обратить внимание, что при малых размерах l наблюдается эффект самородков.

Упражнение 10. А) Пусть $f(x)$ — неотрицательная суммируемая функция, определенная в n-мерном пространстве и удовлетворяющая условию: $\int f(x)\,dx=1$. Тогда можно рассматривать $f(x)$ как плотность вероятности некоторой многомерной случайной величины $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Показать, что ковариограмма $f*\check{f}$ представляет собой плотность вероятности величины $z=X-X'$, где X и X' — независимые случайные величины, каждая из которых распределена с плотностью вероятности $f(x)$.

Б) Пусть X — многомерная случайная величина с плотностью вероятности μ. Определим ковариограмму g как плотность вероятности величины $X-X'$, где X' — независимая непрерывная случайная величина с той же плотностью вероятности μ. Рассмотреть случай, когда μ — закон распределения дискретной случайной величины X с N возможными значениями $x_1, \ldots, x_N$ и $P(X=x_i)\ \frac{1}{N}$.

Показать, что ковариограмма g в этом случае представляет собой дискретный закон распределения, приписывающий началу координат вероятность $\frac{1}{N}$ и каждой точке (x_i-x_j), $i\neq j$, вероятность $\frac{1}{N^2}$.

В) Пусть теперь N точек x_i взаимно независимы и случайно размещены в пространстве с плотностью распределения f. Тогда ковариограмма g, упомянутая в упражнении 10, Б, будет условным законом распределения при фиксированных x_i.

Показать, что заведомо подходящий закон может быть записан в виде

$$g=\frac{1}{N}\,\delta+\left(1-\frac{1}{N}\right)f*\check{f},$$

где δ — мера Дирака, т. е. $\frac{1}{N}\,\delta$ означает вероятность $\frac{1}{N}$ в начале координат и характеризует эффект самородков.

Г) Пусть $\bar{\omega}$ — положительная функция с суммой, равной единице. Свертка $\mu*\bar{\omega}$ представляет собой закон распределения разности $X-Y$, где X и Y — независимые случайные величины с законами распределения μ и $\bar{\omega}$. Проинтерпретировать ковариограмму $\mu*\check{\mu}*\bar{\omega}*\check{\bar{\omega}}$. В случае, когда μ — закон распределения дискретной величины, рассмотренный в упражнении 10,Б, а точки x_i — случайные точки (как в упражнении 10, В), ковариограмма $\mu*\check{\mu}*\bar{\omega}*\check{\bar{\omega}}$ представляет собой условный закон распределения.

Показать, что закон вида

$$g=\frac{1}{N}\,\bar{\omega}*\check{\bar{\omega}}+\left(1-\frac{1}{N}\right)\bar{\omega}*\check{\bar{\omega}}*f*\check{f}$$

является заведомо подходящим.

Д) Основываясь на полученных результатах, показать, что эффект самородков просто представить с помощью меры Дирака. Тогда ковариограмма с эффектом самородков будет иметь вид

$$g=C\delta+g_1,$$

где g_1 — компонента ковариограммы, непрерывная в нуле. Ковариограмма функции f, регуляризованной с помощью непрерывной функции f, может быть представлена в виде

$$g=C\pi+g_1*\pi,$$

где π — ковариограмма функции $\bar{\omega}$.

Е) Если μ_n — закон распределения n-мерной случайной величины $X_n=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то восхождение вдоль оси x_n осуществляет переход от μ_n к распределению μ_{n-1} $(n-1)$-мерной случайной величины $X_{n-1}=(X_1, \ldots, X_{n-1})$. Показать, что ковариограмма $\mu_{n-1}*\check{\mu}_{n-1}$ величины X_{n-1} также может быть получена из исходной ковариограммы $\mu_n*\check{\mu}_n$ величины X_n посредством операции восхождения.

В более общем виде, если $\bar{\omega}_n$ — функция опробования, определенная в n-мерном пространстве, а $\bar{\omega}_{n-1}$ — функция, полученная из нее в результате операции восхождения вдоль оси x_n, то ковариограмма $\mu_{n-1}*\check{\bar{\omega}}_{n-1}$ получается из $\mu_n*\check{\bar{\omega}}_n$ восхождением первого порядка.

Упражнения к гл. II и III

Рассмотреть, как влияет операция восхождения на эффект самородков.

Упражнение 1. В линейном случае найти точное выражение дисперсии оценки для сети с шагом a и ковариограммы $g(r)=e^{-r}$. Найти основную часть этой дисперсии при малом a. Показать, что она не содержит элемента флуктуаций.

Упражнение 2. А) Пусть в линейном случае ковариограмма $g(h)$ имеет вид

$$g(h) = \begin{cases} b - |h| & \text{при } |h| \leqslant b, \\ 0 & \text{при } |h| > b. \end{cases}$$

Пусть шаг сети a меньше носителя b. Положим $\frac{b}{a} = n + \varepsilon$ $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$.

Найти точное выражение дисперсии оценки $a^2(\varepsilon - \varepsilon^2)$ и разделить его на элементы распространения и флуктуаций. Убедиться, что среднее по ε значение элемента флуктуаций равно нулю.

Б) Чтобы определить длину отрезка l, произвели опробование по сети с шагом a. Среди результатов опробования, $S_0 \ldots, S_{n+1}$, первый и последний, т. е. S_0 и S_{n+1}, оказались вне отрезка, а $S_1, \ldots, S_n$ — внутри его. Принимается, что конец отрезка l с равной вероятностью может оказаться в любой точке между S_n и S_{n+1}. Аналогично его левый конец может оказаться в любой точке между S_0 и S_1 независимо от правого. Длина l рассматривается как случайная величина.

Определить ее среднее значение и дисперсию и доказать, что в данном случае элемента флуктуаций нет.

Упражнение 3. А) Пусть v — некоторый объем, а $g(h)$ — его геометрическая ковариограмма. Объем v содержится в некотором параллелепипеде П со сторонами a_1, a_2, a_3. Внутри П случайно выбирается точка x, с которой связана случайная величина X, определяемая формулой

$$X = \begin{cases} a_1 a_2 a_3 & \text{при } x \in v, \\ 0 & \text{при } x \bar{\in} v. \end{cases}$$

Показать, что дисперсия величины X равна $\sigma_X^2 = a_1, a_2, a_3\, g(0) - \int g(h)\, dh$.

Б) Пусть объем v заключен в параллелепипеде П, а $f(x)$ — функция, равная нулю вне v. Выбирают внутри параллелепипеда (как и в упражнении 3, А) точку x и приписывают ей значение $X = f(x)$.

Выразить дисперсию X через ковариограмму функции f. Интерпретировать полученный результат.

Упражнение 4. Рассмотреть случай оценки объема эллипсоида с полуосями A_1, A_2, A_3 по сети с ячейкой $a_1 a_2 a_3$, ребра которой совпадают с направлениями полуосей эллипсоида. Обратить внимание на случай $a_1 = 0$ и $a_1 = a_2 = 0$.

Интерпретировать результаты (воспользоваться операцией восхождения).

Упражнение 5. В линейном случае сравнить регулярную и слоевую случайную сети, если ковариограмма $g(h)$ вблизи нуля линейно возрастает с увеличением h.

Рассмотреть случай $\lambda = 1$.

Упражнение 6 (см. упражнение 10, гл. I). Пусть f — пространственная переменная, а функция $g = C\delta + g_1$ — ее ковариограмма, обладающая эффектом самородков. Пусть $k(x)$ — геометрическая переменная объема v с ковариограммой K. Переменная f регуляризуется умножением на $\frac{1}{v} k(x)$, при этом $\frac{1}{v} k * f$ представляет собой содержание в пробе v, отобранной в точке x. Такие пробы отбираются по регулярной сети с шагом $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Дисперсия оценки имеет вид $\sigma^2(a) = \sigma_c^2(a) = \sigma_1^2(a)$. Элемент $\sigma_1^2(a)$ вычисляется обычным способом.

Показать, что дисперсия самородков $\sigma_c^2(a)$ равна $C\left(\frac{|a|}{v} - 1\right)$. Если V — геометрическое поле, а V' — суммарный объем проб, то, аналогично

$$\sigma_c^2(a) = C\left(\frac{V}{V'} - 1\right)$$

(дисперсия самородков обратно пропорциональна объему проб).

Упражнения к гл. IV

Упражнение 1. А) Пусть функция $f(x)$ равна x на интервале $(-b, b)$ и нулю — вне его.

Показать, что эта переменная независима от своего поля (в смысле внутренней независимости). Вычислить дисперсию оценки интеграла $Q = \int f(x)\, dx$ по сети с шагом a на интервале длиной $2l$, если среднее значение $f(x)$ в этом интервале равно m.

Б) Пусть функция равна $l^2 - x^2$ на интервале $(-b, b)$ и нулю — вне его.

Ответить на те же вопросы, что и в случае упражнения 1,А, но с учетом того, что на этот раз функция $f(x)$ не независима от своего поля.

Упражнения к гл. V

Упражнение 1. В одномерном пространстве задана стационарная в широком смысле случайная функция с ковариацией $e^{-\lambda|h|}$ и средним значением m. Найти оценку крайгинга значений $f(x_0)$ функции в точках $x_0 > 0$, зная значение $f(0)$ при $x = 0$ и значения $f(y_1), f(y_2), \ldots$ в некотором количестве точек с абсциссами $y_i < 0$. Показать, что оценка имеет вид $(1 - p)\, m + pf(0)$, где $p = e^{-\lambda x_0}$ и не зависит от $f(y_i)$.

Тот же вопрос для крайгинга точки x_0, принадлежащей отрезку (x_1, x_2), по известным значениям $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(y_i)$ в точках y_i, лежащих вне (x_1, x_2). Вычислить дисперсию крайгинга.

Упражнение 2 (марковский процесс с двумя состояниями). На некоторой прямой случайно размещены точки; плотность их распределения описывается законом Пуассона с параметром λ [число точек, попавших на отрезок l, является случайной величиной $N(l)$, подчиняющейся закону Пуассона со средним значением, равным λl. Если l и l' — два несоприкасающихся отрезка, то значения $N(l)$ и $N(l')$ независимы]. Точки, размещенные на прямой, делят ее на отрезки. Пусть задана функция $f(x)$, принимающая внутри каждого отрезка постоянные значения, равные 0 или 1 (с вероятностями $q = 1 - p$ и p соответственно). Значения, принимаемые этой функцией на различных отрезках, предполагаются независимыми друг от друга.

Приняв $f(x) = 1$, показать, что условная вероятность получить $f(x + h) = 1$ равна $p + qe^{-\lambda|h|}$. Доказать, что для $h > 0$ эта вероятность не меняется, если известны значения $f(y)$ в некотором числе y, расположенных *слева* от x (марковское свойство). Вычислить ковариационную функцию $(pqe^{-\lambda|h|})$.

Упражнение 3 (марковский процесс с двумя состояниями на плоскости). Рассмотрим на плоскости прямые, расположенные случайно в соответствии с законом Пуассона с линейной плотностью λ. Это значит, что прямые, направления которых лежат между α и $\alpha + d\alpha$, изображают на прямой, перпендикулярной направлению α, процесс Пуассона с плотностью $\lambda\, d\alpha$ и что в каждом направлении α_i процесс происходит независимо. Эти прямые делят плоскость на случайные многоугольники. В каждом из этих многоугольников функция $f(x)$ принимает постоянное значение 1 или 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно.

Показать, что ковариационная функция $f(x)$ равна $pqe^{-\lambda|h|}$. Доказать, что описанная схема порождает линейный марковский процесс (см. упражнение 2) на любой прямой в плоскости.

Можно определить случайные меры (или, в общем случае, обобщенные функции), стационарные в широком смысле. Если μ — такая мера, то $\mu * \check{p}$, где p — функция опробования, которая также является случайной стационарной в широком смысле функцией. Существует мера K, представляющая ковариацию меры μ. Регуляризованная функция $\mu_p = \mu * \check{p}$ обладает ковариацией $K_p = K * P * p * \check{p}$ (которая также является функцией). Два следующих упражнения относятся к частным случаям.

Упражнение 4. В n-мерном пространстве разместим случайно в соответствии со схемой Пуассона точки x_i. Это значит, что число $N(V)$ точек в объеме V — случайная величина, удовлетворяющая закону Пуассона со средним значением λV, и если при этом V и V' — два непересекающихся объема, то $N(V)$ и $N(V')$ независимы. Обозначим символом μ меру, полученную путем приписывания точкам x_i массы $+1$.

А) Пусть $p(x)$ — функция опробования. Регуляризованная мера $\mu * \hat{p}$ будет функцией $\mu_p(x) = \sum_i p(x_i - x)$.

Показать, что при фиксированном x случайная величина $\mu_p(x)$ обладает характеристической функцией $\Phi(u)$, удовлетворяющей соотношению

$$\ln \Phi(u) = \lambda \int \{\exp[iup(z-x)] - 1\}\, dz$$

и не зависящей от x. Аналогично для заданных x и y переменная $[\mu_p(x), \mu_p(y)]$ обладает характеристической функцией $\Phi(u,v)$ —

$$\ln \Phi(u, v) = \lambda \int \{\exp[iup(z-x) + ivp(z-y)] - 1\}\, dz.$$

Она зависит только от разности $x - y$. Вывести отсюда, что ковариация K_p регуляризованной меры μ_p равна $K_p = \lambda p + \check{p} = \lambda P$ (другими словами, если δ — мера Дирака, то мера Пуассона μ в качестве ковариации имеет меру $\lambda - \delta$).

Б) Пусть $f(x)$ — пространственная переменная, удовлетворяющая условию суммируемости, а $g = f * \check{f}$ — ее транзитивная ковариограмма. Рассмотреть случайную функцию $\sum_i f(x - x_i)$.

Показать, что она обладает ковариацией $K = \lambda g$ (всегда можно построить случайную функцию, ковариация которой равна заданной транзитивной ковариограмме).

Упражнение 5. Пусть на плоскости случайно размещены прямые в соответствии со схемой Пуассона с линейной плотностью λ (см. упражнение 3). Припишем каждой из прямых D_i единичную линейную плотность (единичная масса на единицу длины), определив тем самым случайную меру μ.

А) Пусть p — функция опробования, заданная в полярных координатах $p = p(r, \alpha)$.

Показать, что случайная величина

$$Y = \int p\, d\mu = \sum_i \int p(x)\, dS$$

(сумма интегралов от p на прямых D_i) обладает характеристической функцией $\psi(u)$, удовлетворяющей соотношению

$$\ln \psi(u) = \lambda \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} [e^{iu\varphi(r,\alpha)} - 1]\, dr,$$

где $\varphi(r, \alpha) = 2\int_0^{\infty} p\left(\sqrt{r^2 + h^2}; \alpha\right) dh$ (восхождения вдоль p).

Б) Вывести математическое ожидание $\left(\pi\lambda \int p(x)\, dx\right)$ и дисперсию величины Y:

$$D(Y) = \lambda \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} g(r, \alpha)\, dr.$$

Убедиться, что ковариацией случайной меры μ является мера $\frac{1}{r}$.

Упражнения к гл. VI

Упражнение 1. Вспомогательные собственные функции $\chi(h)$ и $F(h)$ для линейной схемы имеют вид

$$\chi(h) = \frac{1}{h}\int_0^h \gamma(u)\, du;$$

$$F(h) = \frac{2}{h^2}\int_0^h u\chi(u)\, du = \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-u)\,\gamma(u)\, du.$$

А) Выразить с помощью этих функций дисперсию отрезка l в отрезке L. Определить ковариацию в поле L отрезка l с его концами.

Б) Вычислить с помощью вспомогательных функций дисперсию распространения точечной пробы на отрезок длины l, в центре которого расположена проба.

В) Положить $Y = \frac{1}{2}[f(l) - f(0)]$ и вычислить с помощью вспомогательных функций дисперсию распространения значения Y на отрезок $(0, l)$. Сравнить с предыдущей задачей для вариограммы вида h^{λ}. Показать, что оценка, полученная по одной центральной пробе (как в упражнении 1, Б) лучше или хуже оценки, полученной по двум краевым пробам (как в данном случае) в зависимости от того, больше единицы параметр λ или меньше ее.

Интерпретировать результаты (если $\lambda = 1$ — имеем марковский процесс; если $\lambda < 1$ — две пробы почти независимы и дают результат почти вдвое лучший, чем одна центральная проба; если $\lambda > 1$ — вывод обратный: корреляционные связи сильны и одна удачно размещенная проба даст лучший результат, чем две неудачно размещенных).

Упражнение 2 (эффект самородков). Эффект самородков характеризуется собственной функцией $\gamma(h) = \gamma_1(h) + C(0) - C(h)$, где $C(h)$ —положительно определенная функция с очень малым носителем (отличная от нуля только в очень малой окрестности начала координат).

Показать, что для регуляризованной функции $\frac{1}{v} f * \check{k}$ [где $k(x)$ — геометрическая переменная объема v, большого по сравнению с носителем эффекта самородков] эффект самородков, экспериментально наблюдаемый на полувариограмме, равен $\frac{1}{v}\int C(h)\, dh$.

Показать, кроме того, что вклад эффекта самородков в дисперсию признака, определенного по пробе v, в пределах поля и в дисперсию распространения этого признака на поле V выражается двумя членами, зависящими от $\frac{1}{v}$ и $\frac{1}{V}$.

Упражнение 3 (флуктуации локальной вариограммы). Пусть $f(x)$ — линейная собственная схема с полувариограммой $\gamma(h)$. Локальной полува-

риограммой назовем выражение:

$$\gamma_L(h)=\frac{1}{2(L-h)}\int_0^{L-h}[f(x+h)-f(x)]^2\,dx,$$

т. е. оценку полувариограммы $\gamma(h)$ по значениям $f(x)$ в некоторой совокупности точек отрезка $(0, L)$; $\gamma_L(h)$ — случайная величина.

Показать, что ее математическое ожидание равно истинному значению $\gamma(h)$. Но ее дисперсия может быть очень велика [она никоим образом не связана с дискретностью опробования, так как нам известны значения $f(x)$ во всех точках отрезка, т. е. фактически в бесконечном числе точек]. Чтобы вычислить эту дисперсию, действуют следующим образом.

А) Если X_1, X_2, X_3 и X_4 — нормально распределенные величины с нулевым средним и с ковариациями σ_{ij}, имеем

$$E(X_1X_2X_3X_4)=\sigma_{12}\sigma_{34}+\sigma_{13}\sigma_{24}+\sigma_{14}\sigma_{23}.$$

Б) Допустим, что приращения $f(x+h)-f(x)$ распределены нормально. Показать, используя соотношения A и (VI,1,9), что

$$E\{[f(x+h)-f(x)]^2[f(y+h)-f(y)]^2\}=$$
$$=2[\gamma(x-y+h)+\gamma(x-y-h)-2\gamma(x-y)]^2.$$

Выразить дисперсию $D[\gamma_L(h)]$ в виде интеграла

$$\frac{1}{2}\int_0^{L-h}\int_0^{L-h}[\gamma(x-y+h)+\gamma(x-y-h)-2\gamma(x-y)]^2\,dx\,dy.$$

В) Рассмотреть процесс Винера — Леви (броуновское движение) с полувариограммой $\gamma(h)=|h|$. Показать, что

$$D[\gamma_L(h)]=\begin{cases}\frac{4}{3}\frac{h^3}{L-h}-\frac{1}{3}\frac{h^4}{(L-h)^2} & \text{при } h<\frac{L}{2},\\ 2h^2+\frac{1}{3}(L-h)^2-\frac{4}{3}h(L-h) & \text{при } h>\frac{L}{2}.\end{cases}$$

Если расстояние h очень мало, относительная дисперсия флуктуаций равна $4h/3L$, т. е. весьма незначительна. При возрастании h дисперсия быстро увеличивается и уже при $h=L/2$ равна единице. Таким образом, при больших значениях h локальная и теоретическая вариограммы могут различаться весьма сильно. Следует сделать вывод, что лишь первые точки экспериментальной вариограммы могут характеризовать картину, близкую теоретической схеме.

Упражнение 4 (флуктуации локальной дисперсии). В тех же условиях, что и в предыдущих упражнениях, локальная дисперсия определяется формулой

$$S^2=\frac{1}{L}\int_0^L[f(x)-m]^2\,dx,\quad \text{где } m=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx.$$

А) Представить S^2 в виде

$$S^2=\frac{1}{L^3}\int_0^L\int_0^L\int_0^L[f(x)-f(y)][f(x)-f(y')]\,dx\,dy\,dy'$$

и показать, что ее вероятное значение равно $\sigma^2(0\mid L)$.

Б) Вычислить дисперсию $D(S^2)$. Для этого записать выражение S^2 (шестикратный интеграл), использовать соотношение из предыдущего упражнения А для определения подинтегрального выражения и применить

(VI, 1, 9). Результат выражается через вспомогательные собственные функции F и χ:

$$D(S^2)=2[F(L)]^2+\frac{4}{L^2}\int_0^L(L-x)[\gamma(x)]^2\,dx-$$
$$-\frac{8}{L^3}\int_0^L x[\chi(x)]^2\,dx-\frac{8}{L^3}\int_0^L x(L-x)\chi(x)\chi(L-x)\,dx.$$

В) Применить полученные результаты к $\gamma(h)=|h|$ (относительная дисперсия S^2 равна $^4/_5$). Вывод: флуктуации локального значения дисперсии обладают огромной амплитудой.

Два предыдущих упражнения должны показать, что необходима большая осторожность при сравнении экспериментальной вариограммы с теоретической схемой: даже очень большие расхождения могут оказаться несущественными. Такая ситуация весьма далека от условий, характерных для обычной статистики.

Упражнения к гл. VII

Упражнение 1 (формулы прямоугольника). Пусть на плоскости задана собственная схема с полувариограммой $\gamma(h)=r^\lambda$ $(0<\lambda<2)$ и прямоугольник со сторонами a и b, где b мало по сравнению с a.

А) Исходя из ограниченного разложения

$$\gamma_\lambda(b;\,a)=\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)}a^\lambda+A_\lambda\frac{b^{1+\lambda}}{a}+\frac{1}{\lambda-1}a^\lambda\frac{b^2}{a^2},$$

где

$$A_\lambda=\sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1+\lambda}{2}\right)},$$

найти (посредством интегрирования) выражения $\chi_\lambda(b;\,a)$ и $F_\lambda(a;\,b)$, затем определить (посредством дифференцирования ограниченного разложения) $\chi_\lambda(a;\,b)$ и $\gamma_\lambda(a;\,b)$. Убедиться, что нерегулярный член исключается.

Б) Найти дисперсию распространения значения признака, найденного по выработке длиной a, расположенной в центре прямоугольника $a\times b$, на этот прямоугольник [представить эту дисперсию в виде

$$2\chi\left(\frac{b}{2};\,a\right)-F(0;\,a)-F(a;\,b)$$

и подставить значения вспомогательных функций]. В результате получится, что

$$\sigma_E^2=2\,\frac{A_\lambda}{2+\lambda}\left(\frac{1}{2^{1+\lambda}}-\frac{1}{3+\lambda}\right)\frac{b^{1+\lambda}}{a}.$$

Рассмотреть случай $\lambda=1$, а затем продифференцировать по λ в случае, когда содержатся члены с $\ln r$ и $r^2\ln r$.

В) Показать, что дисперсия распространения на прямоугольник $a\times b$ среднего содержания двух сторон a имеет вид

$$2\chi(b;\,a)-F(a;\,b)-\frac{1}{2}\gamma(b;\,a)-\frac{1}{2}\gamma(0;\,a)=\frac{(1-\lambda)A_\lambda}{2(\lambda+3)}\frac{b^{1+\lambda}}{a}.$$

Сравнить результаты двух предыдущих упражнений и интерпретировать их.

Г) Те же вопросы — для выработки, параллельной сторонам b, расположенной в центре прямоугольника, и для двух сторон b.

Упражнение 2 (дисперсия скважины на ее зону влияния).

А) Пусть даны полувариограмма r^λ и прямоугольник $a \times b$. Показать, что среднее значение $Q_\lambda(a, b)$ полувариограммы r^λ между прямоугольником и одной из его вершин равно

$$Q_\lambda(a; b) = \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}[a^2b^2F_\lambda(a; b)].$$

Величина $Q_\lambda(a; b)$ представляет собой также среднее значение r^λ между двумя смежными сторонами прямоугольника $a \times b$.

Б) Показать, что дисперсия распространения центральной пробы на прямоугольник $a \times b$ равна $2Q_\lambda\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) - F_\lambda(a; b)$. Записать ее в виде ряда.

В) Рассмотреть случай $\lambda = 1$ (линейная вариограмма). Вывести формулы:

$$\gamma_1(b; a) = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a}\ln\left[\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right] - \frac{2}{3}\frac{(a^2+b^2)^{3/2}-b^3}{a^2}$$

и

$$F_1(a; b) = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\frac{a}{b^2} - \frac{1}{15}\frac{b^2}{a}\right] + \frac{1}{15}\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^2}{a^3}\right) + \\ + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} + \frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Построить выражение дисперсии распространения центральной скважины на квадратную зону влияния со стороной a:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{15}(4\sqrt{2}-2)\,a = 0{,}2439a.$$

Упражнение 3 (формула штока). Пусть дан параллелепипед $a \times b \times c$ (где $a \geqslant b \geqslant c$).

А) Исходя из ограниченного разложения $\gamma_1(r; a)$ (см. упражнение 2), посредством почленного восхождения получить формулу для $\gamma_\lambda(c; a, b)$. Определить (интегрированием по c) $\chi_\lambda(c; a, b)$ и $F_\lambda(a, b, c)$, затем (путем дифференцирования) найти $\chi_\lambda(b; a, c)$, $\gamma_\lambda(b; a, c)$, $\chi_\lambda(a; b, c)$ и $\gamma_\lambda(a; b, c)$.

Б) Определить дисперсию распространения центрального сечения параллелепипеда на весь параллелепипед. Возможны три случая: большое сечение (параллельное плоскости ab), среднее сечение (параллельное плоскости ac) и малое сечение (параллельное плоскости bc).

Упражнения к гл. VIII

Упражнение 1. Дана вариограмма h^λ в одномерном пространстве.

А) Вычислить дисперсию распространения для отрезка длины $L = na$ в трех случаях:

1) случайное опробование,
2) случайное слоевое опробование,
3) опробование по регулярной сети.

В последнем случае воспользоваться принципом соответствия и принципом композиции дисперсий распространения. Убедиться, что результаты не изменятся при $\lambda = 1$. Рассмотреть случай вариограммы $h^2 \ln h^2$ (дифференцировать по λ и принять $\lambda = 0$).

Б) Сравнить результаты, полученные после решений предыдущей задачи. Рассмотреть случай $\lambda = 1$ (регулярная сеть позволяет получить оценку с дисперсией в два раза меньшей, чем в случае слоевой сети).

Упражнение 2 (пластовое месторождение, разведанное горными выработками). В двумерном пространстве даны полувариограмма r^λ и прямоугольник со сторонами l и $H = Nh$.

А) Вычислить дисперсию оценки, если прямоугольник опробован N равноотстоящими отрезками длины l, параллельными сторонам l прямоугольника и размещенными в центрах своих зон влияния (произвести восхождение над полувариограммой r^λ при мощности l и дать первые члены разложения дисперсии оценки в случае $h < l$ и $\frac{h}{2} > l$. При малом h основная часть дисперсии имеет вид $C_\lambda \frac{1}{N}\frac{h^{1+\lambda}}{e}$.

Б) Пусть N выработок из предыдущего упражнения имеют длины $l_1, l_2, \ldots, l_N$. Их зоны влияния — прямоугольники $l_i \times h$; $L = \sum_i l_i$ — общая длина выработок.

Показать, что если $h < l_i$ для всех i, то дисперсия оценки имеет вид $C\frac{h^{1+\lambda}}{L}$. Если S — площадь месторождения, то дисперсия оценки равна $Ch^\lambda\frac{S}{L^2}$. Рассмотреть случай схемы де Вейса $\gamma(h) = 3\alpha \ln r$ (дифференцировать по r).

В) Предположим, что содержания в выработках оценены по результатам отбора проб с шагом a. Общее число проб равно $n = \frac{L}{a}$.

Вычислить дисперсию оценки $\left($она имеет вид $D_\lambda\frac{a^{1+\lambda}}{L} + C_\lambda h^\lambda\frac{S}{L^2}\right)$ и рассмотреть случай $\lambda = 1$.

Г) Экономическая оптимизация. Пусть метр выработки стоит в k раз дороже, чем отбор одной пробы.

Показать, что существует такой шаг сети h, для которого дисперсия оценки при заданных затратах на опробование минимальна (или, наоборот, для которого минимальны затраты на разведку при заданной дисперсии оценки). Найти уравнение, которому должны удовлетворять h и a для реализации этого оптимума (выразить дисперсию оценки только через h и a $\left(L = \frac{S}{h}\right)$ и найти ее минимум с учетом условия $k\frac{S}{h} + \frac{S}{ah} = \text{const}$).

Упражнение 3 (разведка пластообразной залежи скважинами). Пусть дано пластообразное месторождение S, описываемое полувариограммой r^λ, разведанное скважинами по регулярной сети, ячейка которой имеет форму прямоугольника $a \times h$.

А) При $a < h$ и при условии, что профили наибольшей плотности опробования имеют длину больше h, вычислить дисперсию оценки (использовать результаты упражнений 2).

Рассмотреть случай $\lambda = 1$ $\left(0{,}609\frac{h^3}{S} + \frac{1}{6}a^2\frac{h}{S}\right)$.

Б) Квадратная сеть опробования. Рассмотреть случай $h = a$ (формула, полученная в предыдущем упражнении, верна лишь когда a мало по сравнению с h, но она может быть использована и при $h = a$ для определения порядка величины дисперсии).

Рассмотреть случай $\lambda = 1$. Положить $n = \frac{S}{a^2}$. Сравнить дисперсию оценки ($\lambda = 1$) $\left(0{,}2276\frac{a^3}{S} = 0{,}2276\frac{a}{n}\right)$ с той, которая получается делением на дисперсии распространения скважины на зону ее влияния $\left(0{,}2439\ \frac{a}{n}\right.$; см. упражнение 2 к гл. VII$\left.\right)$.

В) Вычислить дисперсию оценки, если разведка произведена по случайной слоевой сети (каждая скважина случайно размещена в квадрате со стороной a). Рассмотреть случай $\lambda = 1$ (среднее значение r в квадрате

со стороной a равно $F(a;\ a) = \left[\frac{1}{15}(2+\sqrt{2}+\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2})\right] a = 0{,}5213a$; см. упражнение 2 к гл. VII). Сравнить результаты упражнений 3,Б, и 3,В.

Упражнение 4 (эффект самородков). В условиях упражнений 2 к гл. VI показать, что вклад эффекта самородков в дисперсию оценки для макроскопических проб v, размер которых больше носителя эффекта, обратно пропорционален общему объему проб.

Упражнения к гл. IX

Упражнение 1. На прямой задана полувариограмма $|h|^{\lambda}$. Произвести крайгинг отрезка $(x_2,\ x_2+a)$ длины a, зная значения $f(x)$ в двух его крайних точках x_2 и x_3 и в точках $x_1 = x_2 - a$ и $x_4 = x_3 + a$. Используем симметричные оценки

$$X = \frac{1}{2}[f(x_2)+f(x_3)];\quad Y = \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_4)].$$

Обозначим символом Z неизвестное содержание на отрезке и будем искать оценку в виде $Z^* = \mu X + (1-\mu)\,Y$. Определить дисперсию оценки и записать условие ее минимальности. Для этого найти $\mu = \frac{N}{D}$, где

$$N = 2^{\lambda} - 4\frac{2^{\lambda}-1}{\lambda+1};\quad D = 2^{1+\lambda}+1-3^{\lambda}$$

и

$$\sigma_k^2 = \sigma_E^2 - \mu N = \frac{a^{\lambda}}{2}\left[\frac{2-\lambda}{2+\lambda} - \left(2^{\lambda} - 4\frac{2^{\lambda}-1}{\lambda+1}\right)^2\right].$$

Рассмотреть знак μ на интервале $0 < \lambda < 2$ (при $\lambda = 0$ все пробы имеют равные веса; при $\lambda = 1$ имеем случай марковского процесса и, следовательно, $\mu = 0$; при $\lambda = 1$ пространственная переменная становится более регулярной). Показать на простом графике, что если $f(x)$ непрерывна, то внешние пробы должны иметь отрицательные веса.

Упражнение 2 (крайгинг в схеме де Вейса). Пусть на плоскости задана полувариограмма $\ln r$. Напомним, что если g — гармоническая и регулярная функция в круге, то ее среднее значение на окружности (или в круге) равно значению в центре круга. В двумерном случае функция $\ln r$ гармоническая везде, кроме начала координат.

А) Пусть $C(R)$, $\chi(R)$ и $F(R)$ — средние значения гармонической функции $g = \ln r$ в случаях, когда r означает расстояние между произвольными точками на границе круга (окружности радиуса R), расстояние между точками этой окружности и внутренними точками круга и, наконец, расстояние между точками внутри круга. Показать, что

$$C(R) = \chi(R) = \ln R \quad \text{и} \quad F(R) = \ln R - \frac{1}{4}.$$

Б) Рассчитать дисперсию оценки содержания в круговом блоке по известному содержанию на окружности, опоясывающей блок (периферическое опробование) (она равна $\frac{3}{4}\alpha$ и не зависит от размера радиуса R).

В) Предположим, что известны еще и содержания в нескольких внешних скважинах (под скважинами мы подразумеваем круги произвольного радиуса, не пересекающиеся с оцениваемым участком). Показать, что при крайгинге веса этих содержаний равны нулю. Показать, что этот результат не зависит от формы проб (эффект экрана).

Г) Тот же вопрос, но в случае известного содержания в центральной скважине оцениваемого блока.

Упражнение 3 (крайгинг крайгинга). Пусть V — область, в которой известны значения пространственной переменной $f(x)$, характеризующейся

полувариограммой $\gamma(h)$. Пусть y — точка, внешняя по отношению к области V. Оценка крайгинга этой точки дается интегралом

$$\int_V \lambda(x;\ y)\, f(x)\, dx,$$

где $\lambda(x;\ y)$ — весовая функция, равная нулю для всех точек, не принадлежащих области V, и удовлетворяющая условию $\int \lambda(x\,|\,y)\,dx = 1$. Если точка y, крайгинг которой осуществляется, размещена внутри области V, то функция $\lambda(x;\ y)$ сводится к мере Дирака $\delta(x-y)$. Если p — функция с единичной суммой, то оценка крайгинга содержания $\int f(y)\,p(y)\,dy$ в некоторой области точек y определяется интегралом

$$\int f(x)\,\lambda(x;\ y)\,p(y)\,dx\,dy.$$

Написать уравнение крайгинга и выражение дисперсии оценки.

Пусть теперь область V' заключена внутри области V, и ей соответствует функция $\lambda'(x;\ y)$, которая позволяет произвести крайгинг точки y (т. е. найти оценку крайгинга значения пространственной переменной в точке y) по значениям переменной в точках области V'.

Показать, что если точка y является внешней по отношению к V, то будет справедливым равенство

$$\lambda'(x;\ y) = \int_V \lambda'(x;\ z)\,\lambda'(z;\ y)\,dz.$$

Другими словами, достаточно уметь находить оценки крайгинга в точках z области V.

Показать, что оценка крайгинга для интеграла $\int f(y)\,p(y)\,dy$ по известным значениям $f(x)$ в области V' получается с помощью крайгинга по области V' оценок крайгинга этого же интеграла по значениям $f(x)$ в области V. Затем доказать существование принципа аддитивности дисперсий (новая дисперсия крайгинга равна сумме старой дисперсии крайгинга и дополнительного члена, смысл которого следует объяснить).

Упражнения к гл. XVI — XVIII

В приложениях практически никогда не известны все экономические параметры, необходимые для определения оптимального уровня разведанности месторождения по методам, описанным в этих главах. Однако, как правило, имеется возможность решать более простые задачи — дисперсию оценки при заданных ассигнованиях на разведку и оптимальным образом распределить отпущенные средства между различными видами работ. Задач такого типа мы уже касались в упражнениях 2 к гл. VIII.

Сохранив все обозначения и допущения этого упражнения, рассмотреть случай разведки жильной залежи (в условиях применимости изотропной схемы де Вейса).

А) Принять за единицу длины мощность жилы и вычислить оптимальное соотношение между высотой этажа h и шагом a опробования выработок, если мощность жилы больше шага a опробования выработок $\left(h = ka^3 + \frac{a^2}{2}\right)$.

Б) То же, если мощность жилы меньше шага a ($h = 0{,}955\,[k\ln(1{,}85\,a)+a] - 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Agterberg F. P., Statistical techniques for geological data, Tectonophysics, **1**, 233—255, 1964.
2. Agterberg F. P., The technique of serial correlation applied to continuous series of element concentration values in homogeneous rocks, Journ. Geol., **73**, 1965.
3. Ahrens L. H., The lognormal distribution of the element, Geochim. et Cosmochim. Acta, **5**, 2, 1954.
4. Aitchison J., Brown J. A. C., The lognormal distribution, Univ. Press, Cambridge, 1957.
5. Allais M., Méthode d'évaluation des perspectives économiques de la recherche minière sur de grands espaces, Application au Sahara Algérien, Comm. Cinq. Cent. Ind. Min., 1955; Rev. Indust. Minér., No. spécial IR, 329—381, 1956.
6. Allais M., Evaluation des perspectives économiques de la recherche minière sur de grands espaces, Application au Sahara Algérien, Bull. Sci. Ec. du B.R.M.A., hors série, 101, 1957.
7. Bandemer H., Definition und Berechnung von Mahlgutkennziffern mit Hilfe der Siebanalysenergebnisse, Bergakademie, **3**, 164—170, 1965.
8. Bandemer H., Die für eine vorgegebene Genauigkeit notwendige Bohrlochanzahl bei quantitativer Auswertung der Ergebnisse, Zeit. für angew. Geol., **12**, H. 3, 1966.
9. Bandemer H., Gedanken zur Schätzung von Lagerstättenparametern, Zeit. für angew. Geol., **13**, H. 3, 1967.
10. Beneito J., Bertaneu J., Etude géologique et métallogenique du gisement de Scheelite des Karezas, Bull. Sci. Ec. du B.R.M.A., Alger, № 5, 1958.
11. Blondel F., La classification des gisements minéraux, Chron. Mines Col. Paris, № 179, 126—129, 1951.
12. Blondel F., Les lois statistiques de la répartition géographique des productions minières, Comm. Cong. Cent. Ind. Min., 1955, Rev. Ind. Min., St.-Etienne, № spécial I R, 319—328, 1956.
13. Blondel F., Notes sur la répartition géographique de la production minérale, Journ. Soc. Stat., Paris, № 9—10, 372—382, 1949.
14. Blondel F., La notion de réserves minérales, Le point de vue du mineur et celui de l'économiste, Mines Paris, № 4, 305—311, 1953.
15. Blondel F., Sur la répartition des teneurs des gisements métallifères, C.R. Ac., Paris, **196**, 949—950, 1933.
16. Blondel F., La recherche minière, Ann. Mines, Paris, fasc. 1, 1950.
17. Blondel F., Sur la composition des gisements minéraux, Journ. Soc. Stat., Paris, № 1—3, 1951.
18. Blondel F., Zum Begriff der «Vorräte» einer Minerallagerstätte, Sur la conception des réserves d'un gîte minéral, Erzmetall, Stuttgart, XI, H. 3, 115—129, 1958.
19. Blondel F., La répartition géographique des gisements minéraux, Chron. Mines coloniales, № 175, 1951.
20. Blondel F., La recherche scientifique des gisements minéraux, Publ. Bureau Etudes Géol., Min. col., № 18, 83, 1942.
21. Blondel F., Lasky S. G., Mineral reserves and mineral resources, Econ. Geol., Urbanz Illinois, **51**, № 7, 686—697, 1956.
22. Blondel F., Evolution de la Notion de Réserves d'un gisement minéral, Congress de Freiberg, 1959.
23. Cailleux A., Lois logarithmiques, indices et géographie, Rev. de géom. dynamique, Paris, № 3, 1953.
24. Carlier A., Le gisement des schistes uranifères de St-Hyppolite Nations-Unies, Genéve, **2**, 527—534, 1958.
25. Carlier A., Contribution aux méthodes d'estimation des gisements d'uranium (thèse), Fontenay aux Roses, 1964 (см. русский перевод: Карлье Э., Методика количественной оценки месторождений урана, Атомиздат, М., 1966).

26. Coxon C. H., Sichel H. S., Quality control of routine mine assaying and its influence on underground valuation, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall, 59, 489, 1959.
27. Cramer H., Mathematical methods of statistics, Princeton, 1946 (см. русский перевод: Крамер, Г., Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948).
28. Feller W. An introduction to probability theory and its applications, **I**, 1957, **II**, 1966 (см. русский перевод: Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, «Мир», М., **1**, 1964, **2**, 1967).
29. Formery P., Probabilité pour que simultanément, X soit A; Y soit B. dans une loi de Laplace Gauss à deux variables X et Y, Rev. Statis. Appliquée, Paris, **VII**, № 2, 1960.
30. Formery P., Ziegler V., Application des méthodes mathématiques à l'étude des gisements d'uranium, Nations Unies, Genève, A, Conf. 15, 1246, **2**, 545—550, 1958.
31. Grosjean P. V., L'évaluation mathématique des gisements détritiques, Bruxelles, 1953.
32. Gy P., L'échantillonnage des minerais, Erreur commise dans le prélèvement d'un échantillon sur un lot de minerai, R.I.M., 4, 311—345, 1954.
33. Gy P., Facteurs ayant une influence, dans l'échantillonnage des minerais, Ann. Mines, 61—65, 1960.
34. Gy P., Poids à donner à un échantillon, Abaques d'échantillonnages, Rev. Ind. Min. Fr., **38**, 636, 53—92, 1956.
35. Gy P., Echantillonnage pour une analyse granulométrique, Calcul de l'erreur d'échantillonnage commise au cours d'un prélèvement, conclusions relatives aux règles d'échantillonnage qui en découlent, Ann. Mines Paris, 37—42, 1956.
36. Gy P., L'échantillonnage des minérais en vrac, Saint Etienne, 1967.
37. Kleiber P., Murard R., Applications de la statistique mathématique à l'étude des gisements filoniens aurifères de l'A.O.F., Comm. Cong. Cent. Ind. Min., RIM, 1955, Saint Etienne, № sp. IR, 483—516, 1956.
38. Köhler K., Gedanken zu den Begriffen der Gesetzmässigkeit und der Veränderlichkeit der Merkmale geochemischer Felder und zu ihrer mathematischen Fassung, Freiberger Forschunghefte, H. D 51, 1965.
39. Krige D. G., A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand, M. Sc. Thesis, Univ. of the Witwatersrand, 1951.
40. Krige D. G., On the departure of ore value distributions from the Log-Normal model in South African gold mines, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall., **61**, 231, 1960—1961.
41. Krige D. G., Developments in the valuation of gold mining properties from borehole results, Trans. of the 7th Comm. Min. and Metall. Cong., Johannesburg, 537, 1961.
42. Krige D. G., Economic aspects of stoping through unpayable ore, Journ S. Afr. Inst. Min. Metall., **62**, 364, 1961—1962.
43. Krige D. G., Effective pay limits for selective mining, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall., **62**, 435, 1961—1962.
44. Krige D. G., The significance of a limited number of borehole results in the exploration of new South African gold fields, Symposium on Mathematical Techniques and Computer Applications in Mining and Exploration, Tuscan, 1962.
45. Krige D. G., Ueckerman H. J., Value contours and improved regression techniques for ore reserve valuation, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall., **63**, 429, 1962—1963.
46. Krige D. G., A review of the impact of statistics on mine valuation in the gold mining industry, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall., **64**, 373, 1964.
47. Krige D. G., Recent developments in South Africa in the application of trend surface and multiple regression techniques to gold ore valuation, Q. Colorado School of Mines, **59**, 795, 1964.
48. Krige D. G., Two-dimensional weighted moving average trend surfaces for ore valuation, Symposium on Mathematical Statistics and Computer Applications in Ore Valuation, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall., 67, 1966.
49. Laffitte P., Etude de la précision des analyses des roches, Bull. Géol. Fr., **6**, 3, 723—745, 1953.
50. Lasky S. G., How tonnage and grade relations help predict ore reserves, E.M.J., 1950, Trad Blondel, Chron. Mines Coloniales, № 177, 1951.
51. Lasky S. G., The concept of ore reserves, M. and Metall., **26**, 1945, Trad. Blondel, Chron. Mines Coloniales, № 207, 1953.
52. Lasky S. G., Blondel F., Mineral reserves and mineral resources, Econ. Geol., **51**, № 7, 686—697, 1956.
53. Lesourne J., Techniques économiques de gestion industrielle Paris, Dunod, 1965.
54. Masse P., Le choix des investissements, Paris, 1959.
55. Matheron G., Utilité des méthodes statistiques dans la recherche minière, Comm. Cong. Cent. Soc. Ind. Min., 1955; Rev. Ind. Min., St.-Etienne, № sp. IR, 459—472, 1956.
56. Matheron G., Application des méthodes statistiques à l'évaluation des gisements, Ann. Mines, 1955.

57. Matheron G., Théorie lognormale de l'échantillonnage systématique des gisements, Ann. Mines, 1957.
58. Matheron G., Remarques sur la loi de Lasky, Chron. Mines O. M. et de la recher. minière, 463—466, 1959.
59. Matheron G., Traité de Géostatistique Appliquée, Paris, 1, 1962; 2, 1963.
60. Matheron G., Principles of Geostatistics, Econ. Geol., 1963.
61. Matheron G., Théorie des droites de correspondance, Rev. de Statis. Appliquée, 1963.
62. Matheron G., Formery Ph., Récherce d'optima dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements minières, Ann. des Mines, 1963.
63. Matheron G., Les variables régionalises et leur estimation (thèse), Paris, 1965.
64. Matheron G., Comparaison entre les échantillonnages à poids constant et à effectif constant. Rev. Indust. Minerale, 1966.
65. Matheron G., Structure et composition des perméabilités, Rev. de l'Inst. franç. du pétrole, 1966.
66. Matheron G., Genèse et signification energetique de la loi de Darcy, Rev. I.F.P., 1966.
67. Matheron G., Composition des perméabilités en milieu poreux heterogène: méthode de Schwydler et règles de pondération, Rev. I.F.P., 1967.
68. Matheron G., Eléments pour une théorie des milieux poreux, Paris, 1967.
69. Meindre M., Byramjee R., Le gisement de manganèse du Debel Guethara, Symposium du Manganèse, Mexico, 1956.
70. Michel H., Pelissonnier H., Sur la définition d'indices de concentration des substances minérales dans l'écorce terrestre, Chronique des Mines et de la recherche minière, № 334, 1964.
71. Pirow P. C., Krige D. G., The use of mathematical statistics and computers for planning and control of the gold mines of the Transvaal and Orange Free State, 8th Comm. Min. Metall. Cong., Australia and New Zealand, 1965.
72. Ross F. W. J., The development and some practical applications of a statistical value distribution theory for some Witwatersrand auriferous deposits, M. Sc. Thesis, Univ. of the Witwatersrand, 1950.
73. Rowland R. St. J., Sichel H. S., Statistical quality control of routine underground sampling, Journ. S. Afr. Inst. Min. Metall., 60, 251, 1960.
74. Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, 1966.
75. Schwartz L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Paris, 1965.
76. Schwarzacher W., An Application of statistical Time-series analysis of a limestone-shale sequence, Journ. Geol., 1964.
77. Serra J., Thèses, Paris, 1968.
78. Serra J., Remarques sur une lame mince de mineral lorrain, Bull. du B.R.G.M., № 6, 1966.
79. Serra J., Règle d'échantillonnage des minerals lorrains en place, Bull. techn. de la chambre syndicale des mines de fer de France, № 84, 1966.
80. Shaw D. M., Element distribution laws in geochemistry, Geochim. et Cosmochim. Acta, 23, 116—134. 1961.
81. Sichel H. S., An experimental and theoretical investigation of bias error in mine sampling with special reference to narrow gold reefs, Trans. Inst. Min. Metall., 56, 403, 1947.
82. Sichel H. S., Mine valuation and maximum likelihood, M. Sc. Thesis, Univ. of the Witwatersrand, 1949.
83. Sichel H. S., New methods in the statistical evaluation of mine sampling data, Trans. Inst. Min. Metall., London, 61, 267, 1951—1952.
84. Stammberger F., Zum Problem der Bauwürdigkeit, Zeit. f. angew. Geol., 1957.
85. Stammberger F., Können Erkundungsdaten die Lagerstättenverhältnisse richtig widerspiegeln, Zeit. f. Bergb., H. 2—10, 49—60, Freiberg, 1958.
86. Truscott S. J., The computation of the probable value of ore reserves from assay results, Trans. Inst. Min. Metall., 39, 482, 1929—1930.
87. Vistelius A. B., The skew frequency distributions and fundamental law of the geochemical processes, Journ. Geol., 1—22, 1960.
88. Vistelius A. B., Sedimentation time-trend functions and their application for correlation of sedimentary deposits, Journ. Geol., 69, № 6, 703—728, 1961.
89. Watermeyer G. A., Application of the theory of probability in the determination of ore reserves, Journ. Chem. Metal. Soc. S. Afr., 19, 97, 1919.
90. Wijs H. J. de, Die statistische Auswertung der Probenahme von Erzlagerstätten, Z. Erzmetall., № 7, 1953, Trad. № 128.
91. Wijs H. J. de, Statistics of ore distribution, Journ. Roy. Netherlands Geol. and Min. Soc., 1, 1951; 2, 1953.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Геостатистика Ж. Матерона и проблемы статистического анализа результатов геологической разведки

Исследователь, выдвигая определенную теорию, обычно основывается на новом, оригинальном способе обобщения накопленного опыта и показывает, какие выводы из такого синтеза можно сделать. Но о подлинном создании теории какого-либо процесса или явления можно говорить лишь тогда, когда из опытных данных выделено именно то, что представляется необходимым обобщить, когда такое обобщение сделано и получены соответствующие выводы.

Применительно к рассматриваемому нами вопросу это значит, что исходя из принципиальных особенностей разведки (дискретности опробования и сходства геологических признаков с обычными пространственными переменными) нужно получить математический аппарат, вскрывающий зависимость меры случайности результатов разведки от особенностей поведения в пространстве изучаемых геологических признаков, формы и размеров залежи, конфигурации разведочной сети, способа ее совмещения с залежью и, наконец, геометрии проб. Если найденный математический аппарат отвечает практическим требованиям методики разведки, то можно считать, что геологическая разведка получила нужную ей математическую теорию.

Изложение основных идей и понятий именно математической теории разведки, названной Матероном «геостатистикой», мы находим в монографии. Геостатистику характеризуют концепция, согласующаяся с математической сущностью разведки, фундаментальность основных понятий и широта круга решаемых задач.

В сравнении с вариационно-статистическими методами, до последнего десятилетия почти безраздельно представлявшими математику в приложениях к разведочному делу, геостатистика привлекает простотой взглядов на математическую сущность объектов и средств разведки. Согласно геостатистической концепции, любой геологический признак, будь то содержание компонента в пробе или линейный запас, мощность рудного тела или отметка контакта руд с вмещающими породами, лишен какой-либо случайности и имеет вполне определенное положение в пространстве.

Согласно геостатистике, доля неопределенности, свойственная результатам разведки, является следствием ограниченности сведений об объекте разведки, но не случайности самого объекта. В этом, пожалуй, и кроются возрастающие возможности геостатистической теории и принципиальное отличие ее от вариационной статистики, которая основана на анализе значения геологического признака в отрыве от места наблюдения, что практически равносильно предположению случайности объекта разведки.

Матерон вводит два основных понятия — геометрическую переменную $k(x)$ с присущей ей геометрической ковариограммой $K(h)$ и статистически однородную пространственную переменную $f(x)$ с ковариограммой $g(h)$. Описание занимаемого залежью пространства с помощью геометрической переменной, тождественно равной единице в пределах залежи и нулю за за ее пределами,— ценная находка автора, положенная в основу транзи-

тивной теории и приводящая к выяснению специфики связей между погрешностями среднего содержания, запаса и объема рудного тела, когда оценки находят по одной и той же системе разведочных пересечений.

Ковариограмму геологического признака Матерон рассматривает не применительно к пробам конечного размера, а относительно точечных проб. Это открывает возможности для тонких математических исследований проблемы комплексирования опробования, причем возможности расширяются, когда в качестве регуляризующей функции выступает не геометрическая переменная пробы, а более общая весовая функция $p(h)$, что позволяет сравнивать данные прямых методов опробования с геофизическими наблюдениями.

Другая, не менее актуальная проблема методики разведки состоит в необходимости согласования конфигурации разведочной сети с различной изменчивостью свойств месторождения по основным направлениям разведки. Приводимые в монографии сведения об анизотропии залежей и изменении размерности пространства, в котором рассматриваются их свойства (операции восхождения и спуска), проясняют эту проблему.

В каждой части залежи изучаемый признак обладает, вообще говоря, типичными только для данной части статистическими свойствами. На определенном уровне обобщения возможна некоторая унификация статистических свойств пространственных переменных, сводящаяся к допущению однородной изменчивости в пределах всего изучаемого поля. В теории собственных схем эта возможность реализуется в том, что пространственное размещение геологических признаков отождествляется с одной из реализаций случайной функции со стационарными в широком смысле приращениями. Весь ансамбль возможных реализаций случайной функции выступает в качестве математической модели пространственной переменной и получает название собственной схемы переменной. Хотя это и не отмечается особо, случайная функция предполагается не только стационарной в приращениях, но и эргодической, т. е. допускающей оценку ее моментов как усреднением по ансамблю реализаций, так и усреднением по аргументам функции в пределах одной реализации. Матерон не останавливается на доказательстве приемлемости модели, используя ее всего лишь как «концепцию, на которой можно построить рациональную интерпретацию пространственной изменчивости». Он справедливо считает, что «... примем ли мы гипотезу стационарности и используем методы теории собственных схем или отбросим ее и используем методы теории транзитивных представлений, мы придем к одним и тем же численным значениям дисперсии оценки или по крайней мере к значениям практически близким», ибо «нестационарную случайную функцию можно изучать (по крайней мере в том, что касается проблем оценки), как если бы она была стационарной при условии, что в качестве ее вариограммы принимается средняя вариограмма, построенная по экспериментальным значениям, полученным в пределах оцениваемого участка геометрического поля». С другой стороны, несмотря на совпадение численных результатов транзитивной теории и теории собственных схем, указывается, что «... если наблюдается закономерное уменьшение значений $f(x)$ при удалении точки наблюдений от наиболее богатой центральной зоны, то ни в коем случае нельзя говорить о стационарности и следует воспользоваться методами транзитивных представлений».

Внесем некоторые уточнения в связи между транзитивными представлениями и собственными схемами. Причину определенного противопоставления этих двух подходов мы усматриваем в проведении большей аналогии между понятием случайной функции и пространственной переменной, описывающей геологический признак, нежели это имеет место на самом деле, причем излишнее отождествление свойств пространственной переменной со свойствами случайной функции приводит к неоправданным трудностям гносеологического порядка.

Плодотворность математической теории, с помощью которой пытаются объяснить и предсказать интересующие нас явления, непосредственно зависит от степени адекватности математической модели описываемому ею явлению.

Если вариационно-статистическая модель неадекватна геологической переменной из-за того, что, во-первых, в ней не учтено наличие пространственных связей и, во-вторых, предполагается случайность значений переменной в каждой разведочной точке, то случайная функция как модель геологического признака устраняет только первую причину неадекватности. Действительно, случайная функция подобно случайной величине является ансамблем реализаций. Она всегда может быть оценена по множеству реализаций и лишь иногда по одной из них. Обращаясь к случайной функции для интерпретации изменчивости, обычно говорят, что геологическая переменная есть одна реализация стационарной эргодической случайной функции, по которой предстоит изучить переменную как случайную функцию, т. е. как множество возможных реализаций. Однако смысл разведки геологического объекта иной: здесь нас обычно интересует только та единственная реализация (или то пространственное размещение признака), данные о которой имеются в распоряжении геолога. Ограничиваясь рассмотрением одной реализации, мы фактически ничего не меняем во взглядах на объект разведки, сформулированных в рамках транзитивной теории, ибо отдельно взятая реализация случайной функции — это обычная детерминированная функция, принимаемая за модель геологической переменной в транзитивной теории. Именно в этой теории, не предполагающей множества реализаций, устраняются обе причины неадекватности вариационно-статистической модели.

При сопоставлении геологической переменной с реализацией случайной функции нет необходимости пересматривать транзитивные представления, но, опираясь на теорию случайных функций, можно сделать важный вывод, объясняющий применение «средних» характеристик.

Случайную функцию можно представить как функцию $f(\tau;\ x)$ двух векторов: вектора параметров τ и вектора точки x пространства, в котором функция задана. Для фиксированной точки пространства $x = x_0$ мы имеем случайную величину $f(\tau;\ x_0)$, распределение которой, вообще говоря, зависит от x_0. Задавшись параметрами функции, получаем одну из возможных ее реализаций — неслучайную функцию координат $f(\tau_0;\ x)$. Если мы хотим исследовать какие-то свойства случайной функции, то, очевидно, должны дважды усреднить некоторую характеристику случайной функции $\lambda(\tau;\ x)$, во-первых, по координатам x в пределах реализации

$$\overline{\lambda}(\tau) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \int_V \lambda(\tau;\ x)\, dx \qquad (1)$$

и, во-вторых, по множеству реализаций

$$E(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\lambda}(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau. \qquad (2)$$

Порядок усреднения безразличен.

Среднее по множеству реализаций в общем случае зависит от координат x, а среднее по координатам x образует случайное множество. И только в частном случае, при эргодической стационарной функции, средние по одной из переменных не зависят от второй переменной и с вероятностью единица равны между собой.

Таким образом, среднее для нестационарной функции определяется как результат двукратного усреднения по множеству и по пространству. Усреднение только по пространству дает случайное множество результатов,

каждый из членов которого соответствует возможной реализации функции. Так как в связи с проблемами разведки нас обычно интересует только одна реализация, то в нашем случае целесообразно ограничиться одним усреднением по пространству, имея в виду, что находимые при этом статистики будут в среднем характеризовать анализируемую реализацию так, как если бы она была стационарной со свойствами, отвечающими средним свойствам реализации. Из этого следует ряд важных для геостатистики выводов: во-первых, возникает возможность использовать корреляционный, структурный и спектральный аппараты теории случайных функций в узком их толковании, вытекающем из отказа от усреднения по множеству реализаций; во-вторых, геостатистику становятся безразличными не только эргодичность случайной функции, за реализацию которой принимается геологическая пространственная переменная, но и стационарность вообще или в приращениях; в-третьих, использование корреляционного, структурного или спектрального аппаратов в геостатистике приводит лишь к средним по пространству оценкам, которые при заметной неоднородности статистических свойств пространственной переменной могут существенно отличаться от оценок, отвечающих отдельным областям пространства.

Впрочем, эти выводы только частично верны в условиях важной и подробно рассматриваемой Матероном задачи, когда поле переменной V' оценивается по ограниченному разведанному участку V. Здесь для распространения сведений о поле V на все поле V' необходимо предположение стационарности поля V'.

Обращение к случайным функциям позволяет описывать вводимые в транзитивную теорию операции регуляризации, восхождения и спуска на основе вероятностных характеристик стационарных случайных функций и с помощью тех же характеристик формулировать фундаментальные для геостатистики понятия ошибки распространения и ковариации распространения.

Определение ошибки аналогии как ошибки распространения среднего содержания в пробе v на среднее содержание в объеме V, дополненное определением ковариации двух ошибок распространения, полностью соответствует смыслу задачи подсчета запасов. А поскольку дисперсия и ковариация ошибок распространения принципиально просто выражаются через корреляционную либо структурную функцию и геометрию проб и оцениваемого объема, то уже само определение дисперсии и ковариации ошибок распространения намечает общую схему решения проблемы оценки надежности подсчета запасов. Детализация этой схемы зависит от характера разведочной сети внутри разведуемого объема (блока, горизонта, слоя, серии слоев или всего рудного тела) и, частично, от изменчивости пространственного размещения оцениваемого признака (содержания или линейного запаса).

Понятие погрешности распространения настолько широко, что оно оказывается приемлемым не только при оценивании надежности подсчета запасов, но и при самом подсчете запасов методом крайгинга. Есть достаточно оснований считать крайгинг одним из наиболее значительных достижений геостатистики. Прежде всего, здесь теория уже позволяет не только регистрировать точность результатов разведки, но и непосредственно воздействовать на точность за счет оптимизации процедуры обработки разведочных данных. Знать точность результатов разведки очень важно хотя бы потому, что приближенные оценки в определенной мере лишены смысла до тех пор, пока не выяснена степень их приближенности. Однако представления о надежности сами по себе не могут быть конечной целью геостатистического анализа: они интересны, кроме того, тем, что позволяют более четко выработать стратегию геологических исследований и методику разведки. Среди технически достижимых и экономически оправданных приемом разведки конкретного месторождения наилучшим будет тот, который более других согласуется со спецификой месторождения и, в частности, с его изменчивостью. Крайгинг как раз и представляет собой оптимальный метод обработки разведочных данных с учетом изменчивости.

По своему математическому содержанию он является оптимальным (в смысле минимизации квадрата погрешности) оцениванием в некотором блоке среднего значения пространственной переменной через линейную комбинацию совокупности ее значений в разведочных точках. Принципиальный подход к нахождению весов крайгинга отвечает сущности теории линейной фильтрации стационарных случайных последовательностей, основы которой заложены в работах А. Н. Колмогорова и Н. Винера. Со спектральных позиций можно показать, что различие между линейной фильтрацией и крайгингом сводится в основном к различному пониманию «помех»— вариаций признака, подлежащих приглушению. Так как крайгинг является только одной из возможных модификаций фундаментальной задачи фильтрации с разработанной и широко используемой в различных приложениях теорией, то термин «крайгинг» не соответствует принципиально новому понятию, однако его введение хотя бы в рамках настоящей книги оправдано его лаконичностью.

Как известно, линейная фильтрация последовательностей является вообще оптимальной только для случайных функций гауссова типа, поэтому можно предполагать неабсолютную оптимальность (квазиоптимальность) крайгинга как приема линейной фильтрации. Но следует иметь в виду, что при подсчете запасов никогда не использовались другие оценки, кроме линейных. Во всех методах подсчета общие запасы и средний удельный запас оцениваются через линейную комбинацию наблюденных значений содержания в разведочных точках (в качестве весов выступают линейные и площадные элементы разведочной сети и тела залежи). Нет необходимости это доказывать, важнее обратить внимание на один класс практических операций, часто выполняемых на месторождениях с резко неравномерным содержанием в пробах. На таких месторождениях среднее содержание, вычисляемое по ограниченному числу проб, является оценкой со слишком большой относительной погрешностью. Чтобы снизить дисперсию оценки прибегают к корректировке самых высоких, так называемых ураганных содержаний в пробах. Известные приемы учета ураганных проб не выходят за рамки оценивания запасов через линейную комбинацию наблюденных содержаний; они представляют собой по существу всего лишь изощренное сглаживание совокупности разведочных данных, напоминающее по смыслу крайгинг. С их помощью предпринимается попытка оценивать запасы в блоке по пробам, расположенным как в блоке, так и за его пределами, посредством весов, как то связанных с пространственной изменчивостью.

Таким образом, как сугубо геометрический, так и вероятностный подходы к задачам подсчета запасов приводят на практике к вариантам линейной оценки. Поэтому крайгинг правомерно рассматривать в качестве не только нового, но и наилучшего способа подсчета запасов. Теоретически минимальная погрешность подсчета запасов с помощью крайгинга формально обеспечивается сочетанием расширенного геометрического подхода, согласно которому находящиеся за пределами блока разведочные точки несут какую-то информацию о запасах в блоке (коль скоро линейный запас есть функция пространственных координат), и вероятностной оценки информативности отдельных наблюдений относительно запасов в блоке. По существу повышение эффективности подсчета достигается путем привлечения дополнительной информации относительно пространственной изменчивости признака, используемой при выборе весов.

Матерон излагает крайгинг как метод подсчета запасов в блоке или в зонах влияния одиночных выработок, позволяющий не только уточнить оценку среднего значения признака, но и избежать резких завышений запасов в отдельных блоках из-за того, что на них пришлись редко встречаемые

пробы с исключительно высоким содержанием. При этом второе достоинство крайгинга считается наиболее важным. Можно допустить, что в условиях, типичных для месторождений с резко асимметричным распределением содержания, крайгинг приводит к более точным результатам, нежели какие-либо эвристические приемы исправления ураганных проб. Но все же не следует упускать из виду, что веса крайгинга отвечают единственному требованию — минимизации средней для *всех* блоков дисперсии оценки. Поэтому крайгинг, вообще говоря, нельзя считать теоретически обоснованным решением задачи учета ураганных проб, т. е. задачи повышения надежности *отдельных* блоков с повышенным содержанием. (Проблема сокращения исключительно высоких содержаний в целях страховки от включения в отработку некондиционных блоков не может быть решена только в плане статистических исследований. Здесь, очевидно, определяющую роль должны играть экономические факторы.)

Но достоинства крайгинга проявляются и в том, что применение его позволяет оптимально картировать залежи, причем исходная карта содержаний или линейных запасов в пробах наиболее точно переводится на карту содержаний или запасов в блоках заданной формы и размеров. Блоки могут иметь произвольные размеры, что очень ценно, так как это позволяет выбирать величину блока по сугубо утилитарным соображениям. Так, в целях наилучшего планирования отработки с помощью крайгинга можно построить оптимальные по точности карты запасов и содержаний на участках, равных эксплуатационным блокам либо объемам месячной, квартальной или годовой отработки.

Картирование геологических признаков не всегда проводится в целях подсчета запасов, часто оно бывает необходимым для изучения определенных закономерностей в размещении признаков. В последнем случае задаваться какими-либо размерами блока лишено смысла. Однако если несколько изменить взгляд на то, каков характер «помех», подлежащих снятию при оптимальной фильтрации последовательности разведочных наблюдений, то можно прийти к вычислительной процедуре, подобной крайгингу, но направленной на оптимальное оценивание «геологических закономерностей» в пространственном размещении признака. В качестве таких закономерностей будут выступать те пространственные флуктуации признака, на выявление которых разведчик в праве претендовать, располагая разведочной сетью заданной плотности.

Таким образом, ценность крайгинга далеко не исчерпывается его применимостью в области исчисления запасов. Он находит не менее удачное приложение при исследованиях картировочного характера, сопутствующих подсчету запасов.

* * *

Итак, геостатистика Матерона создает теоретическую основу для успешного математико-статистического решения широкого круга геологоразведочных задач, начиная от оценки интегральных геологических характеристик (запасов, средних содержаний, объемов залежей) и кончая оценкой пространственных размещений геологических признаков, причем геостатистика позволяет не только оценивать надежность результатов разведки, но и повышать эту надежность за счет оптимизации процедуры обработки исходных разведочных данных. Если учесть при этом, что геостатистический анализ может также служить базой для технико-экономической оптимизации разведки и отработки месторождений, то следует считать геостатистический подход всеобъемлющим хотя бы в рамках математически формулируемых на сегодня геологоразведочных задач.

Чтобы иметь возможность использовать положение геостатистической теории на практике, нужно, во-первых, знать общий тип характеристики

изменчивости, т. е. вид корреляционной или структурной функции разведуемой переменной; во-вторых, располагать приемом оценивания параметров характеристики изменчивости (например, коэффициента α собственной функции де Вейса) по имеющимся разведочным данным; в-третьих, знать форму зависимости соответствующих дисперсий, весовых коэффициентов крайгинга и т. д. от параметров характеристики изменчивости и параметров сети опробования, геометрии проб и блоков. После того как тип изменчивости определен и параметры изменчивости найдены, можно перейти к выводу формул связи между величинами, составляющими предмет исследования в геостатистике и геометрией сети, проб и блоков, а также параметрами характеристики изменчивости, что представляет не всегда простую, но в основном вычислительную задачу.

Не менее серьезная проблема — выбор типа изменчивости, или собственной схемы, и оценивание параметров изменчивости. Принципиальная особенность этой проблемы состоит в том, что тип изменчивости не может быть установлен только по имеющимся разведочным данным; необходимо привлекать некоторую априорную информацию. В существе геостатистики нельзя до конца разобраться, если не выяснено, какая дополнительная информация о месторождении требуется при решении геологоразведочных задач.

Обязательное для геостатистики использование априорной информации, т. е. перенос на разведуемый объект каких-то сведений по принципу аналогии, роднит ее с общепринятыми методами геологической разведки, где принцип аналогии широко применяется. Более того, в геологоразведочной практике относительно успешно решаются задачи в основном по аналогии, без привлечения широкого математико-статистического анализа. Однако между месторождениями нет полных аналогов, поэтому, естественно, механическое заимствование приемов разведки и представлений не может обеспечить наилучшего решения, которое было бы получено, если бы объем и характер разведочных исследований тесно увязывались со сложностью строения (изменчивостью) собственно объекта разведки, а не просто переносились по аналогии.

Понятно, что как излишний перенос сведений по аналогии, так и полное пренебрежение опытом изучения сходных месторождений нежелательны, нужно разумное сочетание предыдущего опыта с опытом изучения данного объекта. Иначе говоря, в геостатистике по аналогии следует переносить только то, что необходимо при оценивании надежности результатов разведки, но не вытекает из данных опробования изучаемого объекта. В рамках геостатистических понятий удается сформулировать минимум сведений, которые должны быть перенесены на разведуемый объект с однотипных детально изученных. Матерон лишь вскользь касается этого принципиально важного вопроса, поэтому постараемся раскрыть математический смысл априорной информации, необходимой для выбора вида пространственной изменчивости, и наметить возможную процедуру оценивания параметров изменчивости и статистической проверки непротиворечивости априорной информации эмпирическим данным.

Геологическую пространственную переменную допустимо описывать рядом или интегралом Фурье, поэтому мы не налагаем на переменную U каких-либо ограничений, выражая ее поведение, например, вдоль разреза длины $2L$ бесконечным рядом

$$U(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x) \qquad (3)$$

или

$$U(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin (\omega_k x + \varphi_k), \qquad (4)$$

где x — пространственная координата $(-L<x<L)$, a_0 — среднее на разрезе значение переменной, $a_k=\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}U(x)\cos\omega_k x\,dx$ и $b_k=\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}U(x)\sin\omega_k x\,dx$ — коэффициенты Фурье; $c_k\sin(\omega_k x+\varphi_k)$ — k-гармоника, или синусоида частоты $\omega_k=\frac{\pi}{L}k$ с амплитудой $c_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ и начальной фазой $\varphi_k=\operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}$.

Кривая $U(x)$ полностью известна, если известны две бесконечные последовательности коэффициентов a_k и b_k — бесконечные линейчатые гармонические спектры a_k и b_k или если известны производные от них аналогичные спектры амплитуд c_k и начальных фаз φ_k.

Посмотрим, какие сведения о разрезе дают нам материалы разведочных работ.

Пусть разрез освещен системой $2N$ равноотстоящих точек, удаленных одна от другой на расстояние $\Delta=\frac{L}{N}$. Тогда сумма сведений о разрезе исчерпывается совокупностью разведочных данных $U_i=U(x_i=\Delta i)$, где $i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm N$, которые точно передают значения признака только в точках наблюдения, но за разрезом в целом оставляют долю неопределенности. Именно в смысле ограниченного познания разреза результаты его разведки случайны. Чтобы показать, в чем кроется такая ограниченность, представим совокупность наблюденных U_i интерполяционной формулой

$$u(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k\cos\omega_k x+\beta_k\sin\omega_k x), \tag{5}$$

где $\alpha_0=\frac{1}{2N}\sum\limits_{i=-N}^{N}U_i$, $\alpha_k=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=-N}^{N}U_i\cos\omega_k x_i$, $\beta_k=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=-N}^{N}U_i\sin\omega_k x_i$ — коэффициенты Фурье последовательности наблюдений.

В интерполяционной формуле (5) сосредоточена вся доставляемая разведкой информация о разрезе. Таким образом, приближенность представлений о разрезе обусловлена вынужденной заменой бесконечного ряда (3) конечным рядом (5), в котором коэффициенты α и β связаны с коэффициентами a и b соотношениями

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0&=a_0+\sum_{r=1}^{\infty}a_{2Nr},\\ \alpha_k&=a_k+\sum_{r=1}^{\infty}(a_{2Nr+1}+a_{2Nr-1}),\\ \beta_k&=b_k+\sum_{r=1}^{\infty}(b_{2Nr+1}-b_{2Nr-1}).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Сравнивая формулы (3), (5) и (6), видим, что дискретные наблюдения дают возможность указать несмещенную оценку α_0 среднего по разрезу значения признака a_0 или несмещенно оценить истинное поведение признака вдоль разреза $U(x)$ интерполяционным рядом $u(x)$ или аппроксимирующей ломаной, построенной путем обычного линейного интерполирования. Однако одни только дискретные наблюдения не позволяют судить о точности находимых оценок. Действительно, только из того, например, что случайная погрешность оценки среднего по разрезу равна $\alpha_0-a_0=\sum\limits_{r=1}^{\infty}a_{2Nr}$, нельзя составить суждения о дисперсии оценки α_0, поскольку неизвестен неограниченный спектр коэффициентов a_k разведуемого разреза, а известен лишь

производный от него конечный спектр последовательности наблюдений α_{kr}, не разворачиваемый в спектр a_k.

Разведуемая кривая может быть плавной, практически без высокочастотных гармоник (гармоник с частотами более $\omega_N=\frac{\pi}{L}N=\frac{\pi}{\Delta}$), тогда все коэффициенты a_k с номерами $k>N$ будут равны нулю, а оценка α_0 — безошибочной. Возможна и противоположная ситуация: разведуемая кривая — сложная со значительными по амплитуде высокочастотными гармониками, при этом сумма коэффициентов a_k с номерами $k>N$ колеблется в широких пределах и дисперсия оценки среднего большая. Но свернутый спектр α_k не дает представления о масштабе высокочастотных и низкочастотных вариаций признака в отдельности. Поэтому единственно по значениям признака в дискретных точках нельзя судить о сложности поведения признака между точками: одни и те же наблюденные значения могут принадлежать и очень сложной и сравнительно простой функциям. О дисперсии оценки α_0 можно лишь сказать, что она сокращается с увеличением плотности наблюдений, ибо с увеличением N степень неопределенности в оценке разреза падает, и в пределе при $N\to\infty$ коэффициенты α_k и β_k стремятся к a_k и b_k, а $u(x)$ сливается с $U(x)$.

Сказанное выше находит подтверждение в фундаментальной теореме В. А. Котельникова, согласно которой система дискретных значений функции с шагом Δ полностью выявляет функцию, если она представлена гармониками с частотами не выше $\omega=\frac{\pi}{\Delta}$. Все, что связано с высокочастотными гармониками, а следовательно, и масштаб погрешностей в оценивании функции по дискретным наблюдениям, не поддается определению на основе имеющихся наблюдений.

Определение надежности результатов разведки только по одним разведочным наблюдениями невозможно лишь в силу того, что разведочные наблюдения, позволяющие как-то оценить объект, не несут информации, достаточной для определения надежности оценки объекта. Для расчета дисперсий оценок необходимо располагать характеристикой изменчивости объекта. Чтобы получить эту характеристику в виде, пригодном для использования, нужно иметь гораздо больше сведений об объекте, чем содержится в разведочных данных, по которым оценивается объект.

Ранее отмечалось, что исчерпывающей характеристикой размещения признака вдоль разреза (3) служат два неограниченных спектра: спектр амплитуд гармоник c_k и спектр начальных фаз φ_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty)$. Для оценивания изменчивости разреза достаточно первого из них, представленного в виде $d_k=\frac{1}{2}c_k^2$. Спектр d_k показывает, каким образом общая дисперсия признака распределяется между отдельными гармониками. В приложениях его иногда называют энергетическим спектром, или спектром. Он обладает той же информативностью относительно пространственной изменчивости, что и корреляционная функция (ковариограмма), поскольку является ее преобразованием Фурье.

Эмпирическим материалом для оценивания неограниченного спектра d_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty)$ разреза служит ограниченный спектр δ_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ последовательности наблюдений

$$\delta_k=\frac{1}{2}[\alpha_k^2+\beta_k^2]=\frac{1}{2}\left\{\Big[\sum_{r=0}^{\infty}(a_{2Nr+k}+a_{2Nr-k})\Big]^2+\Big[\sum_{r=0}^{\infty}(b_{2Nr+k}-b_{2Nr-k})\Big]^2\right\}, \tag{7}$$

где $a_{-k}\equiv b_{-k}\equiv 0$.

Оценивание неограниченного спектра d_k только по ограниченному эмпирическому спектру δ_k, очевидно, принципиально не выполнимо, но оно становится выполнимым после следующих двух априорных соглашений.

Первое соглашение сводится к принятию утверждения, согласно которому в разложении (4) высокочастотные гармоники $\left(\omega_k > \omega_N = \frac{\pi}{\Delta}\right)$ случайно сдвинуты одна по отношению к другой и относительно низкочастотных гармоник $\left(\omega_k \leqslant \frac{\pi}{\Delta}\right)$ по фазе. Это утверждение касается спектра начальных фаз высокочастотных гармоник, которые считаются независимыми случайными и равновозможными на интервале $(-\pi, \pi)$. Есть основание считать, что данное соглашение отвечает реальным свойствам мелких вариаций геологических признаков. Во всяком случае, его принятие естественно, поскольку о высокочастотных гармониках вообще ничего не известно.

Второе соглашение, касающееся спектра дисперсии, или спектра, разведуемой кривой (4), сводится к принятию гипотезы подчиненности бесконечного спектра некоторому теоретическому закону $f(\omega_k; \lambda, \mu, \eta, \ldots)$, где $\lambda, \mu, \eta, \ldots$ — параметры закона.

Так как реальные спектры разведуемых геологических признаков сравнительно разнообразны и далеко не всегда хорошо совпадают с теми или иными теоретическими схемами, то гипотетический закон должен, во-первых, основываться на положительном опыте его использования в условиях аналогичных месторождений и, во-вторых, подвергаться статистической проверке на согласованность с эмпирическими данными (т. е. с эмпирическим спектром δ_k). Если спектр δ_k не опровергает выдвигаемой гипотезы, то последняя может быть принята, после чего в качестве оценки спектра d_k выступает закон $f(\omega_k; \lambda_*, \mu_*, \eta_*, \ldots)$, в котором $\lambda_*, \mu_* \eta_*, \ldots$ — оценки соответствующих параметров по спектру δ_k.

В соответствии с первым соглашением, т. е. вследствие ограниченной познанности разведуемого разреза, спектр δ_k случаен.

Из соглашения следует, что все коэффициенты a и b суть независимые случайные величины с математическим ожиданием $E\{a_k\} = E\{b_k\} = 0$ и дисперсией $D\{a_k\} = D\{b_k\} = d_k$ как функции независимых равномерно распределенных случайных фаз φ_k. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} D\{\delta_k\} &= \frac{1}{2}E^2\{\delta_k\} - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}(d_{2Nr+k} - d_{2Nr-k})^2, \\ E\{\delta_k\} &= \sum_{r=0}^{\infty}(d_{2Nr+k} + d_{2Nr-k}), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $d_{-k} \equiv 0$.

Так как каждая из N линий спектра δ_k связана со своей группой гармоник разложения (4), то случайные величины δ_k, моменты которых определены в (8), взаимно независимы.

Спектр δ_k состоит из N линий, нахождение и вычислительная обработка которых громоздки, когда N велико. Но эмпирические данные можно сгруппировать и разбить весь интервал частот $\left(\frac{\pi}{L} \leqslant \omega_k \leqslant \frac{\pi}{L}N\right)$ спектра δ_k на m (m на порядок меньше числа разведочных точек $2N$) равных участков, причем для каждого из них подсчитывается суммарное значение линий спектра

$$\overline{\delta}_j = \sum_{k=\frac{N}{m}(j-1)+1}^{\frac{N}{m}j} \delta_k, \tag{9}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$ — номера участков спектра δ_k.

Взаимно независимые случайные величины $\overline{\delta}_j$, как суммы независимых случайных слагаемых δ_k, распределены приближенно нормально с математическим ожиданием

$$E_j = E\{\overline{\delta}_j\} = \sum_k E\{\delta_k\} \tag{10}$$

и дисперсией

$$D_j = D\{\overline{\delta}_j\} = \sum_k D\{\delta_k\}. \tag{11}$$

Реализуя второе априорное соглашение, принимаем для спектра разведуемой кривой d_k гипотетический закон $f(\omega_k; \lambda, \mu, \eta)$ (число параметров произвольно), после чего требуется по эмпирическим значениям $\overline{\delta}_j$ (где $j = 1, 2, \ldots, m$) оценить параметры закона и их дисперсии и выполнить статистическую проверку гипотезы подчиненности спектра d_k избранному закону.

Обратимся к методу наименьших квадратов. Если гипотеза верна, т.е. если истинный спектр разреза описывается законом $f(\omega_k; \lambda, \mu, \eta)$, то, согласно (8), (10) и (11), j-участку спектра δ_k соответствует сумма $\overline{\delta}_j$ с математическим ожиданием

$$E_j(\lambda, \mu, \eta) = \sum_{k=\frac{N}{m}(j-1)+1}^{\frac{N}{m}j} \left\{ f(\omega_k) + \sum_{r=1}^{\infty} [f(\omega_{2Nr+k}) + f(\omega_{2Nr-k})] \right\} \tag{12}$$

и дисперсией

$$D_j = (\lambda, \mu, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{k=\frac{N}{m}(j-1)+1}^{\frac{N}{m}j} \left\{ E_k^2 - \sum_{r=1}^{\infty} [f(\omega_{2Nr+k}) - f(\omega_{2Nr-k})]^2 \right\}. \tag{13}$$

Величины E_j и D_j зависят от вида гипотетического закона, являясь функциями его параметров, а также от номера j и общего числа участков спектра m. Кроме того, D_j зависит еще и от числа разведочных точек $2N$ (обратно пропорционально N).

Эмпирически найденные значения $\overline{\delta}_j$ случайно отклоняются от своих математических ожиданий E_j с дисперсией D_j. Свойства истинных значений параметров λ, μ, η заключаются в том, что отвечающие им математические ожидания E_j в среднем ближе других значений E_j подходят к эмпирическим значениям $\overline{\delta}_j$, сводя к минимуму сумму

$$Q = \sum_j p_j [\overline{\delta}_j - E_j(\lambda, \mu, \eta)]^2, \tag{14}$$

в которой $p_j = D_j^{-1}$ — весовые множители, обратные дисперсии. Поэтому в качестве наилучших оценок для λ, μ, η принимают такие их значения, при которых квадратичная форма (14) достигает минимума.

Не вдаваясь в детали, напомним лишь, что экстремальную точку для Q находят путем решения системы нормальных уравнений. Для конкретного вида гипотетического закона $f(\omega_k; \lambda, \mu, \eta)$ и заданного значения m коэффициенты системы при незначительных упрощениях могут быть просто табулированы как функции параметров и номера j.

Параллельно с решением системы могут быть оценены минимальное значение Q, отвечающее оптимальным оценкам параметров λ_*, μ_*, η_*, дисперсии оценок параметров $D(\lambda_*)$, $D(\mu_*)$, $D(\eta_*)$ и дисперсия произвольной функции $\Phi(\lambda_*, \mu_*, \eta_*)$ от оценок параметров.

Гипотетический закон с найденными значениями параметров $f(\omega_k; \lambda_*, \mu_*, \eta_*)$ годится в качестве оценки спектра d_k, когда вид функции $f(\omega_k)$ не противоречит имеющимся эмпирическим данным. Поэтому важно выполнить статистическую проверку согласованности спектра δ_k с законом $f(\omega_k; \lambda_*, \mu_*, \eta_*)$.

Если оцениваемый спектр d_k имеет вид, совпадающий с гипотетическим законом, а уклонения $\overline{\delta}_j$ от расчетных значений E_j вызваны только случайностью $\overline{\delta}_j$, то минимум квадративной формы Q есть случайная величина, имеющая χ^2-распределение с $f = m - s$ степенями свободы (m — число включаемых в уравнение эмпирических значений δ_j, s — число оцениваемых параметров гипотетического закона). Следовательно, $Q_{\min}$ можно рассматривать как критерий согласованности эмпирических данных с выдвигаемой гипотезой вида спектра d_k.

Чем реже опробован разрез и чем меньше общее количество разведочных точек на разрезе, тем менее жесткими ограничениями служат имеющиеся разведочные данные при выборе формы гипотетического спектра, не противоречащего этим данным. Часто бывает, что при слабой разведанности объекта формально приемлемыми оказываются казалось бы самые противоположные гипотезы. Чтобы отдать предпочтение одной из них, нужно располагать общими представлениями о характере пространственных свойств данного признака в условиях разведуемого месторождения.

Мы рассмотрели только частный случай — оценивание изменчивости признака на разрезе ограниченной длины по эквидистантной разведочной сети, однако полученные выводы могут быть распространены на более общие условия. Использованное нами спектральное разложение не следует расценивать только как некоторый формальный прием, а полученные результаты — как следствие приложенного аппарата. Так, в частности, все сказанное об априорной информации применимо к описанию изменчивости с помощью корреляционной функции с той лишь разницей, что недостаточность информации, доставляемой дискретными наблюдениями, проявляется не в ограниченности интервала частот, в котором задан эмпирический спектр, а в дискретности эмпирической корреляционной функции. Чтобы истинную корреляционную функцию, являющуюся непрерывной, можно было бы оценить по эмпирической, необходима априорная информация.

Заслуживает внимания не затрагиваемый в монографии вопрос о том, оценивать ли изменчивость через эмпирические значения спектра или корреляционной функции. Заметим, что оценивание корреляционной функции по ее эмпирическим значениям неудобно, так как отдельные эмпирические значения нельзя представить в качестве независимых, в то же время независимость эмпирических значений спектра непосредственно следует из естественного соглашения относительно начальных фаз высокочастотных гармоник.

Оценивание изменчивости в форме спектра предпочтительнее еще и потому, что позволяет легко выделять изменчивость, сопряженную с трендом — очень выдержанными пространственными вариациями признака, не представляющими заметных трудностей при разведке. Так, исключая из совокупности эмпирических значений $\overline{\delta}_j$ (где $j = 1, 2, \ldots, m$) значение $\overline{\delta}_1$, мы практически полностью освобождаемся от влияния тренда на оценку спектра. Иначе дело обстоит при оценивании изменчивости по эмпирической ковариограмме, поскольку тренд влияет на все ее точки.

Наконец, подход к изменчивости со спектральных позиций делает возможным оценивание надежности самих геостатистических решений, зависящей от точности представлений об объекте разведки. Наши представления об изменчивости всегда остаются приближенными, поскольку по ограниченному объему разведочных данных параметры характеристики изменчивости оцениваются с погрешностями тем бо́льшими, чем менее разведана изучаемая

залежь. При оценивании параметров изменчивости по эмпирическому спектру могут быть оценены также дисперсии оценок параметров и дисперсия любой функции от оценок параметров. Это позволяет решать многие важные в практическом отношении вопросы: судить о существенности различия между изменчивостью переменной по отдельным направлениям; выяснять значимость несовпадения расчетных погрешностей оценок с допустимыми погрешностями.

Знать точность оценки изменчивости совершенно необходимо там, где характеристику изменчивости используют для оптимизации разведочных операций и, в частности, при выполнении крайгинга. Погрешность оценки изменчивости снижает эффективность крайгинга. В практических условиях возможны случаи, в которых крайгинг вообще не целесообразен, так как погрешность оценки изменчивости настолько значительна, что использование ее в крайгинге приводит только к огрублению исходных материалов. Это не кажется вполне очевидным в схеме де Вейса, обладающей исключительными свойствами, о которых мы скажем ниже. Однако читателю должно быть понятно, что в общем случае коэффициенты крайгинга являются функциями приближенной оценки пространственной изменчивости признака и потому оказываются на практике только приближенно оптимальными. Следовательно, дисперсия крайгинга будет тем больше, чем грубее оценка изменчивости. Когда объем разведочных данных настолько мал, что по нему нельзя с достаточной уверенностью оценить параметры изменчивости, крайгинг становится до такой степени неоптимальной операцией, что пользование им лишается смысла.

Здесь мы подходим еще к одной важной проблеме геостатистики — выяснению того, на какой стадии разведанности месторождения геолог получает эмпирический материал, достаточный для применения математико-статистических методов. Как убедительно доказывает содержание книги, геостатистические расчеты применимы при любой плотности разведочной сети, для этого необходимо знать лишь изменчивость объекта разведки. Выше мы пришли к выводу, что тип изменчивости устанавливается по аналогии после типизации залежей, а параметры характеристики изменчивости оцениваются по разведочным данным. На начальных стадиях разведки, когда разведочных данных слишком мало, нельзя с необходимой точностью оценить параметры изменчивости и приходится довольствоваться сведениями, вытекающими из опыта разведки однотипных месторождений, не привлекая геостатистику. Ключом к нахождению границ, за которыми применение геостатистики становится не оправданным, служит анализ точности оценки изменчивости.

* * *

Монография знакомит читателя с прикладной стороной теории прежде всего применительно к схеме де Вейса, обладающей характеристикой изменчивости с единственным параметром α и со сравнительно простыми аналитическими свойствами. Имеющийся опыт показывает, что практические рекомендации, даваемые Матероном на основе разбора схемы де Вейса, приводят к численным расчетам, которые на ряде месторождений (зарубежных и отечественных) удовлетворительно подтверждаются эмпирической проверкой. И все-таки исследователя не могут не смущать и не побуждать к дальнейшим теоретическим поискам некоторые исключительные особенности собственной функции де Вейса, вступающие в противоречие с представлениями о пространственных свойствах геологических признаков.

Это в малой мере касается того, что, согласно функции де Вейса, дисперсия признака в неограниченно большом поле бесконечна. Хотя геологические признаки таким качеством никогда не обладают, однако с ним можно согласиться, если вслед за Матероном рассматривать бесконечность дисперсии как

выражение тенденции к увеличению ее при расширении поля. Кстати сказать, вероятно, первое предложение использовать для описания пространственной изменчивости структурную функцию логарифмического вида с бесконечной в пределе дисперсией, $h(x) = k \ln(1 + ax)$, было сделано М. М. Протодьяконовым [1] еще в 1925 г.

Однако собственная функция де Вейса $\gamma(h)$ не только стремится к бесконечности с возрастанием h, но и к минус бесконечности, когда h убывает до нуля. Отрицательное, да еще и бесконечно большое значение собственной функции в точке $h = 0$ опрокидывает определение, даваемое $\gamma(h)$ как структурной функции, по которому должно выполняться условие (VI, 2,5): $\gamma(0) = 0$. Отрицательность $\gamma(h)$ при малых h не поддается физической интерпретации. С теоретической точки зрения схема де Вейса не лучшая аппроксимация реальной характеристики изменчивости, поскольку физически необъяснимое ее свойство касается как раз того интервала оси h, где мы вынуждены экстраполировать.

Демонстрируемая на примерах почти линейная зависимость эмпирических вариограмм от логарифма расстояния при не очень больших расстояниях типична для многих структурных функций, которые в противоположность собственной функции де Вейса имеют реальный смысл. Чтобы показать это, достаточно обратиться к любому примеру. Так, в гл. VI, § 6, эмпирическая вариограмма мощности залежи по двум диагональным направлениям, СВ — ЮЗ и СЗ — ЮЗ, при умеренных расстояниях между разведочными точками ведет себя почти как линейная функция логарифма расстояния. Поэтому делается естественный, на первый взгляд, вывод, что вариограмму допустимо аппроксимировать собственной функцией де Вейса. Однако можно указать несколько вариантов функций, которые, не имея недостатков функции де Вейса, лучше чем эта последняя аппроксимируют экспериментальную вариограмму. В частности, сошлемся на функцию вида

$$\sigma_d^2 = \sigma^2 \frac{d^2}{d^2 + \beta^{-2}}. \qquad (15)$$

На фиг. 208 воспроизведены данные, взятые из табл. 4; жирными точками показаны экспериментальные значения средней для диагональных направлений вариограммы мощности, а пунктирной прямой — их аппроксимация собственной функцией де Вейса. Сплошной жирной линией изображена функция $\sigma^2 = 6{,}7 \frac{d^2}{d^2 + 7{,}3}$, которая не только гораздо лучше совпадает с экспериментальными точками, но и обладает всеми свойствами структурной функции: она равна нулю при $d = 0$ и σ^2 (дисперсии признака) — при $d = \infty$; соответствующая ей корреляционная функция $K(d) = \sigma^2 \frac{\beta^{-2}}{d^2 + \beta^{-2}}$ является положительно определенной.

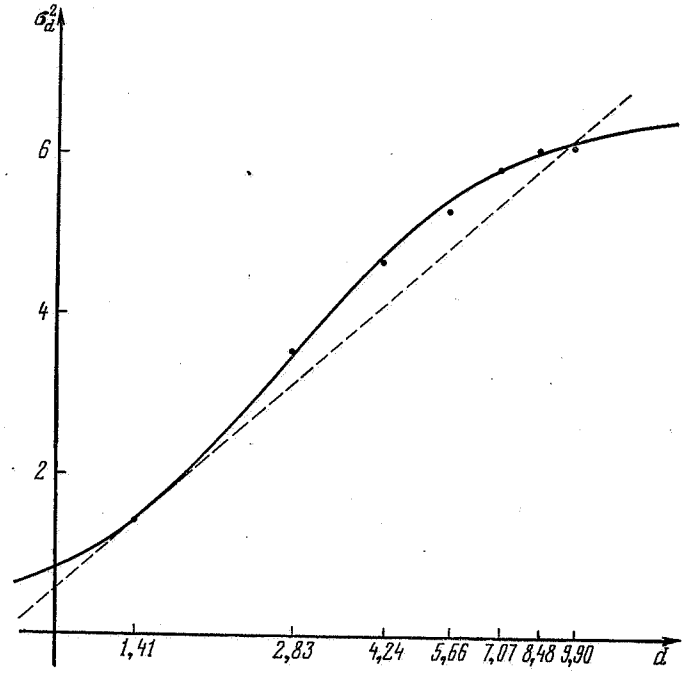
Укажем еще на одну очень важную особенность собственной функции де Вейса. В приложениях теории случайных функций вероятностные характеристики (корреляционная и структурная функции, спектр) описываются выражениями, включающими не менее двух параметров, один из которых задает амплитуду флуктуаций (дисперсию) случайной функции, а другой (или другие) — пространственную выдержанность флуктуаций. Это, в частности, наблюдается в формуле (15), где параметр β определяет быстроту убывания корреляции с увеличением расстояния d. Параметр, задающий дисперсию, просто учитывается в задачах, подобных геостатистическим: в формулы для оценок дисперсий он входит как сомножитель, а в формулах для нахождения весовых коэффициентов, аналогичных весам крайнга, его вообще нет.

[1] А. И. Хромченко, Рельеф земли и математика, Сб. статей, «Мысль», М., 1967.

Параметр, выражающий характер флуктуаций, присутствует в формулах обычно в более сложном виде.

В собственной функции де Вейса мы видим только один параметр α, фактическая роль которого в расчетах та же, что и у параметра, представляющего дисперсию случайной функции: он так же только нормирует дисперсии разведочных оценок и не влияет на выбор весов крайнга. Следовательно, схема де Вейса — модель пространственного размещения признака с жестко фиксированным характером флуктуаций.

При внимательном знакомстве с материалами разведки выясняется, что характеристики изменчивости с двумя параметрами недостаточно гибки для



Фиг. 208.

унифицированного описания пространственной сложности основных признаков на различных месторождениях. Действительно, чтобы одним и тем же уравнением можно было аппроксимировать, например, все приводимые в монографии эмпирические вариограммы, желательно снабдить уравнения тремя степенями свободы: масштабированием значений вариограммы с помощью параметра, выражающего дисперсию, и масштабированием и смещением вариограммы вдоль оси логарифмов расстояний с помощью двух других параметров.

Матерон сознает недостатки схемы де Вейса и, в частности, ограниченность ее как модели, не позволяющей учесть элемент случайности, всегда присутствующий в той или иной мере в совокупности дискретных разведочных наблюдений. Поэтому гл. XIV целиком посвящена выбору более совершенных схем, среди которых «сферическая схема» теоретически безупречна. В этой главе показано, что вопрос о том, в какой форме учитывать случайную изменчивость (эффект самородков), не столь прост. Действительно, «случайные» вариации геологического признака не вполне адекватны чисто случай-

ным пространственным флуктуациям, или так называемому белому шуму. Белый шум физически нереализуем и является лишь полезной во многих приложениях (но не всегда в геостатистических) абстракцией.

Случайные вариации последовательности дискретных замеров содержания в пробах естественно связывать с размерами минеральных образований (носителем эффекта самородков). При этом эффект самородков проявляется в форме вариаций, частоты которых обусловлены размерами носителя. Однако если эффект самородков трактовать как белый шум, то геостатистические задачи приходится рассматривать на двух уровнях: на уровне совокупности данных дискретного опробования, где случайность, вызываемую эффектом самородков, допустимо выражать в форме белого шума, поскольку носитель на несколько порядков меньше шага опробования, и на уровне отдельных проб, где случайность нецелесообразно отождествлять с белым шумом, если геометрические размеры проб соизмеримы с размерами носителя. Иными словами, чисто случайную составляющую изменчивости можно рассматривать только в связи с регуляризованными переменными. Для точечных переменных введение чисто случайной составляющей лишено смысла, так как операция регуляризации упразднит ее. Таким образом, выражение случайной составляющей через белый шум лишает нас возможности учитывать эту составляющую при исследовании влияния размеров проб на надежность результатов разведки.

Как и в случае оценивания изменчивости, выход из складывающего затруднительного положения возможен при использовании спектральных представлений. С формальной точки зрения для нас безразлична интерпретация, даваемая высокочастотным флуктуациям переменной, тем более, что случайная составляющая пространственной изменчивости признака не может быть полностью объяснена микроструктурой (эффектом самородков) или макроструктурой (явлением перехода) руды. Важно другое: система дискретных отсчетов пространственной переменной всегда оставляет за ней долю случайности (непредсказуемости), связанную с высокочастотными гармониками переменной. Поэтому и тогда, когда мы не вводим в уравнение характеристики изменчивости чисто случайную составляющую, существует какая-то доля случайной изменчивости, зависящая от распределения общей дисперсии признака между высокочастотными — с частотами $\omega > \frac{\pi}{\Delta}$ и низкочастотными — с частотами $\omega < \frac{\pi}{\Delta}$ гармониками (Δ — шаг опробования).

Сравним два варианта характеристики изменчивости. Пусть корреляционная функция имеет вид

$$K(r) = \begin{cases} C + \sigma^2 & \text{при } r = 0, \\ \sigma^2 e^{-\beta^2 r^2} & \text{при } r \neq 0, \end{cases}$$

где C — дисперсия чисто случайных вариаций признака; σ^2 — дисперсия «закономерной» составляющей вариаций; β — параметр, задающий пространственную корреляцию признака; r — расстояние между точками.

Или, ближе к реальному,

$$K(r) = Ce^{-\alpha^2 r^2} + \sigma^2 e^{-\beta^2 r^2}, \tag{16}$$

где α — ничтожно малый по величине параметр ($\alpha \ll \beta$), сходный по смыслу с носителем эффекта самородков a и включаемый в формулу лишь символически, поскольку не может быть оценен на практике.

Корреляционной функции (16) соответствует спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{C}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} + \frac{\sigma^2}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2}. \tag{17}$$

Пусть в другом варианте спектральная плотность не имеет «самородковой» составляющей и выражается, например, формулой

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{A} e^{-\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^\gamma}, \tag{18}$$

где $A = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^\gamma} d\omega$; σ^2 — общая дисперсия вариаций признака; β и γ — параметры.

В частности, при $\gamma = 1$,

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\beta} e^{-\frac{\omega}{\beta}}. \tag{19}$$

Такой спектральной плотности соответствует корреляционная функция (15).

В обоих случаях высокочастотная часть спектра, представляющая долю случайной изменчивости последовательности эквидистантных наблюдений вдоль разреза с шагом Δ, будет приходиться на интервал частот $\left(\frac{\pi}{\Delta} < \omega < \infty\right)$.

Можно предполагать, что соответствующим подбором параметров β и γ в формуле (18) достигается аппроксимация реальных спектров геологических переменных, не уступающая по качеству аппроксимации формуле (17). При выборе вида спектра окончательное слово остается за геологическими соображениями и опытом детального изучения типичных месторождений; однако возможность избежать трудностей, вызываемых учетом случайной составляющей изменчивости в форме белого шума, представляется заманчивой.

Когда переменная имеет спектральную плотность, подобную (18), в которой случайная составляющая не выступает в качестве самостоятельной компоненты, операция регуляризации не меняет общего типа характеристики изменчивости. Напротив, приписывая спектральной плотности точечных содержаний «самородковую» составляющую, мы получаем для содержания в конечных пробах характеристику, свободную от члена с дисперсией C. Если же формулой (17) выражают спектральную плотность содержания в некоторых конечных пробах, то переход к характеристике изменчивости содержания в иных пробах становится невозможным.

* * *

В монографии геостатистика изложена в терминах корреляционной теории случайных функций. Только в начале книги Матерон знакомит читателя с возможностью спектрального подхода. Вместе с тем рассмотрение геостатистических проблем с частотных позиций сулит определенные выгоды, в чем можно было убедиться выше.

Хотя в спектральной плотности (спектре) и корреляционной функции содержится одинаковая информация о статистических свойствах пространственных переменных, поскольку любая из них может быть получена из другой с помощью преобразования Фурье, все же спектр, как правило, формально ближе существу геостатистических задач, в то время как корреляционная функция входит в геостатистические формулы обычно только как связанная со спектром.

Наглядной иллюстрацией к сказанному служит гл. II, в которой сравниваются две формулы для дисперсии оценки среднего по профилю значения пространственной переменной. Легко найденная строгая формула (II,1,10) указывает на простую связь дисперсии оценки среднего со спектром перемен-

ной и шагом опробования. Формула (I,1,12) также проста, но она выражает дисперсию оценки среднего значения признака лишь через точность среднего значения корреляционной функции и требует дальнейших громоздких и к тому же приближенных расчетов.

Большинство общих формул геостатистики и их интерпретация заметно упростятся, если пространственную изменчивость переменных выразим спектром, а не корреляционной или структурной функцией. Приведем только некоторые примеры.

В линейном случае на участке длины $2L$ бесконечного профиля со спектральной плотностью $S(\omega)$ дисперсия признака σ_L^2 равна

$$\sigma_L^2 = \int_0^\infty S(\omega)\left[1 - \frac{\sin^2 \omega L}{(\omega L)^2}\right] d\omega. \tag{20}$$

Кривая, заданная на очень большом, в пределе бесконечном, интервале разлагается в интеграл Фурье и имеет в пределе непрерывный спектр $S(\omega)\, d\omega$.

На практике мы сталкиваемся с функциями, определенными на конечной области $(2L)$. Такие функции представляют разложением в ряд Фурье с дискретным спектром $d_k = \frac{1}{2} c_k^2$, где c_k — амплитуда гармоник частоты $\omega = \frac{\pi}{L} k$. Дискретный спектр d_k кривой с ограниченной областью существования $(2L)$ связан с непрерывным спектром бесконечной кривой $S(\omega)\, d\omega$ соотношением

$$d_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{\sin^2 L(\omega + \omega_k)}{L^2 (\omega + \omega_k)^2} d\omega, \tag{21}$$

где $S(-\omega) = S(\omega)$.

В приложениях, как правило, удобнее пользоваться непрерывным спектром. Если L достаточно велико, то дискретный спектр d_k можно аппроксимировать непрерывным спектром $S'(\omega)$, для которого

$$\int_{\frac{\pi}{L}\left(k-\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{L}\left(k+\frac{1}{2}\right)} S'(\omega)\, d\omega \simeq d_k. \tag{22}$$

Согласно формуле (20), спектральную плотность $S_l(\omega)$ переменной, регуляризованной усреднением точечной переменной со спектральной плотностью $S(\omega)$ в пределах линейного элемента длины $2l$, задает выражение

$$S_l(\omega) = S(\omega) \frac{\sin^2 \omega l}{(\omega l)^2}. \tag{23}$$

Когда l мало (оно всегда меньше половины шага опробования Δ), иногда можно использовать приближенное равенство

$$S_l(\omega) = S(\omega)\, e^{-\frac{\omega^2 l^2}{3}}.$$

Сравнительно просто выглядят формулы дисперсии распространения. Так, элементарная дисперсия распространения значения переменной в точке x на линейную область влияния $\left(x - \frac{\Delta}{2},\ x + \frac{\Delta}{2}\right)$ записывается как

$$\sigma_E^2 = \int_0^\infty S(\omega)\left[1 - \frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}} + \frac{\sin^2\frac{\omega\Delta}{2}}{\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)^2}\right] d\omega, \tag{24}$$

а дисперсия распространения N эквидистантных разведочных наблюдений в точках, $x,\ x + \Delta,\ x + 2\Delta,\ \ldots,\ x + (N-1)\Delta$ на линейную область $\left(x - \frac{\Delta}{2},\ x + N\Delta - \frac{\Delta}{2}\right)$ равна

$$\sigma_N^2 = \int_0^\infty S(\omega)\left[\frac{\sin^2 N\frac{\omega\Delta}{2}}{\left(N \sin\frac{\omega\Delta}{2}\right)^2} - 2\frac{\sin^2 N\frac{\omega\Delta}{2}}{N^2\frac{\Delta\omega}{2}\sin\frac{\Delta\omega}{2}} + \frac{\sin^2 N\frac{\omega\Delta}{2}}{\left(N\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}\right] d\omega\,^1. \tag{25}$$

Сопоставление двух последних формул показывает, что принцип композиции элементарных дисперсий (VIII,2,5) в общем случае не оправдан. Только в исключительной ситуации, когда преобладающую роль играют высокочастотные вариации и спектр по своим свойствам приближается к спектру белого шума, $\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2$.

Перейдем к дискретному крайгингу по профилю. Пусть требуется выполнить дискретный крайгинг в целях оптимального оценивания среднего значения признака на линейном участке $(x - l,\ x + l)$, где $2l$ не обязательно равно или кратно шагу опробования Δ. Тогда оптимальные весовые коэффициенты, или веса крайгинга, определит формула

$$p_m = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \psi(\lambda) \cos(\lambda\Delta m)\, d\lambda, \tag{26}$$

где p_m — вес, который должен быть придан разведочной точке, отстоящей на m шагов опробования Δ от разведочной точки x, находящейся в центре оцениваемого участка профиля; $\psi(\lambda)$ — так называемая спектральная характеристика весов, выражаемая в нашем случае как

$$\psi(\lambda) = \frac{\sum_{r=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right) f\left[\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right) l\right]}{\sum_{r=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right)}. \tag{27}$$

Здесь спектральная плотность S — четная функция частоты $\omega = \frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda$; λ по модулю меньше $\frac{\pi}{\Delta}$, а $f[\omega l] = \frac{\sin^2 \omega l}{(\omega l)^2}$.

Дисперсия крайгинга σ_k^2 также вычисляется через спектральную характеристику весов:

$$\sigma_k^2 = \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right) f^2\left[\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right) l\right] - \psi^2(\lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right)\right\} d\lambda. \tag{28}$$

Присутствие сумм по r в формулах крайгинга отражает особенность формирования спектра эквидистантной последовательности наблюдений пространственной переменной из спектра самой непрерывной переменной. Об этом было сказано в связи с проблемой оценивания изменчивости.

Если сглаживание разреза проводить в целях выявления пространственных «закономерностей», а не уточнения оценки средних значений

[1] Если σ_z^2 выразить через дискретный спектр d_k, относящийся к профилю длины $2L = N\Delta$, то получим формулу, совпадающую с (II,1,10).

на участке, и под «закономерными» вариациями признака понимать низкочастотные гармоники (на выявление которых только и можно рассчитывать при имеющейся плотности опробования разреза), то формулы (26) — (28) остаются в силе. Изменяется только выражение для вспомогательной функции $f(\omega l)$, которая теперь принимает вид

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\lambda| < \frac{\pi}{\Delta}, \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \frac{\pi}{\Delta}, \end{cases} \tag{29}$$

поэтому получаем упрощенную запись для $\psi(\lambda)$ и σ_k^2:

$$\left.\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \frac{S(\lambda)}{\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r}{\Delta} + \lambda\right)}, \\ \sigma_k^2 &= \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} S(\lambda)\,[1 - \psi(\lambda)]\,d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Формулы крайгинга могут быть легко обобщены на случай двумерного пространства. Пусть имеется прямоугольная разведочная сеть с шагом опробования по двум взаимно перпендикулярным направлениям Δ_x и Δ_y. $S(\omega_x, \omega_y)$ — спектральная плотность пространственной переменной $U(x, y)$. Оптимальному оцениванию подлежит среднее значение переменной в прямоугольном блоке со сторонами l_x и l_y, параллельными направлениям опробования (величины l_x и l_y произвольны).

Если центр оцениваемого блока приходится на разведочную точку, то весовой коэффициент $p_{m_x m_y}$, который следует приписать разведочной точке, отстоящей от центра блока на m_x шагов опробования по оси xx и на m_y шагов опробования по оси yy, определяется выражением

$$p_{m_x m_y} = \frac{\Delta_x \Delta_y}{4\pi^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta_x}}^{\frac{\pi}{\Delta_x}} d\lambda_x \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta_y}}^{\frac{\pi}{\Delta_y}} \psi(\lambda_x, \lambda_y) \cos(\lambda_x m_x \Delta_x) \cos(\lambda_y m_y \Delta_y)\, d\lambda_y, \tag{31}$$

где

$$\psi(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{\sum\limits_{r_x, r_y=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x, \frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right) f\left[\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x\right) l_x\right] f\left[\left(\frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right) l_y\right]}{\sum\limits_{x, r_y=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x, \frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right)}; \tag{32}$$

$S(\omega_x, \omega_y)$ — четная функция частот $\omega_x = \frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x$ и $\omega_y = \frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y$; λ_x и λ_y по модулю меньше соответственно $\frac{\pi}{\Delta_x}$ и $\frac{\pi}{\Delta_y}$; $f[\omega l]$ — то же, что и в формуле (27). Дисперсия крайгинга равна

$$\sigma_k^2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta_x}}^{\frac{\pi}{\Delta_x}} d\lambda_x \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta_y}}^{\frac{\pi}{\Delta_y}} \left\{ \sum_{r_x, r_y=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x, \frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right) f^2\left[\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x\right) l_x\right] \times \right.$$

$$\left. \times f^2\left[\left(\frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right) l_y\right] - \psi^2(\lambda_x \lambda_y) \sum_{r_x, r_y=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x, \frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right) \right\} d\lambda_y. \tag{33}$$

При сглаживании плана в целях наилучшего выделения «закономерностей» вспомогательные функции $f(\omega l)$ упрощаются до выражения (29), и вместо двух последних формул имеем

$$\psi(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{S(\lambda_x, \lambda_y)}{\sum\limits_{r_x, r_y=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi r_x}{\Delta_x} + \lambda_x, \frac{2\pi r_y}{\Delta_y} + \lambda_y\right)} \tag{34}$$

и

$$\sigma_k^2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta_x}}^{\frac{\pi}{\Delta_x}} d\lambda_x \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta_y}}^{\frac{\pi}{\Delta_y}} S(\lambda_x, \lambda_y)\,[1 - \psi(\lambda_x, \lambda_y)]\, d\lambda_y. \tag{35}$$

Приведем еще один результат, относящийся к разведке прямоугольной разведочной сетью. Выразим через спектральную плотность $S(\omega_x, \omega_y)$ дисперсию σ_N^2 оценки среднего содержания в прямоугольном блоке со сторонами $L_x = N_x \Delta_x$ и $L_y = N_y \Delta_y$ по приходящимся на блок замерам содержания в разведочных точках ($x = k\Delta_x$, $y = p\Delta_y$), где $k = 1, 2, \ldots, N_x$ и $p = 1, 2, \ldots, N_y$. После выкладок приходим к формуле

$$\sigma_N^2 = \int\limits_0^{\infty} d\omega_x \int\limits_0^{\infty} S(\omega_x, \omega_y) \left\{ \frac{\sin\frac{\omega_x L_x}{2}}{N_x \sin\frac{\omega_x \Delta_x}{2}} \frac{\sin\frac{\omega_y L_y}{2}}{N_y \sin\frac{\omega_y \Delta_y}{2}} - \frac{\sin\frac{\omega_x L_x}{2} \sin\frac{\omega_y L_y}{2}}{\frac{L_x \omega_x}{2} \frac{L_y \omega_y}{2}} \right\}^2 d\omega_y. \tag{36}$$

Анализируя эту или аналогичную формулу для случая разведки объема, можно составить представление о том, насколько близкие к истине результаты дает использование принципа композиции дисперсий распространения на профиль, сечение и слой (VIII,2,2) при регулярной сети. Мы не станем задерживать внимание читателя на подобном анализе, поскольку из приведенных примеров и без того видно, что геостатистика относится именно к тем разделам прикладной математики, в которых частотные разложения могут найти и находят не меньшее применение, нежели корреляционный аппарат.

А. Марголин

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5
ВВЕДЕНИЕ 9

Книга первая

ГЕОСТАТИСТИКА

Часть первая. Транзитивные представления

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ТРАНЗИТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ 19
ГЛАВА II. ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ 35
ГЛАВА III. ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 51
ГЛАВА IV. ТРАНЗИТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ 63

Часть вторая. Теория собственных схем

ВВЕДЕНИЕ 70
ГЛАВА V. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЯХ 73
ГЛАВА VI. СТОХАСТИЧЕСКИЕ СОБСТВЕННЫЕ СХЕМЫ 83
ГЛАВА VII. ВОСХОЖДЕНИЕ ПРИ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ В СЛУЧАЕ СОБСТВЕННЫХ СХЕМ 105
ГЛАВА VIII. ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ 116
ГЛАВА IX. КРАЙГИНГ 133
ГЛАВА X. ТЕОРИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СОБСТВЕННЫХ СХЕМ 142

Книга вторая

ПРИКЛАДНАЯ ГЕОСТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ 151
ГЛАВА XI. СХЕМА ДЕ ВЕЙСА 164
ГЛАВА XII. ДИСКРЕТНЫЙ КРАЙГИНГ СХЕМЫ ДЕ ВЕЙСА 211
ГЛАВА XIII. НЕПРЕРЫВНЫЙ КРАЙГИНГ В СХЕМЕ ДЕ ВЕЙСА 251
ГЛАВА XIV. ЭФФЕКТ САМОРОДКОВ И ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕХОДА 278
ГЛАВА XV. ЗАКОНЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ 296

Книга третья

ПОИСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ РАЗВЕДКЕ И ВВОДЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ В ЭКСПЛУАТАЦИЮ

ВВЕДЕНИЕ 331
ГЛАВА XVI. ВЫБОР МИНИМАЛЬНО ПРОМЫШЛЕННОГО СОДЕРЖАНИЯ И ОБЪЕМА ГОДОВОЙ ДОБЫЧИ 334
ГЛАВА XVII. ОПТИМАЛЬНАЯ РАЗВЕДКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ 348
ГЛАВА XVIII. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ПРОБЛЕМА ПРЕКРАЩЕНИЯ РАЗВЕДКИ 356
УПРАЖНЕНИЯ 371
ЛИТЕРАТУРА 384
ПОСЛЕСЛОВИЕ 387

«НАУКИ О ЗЕМЛЕ»

т. 12

Ж. Матерон

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОСТАТИСТИКИ

Редактор *В. К. Знаменская*. Художник *А. В. Шипов*. Художественный редактор *В. М. Варлашин*
Технический редактор *А. Д. Хомяков*. Корректор *Р. Я. Новик*
Сдано в производство 10/VII 1968 г. Подписано к печати 11/XI 1968 г. Бумага кн.-журн. 70×108 1/16 = 12,75 бум. л. Усл. 35,7 печ. л. Уч.-изд. л. 31,9. Изд. № 5/4379. Цена 2 р. 40 к. Зак. 368
Темплан изд-ва «Мир» 1968 г., пор. № 183

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9