

Los Cuadernos del Centro de Morfología Matemática
de Fontainebleau

Fascículo 5

LA TEORÍA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS Y SUS APLICACIONES

Por

Georges MATHERON

1970

Traducido al español por

Marco ALFARO

2005

Propiedad del Centro de Geoestadística de la Escuela de Minas de París.

Prohibida su venta.

LA TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS, Y SUS APLICACIONES

TABLA DE MATERIAS:

PREFACIO 3

Capítulo 0 - INTRODUCCION. 7

- 0-1 Notaciones 7
- 0-2 Producto de convolución 8
- 0-3 Geoestadística y Teoría de las variables regionalizadas 9
- 0-4 Métodos transitivos y Teoría intrínseca 10

Capítulo 1 - LOS METODOS TRANSITIVOS. 14

- 1-1 Ejemplo introductorio 14
- 1-2 El covariograma transitivo 16
- 1-3 Regularización y subida 19
- 1-4 La estimación de las variables regionalizadas 24
- 1-5 Ejercicios sobre los métodos transitivos 44

Capítulo 2 - LAS FUNCIONES ALEATORIAS INTRINSECAS. 50

- 2-1 Definiciones generales 50
- 2-2 Propiedades de la covarianza y del variograma 53
- 2-3 Regularización de una F.A.I. 59
- 2-4 Varianzas de extensión y de estimación 63
- 2-5 Métodos de aproximación en R^1 68
- 2-6 Métodos de aproximación en R^n 72
- 2-7 El efecto de pepita 75
- 2-8 El esquema esférico 77
- 2-9 Inferencia estadística y cuasi-estacionaridad 81
- 2-10 Ejercicios sobre las F.A.I. 86

Capítulo 3 - EL KRIGEADO. 99

- 3-1 Los objetivos del krigeado 99
- 3-2 Notaciones 102
- 3-3 F.A. estacionaria de esperanza nula o conocida 104
- 3-4 F.A. estacionaria de esperanza desconocida 106
- 3-5 Caso de una F.A.I. sin covarianza 111
- 3-6 Ejercicios sobre el krigeado 112

Capítulo 4 - EL KRIGEADO UNIVERSAL. 121

- 4-1 Introducción 121

BIBLIOGRAFIA. 126

PREFACIO

Este texto es la redacción del curso que impartí en 1970 en la Escuela de Verano de Fontainebleau. Es el fruto de varios años de reflexión acerca del carácter ambiguo de la operación que consiste en interpretar en términos probabilísticos un fenómeno natural único pero parcialmente desconocido, y, sobre el problema difícil de la investigación de las condiciones de posibilidad de la inferencia estadística a partir de una realización única de una función aleatoria no estacionaria. He puesto entonces el acento en los problemas metodológicos más que sobre el aspecto matemático de la teoría. Del punto de vista de las aplicaciones prácticas, los resultados útiles son aquellos proporcionados en el Fascículo 2 de estos Cuadernos ("Cours de Géostatistique", con la excepción del krigeado universal), pero presentados bajo una nueva luz. La solución del problema metodológico mencionado consiste en introducir una hipótesis de cuasi-estacionaridad, lo suficientemente débil para ser siempre físicamente plausible. El acercamiento de los capítulos 1 (métodos transitivos) y 2 (teoría de las funciones aleatorias intrínsecas) muestra que el problema de la inferencia estadística tiene entonces solución (y luego la teoría operativa), en lo que respecta la estimación global de una variable regionalizada. El capítulo 4 consagrado al krigeado universal conduce a una conclusión análoga respecto del problema de la estimación local. No he presentado el krigeado universal en términos de espacios de Hilbert, para evitar cualquier dificultad matemática y concentrar toda la atención en los problemas metodológicos. Entonces hay que referirse al Fascículo 1 de estos Cuadernos para la demostración de ciertos resultados (principalmente los teoremas de existencia y de unicidad). He examinado la noción capital de deriva a partir de puntos de vista muy diferentes (deriva funcional, deriva aleatoria, máxima verosimilitud, teoría de interpoladores) que muestran el carácter ambiguo, o al menos ligado estrechamente a consideraciones de escala - y he demostrado que estos puntos de vista aparentemente opuestos conducen a conclusiones convergentes: lo cual nos proporciona confianza en el plano metodológico.

Una palabra acerca de los ejercicios propuestos al final de cada capítulo, y de los cuales la mayor parte fueron tratados en la Escuela de Verano de 1970. Algunos de ellos son ejercicios simples destinados a familiarizar al lector con el manejo real de una teoría un poco abstracta. Otros son verdaderos complementos al curso mismo, y aportan resultados nuevos en los cuales algunos tienen una importancia metodológica fundamental. Para cada uno de ellos proporciono la solución, el camino a seguir para llegar al resultado, y las conclusiones metodológicas que conviene sacar. Espero haber dicho bastante para convencer al lector la necesidad de hacer efectivamente estos ejercicios.

G. MATHERON

PREFACIO DEL TRADUCTOR

He decidido pasar a formato electrónico la traducción "caligráfica" que había realizado hace algunos años del Fascículo 5, "La Théorie des Variables Régionalisées, et ses Applications" del Maestro Georges Matheron, publicada en 1970, a mi juicio, uno de los mejores libros de Geoestadística. En conversaciones con G. Matheron traté de convencerlo acerca de la conveniencia de editar el Fascículo 6, a la luz de los adelantos de los medios de cálculo, y, también como una etapa para llegar a su última obra "Estimating and Choosing. An Essay on Probability in Practice", Springer Verlag, 1989; lamentablemente no fué posible editar el Fascículo 6...

Además de rendirle un homenaje de reconocimiento y de afecto al creador de la Geoestadística, con la satisfacción de haber sido su Secretario en la efímera Asociación Internacional de Geoestadística, el propósito de esta publicación es doble: por una parte servirá de ayuda y complemento para los estudiantes de minas, de geología y los profesionales interesados en la estimación de recursos mineros, por otra parte, como una referencia para mostrar que ciertos conceptos y el uso de algunas herramientas han sido desvirtuados con el correr de los años. La varianza de estimación, noción capital en todo el libro, constituye un excelente ejemplo.

La traducción es casi textual pero he omitido - en lo cual G. Matheron estaba de acuerdo - la presentación del modelo de De Wijs y los ábacos de los modelos de variograma. La palabra "semivariograma" es reemplazada siempre por "variograma". En vez del anglicismo "kriging" he preferido traducir "krigeage" por la palabra correcta en español "krigeado" o "krigeaje" (se prefiere krigeado porque krigeaje no suena bien en español). El krigeado universal solo se presenta como una introducción. Respecto de los ejercicios, los resolví casi todos en mi publicación (también caligráfica) "Ejercicios sobre las Variables Regionalizadas", Departamento de Minas de la Universidad de Chile, 1972.

El avance de los medios de cálculo ha sido importante, como muestra este ejemplo: se me ocurrió "vectorizar" la figura donde aparece la varianza de estimación de superficies por una malla de reconocimiento cuadrada de lado a , con presencia de Zitterbewegung (fenómeno de micro-oscilaciones descubierto por E. Schrödinger en el marco de la mecánica cuántica, ¡también presente en problemas geológicos!) para lo cual tuve que construir un programa computacional para realizar nuevamente los cálculos. Comprobé que la figura de G. Matheron (que data de los años 60 y aparece por última vez en Estimating and Choosing, en 1989) no representa bien este fenómeno pre-aleatorio (ver figura A-1), en efecto, tal como muestra un acercamiento (ver figura A-2), el fenómeno es mucho más complicado que lo que se creía, sobre todo cuando la malla a tiende a 0. En el texto incluí entonces una nueva figura.

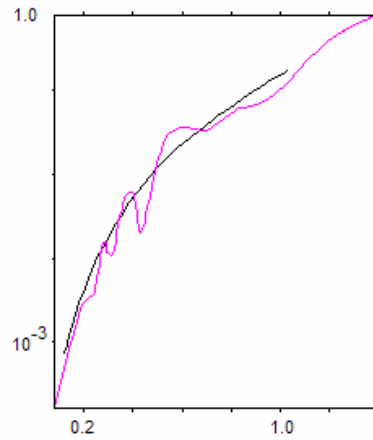


Figura A-1: Zitterweibegung en la estimación de la superficie de un círculo de diámetro unidad por una malla cuadrada a (según G. Matheron). En abscisa la malla a . En ordenada, la varianza de estimación correspondiente.

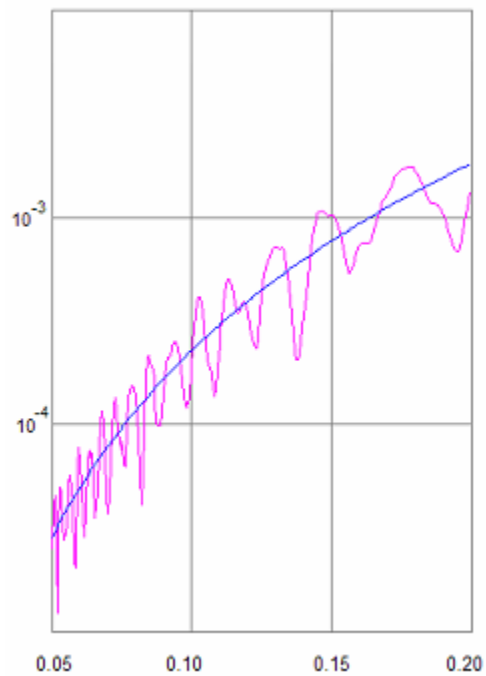


Figura A-2: Acercamiento de la figura A-1 y nuevo cálculo de la varianza de estimación de superficies.

El nivel matemático de la obra es difícil, recomiendo entonces, como texto de apoyo el excelente libro en español "Teoría de la Probabilidad" de B. Gnedenko (estoy seguro que G. Matheron estaría de acuerdo), Editorial MIR, Moscú 1979 (difícil de encontrar ahora, quizás una alternativa es la versión en inglés de la Editorial Chelsea, 1967). Existen otros manuscritos que he realizado, que iré poco a poco pasando a formato electrónico, poniéndolos a disposición de la comunidad minera.

M. ALFARO

0 - INTRODUCCION

0-1 NOTACIONES

Designaremos por x, y, \dots puntos del espacio de n dimensiones ($n = 1, 2$ o 3), por dx, dy, \dots elementos de longitud ($n = 1$), de superficie ($n = 2$) o de volúmenes ($n = 3$), centrados en los mismos puntos, por $f(x), g(y)$ etc., ... funciones de estos puntos.

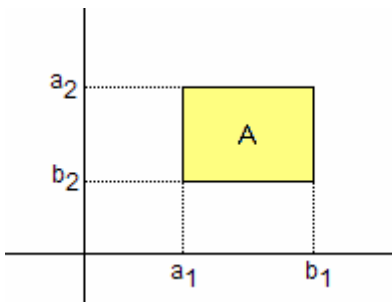
La integral (extendida a todo el espacio) de una función $f(x)$ se escribe:

$$\int f(x)dx$$

Por ejemplo, para $n = 3$ dimensiones, y, designando por (x_1, x_2, x_3) las tres coordenadas del punto x , esta notación se explicita de la manera siguiente:

$$\int f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

De la misma manera, escribiremos $\int_A f(x)dx$ para la integral de la función $f(x)$ sobre un dominio A del espacio de n dimensiones.



Para $n = 2$, si A es el rectángulo de la figura, se tiene, de manera explícita:

$$\int_A f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Estas notaciones son a la vez muy condensadas y muy parlantes: en una primera lectura se las puede interpretar en el espacio de una dimensión, donde su significación es, en general, muy clara. La generalización a los espacios de dos o tres dimensiones se hace así más fácil.

Ejemplo: Sea V un volumen, y $g(h) = g(h_1, h_2, h_3)$ una función del vector h de coordenadas h_1, h_2, h_3 . Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ el origen y la extremidad del vector h , es decir $h=y-x$. El valor medio de la función $g(h)$ cuando los dos puntos x e y recorren (cada uno a su manera) el volumen V , se escribe:

$$\frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v g(y-x) dy$$

En notación explícita, lo anterior se escribiría como:

$$\frac{1}{v^2} \int_v \int_v \int_v dx_1 dx_2 dx_3 \int_v \int_v g(y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3) dy_1 dy_2 dy_3$$

La primera notación es un símbolo, que describe directamente el concepto de valor medio; la segunda es un algoritmo que indica el camino a seguir para calcular esta cantidad, pero cuya significación no aparece a primera vista.

0-2 PRODUCTO DE CONVOLUCION (media móvil)

El producto de convolución de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ se define por:

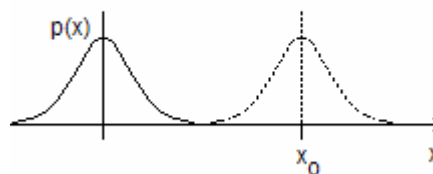
$$g(x) = \int f_1(y) f_2(x-y) dy = \int f_2(y) f_1(x-y) dy$$

Se escribe, en notación simbólica:

$$g = f_1 * f_2$$

Esta operación de convolución juega un papel fundamental en Geoestadística (como también en probabilidades y en toda la física teórica). La convolución se puede asociar con la noción intuitiva de "media móvil":

Regularizada de una función f (media móvil ponderada de la función)



Sea $p(y)$ una función de ponderación. El valor en el punto x_0 de la media móvil de la función f ponderada por p es:

$$f_p(x_0) = \int p(y) f(x_0 + y) dy = \int p(-y) f(x_0 - y) dy$$

(se atribuye el peso $p(y)dy$ al valor tomado por f en el punto $x_0 + y$. La segunda expresión se obtiene al cambiar y por $-y$).

Sea \check{p} la función transpuesta de la función p (por definición:

$\check{p}(x) = p(-x)$). $f_p(x_0)$ es el valor en x_0 de $f * \check{p}$:

$$f_p = f * \tilde{p}$$

Esta media móvil f_p de la función f (ponderada por p) se llama regularizada (de f por p).

Ejemplo 1 (toma de una muestra v en el punto x)

Sea v la muestra implantada en el origen de coordenadas, y sea $k(x)$ su función indicatriz (por definición $k(x)=1$ si $x \in v$ y $k(x)=0$ si $x \notin v$). Tomemos como función de ponderación $p(x)=(1/v)k(x)$. La media móvil correspondiente:

$$f_v = \frac{1}{v} f * \tilde{k}$$

representa la ley media de la muestra v tomada en el punto x . De manera explícita, se tiene:

$$f_v(x) = \frac{1}{v} \int f(x+y) dy$$

Ejemplo 2 (radiactividades)

Si en el origen 0 de coordenadas se pone una masa unitaria de una sustancia radiactiva, se observa a la distancia d una radiactividad igual a $Ae^{-\lambda d}/d$ (A es una constante y λ es el coeficiente de absorción del medio). Sea ahora $f(x)$ la ley en el punto x de esta sustancia radiactiva. Designemos por $d(x-x_0)$ la distancia entre dos puntos x y x_0 . La masa $f(x)dx$ localizada en x genera en x_0 una radiactividad:

$$Ae^{-\lambda d(x-x_0)} / d(x-x_0) f(x) dx$$

En total, se observa en x la radiactividad:

$$A \int f(x) \frac{e^{-\lambda d(x-x_0)}}{d(x-x_0)} dx$$

Esto no es otra cosa que el producto de convolución $Af*$ (con una función p de ponderación $p(x)=e^{-\lambda d}/d$, la cual es además simétrica, es decir $p = \tilde{p}$)

0-3 GEOSTADISTICA Y TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS.

La Geoestadística es la aplicación de la teoría de las variables regionalizadas a la estimación de los depósitos mineros (con todas las aproximaciones que esto implica). De manera general, diremos que un fenómeno es regionalizado cuando se desplaza en el espacio, manifestando una cierta estructura. Las ciencias de la tierra, entre otras, nos proporcionan numerosos ejemplos. Si $f(x)$ designa el valor en el punto x de una característica f de este fenómeno, diremos que $f(x)$ es una variable regionalizada, abreviado, una V.R. Se trata de un término

neutro, descriptivo, anterior, en particular a toda interpretación probabilística.

Entonces, del punto de vista matemático, una V.R. es simplemente una función $f(x)$ del punto x , pero es, en general, una función muy irregular: ejemplo: una ley en un depósito minero. Una variable regionalizada se presenta bajo dos aspectos contradictorios (o complementarios):

- un aspecto aleatorio (alta irregularidad, y variaciones imprevisibles de un punto a otro)
- un aspecto estructurado (la V.R. debe sin embargo reflejar a su manera las características estructurales de un fenómeno regionalizado)

La teoría de las V.R. se propone entonces dos objetivos principales:

- en el plano teórico, expresar estas características estructurales en una forma matemática adecuada
- en el plano práctico, resolver el problema de la estimación de una V.R. a partir de un muestreo fragmentario.

Estos dos objetivos están relacionados: para un mismo conjunto de muestras, el error de estimación depende de las características estructurales; este error, por ejemplo, es más grande cuando la V.R. es más irregular y más discontinua en su variación espacial.

Campo y Soporte de una V.R.

El campo V de una V.R. es el dominio donde ésta es diferente de 0. Un panel es un subconjunto V' de V .

Soporte - A menudo, no se conoce $f(x)$, sino más bien su valor medio $f_v(x)$ dentro de la muestra v tomada en el punto x . Esta regularizada $f_v(x)$ es efectivamente más regular que la V.R. $f(x)$. El volumen v se llama soporte de la V.R. f_v , regularizada de f . Otra tarea importante de la teoría de las variables regionalizadas consistirá entonces en determinar las características de f_v conociendo las de f . Ejemplo: en un depósito, prever las características de los paneles V' (variable $f_{v'}$), conociendo las características de f o de f_v (muestras).

Más generalmente, se buscará relacionar las características de f con las de una regularizada f_p dada (ejemplo de las radiactividades).

0-4 METODOS TRANSITIVOS Y TEORIA INTRINSECA.

Para alcanzar los objetivos disponemos de dos grupos de métodos:

- métodos transitivos: absolutamente generales, en particular no necesitan ninguna hipótesis de naturaleza probabilística, y, a fortiori, ninguna hipótesis de estacionaridad.
- teoría intrínseca: se trata de una aplicación de la teoría de las funciones aleatorias; entonces se introducen interpretaciones probabilísticas, y además, una cierta hipótesis de estacionaridad (hipótesis intrínseca)

Desde el punto de vista teórico, estos dos grupos de métodos conducen a resultados equivalentes, lo cual muestra que los resultados de la teoría intrínseca no están, en realidad, ligados a la hipótesis de estacionaridad (por otra parte, se puede construir una teoría probabilística sin utilizar esta hipótesis, la cual permite encontrar los resultados principales de la Geoestadística).

Encontramos aquí un problema metodológico que presenta una importancia capital, tanto para la teoría como para el examen crítico de los resultados a los cuales conduce esta teoría. Es claro que el carácter ambiguo, localmente errático, de nuestras V.R. invoca una interpretación probabilística, y, de hecho, nuestro segundo grupo de métodos, invocará de manera explícita la teoría de las funciones aleatorias. Pero ahora se plantean dos preguntas fundamentales, de las cuales la primera es la siguiente:

a/ ¿Cuál es la significación epistemológica¹ verdadera de la operación que consiste en considerar un fenómeno natural único (nuestra V.R.) como una realización de una función aleatoria (es decir como el resultado de un experimento al azar efectuado en una población infinita de V.R. consideradas como "posibles")?

En verdad, una interpretación probabilística de este tipo es en sí misma una conceptualización de la realidad (un modelo constitutivo) más que una hipótesis capaz de ser invalidada o confirmada experimentalmente. Esta hipótesis se justifica solamente en la medida que ella permite captar mejor la realidad, y, resolver efectivamente problemas prácticos insolubles de otra manera. Parece prudente entonces procurar, al comienzo, de ver hasta donde es posible llegar sin recurrir a esta interpretación - veremos que es posible llegar bastante lejos. Así aparece este primer grupo de métodos que llamaremos transitivos, en los cuales no interviene, en apariencia, ningún concepto probabilístico. Aquí la V.R. está caracterizada por su covariograma transitivo $g(h)$, no probabilístico, el cual resume las características estructurales esenciales y permite - si se conoce $g(h)$ - resolver completamente ciertos problemas prácticos como el problema de la estimación.

Si fuera efectivamente posible determinar este $g(h)$ a partir de datos experimentales fragmentarios, podríamos entonces quedarnos aquí, y economizar cualquier interpretación probabilística. Sin embargo, esto no es cierto, y un análisis más fino mostrará que es necesario introducir un cierto tipo de hipótesis relacionadas al comportamiento analítico de $g(h)$ en una vecindad del origen, hipótesis cuya significación epistemológica es exactamente la de un paso camuflado a la esperanza matemática. Entonces no es posible evitar la interpretación probabilística, y es mejor introducirla de manera explícita. Es aquí donde se plantea la segunda pregunta fundamental:

b/ Una vez admitida esta interpretación probabilística, ¿es posible la inferencia estadística a partir de una realización única? Dicho de otra manera, a partir del material experimental disponible (que es la misma V.R., o un muestreo fragmentario de esta V.R. única) ¿es realmente posible reconstituir, al menos en parte, la ley de probabilidad de la

¹ Nota del T.: La epistemología estudia la naturaleza y validez del conocimiento; su propósito es distinguir la ciencia auténtica de la pseudociencia, la investigación profunda de la superficial.

función aleatoria hipotética de la cual nuestra V.R. sería una realización?

Con el propósito de responder afirmativamente a esta segunda pregunta, a menudo se introducen hipótesis, de tipo estacionaridad y ergodicidad, bastante más fuertes de lo que es realmente necesario: en muchas aplicaciones estas hipótesis son groseramente falsas (ejemplos: un depósito en el cual las leyes decrecen más o menos regularmente a partir de un corazón rico; la topografía submarina, en la cual las profundidades aumentan cuando uno se aleja de las costas, etc. ...: se trata de fenómenos manifiestamente no estacionarios. Frecuentemente, estas hipótesis aparecen como inverificables. Debido a lo anterior, buscaremos constantemente debilitar las hipótesis, hasta reducirlas a un mínimo a la vez indispensable y admisible. Más precisamente, reemplazaremos la pregunta b/ anterior por la siguiente:

b'/ ¿Cuál es la característica probabilística mínima que necesitamos conocer para resolver un problema práctico dado (por ejemplo, el cálculo de una varianza de estimación) y cuál es la hipótesis mínima que hay que introducir con el propósito de hacer posible la estimación de esta característica a partir de una realización única?

Esta hipótesis mínima, suficientemente débil para ser casi siempre al menos físicamente admisible, consistirá en suponer que la función aleatoria es cuasi-intrínseca (es decir, asimilable, localmente, a una función aleatoria intrínseca), mientras que la característica mínima que será a la vez necesaria y posible de estimar estará ligada esencialmente al comportamiento en una vecindad del origen de un variograma o de una función de covarianza cuasi-estacionaria.

La reducción del problema a sus características probabilísticas mínimas permite comprender el éxito de los métodos transitivos (los cuales, una vez explícitamente probabilizados, no necesitan, evidentemente, ninguna hipótesis de tipo estacionario) y también la equivalencia de sus resultados con los de la teoría intrínseca. Esta reducción subraya además el interés capital que va a presentar para nosotros el comportamiento en una vecindad del origen de un variograma o de un covariograma transitivo. Del punto de vista práctico, finalmente, esta reducción muestra que muy a menudo es lícito aplicar, a fenómenos manifiestamente no estacionarios, procedimientos de cálculo de los cuales se puede creer, al comienzo, que su legitimidad estaba ligada a alguna hipótesis de estacionaridad.

En la práctica la teoría intrínseca es más fácil de construir, y es casi siempre la teoría que se utiliza, salvo el caso particular, muy importante, de la estimación de una superficie o de un volumen (problema geométrico)

Respecto de la bibliografía (ver referencias al término de este Fascículo), se encontrará en [4] la exposición completa de la teoría de las variables regionalizadas, y en [5], una exposición abreviada de esta misma teoría, además de un tratado completo de Geoestadística aplicada, conteniendo, en particular, el estudio de los problemas de optimización económica (el texto original en francés puede ser consultado en la Biblioteca de la Escuela de Minas de París). La tesis de J. Serra proporciona, por una parte una exposición general muy concreta (sin

dificultades matemáticas), y por otra parte, un estudio detallado del esquema esférico. El antiguo tratado [3] está obsoleto en gran parte, salvo en lo relacionado con el esquema de De Wijs. La tesis de A. Carlier [1] estudia (solamente para el esquema de De Wijs) los problemas especiales propuestos por los depósitos de sustancias radiactivas. Los problemas de optimización económica se tratan en dos artículos de los Annales des Mines [8], lo más esencial figura en [5]. Finalmente, para el krigado universal se consultará [6].

CAPITULO 1

LOS METODOS TRANSITIVOS

1-1 EJEMPLO INTRODUCTORIO

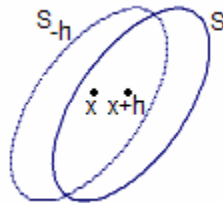
Consideremos el fenómeno de "transición" más simple que se pueda imaginar: presencia o ausencia de una característica. Sea por ejemplo una formación geológica de extensión limitada. Un sondaje perforado en el punto x la intersecta o no la intersecta. Designemos por $k(x)$ la indicatriz del conjunto S , es decir la función definida por:

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Se trata de un fenómeno único, para el cual no es posible realizar una formulación probabilística: hablar de la probabilidad de que un punto dado x pertenezca a S no tendría gran sentido. Se puede observar también que todo el interés se concentra aquí en la frontera de S . En efecto, $k(x)$ es constante tanto al interior como al exterior de S , solamente al pasar esta frontera $k(x)$ varía, pasando de 1 a 0 o de 0 a 1. Esta es la justificación del nombre de fenómeno de transición, y del nombre métodos transitivos.

El área S de nuestra formación está dada, evidentemente, por:

$$S = \int k(x) dx$$



El valor S constituye una información muy interesante desde el punto de vista práctico: a menudo, se busca estimar este valor a partir de una red de sondajes. Sin embargo este parámetro no nos aporta ninguna información de naturaleza realmente estructural. En efecto, se puede definir la estructura de un conjunto como el sistema de relaciones existentes entre los elementos o las partes de este conjunto. Tendremos información de naturaleza estructural al hacer intervenir simultáneamente, al menos, dos puntos.

Sean entonces dos puntos x y $x+h$ (es decir el conjunto estructurante más pequeño que podamos imaginar. Consideremos entonces la expresión $k(x)k(x+h)$: vale 1 si x y $x+h$ pertenecen los dos a S , y 0 en otro caso.

Pero decir que $x+h$ pertenece a S equivale a decir que x pertenece al trasladado S_{-h} de S según la traslación $-h$. Se tiene entonces:

$$k(x)k(x+h) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \cap S_{-h} \\ 0 & \text{si } x \notin S \cap S_{-h} \end{cases}$$

Integremos en x esta expresión: obtenemos una función de h :

$$K(h) = \int k(x)k(x+h)dx = \text{medida}(S \cap S_{-h})$$

que representa la medida (el área) de la intersección de S y de su trasladado por $-h$. Esta función es simétrica, porque las dos intersecciones $S \cap S_{-h}$ y $S \cap S_h$ se deducen una de la otra por traslación. Esta función $K(h)$ es el covariograma geométrico asociado a S . La función $K(h)$ proporciona una cierta imagen de la forma del conjunto S :

Propiedades del covariograma geométrico $K(h)$

a/ Simetría: $K(h) = K(-h)$

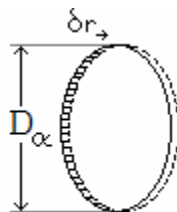
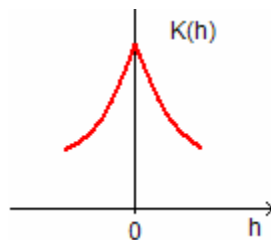
Desigualdades: $0 \leq K(h) \leq K(0)$

Relaciones: $S = K(0)$

$$S^2 = \int K(h)dh$$

b/ Alcances: el alcance $a(\alpha)$ en la dirección α es la distancia a partir de la cual $K(h)$ se anula en esa dirección. Entonces es la dimensión más grande de S en esta dirección.

c/ Pendiente en el origen (derivada a la derecha y a la izquierda)



Si el módulo δr de h es pequeño, se tiene:

$$K(h) = K(0) - \delta r D_\alpha$$

$\delta r D_\alpha$ es la mitad de la superficie pequeña barrida por el vector δr cuyo origen describe el contorno de S . D_α es la variación diametral de S en la dirección α (si S es convexo, D_α es el diámetro aparente en esa dirección).

A pesar de que existe una derivada $K'_\alpha(0) = -D_\alpha$ en cada dirección α , se observará, cuidadosamente, que la función $K(h)$, en si misma, no es derivable en $h=0$. El ejercicio 6 (al final de este capítulo) muestra como la fórmula de Minkowski permite relacionar las derivadas $K'_\alpha(0)$ en las diferentes direcciones α , al perímetro de S (o a su superficie si nos ponemos en el espacio de 3 dimensiones). Estas relaciones son muy útiles en Morfología Matemática.

1-2 EL COVARIOGRAMA TRANSITIVO

Sea $f(x)$ una V.R. nula fuera de un campo V acotado. El covariograma transitivo de esta V.R. es la función $g(h)$ definida por:

$$(1-1) \quad g(h) = \int f(x)f(x+h)dx$$

Propiedades del covariograma transitivo $g(h)$

a/ Simetría: $g(h) = g(-h)$

desigualdad: $|g(h)| \leq g(0) = \int [f(x)]^2 dx$

Sea $Q = \int f(x)dx$ la cantidad de metal, se tiene:

$$(1-2) \quad Q^2 = \int g(h)dh$$

(para demostrar (2), reemplazar g por su expresión (1), e integrar en h)

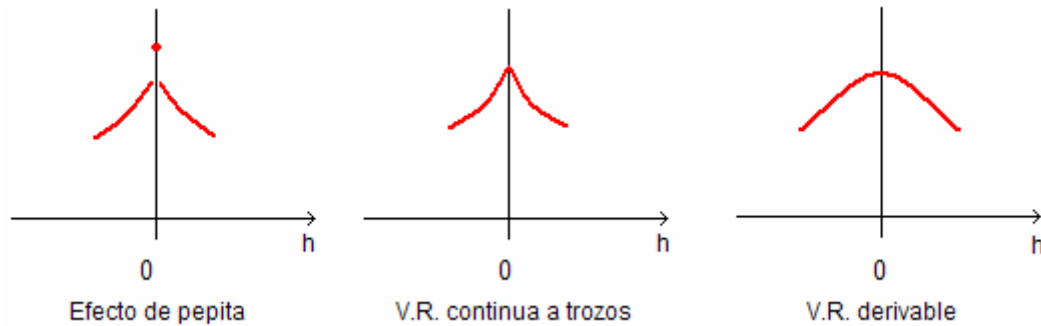
b/ Alcance: $a(\alpha)$ se define por la condición $g(h)=0$ cuando $h > a(\alpha)$ para el vector h de dirección α : es una propiedad del campo de la V.R.

c/ Comportamiento de $g(h)$ en una vecindad del origen. La regularidad de $g(h)$ en una vecindad del origen refleja las propiedades de continuidad de la V.R. en su variación espacial. Lo anterior resulta de:

$$g(0) - g(h) = \frac{1}{2} \int [f(x+h) - f(x)]^2 dx$$

Si $f(x)$ es continua por trozos, $g(h)$ tiene un comportamiento lineal en una vecindad del origen.

Si $f(x)$ es derivable, $g(h)$ tiene un comportamiento parabólico.



A menudo, $g(h)$ no es continuo en $h=0$: dicho de otra manera, $g(0)$ es mayor que el límite de $g(h)$ cuando h tiende a 0. Se dice entonces que hay un efecto de pepita. Más que una discontinuidad verdadera, se trata, a menudo, de una zona de transición muy rápida, la cual, experimentalmente, se presenta como una discontinuidad. Volveremos a estudiar más tarde este efecto de pepita en la versión probabilística de la teoría y su interpretación en términos de escala (ver también el ejercicio 7 de este capítulo, y, para una representación del efecto de pepita por una medida de Dirac, los ejercicios 16 a 20).

Caso isótropo - En las aplicaciones, se busca (por ejemplo, mediante una transformación lineal) llegar al caso en que el covariograma g solo depende del módulo

$$r = |h| = \sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)}$$

del vector h , y se expresa entonces como una función $g(r)$ del único argumento r . Solamente las potencias pares de $g(r)$, r^{2k} son indefinidamente derivables en $h=0$. Las potencias impares r^{2k+1} , las potencias r^λ , λ no entero, y también los términos logarítmicos del tipo $r^{2n} \log(r)$ presentan todos una irregularidad en $h=0$. De esta manera, en el caso isótropo, se distinguirán dos partes en el desarrollo limitado de $g(r)$ en una vecindad del origen: una parte regular, que solo contiene potencias pares, y una parte irregular la cual agrupa los términos en r^λ , λ diferente de un entero par, eventualmente con términos logarítmicos:

$$g(r) = g(0) + a_2 r^2 + \dots + \underbrace{\sum_{\lambda} a_{\lambda} r^{\lambda}}_{\text{parte regular}} + \underbrace{\sum_k a_{2k} r^{2k} \log(r)}_{\text{parte irregular}}$$

El término de más bajo grado de la parte irregular proporciona una medida precisa del grado de irregularidad de la V.R. en su variación espacial. Por ejemplo, la indicatriz $k(x)$ de un conjunto S está caracterizada desde este punto de vista por un término irregular de orden 1: $K(h) = S - D|h|$, como lo demostramos antes.

d/ El covariograma g(h) es una función de tipo positivo.

Se dice que una función g(h) es de tipo positivo si para cualquier entero $k > 0$, cualquier conjunto x_1, x_2, \dots, x_k de puntos del espacio R^n y cualquier sistema $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de números reales, se tiene:

$$(1-3) \quad \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j g(x_i - x_j) \geq 0$$

Las funciones de tipo positivo juegan un papel importante en Física (donde tienen, en general, una significación energética) y en teoría de probabilidades (las funciones características de las leyes de probabilidad son de tipo positivo). Veremos en el capítulo 2 que las funciones de covarianza de las funciones aleatorias son también de tipo positivo.

Probemos que un covariograma transitivo es de tipo positivo. En efecto, según la relación (1-1), se puede escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j g(x_i - x_j) &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \int f(y) f(y + x_i - x_j) dy = \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \int f(y + x_j) f(y + x_i) dy = \int \left[\sum_i \lambda_i f(y + x_i) \right]^2 dy \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, para la elección de un modelo de covariograma transitivo, debemos limitarnos, obligatoriamente, a funciones de tipo positivo (veremos, en el párrafo 1-4 que esta condición expresa que las varianzas de estimación son necesariamente positivas).

Según el teorema clásico de BOCHNER, una función continua es de tipo positivo si y solo si es la transformada de Fourier de una medida positiva sumable. Lo anterior nos proporciona una segunda verificación de esta propiedad fundamental del covariograma transitivo. Designemos por Φ la transformada de Fourier de la V.R. $f(x)$, y por G la transformada de su covariograma $g = f * \tilde{f}$. Se sabe que la transformada de Fourier de un producto de convolución es el producto multiplicativo ordinario de las transformadas de los factores. Como la transpuesta \tilde{f} de f tiene por transformada el imaginario conjugado Φ^* de Φ , encontramos que:

$$(1-4) \quad G = |\Phi|^2$$

y, por consiguiente, se tiene bien que $G \geq 0$.

Observación - Desde el punto de vista matemático el covariograma g y su transformada G son herramientas perfectamente equivalentes. Como la relación (1-4) es particularmente simple, a menudo, es más cómodo, en ciertas demostraciones teóricas, utilizar G en vez del covariograma g. Pero, desde el punto de vista experimental, y, en las aplicaciones, el covariograma g es, en general, una herramienta bastante mejor que G. En efecto, el comportamiento de g(h) en una vecindad de $h=0$ tiene por imagen

las propiedades de G en una vecindad del infinito. No es, en general, fácil apreciar el comportamiento de una curva experimental en el infinito. Esta es la razón, por la cual, el punto de vista del análisis armónico, no es muy interesante en las aplicaciones prácticas de la teoría de las V.R.

1-3 REGULARIZACION DE UNA V.R. Y SUBIDA

1-3-1. Regularización de una V.R.

Sea $f(x)$ una V.R., $p(x)$ una función de ponderación, $f_p = f * \check{p}$ la regularizada de f por p . La relación (1-1) puede escribirse:

$$g = f * \check{f}$$

lo cual muestra que el covariograma transitivo es la autoregularizada de la V.R. f . El covariograma

$$g_p = f * \check{p} * \check{f} * p = f * \check{f} * p * \check{p} = f_p * \check{f}_p$$

se puede poner en la forma:

$$g_p = g * P$$

con $P = p * \check{p}$: entonces el covariograma de la regularizada se obtiene regularizando g con el covariograma transitivo P de la función de ponderación p : g_p es una función más regular que g , así como f_p es más regular que la V.R. inicial f .

1-3-2 La Subida

Vamos a dedicar el resto de este párrafo a una operación llamada subida, la cual tiene gran importancia en la teoría de las V.R. (debido a que permite, por ejemplo, reducir el cálculo de una varianza de estimación en un espacio de n dimensiones, a una serie de operaciones mucho más simples, realizadas en el espacio de una dimensión). En términos mineros, la subida es simplemente la transposición abstracta de la operación que consiste en implantar un sondaje en un punto (x_1, x_2) de la superficie topográfica.

Si $f_3(x) = f_3(x_1, x_2, x_3)$ es una V.R. en el espacio de tres dimensiones (por ejemplo), se dice que la V.R.:

$$f_2(x_1, x_2) = \int f_3(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

definida en el espacio de dos dimensiones se deduce de f_3 por subida (de orden 1, paralela al eje de los x_3). Por ejemplo, si $f_3(x)$ es una ley puntual, $f_2(x_1, x_2)$ es la acumulación (cantidad de metal al metro cuadrado) del sondaje implantado en el punto (x_1, x_2) de la superficie topográfica.

No hay dificultad para definir subidas de orden superior. Por ejemplo, la subida de orden 2 (paralela al plano x_1, x_2) conduce a la V.R.

$$f_1(x_3) = \iint f_3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

definida en el espacio de una sola dimensión (el eje de los x_3) y que representa, en términos mineros, la cantidad de metal por metro de profundidad aportada por el nivel de cota x_3 . Se tiene que el covariograma $g_2(h_1, h_2)$ de la V.R. f_2 deducida de f_3 por subida de orden 1 se obtiene efectuando directamente esta misma operación de subida sobre el covariograma $g_3(h_1, h_2, h_3)$ de la V.R. f_3 , dicho de otra manera, en lenguaje breve: el covariograma sube al mismo tiempo que la V.R. asociada.

Demos una demostración de este resultado a partir de la relación (1-4). Sea $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una V.R. en R^n , $\Phi_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ su transformada de Fourier. Por subida de orden 1 a lo largo del eje de las x_n , se obtiene la V.R. $f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ cuya transformada de Fourier es:

$$(1-5) \quad \Phi_{n-1}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = \Phi_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, 0)$$

Dicho de otra manera, según el mecanismo de calculo evidente (el cual se encuentra también en teoría de probabilidades, al pasar a una ley marginal) se obtiene Φ_{n-1} haciendo $u_n=0$ en la expresión de Φ_n . Designemos ahora por g_n y g_{n-1} los covariogramas de f_n y f_{n-1} , por G_n y G_{n-1} sus transformadas de Fourier tomadas en los espacios respectivos R^n y R^{n-1} . Según (1-4) se tiene:

$$G_n = |\Phi_n|^2, \quad G_{n-1} = |\Phi_{n-1}|^2$$

Según (1-5), se deduce:

$$G_{n-1}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = |\Phi_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)|^2 = G_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)$$

Luego, se obtiene G_{n-1} anulando u_n en la expresión de G_n . Según la reciprocidad de la transformada de Fourier y la expresión (1-5) de la subida, resulta bien que g_{n-1} se deduce de g_n por subida de orden 1.

1-3-3 La subida en el caso isótropo

Examinemos ahora el caso isótropo, es decir el caso en que la V.R. $f_n(x)$, $x \in R^n$ admite un covariograma $g_n(r)$ el cual solo depende del vector $r=|h|$. En este caso no es necesario especificar en qué dirección se efectúa la subida. Las subidas de orden 1, 2, ... proporcionan variables regionalizadas f_{n-1}, f_{n-2}, \dots cuyos covariogramas $g_{n-1}(r), g_{n-2}(r), \dots$ dependen únicamente del vector r (del espacio de $n-1, n-2, \dots$ dimensiones). De acuerdo a lo anterior, estos covariogramas se deducen de g_n por subida, y se encuentra, sin dificultad:

$$\begin{cases} g_{n-1}(r) = 2 \int_0^{\infty} g_n(\sqrt{h^2 + r^2}) dh \\ g_{n-2}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} g_n(\sqrt{h^2 + r^2}) h dh \end{cases}$$

El cambio de variables $u^2 = h^2 + r^2$, proporciona:

$$(1-6) \quad \begin{cases} g_{n-1}(r) = 2 \int_r^{\infty} g_n(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - r^2}} du \\ g_{n-2}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} g_n(u) u du \end{cases}$$

Aparece así una diferencia notoria entre las subidas de orden 1 y 2. La subida de orden 1 (y, más generalmente la subida de orden impar) es una operación elemental. Se invierte fácilmente por derivación:

$$(1-7) \quad g_n(r) = -\frac{1}{2\pi r} g_{n-2}'$$

Por el contrario, la subida de orden 1 (y, más generalmente de orden impar) es una operación más difícil, debido a la presencia de una raíz cuadrada bajo el signo de integración, y, no se invierte fácilmente.

Es posible demostrar que las subidas, y sus inversas o descensos, consideradas como operadores sobre funciones isótropas de tipo $g_n(r)$ constituyen un grupo (ver [4]).

Para encontrar la expresión del descenso de orden 1 ($g_{n-1} \rightarrow g_n$), se puede primero efectuar un descenso de orden 2, lo cual conduce, según (1-7) a:

$$g_{n+1} = -\frac{1}{2\pi r} g_{n-1}'(r)$$

luego una subida de orden 1 que da, según (1-6):

$$g_n(r) = 2 \int_r^{\infty} g_{n+1}(u) \frac{u du}{\sqrt{u^2 - r^2}} = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} g_{n-1}'(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}$$

En otras palabras, hemos establecido las expresiones recíprocas de la subida y el descenso de orden 1:

$$(1-8) \quad \begin{cases} g_{n-1}(r) = 2 \int_r^\infty g_n(u) \frac{udu}{\sqrt{u^2 - r^2}} \\ g_n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty g'_{n-1}(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \end{cases}$$

Se encontrará más tarde (Ejercicio 11 bis) una aplicación interesante de estas fórmulas de reciprocidad al problema que consiste en reconstituir la granulometría de una población de esferas del espacio de 3 dimensiones, a partir de la granulometría de círculos o de líneas (cuerdas) inducidas por planos o rectas.

Adoptemos ahora el punto de vista de la transformación de Fourier, y sea $G=F_n g_n$ la transformada del covariograma g_n (tomada en el espacio de n dimensiones). Como la función g_n es isótropa, su transformada de Fourier solo depende del radio vector:

$$\rho = \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)}$$

del espacio de n dimensiones en el cual están definidas las transformadas F_n . Luego G es también una función isótropa del tipo $G(\rho)$. Según (1-5) se obtiene $F_{n-1}(g_{n-1})$ al anular u_n en la expresión de $F_n(g_n)$. Pero anular u_n en la expresión del radio vector conduce a la expresión $(u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2)^{1/2}$, es decir al radio vector del espacio de $n-1$ dimensiones, que podemos de nuevo designar por ρ . Por consiguiente, la transformada $G(\rho)$ del covariograma isótropo g_n es invariante por subida (y, también por descenso):

$$(1-9) \quad G(\rho) = F_n(g_n) = F_{n-1}(g_{n-1}) = F_{n+1}(g_{n+1}) = \dots$$

Se dispone aquí de un medio analítico cómodo para explicitar una subida o un descenso.

El principio de correspondencia.

Examinemos ahora cómo se comporta en la subida lo que más nos interesa en un covariograma isótropo, es decir, la parte irregular de su desarrollo limitado en una vecindad del origen (párrafo 1-2). El resultado esencial (cuya demostración se encuentra en [4]) es el siguiente: se puede efectuar la subida término a término sobre la parte irregular de g_n , según la regla de correspondencia:

$$(1-10) \quad r^\lambda = A_\lambda r^{\lambda+1} \quad (\lambda \text{ no entero})$$

y este principio de correspondencia proporciona el desarrollo limitado de $g_{n-1}(r)$ salvo una serie entera par. No existe una regla análoga para la parte regular (pero esto no será problemático porque, tal como veremos, las varianzas de estimación solo dependen de la parte irregular).

El orden del término irregular de más bajo grado se aumenta así en 1, y esta circunstancia nos muestra bien el efecto de regularización que tiene la subida.

En lo que respecta a los términos de grado entero par y los términos logarítmicos de la parte irregular, el principio de correspondencia término a término es también aplicable de la forma siguiente:

$$(1-11) \quad \begin{cases} r^{2k} \log(r) \rightarrow A_{2k} r^{2k+1} \\ r^{2k+1} \rightarrow A_{2k+1} r^{2k+2} \log(r) \end{cases}$$

Se obtiene así, por subidas sucesivas, la serie singular donde se alternan términos impares y términos logarítmicos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \log(r) &\rightarrow \pi r \\ r &\rightarrow -r^2 \log(r) \end{aligned}$$

Cálculo de los coeficientes A_λ - Para una demostración rigurosa, ver [4]. Daremos aquí una justificación simbólica, cuyo principio nos servirá también para el cálculo de varianzas de estimación. Al considerar que r^λ es una distribución (y no como una función, lo que implica que esta justificación es sólo simbólica), r^λ admite, en el espacio de n dimensiones, la transformada de Fourier siguiente:

$$F_n(r^\lambda) = \frac{1}{\pi^{\lambda+n/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{1}{\rho^{\lambda+n}}$$

(λ no entero). Según (1-9), la subida de orden 1 realizada sobre r^λ conduce a $F_{n-1}(F_n(r^\lambda))$. Al calcular $F_{n-1}(\rho^{-\lambda-n})$ y según la fórmula anterior, se tiene:

$$F_{n-1}(\rho^{-\lambda-n}) = \pi^{\lambda+\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} r^{\lambda+1}$$

y se deduce la expresión del coeficiente A_λ de la regla de correspondencia (1-10), con la ayuda de las función de Euler Γ , es decir:

$$(1-12) \quad A_\lambda = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1+\lambda}{2}\right)}$$

Esta justificación, repitámoslo, es solamente simbólica, y, en particular, no muestra que la regla de correspondencia (1-10) proporciona el resultado de la subida salvo una serie entera. Sin embargo, el resultado (1-12) es correcto. En el caso de una serie singular (1-11), se obtiene (por pasos al límite sobre los cuales no insistiremos aquí):

$$(1-13) \quad \begin{cases} A_{2k} = \pi \frac{2^k k!}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)} = \pi \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)^2} \\ A_{2k+1} = -\frac{2^{-2k} (2k+1)!}{k!(k+1)!} \end{cases}$$

1-4 LA ESTIMACION DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS

En este párrafo, fundamental, definiremos la varianza de estimación para una malla regular, proporcionando dos expresiones equivalentes (rigurosas) válidas en el espacio de n dimensiones (párrafo 1-4-1). En el párrafo (1-4-2), examinaremos el caso de una malla aleatoria estratificada. A continuación, buscaremos métodos de aproximación, primero en el espacio de 1 dimensión (1-4-3) luego a 2 o más dimensiones (1-4-4) y aplicaremos estos resultados al problema geométrico (1-4-5). Un examen crítico de las condiciones mediante las cuales es posible aplicar estos resultados permitirá preparar el paso a la versión probabilística de la teoría.

1-4-1 Expresión rigurosa de la varianza de estimación (malla regular)

Para abreviar, explicitaremos los cálculos en el espacio de 1 sola dimensión. Sin embargo estos resultados se generalizan sin dificultad al espacio de n dimensiones. Sea $f(x)$ una V.R. en la recta y:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

la cantidad de metal asociada. Para estimar Q , se dispone de una malla de muestreo con una malla regular a . En otras palabras, si designamos por x_0 la abscisa de una (cualquiera) de las muestras de la red, conocemos los valores $f(x_0+pa)$ de la V.R. $f(x)$ para p entero positivo o negativo. En realidad $f(x)$ es diferente de 0 en un conjunto acotado, solamente un numero finito de estos valores $f(x_0+pa)$ es diferente de 0, y, en adelante, no nos preocuparemos acerca de la convergencia de las series (que tienen, en realidad, un número finito de términos). En la práctica no será necesario que la red de muestras sea realmente infinita; bastará con que sobrepase un poco el campo geométrico de la V.R.

Para estimar la cantidad de metal Q , se forma entonces el estimador:

$$Q^*(x_0) = a \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} f(x_0 + pa)$$

que es una función periódica (de período a) de la abscisa x_0 elegida arbitrariamente como origen de la red. El error $Q-Q^*(x_0)$ asociado a esta estimación es igualmente una función periódica de x_0 , vamos a caracterizar su magnitud posible mediante una varianza de estimación que escribiremos $\sigma^2(a)$.

De acuerdo a nuestro hilo conductor metodológico (párrafo 0-4) no introduciremos todavía ninguna interpretación probabilística relativa a la V.R. $f(x)$ misma: $f(x)$ representa una realidad física única, perfectamente determinada (aún si no la conociéramos efectivamente). Pero, justamente porque al comienzo no conocemos nada, acerca de $f(x)$, implantamos nuestra red de muestras "no importa donde" o "al azar" relativamente a esta realidad física desconocida. No es difícil dar un sentido epistemológico más preciso a este "no importa donde" admitiendo que todo sucede como si el origen x_0 de la red se implantó al azar sobre un segmento de longitud a según una ley de probabilidad de densidad uniforme. Esta hipótesis expresa simplemente la ignorancia en que estamos, al comienzo, respecto de la localización exacta de un fenómeno determinístico, y no implica entonces un compromiso epistemológico grave.

Según esta implantación aleatoria del origen x_0 en el segmento $(0, a)$, la estimación $Q^*(x_0)$ es una variable aleatoria. Calculemos su esperanza matemática y su varianza: diremos, por definición que esta varianza es la varianza de estimación $\sigma^2(a)$. Para la esperanza se encuentra:

$$E(Q^*) = \int_0^a \left(a \sum_p f(x_0 + pa) \right) \frac{dx_0}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = Q$$

Nuestro estimador Q^* es entonces un estimador insesgado. La varianza de estimación es:

$$\sigma^2(a) = E(Q^{*2}) - Q^2 = \int_0^a [Q^*(x_0)]^2 \frac{dx_0}{a} - Q^2$$

Evaluemos la integral de $[Q^*(x_0)]^2$. Se tiene:

$$[Q^*(x_0)]^2 = a^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + pa) f(x_0 + qa) = a^2 \sum_k \sum_p f(x_0 + pa) f(x_0 + pa + ka)$$

Integremos de 0 a a . Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^a [Q^*(x_0)]^2 dx_0 &= a^2 \sum_k \int_0^a \sum_p f(x_0 + pa) f(x_0 + pa + ka) dx_0 = \\ &= a^2 \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) f(x_0 + ka) dx_0 = a^2 \sum_k g(ka) \end{aligned}$$

Al tomar en cuenta la relación (1-2), se obtiene entonces la fórmula:

$$(1-14) \quad \sigma^2(a) = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ka) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(h) dh$$

En el espacio de n dimensiones, se tiene un resultado totalmente análogo. Por ejemplo, para n=3, y para una malla en forma de paralelepipedo $a_1 a_2 a_3$ se tiene:

$$\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3 \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} g(k_1 a_1, k_2 a_2, k_3 a_3) - \int g(h) dh$$

Observación - La varianza de estimación (1-14) es la diferencia entre un valor aproximado y el valor exacto de la integral $\int g(h) dh$. Por consiguiente $\sigma^2(a)$ es más pequeña cuando:

- la malla a es más pequeña
- la función g, luego también la función f, es más regular.

Si la malla es pequeña con respecto al alcance de g(h), la fórmula (1-14) tiene un gran número de términos. Lo anterior nos conduce a buscar fórmulas de aproximación (ver párrafos 1-4-3 y 1-4-4). Daremos una segunda expresión (equivalente para la varianza de estimación, utilizando esta vez la transformada de Fourier G del covariograma g. El estimador Q^* es una función periódica, luego admite un desarrollo en serie de Fourier:

$$\begin{cases} Q^*(x_0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{2i\pi p \frac{x_0}{a}} \\ C_p = \frac{1}{a} \int_0^a Q^*(x_0) e^{-2i\pi p \frac{x}{a}} dx \end{cases}$$

Si reemplazamos $Q^*(x_0)$ por su expresión explícita, se ve que el coeficiente de Fourier C_p es:

$$C_p = \sum_k \int_0^a f(x+ka) e^{-2i\pi p \frac{x}{a}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi p \frac{y}{a}} dy$$

Por consiguiente, si $\Phi(u)$ es la transformada de Fourier de f(x), se tiene:

$$C_p = \Phi\left(\frac{p}{a}\right)$$

En particular $C_0 = \Phi(0) = Q$. Las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas conducen a:

$$\sigma^2(a) = \sum_p |C_p|^2 - Q^2$$

y, considerando (1-4):

$$(1-15) \quad \sigma^2(a) = \sum_p G\left(\frac{p}{a}\right) - G(0)$$

Esta fórmula, equivalente a (1-14) muestra que $\sigma^2(a)$ es positiva si G es una función positiva (luego, cuando g es de tipo positivo). Se generaliza al caso pluridimensional. Para R^2 , por ejemplo, con una malla rectangular (a_1, a_2) se encuentra:

$$(1-16) \quad \sigma^2(a_1, a_2) = \sum_{p,q} G\left(\frac{p}{a_1}, \frac{q}{a_2}\right) - G(0,0)$$

Observación - De lo anterior se debe retener sobretodo este resultado fundamental: la varianza de estimación $\sigma^2(a)$ solo depende del covariograma transitivo $g(h)$ y de la malla a . La fórmula (1-14) muestra además que esta varianza depende linealmente de $g(h)$. Entonces, si conocemos el verdadero covariograma g de una V.R., estaríamos en condiciones de resolver el problema de la estimación, de una manera totalmente satisfactoria - y sin probabilizar el fenómeno real. En vista de preparar el paso a la versión probabilística de la teoría, que tendrá lugar en el párrafo (1-4-6), mostremos que en lo anterior hay algo ilusorio.

En efecto, si solo se dispone de los datos experimentales $f(x_0+pa)$, para un x_0 fijo, no se conocerá el verdadero covariograma $g(h)$. Solamente se podrán estimar los valores numéricos de los $g(ka)$ con la ayuda de los estimadores:

$$g^*(ka) = a \sum_p f(x_0 + pa)f(x_0 + pa + ka)$$

De la misma manera, para estimar el término $Q^2 = \int g(h)dh$, se podrá tomar el cuadrado $[Q^*(x_0)]^2$ del estimador $Q^*(x_0)$ mismo. Pero, si sustituimos estos estimadores en la fórmula (1-14), obtenemos idénticamente 0, tal como muestra el cálculo fácil siguiente:

$$a \sum_k g^*(ka) - [Q^*(x_0)]^2 = 0$$

Este resultado se entiende bastante bien: al reemplazar en (1-14) los valores verdaderos por sus estimaciones, hemos implícitamente reemplazado la verdadera V.R. $f(x)$, definida en la recta real, por su restricción $f(x_0+pa)$ al conjunto discreto constituido por los puntos de muestreo x_0+pa . El resultado obtenido significa simplemente que $Q^*(x_0)$ es un excelente estimador de $Q^*(x_0)$.

En términos menos triviales, esto significa que es ilusorio esperar, por procedimientos puramente empíricos, extraer de un mismo material experimental (los $f(x_0+pa)$), a la vez una estimación de Q y la precisión de esta estimación.

Para salir de este impasse metodológico, es obligatorio recurrir a un modelo teórico. Se elegirá una expresión matemática apropiada

$g(h; \lambda, \mu, \dots)$ la cual depende de uno o varios parámetros λ, μ, \dots que ajustan de la mejor manera posible los puntos $g^*(ka)$ experimentales (es inútil e ilusorio hacer pasar la curva teórica por los puntos experimentales), y es, a este $g(h; \lambda, \mu, \dots)$ al cual se la aplicará la fórmula (1-14). El resultado que se obtendrá tendrá, exactamente, el mismo valor que la elección del modelo de covariograma.

Indiquemos ahora que la elección de $g(h)$ no es arbitraria. En primer lugar la función $g(h; \lambda, \mu, \dots)$ debe ser de tipo positivo (párrafo 1-2). En segundo lugar, se deberá asignar una importancia extrema al comportamiento de esta función en una vecindad del origen, es decir a su parte irregular: el orden del término irregular de más bajo grado, eventualmente la presencia de un efecto de pepita. Estas características tienen la significación de leyes físicas y constituyen características objetivas del fenómeno real. La experiencia ayuda, rápidamente se sabe (aprovechando ocasiones en las cuales se dispone de redes de muestras particularmente densas) que tal tipo de fenómeno se caracteriza por este u otro comportamiento analítico de su covariograma. Definitivamente (párrafo 1-4-3) es de este comportamiento del cual dependerá la varianza de estimación, lo que implica que el problema se reducirá, en grueso, a determinar el coeficiente del término irregular de más bajo grado, y esto es posible de hacer, en general, experimentalmente de una manera satisfactoria.

1-4-2 Caso de una malla aleatoria estratificada

Sea $f(x)$ una V.R. en R^n , $g(h)$ su covariograma, y sea V el paralelepípedo de lados a_1, a_2, \dots, a_n , centrado en el origen. Designemos por h_i los vectores cuyas componentes son múltiplos enteros $p_1 a_1, p_2 a_2, \dots, p_n a_n$ de los lados del paralelepípedo V , de manera que los trasladados V_{h_i} de V por los h_i cubren todo el espacio. La malla aleatoria estratificada definida por el paralelepípedo V se construye como sigue:

- se elige un origen $x_0 \in V$
- para cada índice i , se elige al azar un punto $x_i \in V$ de manera tal que los x_i sean independientes admitiendo la misma ley de densidad uniforme en V .
- se efectúa un muestreo en cada uno de los puntos $x_0 + h_i + x_i$.

El estimador $Q^*(x_0)$ de la cantidad de metal, con $x_0 \in V$ fijo, es entonces:

$$Q^*(x_0) = \sum_i v f(x_0 + h_i + x_i)$$

Si x_0 es fijo, los $v f(x_0 + h_i + x_i)$ son variables aleatorias independientes. Expresemos sus esperanzas y sus varianzas con la ayuda de la regularizada:

$$f_v(x) = \frac{1}{v} \int_v f(x+y) dy$$

(que representa la media de f en el paralelepípedo v_x centrado en x). Se encuentra:

$$E(f(x_0 + h_i + x_i) | x_0) = \frac{1}{v} \int_v f(x_0 + h_i + y) dy = f_v(x_0 + h_i)$$

$$D^2(f(x_0 + h_i + x_i) | x_0) = \frac{1}{v} \int_v f^2(x_0 + h_i + y) dy - f_v^2(x_0 + h_i)$$

Estas variables son independientes cuando x_0 está fijo, se deduce entonces la esperanza y la varianza condicional de $Q^*(x_0)$:

$$E(Q^* | x_0) = \sum_i v f_v(x_0 + h_i) = Q$$

$$D^2(Q^* | x_0) = v^2 \sum_i D^2(f(x_0 + h_i + x_i) | x_0) = v g(0) - v^2 \sum_i f_v^2(x_0 + h_i)$$

Si x_0 es fijo, $Q^*(x_0)$ es también un estimador insesgado. Pero - de la misma manera que en el párrafo anterior - nuestra ignorancia inicial respecto a la localización del fenómeno real se formaliza asimilando x_0 a una variable aleatoria, independiente de los x_i , admitiendo también una densidad uniforme en v . Como $E(Q^* | x_0) = Q$ no depende de x_0 , la varianza a priori de $Q^*(x_0)$ - es decir la varianza de estimación de la malla aleatoria estratificada - se obtiene tomando directamente la esperanza matemática en x_0 de la varianza condicional $D^2(Q^* | x_0)$, es decir:

$$D^2(Q^*) = \frac{1}{v} \int_v D^2(Q^* | x_0) dx_0 = v g(0) - \sum_i \int_v f_v^2(x_0 + h_i) dx_0 =$$

$$= v g(0) - v \int_v f_v^2(x) dx$$

Designemos por g_v el covariograma de la regularizada f_v . Según el párrafo (1-3-1), este covariograma se deduce del covariograma geométrico $K(h)$ del paralelepípedo por la relación:

$$g_v = \frac{1}{v^2} g * K$$

En particular:

$$g_v(0) = \frac{1}{v^2} \int g(h) K(h) dh = \int f_v^2(x) dx$$

Según el algoritmo de Cauchy (ver ejercicio 2), $g_v(0)$ representa el valor medio de $g(x-y)$ cuando x e y describen separadamente el paralelepípedo v , y la varianza de estimación buscada se escribe:

$$(1-17) \quad D^2(Q) = v [g(0) - g_v(0)]$$

Esta varianza depende solamente del comportamiento de $g(h)$ en una vecindad del origen definido precisamente por el paralelepípedo v mismo.

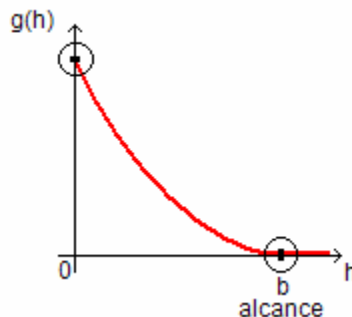
1-4-3 Fórmulas de aproximación para el espacio de una dimensión.

Sea ahora $f(x)$ una V.R. del espacio de una dimensión, $g(h)$ su covariograma, y "a" una malla de muestreo. Cuando la malla es pequeña, la fórmula (1-14) contiene un número demasiado grande de términos, luego es útil obtener fórmulas de aproximación que permitan un cálculo rápido. En realidad, el interés de las fórmulas de aproximación que vamos a establecer va más lejos de las simples razones de comodidad, y, presenta una significación epistemológica fundamental para el problema que nos interesa. En efecto, vamos a ver que (salvo un término fluctuante del cual debemos examinar su significado) la varianza de estimación $\sigma^2(a)$, para a pequeño, depende solamente del comportamiento analítico de $g(h)$ en una vecindad de $h=0$.

La estructura de la fórmula (1-14) muestra que la varianza de estimación $\sigma^2(a)$ no es otra que el error numérico que se comete si se desea evaluar la integral $\int g(h)dh$ a partir de la suma discreta $a\sum g(ka)$. Luego si $g(h)$ fuera una función suficientemente regular (es decir derivable en todas partes un número suficiente de veces) se podría evaluar directamente $\sigma^2(a)$ por los métodos clásicos basados en la fórmula de Euler-Mac Laurin. Pero $g(h)$ no es, en general, suficientemente regular en todo h . Los modelos teóricos de covariograma que se utilizan en la práctica localizan las irregularidades analíticas en dos lugares cruciales:

- en una vecindad del origen, como ya hemos visto
- pero también en una vecindad de $h=b$, siendo b el alcance, debido a que la intersección en b de $g(h)$ puede ser más o menos brutal.

Sin embargo, los modelos teóricos de $g(h)$ no presentan nunca irregularidades analíticas. Esto no quiere decir que esto sea así para los covariogramas verdaderos. Pero no conoceremos nunca estos covariogramas verdaderos, y, como lo vimos al final del párrafo (1-4-1), estamos siempre obligados a reemplazarlos por un modelo teórico. En el párrafo 1-4-6 se examinará el alcance epistemológico de esta operación ambigua que consiste en reemplazar el covariograma verdadero (desconocido) por un modelo teórico, analíticamente simple, cuyas irregularidades se encuentran concentradas en el origen y en el alcance:



Por el momento, partiremos de la hipótesis que las irregularidades se encuentran localizadas efectivamente en estos dos puntos. Mediante cálculos sobre los cuales no insistiremos aquí (ver [4]), se puede

demostrar que la varianza de estimación, para a pequeño, es la suma de dos términos:

$$\sigma^2(a) = T(a) + Z(a)$$

El primer término $T(a)$, o término de extensión, depende del comportamiento de $g(h)$ en $h=0$. El segundo, $Z(a)$, o término fluctuante o Zitterbewegung, depende del comportamiento de $g(h)$ en una vecindad del alcance b .

Respecto del término fluctuante $Z(a)$, se puede demostrar que depende esencialmente de $\varepsilon = b/a$ Modulo 1 (más precisamente: se puede encontrar un entero n tal que $na \leq b \leq (n+1)a$ y sea $\varepsilon = (b-na)/a$). $Z(a)$ es una función periódica de ε , de período 1, y admite un desarrollo en serie de Fourier, sin término constante, luego de valor medio nulo cuando ε varía entre 0 y 1:

$$\int_0^1 Z_\varepsilon(a) d\varepsilon = 0$$

La expresión teórica de este término fluctuante es posible de determinar teóricamente. Su magnitud no es en absoluto despreciable, a menudo tiene un valor considerable (ver figura 1 y el ejercicio 14). Sin embargo, en las aplicaciones, no se podrá nunca calcular el valor exacto de este término, debido a que precisamente, el valor exacto del alcance b es conocido con un error de $\pm a$, luego, $\varepsilon = b/a$ Modulo 1, es una cantidad totalmente indeterminada. Nos autorizamos a despreocupar simplemente este término fluctuante, debido al hecho que su valor medio en ε en el intervalo $[0,1]$ de este término fluctuante es siempre nulo, que es lo que haremos en adelante. Se observará el carácter probabilístico camuflado de esta aproximación, sobre la cual volveremos en el párrafo 1-4-6.

Examinemos ahora el término principal $T(a)$, o término de extensión, ligado únicamente al comportamiento analítico de $g(h)$ en $h=0$. Un estudio analítico detallado (ver [4]) muestra que este término solo depende de la parte irregular del desarrollo limitado de $g(h)$ en una vecindad del origen. Más precisamente, se puede establecer la validez de un principio de correspondencia término a término, análogo al que encontramos en el estudio de la subida isótropa: cada término en $|h|^\lambda$ del desarrollo limitado de $g(h)$ aporta a la varianza $\sigma^2(a)$ una contribución en $T_\lambda a^{\lambda+1}$, con un coeficiente T_λ que solo depende de λ :

$$(1-18) \quad |h^\lambda| \rightarrow T_\lambda a^{1+\lambda}$$

Para λ entero par, se encuentra $T_\lambda=0$, y esto confirma que la parte irregular del covariograma no aporta ninguna contribución al desarrollo limitado de la varianza de estimación. Para λ entero impar, la regla (1-18) subsiste, sin modificación. Para un término logarítmico en $h^{2n} \log(h)$, se encuentra, sin dificultad:

$$h^{2n} \log(h) \rightarrow T'_{2n} a^{1+2n}$$

con un coeficiente T_{2n}' igual a la valor en $\lambda=2n$ de la derivada $\frac{d}{d\lambda}T_\lambda$.

Cálculo del coeficiente T_λ . - Se encontrará en [4] un cálculo riguroso del coeficiente T_λ que figura en la regla de correspondencia (1-18). Nos contentaremos con una justificación simbólica (análoga a la que dimos para el cálculo del coeficiente A_λ de la subida). Si $G(u)$ es la transformada de Fourier del covariograma g , se tiene, según (1-15):

$$\sigma^2(a) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} G\left(\frac{p}{a}\right)$$

Si tuviera un sentido tomar la transformada de Fourier de la función $|h|^\lambda$, la transformada de Fourier (en el sentido de las distribuciones) sería:

$$G(u) = \frac{1}{\pi^{\lambda+1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{1}{|u|^{1+\lambda}}$$

y, si la fórmula (1-15) siguiera válida para esta transformada tomada en el sentido de las distribuciones, se encontraría que:

$$\sigma^2(a) = \frac{2a^{1+\lambda}}{\pi^{\lambda+1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\lambda}}$$

De donde se deduciría la expresión de T_λ :

$$(1-19) \quad T_\lambda = \frac{2}{\pi^{\lambda+1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\lambda}}$$

Se encuentra que el valor T_λ obtenido mediante este razonamiento aproximado corresponde bien con el valor correcto. En particular:"

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{1}{6} \\ T_2' = 0.0609... \end{cases}$$

El principio de correspondencia permite un cálculo fácil y rápido de la varianza de estimación. Sin embargo, no hay que olvidar, que se ha despreciado un Zitterbewegung, cuya amplitud puede ser enorme, y que lo

que se obtiene es en realidad el desarrollo limitado de $\sigma^2(a)$ en una vecindad de $h=0$, luego un resultado utilizable solamente para las mallas pequeñas. Por otra parte, para una malla a grande, la fórmula general contiene un número modesto de términos y puede ser utilizada directamente. Cuando la malla es superior al alcance, solo subsiste, en (1-14), el término correspondiente a $k=0$, y se obtiene la fórmula simple:

$$(1-20) \quad \sigma^2(a) = ag(0) - \int g(h)dh \quad (a \geq b)$$

El sentido probabilístico de esta ecuación está indicado en el ejercicio 15.

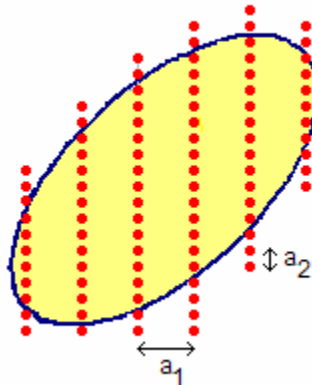
Observación: Si $L=na$ es la longitud mineralizada, y n el número de muestras positivas, al covariograma en $|r|^\lambda$ le corresponde la varianza de estimación siguiente:

$$\sigma^2(a) = T_\lambda a^{1+\lambda} = (T_\lambda L^{1+\lambda}) \frac{1}{n^{1+\lambda}}$$

Esta varianza está en razón inversa de $n^{1+\lambda}$ (y no en $1/n$ como lo habría sugerido una aplicación errónea de la estadística clásica).

1-4-4 Fórmulas de aproximación en R^n .

Vamos a estudiar en detalle el caso del espacio de dos dimensiones, la generalización a R^n es simple. Nuestro objetivo es desarrollar un segundo principio de aproximación, que permita reducir el cálculo de una varianza de estimación $\sigma^2(a_1, a_2)$ a la suma de dos varianzas de estimación de una sola dimensión, como las reglas de correspondencia (1-18) y (1-19), luego, muy fáciles de calcular. Designaremos este principio como principio de composición de términos de línea y de rebanada. Examinemos primero, el sentido intuitivo de este principio. Sea (a, a_2) , con $a_1 > a_2$, una malla rectangular, $f(x, y)$ una V.R. definida en el plano, $g(h_1, h_2)$ su covariograma, y $g_1(h)$ el covariograma que se deduce de g por subida a lo largo del eje de las y :



Nuestro principio de correspondencia enuncia que la varianza de estimación $\sigma^2(a_1, a_2)$ de la malla rectangular es la suma:

$$(1-20) \quad \sigma^2(a_1, a_2) = \sigma_1^2(a_1) + a_1 \sigma_2^2(a_2)$$

de dos términos: el primero, $\sigma_1^2(a_1)$ se calcula con la relación (1-14) aplicada al covariograma subido g_1 , y representa el error que se comete al estimar la cantidad de metal Q a partir de las líneas de mayor densidad de muestreo (en el dibujo, paralelas al eje y); es el término de línea. El segundo término, $a_1 \sigma_2^2(a_2)$ se llama término de rebanada o de rebanada. Este término representa el error que se comete al estimar la acumulación de las líneas a partir de muestreos puntuales. Se calcula $\sigma_2^2(a_2)$ aplicando la fórmula (1-14) a la malla a_2 y al covariograma de 1 dimensión $g(0, h)$. El principio (1-20) expresa entonces que: desde el punto de vista del cálculo de las varianzas de estimación, los dos errores cometidos: primero al estimar la acumulación de las líneas a partir de las muestras, segundo al estimar la cantidad de metal a partir de estas acumulaciones, que se supone conocidas, pueden ser considerados como no correlacionados.

Antes de dar una justificación aproximada, precisemos el enunciado de este principio. Para abreviar las notaciones, designaremos por ξ_a al operador lineal asociado, según (1-14), a la varianza de estimación para una malla a :

$$\xi_a(g) = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ka) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(h) dh$$

Sean (x_0, y_0) las coordenadas de una de las muestras. Designemos por:

$$L_i(x_0) = \int f(x_0 + ia_1; y) dy$$

la acumulación de la línea i de abscisa x_0 , y por:

$$L_i^*(x_0, y_0) = a_2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + ia_1; y_0 + pa_2)$$

el estimador que se puede formar. Hemos visto en el párrafo (1-4-1) que x_0 e y_0 deben ser considerados como dos variables aleatorias independientes que admiten densidades uniformes en $(0, a_1)$ y $(0, a_2)$ respectivamente. La acumulación $L_i(x_0)$ de la línea i es entonces una variable aleatoria, y es claro que si se fija x_0 se tiene:

$$E(L_i^* | x_0) = L_i(x)$$

Para estimar $Q = \iint f(x, y) dx dy$, se forma el estimador:

$$Q^*(x_0, y_0) = a_1 \sum_i L_i^*(x_0, y_0)$$

y el error de estimación se puede escribir:

$$(1-21) \quad Q - Q^* = (Q - a_1 \sum_i L_i) + a_1 \sum_i (L_i - L_i^*)$$

El primer término es el error que se comete al estimar Q a partir de las acumulaciones. Según la definición misma de la subida, la varianza de este término (término de rebanada) se obtiene al aplicar (1-14) al variograma g_1 de una dimensión, deducido de $g_2(h_1, h_2)$ por subida a lo largo del eje y , es decir, con nuestras notaciones:

$$\sigma_1^2(a_1) = \xi_{a_1}(g_1)$$

El segundo término es la suma de los errores $L_i - L_i^*$ cometidos al estimar cada una de las acumulaciones a partir de muestras puntuales. Para cada línea i , se acaba de ver que la esperanza matemática de este error es nula cuando x_0 está fijo.

$$E(L_i - L_i^* | x_0) = 0$$

Si x_0 está fijo, la V.R. $f(x_0 + ia_1; y)$ definida en la línea i admite el covariograma de una dimensión g_i definido por

$$(1-22) \quad g_i(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + ia_1; y) f(x_0 + ia_1; y+h) dy$$

y la varianza condicional de $L_i - L_i^*$ es entonces:

$$D^2(L_i - L_i^* | x_0) = \xi_{a_2}(g_i)$$

Ahora establecemos la hipótesis (que justificaremos más tarde) según la cual los $L_i - L_i^*$ pueden ser considerados sin correlación cuando x_0 está fijo. La varianza condicional del término de línea es entonces:

$$a_1^2 \sum_i D^2(L_i - L_i^* | x_0) = a_1^2 \sum_i \xi_{a_2}(g_i)$$

Como $E(L_i - L_i^*) = 0$, se deduce la varianza a priori del término de línea al tomar la esperanza matemática en x_0 , es decir:

$$a_1 \int_0^{a_1} dx_0 \sum_i \xi_{a_2}(g_i)$$

Pero queda claro que el operador lineal ξ_{a_2} se puede permutar con la sumatoria en i y la integral en x_0 . Al utilizar (1-22), se encuentra entonces para el término de línea:

$$\begin{aligned}
& a_1 \xi_{a_2} \int_0^{a_1} dx_0 \sum_i f(x_0 + ia_1; y) f(x_0 + ia_1; y + h) dy = \\
& = a_1 \xi_{a_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) f(x, y + h) dy = a_1 \xi_{a_2} (g(0, h))
\end{aligned}$$

El término de línea es entonces:

$$a_1 \xi_{a_2} (g(0, h)) = a_1 \sigma_2^2(a_2)$$

en conformidad con (1-20). Para obtener la relación (1-20) misma, queda por admitir la ausencia de correlación de los dos errores $Q - a_1 \sum L_i$ y $a_1 \sum (L_i - L_i^*)$ que figuran en (1-21).

Este principio de composición de términos de línea y de rebanada presenta gran importancia, por razones prácticas, primero, porque permite calcular muy fácilmente un valor aproximado de la varianza de estimación, segundo, también por razones metodológicas: porque al considerar el principio de correspondencia, se muestra que, en el espacio de dos dimensiones, también la varianza de estimación depende esencialmente del comportamiento de $g(h)$ en una vecindad del origen. Encontraremos de nuevo este principio de correspondencia, en una forma equivalente, en la versión probabilística de la teoría. Luego, no está de más, dar una justificación, por lo menos simbólica.

Para ello aplicaremos el principio de correspondencia. A cada término en r^λ de la parte irregular del covariograma g le corresponde, por subida el término $A_\lambda r^{1+\lambda}$ en el covariograma subido g_1 (relaciones (1-10) y (1-12)), después el término $A_\lambda T^{1+\lambda} a_1^{2+\lambda}$ en la expresión del término de rebanada (relaciones (1-18) y (1-19)). Igualmente, r^λ contribuye con $T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda}$ al término de línea. Nuestro principio de composición se traduce entonces por la regla de correspondencia:

$$(1-23) \quad r^\lambda \rightarrow A_\lambda T_{1+\lambda} a_1^{2+\lambda} + T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda}$$

Inversamente, la regla (1-23) permite reconstituir el principio (1-20) (con la única condición que el covariograma g sea isótropo o pueda reducirse a la forma isótropa por una transformación lineal). Esta es la regla que vamos a justificar.

Justificación de la regla (1-23).

Partamos de la fórmula general (1-16), en que $G(u, v)$ es la transformada de Fourier del covariograma g . Esta fórmula se escribe:

$$\sigma^2(a_1, a_2) = \sum_{p, q} G\left(\frac{p}{a_1}, \frac{q}{a_2}\right) - G(0, 0)$$

En la suma doble, los términos correspondientes a $q=0$ proporcionan el término de rebanada.

$$\sigma_1^2(a_1) = \sum_p G\left(\frac{p}{a_1}, 0\right) - G(0, 0)$$

En efecto $G(u, 0)$ es la transformada del covariograma subido $g_1(h)$, y la fórmula (1-15) muestra que el término anterior es precisamente la varianza de 1 dimensión $\sigma_1^2(a_1) = \xi_{a_1}(g_1)$, calculada en el variograma subido g_1 . El segundo término o término de línea, tiene entonces la expresión exacta:

$$2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G\left(\frac{p}{a_1}, \frac{q}{a_2}\right)$$

Para justificar (1-23), es necesario probar que la contribución del término en r^λ a esta expresión en el desarrollo de g es $T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda}$. En el espacio de dos dimensiones, la transformada de r^λ es:

$$F_2(r^\lambda) = \frac{1}{\pi^{1+\lambda}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{1}{(u^2 + v^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

Debemos establecer entonces la relación:

$$(1-24) \quad \frac{2}{\pi^{1+\lambda}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p^2}{a_1^2} + \frac{q^2}{a_2^2}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda}$$

para un entero q fijo, se tiene:

$$(1-25) \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p^2}{a_1^2} + \frac{q^2}{a_2^2}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = \left(\frac{a_2}{q}\right)^{\lambda+2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{p^2 a_2^2}{q^2 a_1^2}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

Por otra parte se supone que a_2 es pequeño respecto de a_1 , luego la cantidad:

$$b = \frac{a_2}{q a_1}$$

es pequeña. La suma de Riemann:

$$\sum_p \frac{b}{(1+b^2 p^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

proporciona una buena aproximación de la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

Por otra parte se puede demostrar que el error cometido al reemplazar la suma discreta por una integral es de un orden muy elevado en b . Se deduce, con una aproximación excelente:

$$\sum_p \frac{b}{(1+b^2 p^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}} \approx \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = \frac{1}{b} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}$$

Al reemplazar b por su valor $a_2 q/a_1$, e introduciendo este valor en (1-25), se tiene:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p^2}{a_1^2} + \frac{q^2}{a_2^2}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = a_1 a_2^{1+\lambda} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{1}{q^{1+\lambda}}$$

Al llevar este resultado al primer miembro de (1-24) se obtiene:

$$a_1 a_2^{1+\lambda} \frac{2}{\pi^{\lambda+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^{1+\lambda}}$$

Pero, según (1-19) esta expresión es precisamente igual a $T_{\lambda} a_1 a_2^{1+\lambda}$, de manera que la relación (1-24) se verifica, luego también la regla de correspondencia (1-23) y el principio de composición se encuentra justificado.

1-4-5 Aplicación a la estimación de una superficie.

Apliquemos el principio de composición del párrafo anterior al caso de la estimación de una superficie S . La V.R. a estimar es la función indicatriz $k(x)$ del conjunto S . Hemos visto que el covariograma geométrico $K(h)$ asociado es lineal en una vecindad del origen (párrafo 1), es decir:

$$K(h) = S - |h| D_{\alpha} + \dots$$

En que D_{α} es la variación diametral en la dirección α del vector h .

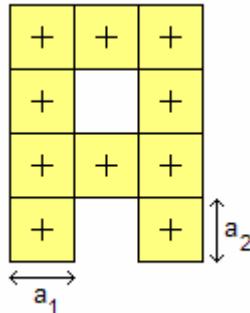
a/ Consideremos primero el caso isótropo, es decir en el caso en que la variación diametral $D_\alpha=D$ es aproximadamente independiente de la dirección α . Con $T_1=-1/6$ y $a_1T_2=-0.0609$, la regla (1-23) proporciona la varianza de estimación de S para una malla rectangular (a_1, a_2), en la forma:

$$(1-26) \quad \sigma_S^2 = D \left(\frac{1}{6} a_1 a_2^2 + 0.0609 a_1^3 \right) \quad (a_2 \leq a_1)$$

Busquemos más bien la varianza relativa σ_S^2/S^2 . En realidad no conocemos el verdadero valor de S, sino simplemente su estimador na_1a_2 , siendo n el número de puntos positivos de la red. Al dividir por $(na_1a_2)^{3/2}\sqrt{S}$, se obtiene la expresión interesante:

$$(1-27) \quad \frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{D}{\sqrt{S}} \left(\frac{1}{6} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} + 0.0609 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{3/2} \right) \quad (a_2 \leq a_1)$$

Por otra parte, no conocemos la variación diametral D. Para estimarla, se reemplaza el conjunto S desconocido por la unión de las zonas de influencia (rectángulos a_1, a_2). Se cuentan los números $2N_1$ y $2N_2$ de elementos lineales a_1, a_2 que constituyen el perímetro del contorno obtenido. Las variaciones diametrales correspondientes son $D_1=N_1a_1$ y $D_2=N_2a_2$. Como estamos, por el momento, en el caso isótropo, se tiene:



$$D = N_1 a_1 = N_2 a_2$$

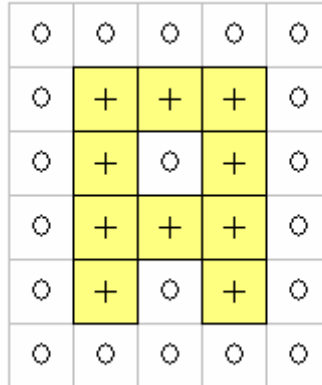
Sustituyendo en (1-26), y dividiendo por $S^2=(na_1a_2)^2$. Queda:

$$(1-28) \quad \frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{N_2}{6} + 0.061 \frac{N_1^2}{N_2} \right) \quad (N_2 \leq N_1)$$

b/ En general, sin embargo, el contorno no será suficientemente isótropo para que D_α pueda ser considerado como una constante D. Por ejemplo, puede presentar una dirección principal de alargamiento. Si uno de los lados de la malla es paralela a esta dirección principal (lo cual será a menudo el caso), la fórmula (1-28) anterior sigue siendo válida: en efecto, tomando esta dirección principal como eje de las x, y multiplicando las coordenadas por un módulo conveniente, obtenemos una nueva figura, isótropo esta vez (al menos en primera aproximación) para la cual (1-28) es válida. Pero esta transformación no ha modificado ni N_1

ni N_2 , ni la varianza relativa σ_s^2/S^2 , de manera que (1-28) es válida también en el caso de una figura inicial anisótropa.

Ejemplo: en la figura adjunta, se estima el área mineralizada por 10 veces el rectángulo de malla $a_1 \times a_2$. La figura tiene un hoyo (una laguna). Al contar N_1 y N_2 deben figurar también los elementos exteriores y los elementos interiores.



Se lee en la figura:

$$\begin{aligned} 2D_1 &= 12 \ a_1 \quad \text{es decir} \quad N_1 = 6 \\ 2D_2 &= 8 \ a_2 \quad \text{es decir} \quad N_2 = 4 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\frac{\sigma_s^2}{S^2} = \frac{1}{100} \left[\frac{4}{6} + 0.061 \times \frac{36}{4} \right] = \frac{1.21}{100}$$

Es decir una desviación estándar relativa $\sigma_s/S = 11/100$, y un error relativo (con 95% de confianza) de $\pm 22\%$.

No se debe olvidar que este cálculo hace abstracción del término fluctuante o Zitterbewegung, del cual sabemos que puede tener una magnitud enorme.

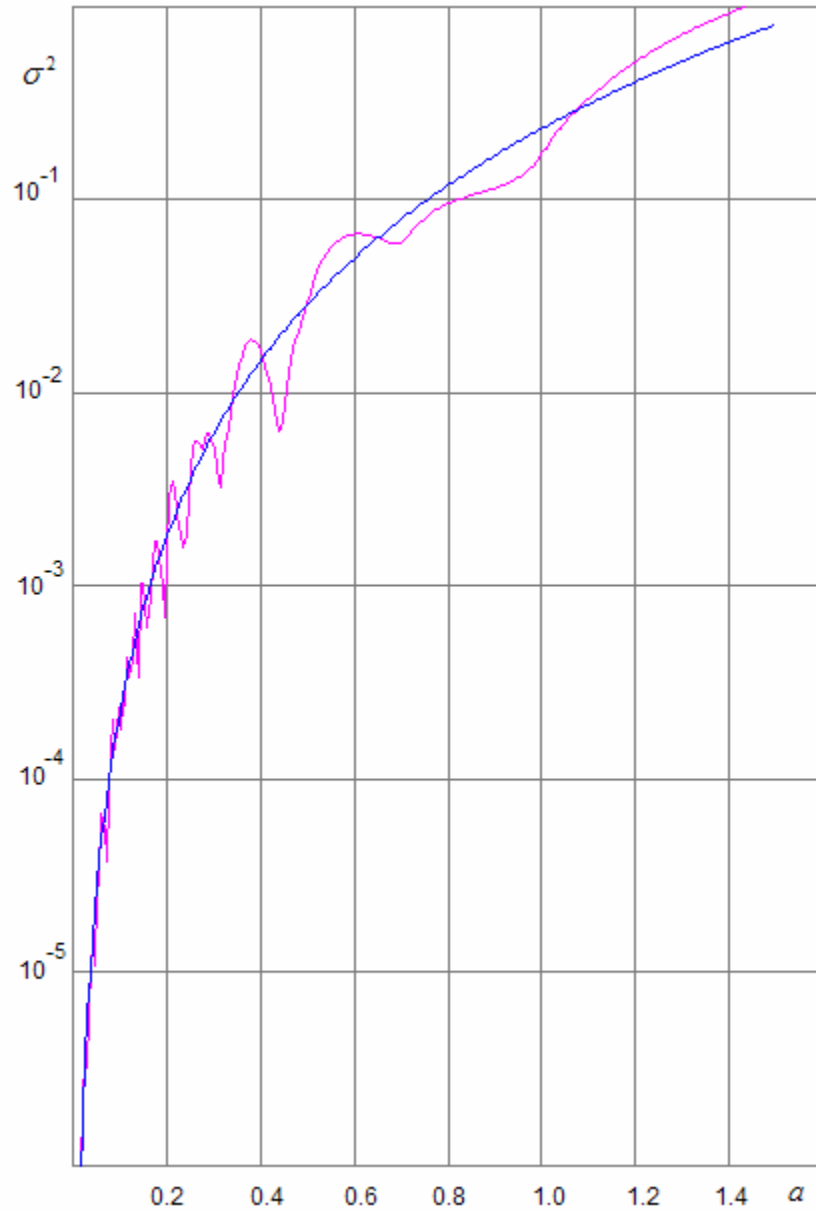


Figura 1: Zitterbewegung en la estimación de la superficie de un círculo de diámetro 1, a partir de una malla cuadrada de lado a . En abscisa, la malla a . En ordenada, la varianza de estimación correspondiente $\sigma^2(a)$. La curva en morado representa el valor exacto, calculado a partir de la fórmula exacta (1-14), la curva en azul representa la fórmula $\sigma^2(a) = 0.2276 a^3 + 0.0047 a^5$ obtenida despreciando el Zitterbewegung y reteniendo los dos primeros términos del desarrollo limitado dado por el principio de correspondencia (Nota del T.: no corresponde a la figura original).

1-4-6 Paso a la versión probabilística de la teoría.

En este primer capítulo hemos adoptado el punto de vista espontáneo y, si se puede decir, ingenuo, que consiste en tomar el fenómeno que se quiere estudiar tal como se presenta, sin hacer sobre éste ninguna hipótesis particular. Sin embargo, si los métodos transitivos pretendían, al comienzo, construir la teoría de las V.R. sin introducir interpretaciones probabilísticas, esta pretensión no ha tardado en revelarse como injustificada. En primer lugar, un fenómeno inesperado como el Zitterbewegung (párrafo 1-4-3) es muy característico de una situación pre-aleatoria la cual los físicos conocen bien: aquella en que una ligera modificación de las condiciones iniciales, imprevisible experimentalmente (aquí es la razón de la malla módulo 1), provocan al cabo de un cierto tiempo, una modificación radical del fenómeno observable. Más profundamente aún, el covariograma $g(h)$ - si lo conociéramos perfectamente - presentaría pequeñas ondulaciones, puntos singulares, toda una estructura de detalle la cual proporcionaría tanta información, o casi, que la misma V.R. Pero esta rica estructura de detalle, nunca es accesible experimentalmente. Partiendo de puntos experimentales discontinuos, ajustamos un modelo teórico de covariograma, que será una curva regular y continua, salvo en una vecindad del origen y del alcance (observación final del párrafo 1-4-1). Más precisamente, somos llevados a hacer una hipótesis sobre el comportamiento analítico (en h^λ por ejemplo) del $g(h)$ en una vecindad del origen. En efecto, no hay nada que nos diga que el verdadero $g(h)$ presenta un comportamiento analítico de un tipo tan simple. Desde el punto de vista matemático, las operaciones de alisamiento o de regularización que implican una hipótesis de este tipo, son difíciles de analizar con precisión. Pero es claro que estas hipótesis evitan necesariamente la estructura fina de $g(h)$ y toda la riqueza de información potencial contenida. Si bien el carácter matemático de estas operaciones es más bien oscuro, su significación epistemológica es evidente: Constituyen un equivalente camuflado de un paso a la esperanza matemática. Así, los métodos transitivos, que se mostraban al comienzo como puramente geométricos, se revelan, cuando se analizan las condiciones de su puesta en práctica efectiva, como de un rico contenido probabilístico implícito.

Haremos aparecer entonces, por fin, estas hipótesis probabilísticas que disimulaban los métodos transitivos, y esto será nuestra teoría de las funciones aleatorias intrínsecas. Sin embargo los fenómenos a los cuales nos interesamos deben, en general, ser considerados como únicos, y la inferencia estadística será (en principio) posible mediante una hipótesis especial, del tipo estacionaria o intrínseca. Esta hipótesis aparecerá a veces plausible, a veces francamente contraria a los datos experimentales, y, en todos los casos, como una hipótesis arbitraria. Por otra parte puede parecer ilusorio interpretar un fenómeno de la naturaleza como una función aleatoria si no estamos en condiciones de restituir, sin ambigüedad, la ley de probabilidad de esta función aleatoria (F.A.) a partir del fenómeno real. Vemos aparecer así una nueva contradicción. Recién, los métodos transitivos revelaban un contenido probabilístico inconfesable: pero no implicaban ninguna hipótesis de estacionaridad (y es aquí donde reside su interés metodológico). Ahora vamos a poner a plena luz estas hipótesis probabilísticas, anteriormente escondidas, pero nos va parecer que estas hipótesis solo tienen sentido mediante esta hipótesis de estacionaridad, la cual, justamente, no era necesaria en el caso de los métodos transitivos.

La aproximación de estos dos puntos de vista opuestos indica claramente la solución: la interpretación probabilística es inevitable, pero la hipótesis estacionaria no es realmente necesaria. La V.R. deberá ser considerada, en general, como una realización de una F.A. no estacionaria, y la herramienta de base será una covarianza no estacionaria $C(x, y)$ la cual depende, de manera separada de los dos puntos de apoyo x e y (y no solamente de la diferencia $x-y$). La inferencia estadística permanecerá imposible, en el sentido que no podemos determinar $C(x, y)$ a partir de los datos disponibles. Pero no tenemos necesidad de conocer efectivamente esta covarianza. Para verlo bastará de transformar en términos probabilísticos los resultados de los métodos transitivos. Si se trata, por ejemplo, de estimar un dominio V , cuya indicatriz es $k(x)$, los métodos transitivos muestran que es necesario conocer la función:

$$g(h) = \int k(x)f(x)k(x+h)f(x+h)dx$$

En la versión probabilística, el covariograma geométrico es en sí mismo una F.A. y es su esperanza $E(g(h))$ lo que es necesario y suficiente conocer para resolver el problema de la estimación. Esta esperanza se deduce de la covarianza no estacionaria por la relación:

$$(1-29) \quad E(g(h)) = \int k(x)k(x+h)C(x, x+h)dx$$

Es, por otra parte, la relación que se aplicaba implícitamente cuando se sustituía un modelo teórico al verdadero $g(h)$ desconocido. Esta esperanza, salvo un factor, no difiere de la covarianza pseudo-estacionaria $\overline{C(h)}$, valor medio de $C(x, y)$ en el dominio V a estimar, que se atribuiría a la función aleatoria si se la considera como estacionaria (a pesar de que, quizás, no lo es). En efecto, se tiene claramente:

$$\overline{C(h)} = \frac{1}{K(h)} \int k(x)k(x+h)C(x, x+h)dx = \frac{E(g(h))}{K(h)}$$

Así, es esta esperanza $E[g(h)]$ o esta covarianza media $\overline{C(h)}$ lo que basta conocer para resolver el problema de la estimación. Además, los métodos de aproximación que hemos desarrollado, muestran que es suficiente conocer el comportamiento en el origen de esta función $E[g(h)]$ o $\overline{C(h)}$. Mostraremos más adelante que la inferencia estadística a partir de una realización única es posible para aquello que nos interesa (este comportamiento en una vecindad del origen) mediante solamente una hipótesis de cuasi-estacionaridad que precisaremos al hacer camino: pero esta hipótesis será esta vez lo suficientemente débil para ser físicamente admisible en todos los casos que nos interesan. Dicho de otra manera, el problema de la estimación será posible de resolver en un marco explícitamente probabilístico y utilizando solamente los datos experimentalmente disponibles.

Se comprueba aquí la importancia metodológica de este primer capítulo, el cual, a primera vista, puede parecer un poco teórico: una vez probabilizados, los resultados de los métodos transitivos, muestran que es posible evitar la famosa hipótesis de estacionaridad, y esta es la

razón por la cual dimos una exposición bastante completa. Pasemos ahora a la versión probabilística de la teoría.

1-5 EJERCICIOS SOBRE LOS METODOS TRANSITIVOS.

1-5-1 Ejercicios sobre los párrafos 1-1 y 1-2.

Ejercicio 1 (Función triangular) - En el espacio de una dimensión, encontrar el covariograma geométrico $K(h)$ asociado a un segmento de largo b .

(Solución: $K(h)=b-|h|$ para $|h|\leq b$, y 0 en otro caso. Observar el comportamiento lineal en una vecindad de $h=0$ y el empalme brutal en $h=b$). La misma pregunta en R^2 para el rectángulo axb (Solución: $K(h_1, h_2)=(a-|h_1|)(b-|h_2|)$ para $|h_1|\leq a$ y $|h_2|\leq b$) y en R^3 para el paralelepípedo $axbxc$.

Ejercicio 2 (Algoritmo de Cauchy) - Sea V un conjunto en R^n , $K(h)$ su covariograma geométrico, y $g(h)$ una función cualquiera de un argumento vectorial h . Probar que el valor medio de $g(x-y)$ cuando las dos extremidades x e y del argumento de g describen separadamente V , se deduce de $K(h)$ por la fórmula:

$$\frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V g(x-y) dy = \frac{1}{V^2} \int g(h) K(h) dh$$

(Solución: explicitar la integral doble con la ayuda de la indicatriz de V , hacer un cambio de variable e invertir el orden de integración. Este algoritmo es de empleo constante en la teoría de las V.R.)

Aplicación - (ver ejercicio 1) si $g=g(r)$ solo depende del módulo $r=|h|$, el valor medio de g en el rectángulo axb es:

$$\frac{4}{a^2 b^2} \int_0^a dx \int_0^b (a-x)(b-y) g(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$$

Ejercicio 3 - Sea en R^1 la función $f(x)=e^{-ax}$ para $x\geq 0$ y $f(x)=0$ para $x<0$. Probar que el covariograma asociado es $g(h)=(1/2a)e^{-a|h|}$ (comportamiento lineal en el origen).

Ejercicio 4 - Sea $f(x)$ la función igual a x en el intervalo $(-b,b)$ y 0 en otras partes. Probar que $g(h)=(2/3)b^3-b^2|h|+(1/6)h^3$ (lineal en el origen). Verificar que $\int g(h)dh=0$ e interpretar.

Ejercicio 5 - Sea en R^1 la función:

$$f(x)=b^2-x^2 \text{ para } -b\leq x\leq b, \quad f(x)=0 \text{ para } x\notin(-b,b)$$

Probar que el covariograma asociado es:

$$g(h) = b^5 \left(\frac{16}{15} - \frac{4h^2}{3b^2} + \frac{2|h^3|}{3b^3} - \frac{1|h^5|}{30b^5} \right)$$

Observar el término irregular principal en $|h|^3$: se trata de una función continua. Más que hacer un cálculo directo, se mostrará que si f es derivable, su covariograma $g = f * \tilde{f}$ tiene por derivada segunda $g'' = -f' * (\tilde{f}')$, y se utilizará el ejercicio 4. Luego hay que integrar dos veces, observando que $g'(0) = 0$ y calculando directamente $g(0)$.

Ejercicio 6 (fórmula de Minkowski) - Sea S un conjunto suficientemente regular de R^2 , $K(h)$ su covariograma geométrico y $2L$ su perímetro. Establecer la relación:

$$2L = - \int_0^\pi K'_\alpha(0) d\alpha$$

(poner $-K'_\alpha(0)$ en la forma de una integral curvilínea $(1/2) \int |\cos(\theta - \alpha)| ds$ extendida al contorno de S , e integrar primero en α).

Igualmente, si V es un conjunto de R^3 , $K(h)$ su covariograma geométrico, y S su superficie, probar que:

$$S = - \frac{1}{\pi} \int K'_\omega(0) d\omega$$

(en que ω es el ángulo sólido elemental en torno a la dirección ω , integración sobre 4π estereoradianes).

(Estas fórmulas son muy útiles en morfología matemática: permiten reconstituir el perímetro o la superficie específica a partir de la derivada de la función de covarianza o del covariograma, es decir de observaciones exclusivamente lineales).

Ejercicio 7 (Efecto de pepita) - En R^1 se divide el intervalo $(0, b)$ en n intervalos iguales de largo $1/n$, y se consideran n variables aleatorias X_i las cuales admiten la misma esperanza m y la misma varianza σ^2 . Se pone $f(x) = X_i$ para cada $(i-1)a \leq x \leq ia$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $f(x) = 0$ al exterior de $(0, b)$. Encontrar la esperanza $g(h)$ del covariograma de $f(x)$. (Solución: $\sigma^2(b - n|h|) + m^2(b - |h|)$ para $h \leq a$, $m^2(b - |h|)$ para $a < |h| \leq b$, 0 en otro caso. Para a pequeño o n grande, este esquema corresponde a un efecto de pepita.

Ejercicio 8 (Granulometría de un grano convexo) - a/ Sea S un conjunto convexo de R^2 , g su covariograma geométrico, el cual se expresará mediante $g(r, \alpha)$, r y α designan las coordenadas polares. Para α fijo, la derivada en r , $-g'(r; \alpha)$ corresponde a la medida de la intersección $S \cap S_h$ sobre una perpendicular a la dirección α . Deducir que la granulometría de las transversales de S en la dirección α admiten la función de distribución de probabilidades $F_\alpha(r)$ definida por:

$$1 - F_\alpha(r) = \frac{g'(r; \alpha)}{g'(0; \alpha)}$$

Deducir que para α fijo y $r \geq 0$, $g(r; \alpha)$ es una función convexa de r .
 b/ Ahora se sortea al azar la dirección α según la ley de densidad:

$$\frac{D_\alpha}{2L} = -\frac{g'(0; \alpha)}{2L} d\alpha \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

(ver ejercicio 6 para verificar que se trata bien de una ley de probabilidad). Esta ley atribuye a cada dirección α una probabilidad proporcional al contorno aparente de S en esa dirección, correspondiendo exactamente a la ley (condicional) de las intersecciones de S con una red previa de rectas aleatorias en las cuales las direcciones están distribuidas uniformemente en $(0, \pi)$. Mostrar que la granulometría de la transversal correspondiente es:

$$1 - F(h) = -\frac{1}{2L} \int_0^\pi g'(h; \alpha) d\alpha$$

con el valor medio:

$$E(h) = \pi \frac{S}{2L}$$

Ejercicio 9 (covariograma geométrico de la esfera). Encontrar el covariograma $K(h)$ de una esfera de diámetro D en R^3 .

(Solución:
$$K(h) = \frac{\pi D^3}{6} \left(1 - \frac{3|h|}{2D} + \frac{1|h|^3}{2D^3} \right) \quad \text{para } h \leq D.$$

Partir de la relación:

$$K'(h) = \frac{\pi}{4} (D^2 - h^2)$$

e integrar, observando que $g(0) = \frac{\pi}{6} D^3$.

Ejercicio 10 (subida de orden 2) - Efectuar directamente la subida isotrópica de orden 2 sobre la función $g_n(r) = r^\lambda$ ($0 \leq r \leq 1$), $g_n(r) = 0$ ($r > 1$). Deducir que los coeficientes A_λ de la relación (1-10) verifican:

$$A_\lambda A_{\lambda+1} = \frac{2\pi}{\lambda+2}$$

(Solución: $g_{n-2}(r) = \frac{2\pi}{\lambda+2} (1 - r^{\lambda+2})$ para $r \leq 1$, y 0 para $r > 1$. La subida de orden 2 verifica la regla $r^\lambda \rightarrow A_\lambda A_{\lambda+1} r^{\lambda+2}$, respecto de la parte irregular; esta regla proporciona el resultado salvo una serie par, en este caso reducida a una constante)

Ejercicio 11 - Covariograma de la función $f(x) = (\pi/4)(D^2 - x^2)$ para $-D \leq x \leq D$, 0 en otro caso (f(x) es la sección de una esfera de diámetro D por un plano de cota x)

(Solución:

$$g(h) = (\pi^2/6) \left(\frac{1}{5} - \frac{h^2}{D^2} + \frac{|h|^3}{D^3} - \frac{1}{5} \frac{|h|^5}{D^5} \right) D^5$$

Hacer directamente la subida de orden 2 sobre el covariograma geométrico del ejemplo 9. Comparar con el ejemplo 5).

Ejercicio 11 bis (Reconstrucción de la granulometría de esferas) - Se tiene, en R^3 una población de esferas. Sea θ_3 el número de esferas por unidad de volumen, y sea $F_3(D)$ la granulometría de estas esferas. Dicho de otra manera, $\theta_3[1-F_3(D)]$ es el número de esferas de diámetro $\geq D$ presentes por unidad de volumen. Estas esferas inducen círculos y transversales (cuerdas) sobre planos y rectas respectivamente. Sea θ_2 el número de círculos por unidad de longitud y sea $1-F_2(D)$ su granulometría (que es la granulometría inducida por F_3 en los planos); sea θ_1 el número de transversales por unidad de longitud y sea $1-F_1(D)$ la granulometría (inducida sobre las rectas por F_3 y también por F_2).

a/ Establecer las relaciones:

$$\theta_1[1-F_1(h)] = \theta_2 \int_h^\infty \frac{D}{\sqrt{D^2-h^2}} [1-F_2(D)] dD = \frac{\pi}{4} \theta_3 \int_h^\infty [1-F_3(D)] 2D dD$$

$$\theta_2[1-F_2(h)] = \theta_3 \int_h^\infty \frac{D}{\sqrt{D^2-h^2}} [1-F_3(D)] dD$$

(primero establecer que, por ejemplo, $\theta_1[1-F_1(h)] = \theta_2 \int_h^\infty \sqrt{D^2-h^2} F_2(D) dD$, y hacer una integración por partes.

b/ Invertir las relaciones: al utilizar (1-8), probar que se tiene, por ejemplo:

$$\theta_1 F_1'(h) = \frac{\pi}{2} \theta_3 h [1-F_3(h)]$$

$$\theta_2 [1-F_2(h)] = \frac{2}{\pi} \theta_1 \int_h^\infty F_1'(u) \frac{du}{\sqrt{u^2-h^2}}$$

Deducir que $\theta_3 = \frac{2}{\pi} F''(0) \theta_1$, $\theta_2 = \frac{2}{\pi} \theta_1 \int_h^\infty \frac{1}{u} F_1'(du)$, y reconstituir las granulometrías de los círculos y de las esferas a partir de la granulometría de las transversales.

Ejercicio 12 (Subida sobre la exponencial de Gauss) - La subida de orden 1 transforma $\exp(-ar^2)$ en:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-ar^2}$$

Ejercicio 13 (Covariograma exponencial) - Sea, en el espacio de una dimensión, una V.R. con covariograma transitivo $g(h) = e^{-\lambda|h|}$. Determinar la expresión exacta de la varianza de estimación $\sigma^2(a)$, encontrar su parte principal, y concluir en ausencia de Zitterbewegung.

Solución:

$$\sigma^2(a) = a \left(\frac{2}{1 - e^{-\lambda a}} - 1 - \frac{2}{\lambda a} \right) \approx \frac{1}{6} \lambda a^2$$

(llevando el desarrollo más lejos, se identificarán también los términos T_1, T_3, T_5, \dots de las relaciones (1-18). En particular $T_1 = -1/6$).

Ejercicio 14 (Covariograma triangular) Sea en el espacio de una dimensión la V.R. igual a 1 en el intervalo $(0, b)$.

a/ Encontrar el covariograma de $f(x)$

(Solución: $g(h) = b - |h|$ para $|h| \leq b$ y 0 para $|h| > b$; establecer este resultado por un razonamiento geométrico).

b/ Calcular la varianza de estimación para una malla a pequeña, por medio de la fórmula de aproximación. (Solución: $(1/6)a^2$).

c/ Se dispone de $n+2$ sondajes $S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1}$ en una malla regular en la cual el primero y el último de los sondajes son negativos y el resto todos positivos. Se admite que cada una de las dos extremidades del intervalo del cual se quiere estimar la longitud b puede caer en cualquier parte del segmento (S_0, S_1) y (S_n, S_{n+1}) respectivamente, de manera independiente una de la otra, con una densidad uniforme. La longitud b es entonces una variable aleatoria. Probar que $E(b) = na$; $D^2(b) = a^2/6$: se encuentra bien la varianza de estimación tal como la proporciona la fórmula de aproximación, pero no se obtiene el término fluctuante.

d/ Calcular el valor exacto de la varianza de estimación de b /

(Solución: poner $b = na + \varepsilon a$ con $0 \leq \varepsilon < 1$. Si la primera muestra positiva es en x ($0 \leq x < a$), se tiene la estimación $(n+1)a$ para $x \leq \varepsilon a$, y na para $\varepsilon a < x < a$. El punto x está implantado al azar en el segmento $(0, a)$ con una densidad uniforme de probabilidad. Esta estimación es una variable aleatoria de esperanza b y de varianza $(\varepsilon - \varepsilon^2)a$. Esta expresión considera el Zitterbewegung. Cuando ε (el cual, en la práctica, es siempre desconocido) es asimilado a una variable aleatoria, con distribución uniforme en $(0, 1)$, el valor medio de esta expresión coincide con la expresión aproximada de b / (en la cual se excluye en Zitterbewegung).

Ejercicio 15 (Varianza de estimación en el caso aleatorio) - Sea, en el espacio de dos dimensiones una V.R. $f(x)$ de covariograma $g(h)$ y de soporte S . Si el rectángulo de malla (a_1, a_2) es grande respecto de S , a lo más, un solo sondaje es positivo, y todo sucede como si esta muestra única fuera sorteada al azar dentro de un rectángulo de lados a_1, a_2

conteniendo S . Si la muestra cae en un punto $x \in S$, se toma el estimador $Q^*(x) = a_1 a_2 f(x)$, y 0 si $x \notin S$. $Q^*(x)$ es así una variable aleatoria. Probar directamente que:

$$E(Q^*) = \int f(x) dx$$

$$E((Q^*)^2) = a_1 a_2 \int (f(x))^2 dx$$

$$D^2(Q^*) = a_1 a_2 g(0) - \int g(h) dh$$

CAPITULO 2

LAS FUNCIONES ALEATORIAS INTRINSECAS

2-1 DEFINICIONES GENERALES.

Noción de Función Aleatoria.

En teoría de probabilidades se define la noción de variable aleatoria (V.A.) vectorial (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) de k componentes: es una familia de k V.A. ordinarias Y_1, Y_2, \dots, Y_k (en general no independientes). Cuando el número k de estas componentes se hace infinito, se obtiene una familia infinita de variables aleatorias: esto es una función aleatoria. En particular, si x es un punto del espacio de n dimensiones R^n , se puede definir una familia infinita $(Y(x)), x \in R^n$. A todo punto x_0 del espacio corresponde así una V.A. ordinaria $Y(x_0)$. $Y(x)$ es entonces una función del punto x , cuyo "valor" en x_0 no es un número, sino una V.A. (a saber $Y(x_0)$). Se dice que $Y(x)$ es una función aleatoria (abreviado F.A.). Se observará que, en general las V.A. correspondientes a dos puntos de apoyo x_1 y x_2 no son independientes.

Si Y es una V.A. ordinaria, el resultado particular de un experimento al azar según la ley de probabilidad de Y es un valor numérico particular y . Análogamente, si Y es una V.A. vectorial (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) , un sorteo al azar según la ley (de k variables) de Y proporciona un vector $y=(y_1, y_2, \dots, y_k)$, es decir k valores numéricos particulares. Finalmente, si $Y(x)$ es una F.A. - es decir una V.A. vectorial con una infinidad de componentes - un sorteo al azar, efectuado según la ley (de una infinidad de variables) de $Y(x)$ proporciona una función numérica particular $y(x)$, en general, extraordinariamente irregular. Se dice que $y(x)$ es una realización de la F.A. $Y(x)$.

Siempre se puede considerar una realización de una $y(x)$ de una F.A. $Y(x)$ como una variable regionalizada. Inversamente, se puede interpretar una V.R. como una realización de una cierta F.A. $Y(x)$: esta interpretación permite aplicar a las V.R. los resultados de la teoría probabilística de las F.A.

Observaciones

1/ No se puede afirmar que una V.R. $y(x)$ es una F.A. Esto tendría el mismo sentido que decir: el número 98 es una V.A. El enunciado correcto de la hipótesis probabilística de base que deseamos introducir es: $y(x)$ es una realización de una F.A. $Y(x)$.

2/ Para que esta hipótesis probabilística tenga un sentido real, es necesario poder reconstituir, al menos en parte, la ley de la F.A. de la cual suponemos que la V.R. $y(x)$ es una realización, lo cual supone que la inferencia estadística es posible. Por otra parte, la inferencia estadística no es, en general, posible si se dispone de una sola realización $y(x)$ de $Y(x)$ (de la misma manera, no se puede reconstituir la ley de una V.A. Y a partir de un resultado numérico $y=98$ de un único experimento.). Para que la inferencia estadística sea posible, es necesario introducir hipótesis suplementarias acerca de la F.A. $Y(x)$, de manera de reducir en número de "parámetros" de los cuales depende la ley de $Y(x)$. Este es el objetivo de la hipótesis estacionaria que vamos a definir: una F.A. estacionaria se repite, de una cierta manera, en el

espacio, y, esta repetición hace posible la inferencia estadística a partir de una realización única. Precisemos ahora esta hipótesis:

F.A. estacionaria. - Se dice que una F.A. $Y(x)$ es estacionaria si su ley es invariante por translación. Dicho de otra manera, si x_1, x_2, \dots, x_k son k puntos de apoyo arbitrarios (k entero cualquiera), las k variables aleatorias $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_k)$ tienen la misma ley de probabilidad (de k variables) que las k V.A. $Y(x_1+h), Y(x_2+h), \dots, Y(x_k+h)$. En adelante, $Y(x)$ designará una F.A. estacionaria.

Esperanza matemática. - Consideremos un punto de apoyo x_0 . Si la V.A. ordinaria $Y(x_0)$ admite una esperanza matemática, ésta es una función $m(x_0)=E[Y(x_0)]$ del punto de apoyo x_0 . Pero $Y(x)$ es estacionaria, por consiguiente, se tiene: $m(x_0+h)=m(x_0)$, para todo vector h , luego $m(x_0)$ es una constante m , independiente de x_0 :

$$m = E[Y(x)]$$

Se puede suponer a menudo que $m=0$, al reemplazar $Y(x)$ por $Y(x)-m$ (suponiendo siempre que esta esperanza existe).

La covarianza $K(h)$. - Consideremos ahora dos puntos de apoyo x_0 y x_0+h . Si las dos V.A. $Y(x_0)$ e $Y(x_0+h)$ admiten varianzas finitas (luego también una esperanza m que supondremos nula), $Y(x_0)$ e $Y(x_0+h)$ admiten también una covarianza $K(x_0;h)$, que depende, en principio, del punto de apoyo x_0 y del vector h . Pero como $Y(x)$ es estacionaria, se tiene: $K(x_0+a;h)=K(x_0;h)$ para todo vector a , luego $K(x_0;a)$ no depende de x_0 , y nosotros escribiremos simplemente $K(h)$:

$$(2-1) \quad K(h) = E[Y(x)Y(x+h)]$$

Se comparará esta definición a la del covariograma transitivo: $K(h)$ es la transpuesta probabilística de $g(h)$. Para $h=0$ se tiene $K(0)=E([Y(x)]^2)$: que es la varianza de la V.A. $Y(x_0)$. Para que una F.A. $Y(x)$ admita una función de covarianza $K(h)$, es necesario y suficiente que $Y(x)$ admita una varianza finita $K(0)$.

Hipótesis estacionaria de orden 2. - Diremos que una F.A. $Y(x)$ es estacionaria de orden 2 si la V.A. $Y(x_0)$ admite una esperanza m independiente del punto de apoyo x_0 , y, si para todo vector h la covarianza:

$$K(h) = E[Y(x)Y(x+h)] - m^2$$

existe y no depende de x_0 . Esta hipótesis (la cual no implica la estacionaridad en sentido estricto, tal como la definimos antes) es suficiente para la teoría de las V.R. Sin embargo esta hipótesis supone la existencia de una varianza a priori finita $K(0)$.

Varianza a priori infinita. - Por otra parte, existen numerosos fenómenos que presentan una capacidad de dispersión ilimitada y no pueden ser descritos correctamente si se les atribuye una varianza a priori finita: esta afirmación puede sorprender, sin embargo hay que ver que la naturaleza nos tiende aquí una suerte de trampa. Cuando se toman muestras v en un campo V , se obtiene un histograma a partir del cual se puede calcular numéricamente una varianza, la cual toma un valor perfectamente

definido. Pero esta varianza es, en realidad, una función $\sigma^2(v|V)$ del soporte v y del campo V . Esta varianza aumenta, en particular, cuando el campo V aumenta. Si las muestras de tamaño v poseen una varianza a priori finita, ésta debe ser igual al límite cuando V tiende a infinito, de la varianza experimental $\sigma^2(v|V)$.

Es así como los autores de Africa del Sur (D. G. Krige, etc., ...), a partir de cientos de miles de muestras tomadas en el gran yacimiento de oro de Rand, calcularon la varianza de las muestras en paneles cada vez más grandes, luego en toda una concesión, luego en el yacimiento de Rand en su conjunto: obtuvieron una relación experimental de la forma:

$$\sigma^2(v|V) = \alpha \log\left(\frac{V}{v}\right)$$

El crecimiento de la varianza se produce siempre según esta ley logarítmica (fórmula de De Wijs) hasta el último punto experimental, en el cual V/v es del orden de la decena de billones: Se puede concluir, con plena seguridad, que, en este caso, no existe una varianza a priori finita.

Entonces estamos conducidos a reemplazar la hipótesis estacionaria de orden 2 por una hipótesis más débil pero de significación análoga:

Hipótesis intrínseca. En el caso en que la varianza a priori $K(0)$ no existe (es infinita), puede ocurrir que los incrementos $Y(x_0+h)-Y(x_0)$ tengan una varianza finita. Diremos entonces que la F.A. $Y(x)$ verifica la hipótesis intrínseca si, para todo vector h , el incremento $Y(x_0+h)-Y(x_0)$ admite una esperanza y una varianza independientes del punto de apoyo x_0 (pero dependiendo de h), es decir:

$$E[Y(x+h)-Y(x)] = m(h)$$

$$D^2[Y(x+h)-Y(x)] = 2\gamma(h)$$

La función $m(h)$ es la derivada lineal. Para demostrar que es lineal en h , se parte de la relación evidente:

$$Y(x+h''+h')-Y(x) = [Y(x+h''+h')-Y(x+h')] + [Y(x+h')-Y(x)]$$

y se pasa a las esperanzas, de donde: $m(h'+h'')=m(h')+m(h'')$. Se puede suponer siempre que esta derivada lineal $m(h)$ es nula, al reemplazar $Y(x)$ por $Y(x)-m(x)$

La función $\gamma(h)$:

$$(2-2) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2} D^2(Y(x+h)-Y(x))$$

se llama variograma o función intrínseca. Una F.A. que verifica la hipótesis intrínseca constituye lo que se llama un esquema intrínseco, caracterizado por su variograma.

Observación. Si $Y(x)$ verifica la hipótesis estacionaria de orden 2, verifica también la hipótesis intrínseca y se tiene, en este caso:

$$(2-3) \quad \gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Como $|K(h)| \leq K(0)$, se tiene $\gamma(h) \leq 2K(0)$, de manera que el variograma de una F.A. estacionaria de orden 2 está necesariamente acotado. Existen esquemas intrínsecos de uso muy corriente cuyo variograma $\gamma(h)$ no está acotado, y que no pueden, por consiguiente, verificar la hipótesis estacionaria de orden 2 (tienen una varianza a priori infinita). Ejemplo, esquema de De Wijs ($\gamma(h) = 3\alpha \log|h|$), esquema lineal ($\gamma(h) = A|h|$).

2-2 PROPIEDADES DE LA COVARIANZA Y DEL VARIOGRAMA

La covarianza o el variograma son funciones simétricas:

$$K(h) = K(-h) \quad , \quad \gamma(h) = \gamma(-h)$$

La covarianza verifica además la desigualdad de Schwarz:

$$K(h) \leq K(0)$$

Para el variograma, se encuentran solamente las relaciones: $\gamma(h) \geq 0$ y $\gamma(0) = 0$. Sin embargo, es posible demostrar que el crecimiento en el infinito de un variograma es necesariamente menos rápido que el crecimiento de $|h|^2$; es decir:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{|h|^2} = 0$$

Estas condiciones son necesarias pero no son suficientes. Sea K o γ una covarianza o un variograma que verifican estas relaciones, entonces no necesariamente existe una F.A. estacionaria o intrínseca admitiendo la covarianza K o el variograma γ . En efecto, la condición necesaria y suficiente es que K pertenezca a la clase de funciones "de tipo positivo" y $-\gamma$ a la clase de funciones de "tipo positivo condicional". Por ejemplo, las funciones $\log(r)$ y r^λ con $\lambda < 2$ pueden servir como variogramas, pero no la función r^λ para $\lambda \geq 2$. Estas condiciones expresan, entre otras, que las fórmulas que estableceremos más adelante para las varianzas de extensión o de estimación, conducen, necesariamente a valores positivos (lo que no sería el caso si se toma una función cualquiera como variograma).

Estas condiciones merecen ser examinadas de manera más cercana, para precisar la clase de combinaciones lineales que se pueden utilizar cuando no existe una varianza a priori finita.

2-2-1 Las combinaciones lineales autorizadas.

Primero veamos el caso estacionario de orden 2, sea $m=0$ y tomemos N puntos x_1, x_2, \dots, x_N de R^n y N coeficientes arbitrarios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. La expresión:

$$(2-4) \quad Y = \sum_i \lambda_i Y(x_i)$$

es una V.A. (una combinación lineal finita de V.A.). Como por hipótesis existe una función de covarianza $K(h)$, la variable aleatoria Y admite una varianza finita, y un cálculo elemental proporciona:

$$(2-5) \quad D^2(Y) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K(x_i - x_j) \geq 0$$

La condición evidente $D^2(Y) \geq 0$ expresa (párrafo 1-3) que las funciones de covarianza son de tipo positivo. A la inversa, si $K(h)$ es una función de tipo positivo, se muestra que es posible construir una F.A. cuya covarianza es precisamente $K(h)$. Esta fórmula (2-5) aparecerá de nuevo, en formas ligeramente diferentes, en todas las etapas de la teoría. Observamos, por el momento, que, en el caso estacionario de orden 2, todas las combinaciones lineales finitas tienen una varianza finita, y que su utilización es siempre legítima.

No ocurre lo mismo cuando existe solamente el variograma, y no hay covarianza. En efecto, en este caso, solamente las combinaciones lineales que verifican la condición:

$$(2-6) \quad \sum_i \lambda_i = 0$$

tienen una varianza finita. Luego, en el caso de una F.A.I. sin covarianza, solo se autoriza el uso de combinaciones lineales en las cuales la suma de los coeficientes es igual a 0. Esta observación juega un papel fundamental en toda la teoría intrínseca. Probemos que la relación (2-6) es suficiente. Si esta relación es válida, se puede escribir:

$$\sum_i \lambda_i Y(x_i) = \sum_i \lambda_i [Y(x_i) - Y(0)]$$

Por otra parte la F.A. (no estacionaria) definida por:

$$Z(x) = Y(x) - Y(0)$$

admite una función de covarianza $C(x,y) = E(Z(x)Z(y))$, porque $Z(x)$, incremento de la F.A.I. $Y(x)$ admite una varianza finita. Calculemos esta función de covarianza (no estacionaria) $C(x,y)$ cuya expresión nos será de utilidad más tarde. Lo más simple para esto, es partir de la definición del variograma:

$$(2-7) \quad 2\gamma(x-y) = E[Y_x - Y_0 - Y_x + Y_0]^2 = 2\gamma(x) + 2\gamma(y) - 2C(x,y)$$

de donde:

$$C(x,y) = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)$$

Cuando (2-6) se verifica, la combinación lineal $\sum_i \lambda_i Y_{x_i} = \sum_i \lambda_i (Y_{x_i} - Y_0)$ admite la varianza finita:

$$D^2(Y) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j)$$

Es decir, según (2-7):

$$D^2(Y) = \sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_j \gamma(x_j) + \sum_j \lambda_j \sum_i \lambda_i \gamma(x_i) - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j)$$

Al considerar (2-6):

$$(2-8) \quad D^2(Y) = - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j)$$

Se obtiene un resultado que será muy útil en lo que sigue: cuando la suma de los coeficientes de una combinación lineal es 0, se puede calcular su varianza según la fórmula (2-5) como si existiera una covarianza $K(h)$, con la condición de reemplazar esta covarianza por $-\gamma$. Se trata de un mecanismo de cálculo muy general, que aporta, a menudo, grandes simplificaciones.

Inversamente, si no hay varianza a priori finita, una combinación lineal de varianza finita es necesariamente una combinación lineal de incrementos de la F.A. $Y(x)$, debido a que, por hipótesis, estos incrementos tienen varianza finita. Por consiguiente esta combinación lineal verifica la condición (2-6) la cual es bien necesaria y suficiente, como lo habíamos anunciado.

Ahora podemos introducir, de manera natural, la condición siguiente según la cual $-\gamma$ debe ser de tipo positivo condicional. Diremos que una función $g(h)$ es de tipo positivo condicional si para todo entero N , todo sistema de puntos x_1, x_2, \dots, x_N del espacio R^n y todo sistema $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ que verifican la condición $\sum \lambda_i = 0$, se tiene:

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j g(x_i - x_j) \geq 0$$

Como las combinaciones lineales autorizadas tienen una varianza positiva o nula, la relación (2-8) significa bien que $-\gamma$ es de tipo positivo condicional. Inversamente, si $-\gamma$ es de tipo positivo condicional, se puede mostrar que es efectivamente posible construir una F.A.I. la cual admite γ como variograma. Se trata entonces de una condición necesaria y suficiente.

2-2-2 Continuidad en media cuadrática y otras propiedades.

Daremos algunas indicaciones complementarias acerca de las propiedades de una covarianza o de un variograma. Análogamente a los métodos transitivos, el interés se va a concentrar en el comportamiento en una vecindad del origen.

a/ Se puede observar que el variograma proporciona un contenido preciso a la noción tradicional de zona de influencia de una muestra: su crecimiento más o menos rápido refleja, en efecto, la manera más o menos

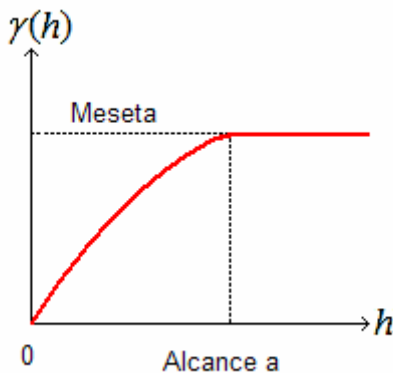
rápida de cómo se deteriora la influencia de una muestra sobre zonas más y más lejanas del yacimiento.

b/ Las anisotropías se manifiestan por un comportamiento diferente del variograma en las diferentes direcciones del espacio. En ausencia de anisotropía, $\gamma(h)=\gamma(r)$ solo depende del módulo r del vector h , y no de la dirección de este vector. Se dice que existe anisotropía geométrica cuando una transformación lineal simple de las coordenadas restablece la isotropía.

Existen tipos más complejos de anisotropías. Por ejemplo en el espacio de tres dimensiones puede suceder que $Y(x)$ solo dependa de la tercera coordenada y permanezca constante en los planos paralelos a los dos primeros ejes de coordenadas. El variograma $\gamma(h)=\gamma(h_3)$ depende solamente de la tercera componente de h . El caso más corriente será aquél en que $Y(x)$ no será realmente constante en los planos horizontales, pero en ellos variará menos rápido o más regularmente que en la dirección vertical. Se tomará entonces un variograma de la forma siguiente (anisotropía zonal):

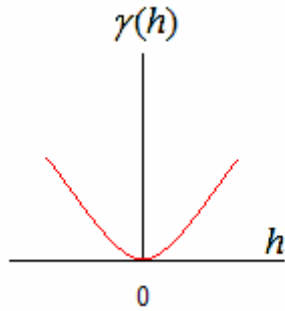
$$\gamma(h) = \gamma_0(h_1, h_2, h_3) + \gamma_1(h_3)$$

c/ Alcance. En el caso estacionario de orden 2, el alcance $a(\alpha)$ en una dirección α es el valor de la distancia a partir de la cual, en esta dirección, $Y(x)$ e $Y(x+h)$ no tienen correlación (o su correlación es despreciable): $K(h)=0$ (o ≈ 0) para $|h| \geq a(\alpha)$.

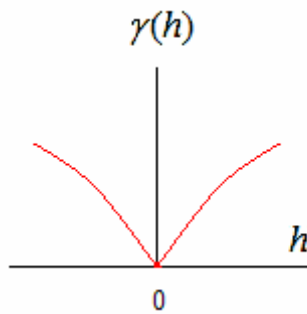


Según c/, $K(h)=0$ equivale a $\gamma(h)=K(0)=\gamma(\infty)$: el alcance es también la distancia a partir de la cual el variograma llega a su valor límite $\gamma(\infty)$ o meseta. Así, una F.A: intrínseca cuyo variograma no está acotado, no puede tener un alcance finito.

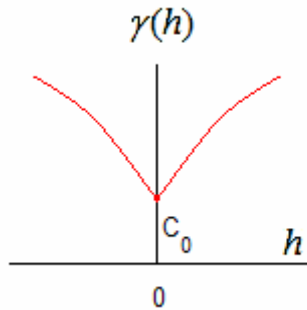
d/ Comportamiento en una vecindad del origen. La continuidad y la regularidad en el espacio de la F.A. $Y(x)$ se manifiestan en el comportamiento de $\gamma(h)$ en una vecindad del origen. Por orden de regularidad decreciente, se pueden distinguir cuatro tipos:



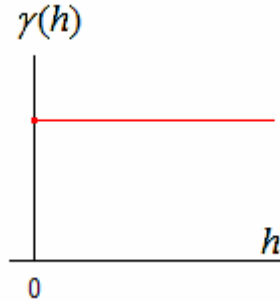
Comportamiento parabólico: $\gamma(h)$ es dos veces derivable en $h=0$. $Y(x)$ es entonces derivable (en media cuadrática), luego presenta un alto grado de regularidad en el espacio.



Comportamiento lineal (tangente oblicua en el origen): $\gamma(h)$ es continuo en $h=0$, pero no es derivable en este punto, $Y(x)$ es continua en media cuadrática, pero no es derivable, luego es menos regular.



Efecto de pepita: $\gamma(h)$ no tiende a 0 cuando h tiende a 0 (discontinuidad en el origen). $Y(x)$ no es continua en media cuadrática, luego es extraordinariamente irregular.



Caso límite completamente aleatorio: $Y(x)$ e $Y(x')$ son independientes para dos puntos cualesquiera distintos, por cercanos que sean (ruido blanco de los físicos o efecto de pepita al estado puro)

Parte irregular. En el caso isótropo ($\gamma(h)=\gamma(r)$) y en ausencia de efecto de pepita, se caracteriza el comportamiento de $\gamma(h)$ por un desarrollo limitado de la forma:

$$\gamma(r) = \sum a_{2n} r^{2n} + \sum c_{\lambda} r^{\lambda} + \sum c_{2n} r^{2n} \log(r)$$

Exactamente como en el caso de los covariogramas transitivos, se distinguirá un parte regular (términos de grado entero par), y una parte irregular (términos en r^{λ} , con λ diferente de un entero par y también términos logarítmicos del tipo $r^{2n} \log(r)$). Si no hay parte irregular, la F.A. sería indefinidamente derivable, luego perfectamente regular. Por consiguiente solamente la parte irregular representa el grado de irregularidad de la F.A., y, en esta parte irregular, el término de más bajo grado es el que juega el papel principal: se puede definir el grado de regularidad de la F.A. como el grado λ del término irregular principal. Daremos a continuación algunas indicaciones matemáticas complementarias (sin entrar en detalles, porque se trata de resultados clásicos).

e/ Continuidad y derivación en media cuadrática. Se dice que la F.A. $Y(x)$ es continua en media cuadrática (continua m.c.) si se tiene:

$$E\left([Y(x+h)-Y(x)]^2\right) \rightarrow 0 \quad \text{para } |h| \rightarrow 0$$

Esto ocurre (por definición) si y solo si $\gamma(h)$ es continuo en $h=0$, es decir en ausencia de efecto de pepita.

En el espacio de una dimensión, se dice que la F.A. $Y'(x)$ es la derivada en media cuadrática de $Y(x)$ (derivada m.c.) de la F.A. $Y(x)$ si:

$$E\left(\left[\frac{Y(x+h)-Y(x)}{h} - Y'(x)\right]^2\right) \rightarrow 0 \quad \text{para } |h| \rightarrow 0$$

Se tienen definiciones análogas para el espacio de $n \neq 1$ dimensiones.

Se demuestra que una F.A. intrínseca $Y(x)$ admite una derivada m.c. $Y'(x)$ si y solo si $\gamma(h)$ es derivable dos veces en $h=0$. La derivada segunda $\gamma''(h)$ existe entonces para todo h , $Y'(x)$ es estacionaria de orden 2 (aún

en el caso en que $Y(x)$ es solamente intrínseca) y admite como covarianza la función $\gamma''(h)$. Análogamente, $Y(x)$ es derivable m.c. n veces si y solo si la derivada $\gamma^{(2n)}(h)$ existe en $h=0$ (existe entonces para todo h).

Si λ es el grado del término irregular principal de $\gamma(h)$, $Y(x)$ admite entonces una derivada m.c. de orden n si y solo si $\lambda > 2n$ (si el término principal es $r^{2n} \log(r)$, $Y(x)$ es $n-1$ veces derivable m.c., pero no es derivable n veces).

2-3 REGULARIZACION DE UNA F.A. INTRINSECA.

Para simplificar la exposición, haremos los razonamientos en el caso de una F.A. estacionaria de orden 2 con covarianza $K(h)$, sin embargo todos los resultados que expresaremos con la ayuda de la función intrínseca $\gamma(h) = K(0) - K(h)$ seguirán siendo válidos para el caso de una F.A. intrínseca (luego, serán válidos aún en el caso en que $\gamma(h)$ no está acotado, y si, por consiguiente, la covarianza $K(h)$ no existe): esto resultará de manera muy simple al aplicar el mecanismo de cálculo que vimos en el párrafo 2-2-1. Aquí también, no entraremos en detalles, porque se trata de un recordatorio simple de resultados clásicos.

2-3-1 Integral estocástica

$$I = \int_{\nu} Y(x) p(x) dx$$

Se define la integral I como el límite en media cuadrática (si existe) de las sumas discretas:

$$I_n = \sum_{i=1}^n Y(x_i) p(x_i) \Delta x_i$$

(los Δx_i son pequeños elementos de volumen disjuntos cuya unión es el conjunto ν , y x_i es un punto de Δx_i). La integral estocástica I es entonces una V.A., como las I_n .

Se demuestra que esta V.A. existe si y solamente si la integral

$$(2-9) \quad D^2(I) = \int_{\nu} p(x) dx \int_{\nu} K(x-y) p(y) dy$$

es finita, y $D^2(I)$ es entonces la varianza (finita) de esta V.A. Se encuentra fácilmente este resultado (2-9) mediante el cálculo (no riguroso) siguiente:

$$I^2 = \int_{\nu} Y(x) p(x) dx \int_{\nu} Y(y) p(y) dy$$

$$E(I^2) = \int_{\nu} p(x) dx \int_{\nu} E[Y(x)Y(y)] p(y) dy =$$

$$= \int_{\nu} p(x) dx \int_{\nu} K(x-y) p(y) dy$$

(el cálculo no es riguroso porque, al comienzo, no es evidente que se pueden invertir los símbolos E y \int : en efecto, se demuestra que esta inversión es legítima).

2-3-2 Convención estocástica.

El producto de convolución $Y * f$ de la F.A. $Y(x)$ por una función ordinaria $f(x)$ es la integral estocástica (si existe):

$$\int Y(x-x') f(x') dx'$$

Se puede definir así la regularizada $Y_p = Y * \tilde{p}$ de la F.A. $Y(x)$ por una función de ponderación $p(x)$. Es la "media móvil ponderada":

$$Y_p(x) = \int Y(x+x') p(x') dx$$

Cuidado: la regularizada de $Y(x)$ es también una función aleatoria (más regular que $Y(x)$ pero siempre aleatoria): no basta con alisar o regularizar, por un procedimiento de medias móviles, una F.A. para hacer desaparecer como por arte de magia el carácter aleatorio de esta función.

La varianza de la regularizada Y_p está dada por la fórmula (2-9) anterior, e $Y_p(x)$ existe en el sentido de la integración m.c. si y solo si $D^2(Y_p) < \infty$. Calculemos la covarianza

$$E[Y_p(x_0)Y_p(x_0+h)] \quad \text{de} \quad Y_p(x_0) \text{ e } Y_p(x_0+h)$$

Se tiene:

$$Y_p(x_0)Y_p(x_0+h) = \iint p(x') p(x'') Y(x_0+x') Y(x_0+h+x'') dx' dx''$$

Pasemos a las esperanzas intercambiando E y \int . Queda:

$$E[Y_p(x_0)Y_p(x_0+h)] = \iint p(x') p(x'') K(h+x''-x') dx' dx''$$

Esta covarianza no depende de x_0 sino solamente de h . Luego, la regularizada Y_p es estacionaria de orden 2, y admite la covarianza:

$$(2-10) \quad K_p(h) = \int p(x) dx \int K(h+x-y) dy$$

Esta fórmula generaliza (2-9). Para presentarla en una forma más sintética, hagamos el cambio de variables $x=y+z$. Queda:

$$K_p(h) = \int K(x+z)dx \int p(y+z)dy$$

Sea P el covariograma transitivo ($P = p * \bar{p}$) de la función de ponderación p. Se tiene, por definición:

$$P(z) = \int p(y+z)p(y)dy$$

y, por consiguiente:

$$K_p(h) = \int K(h+z)P(z)dz$$

es decir, utilizando productos de convolución (porque $P = \bar{P}$):

$$(2-11) \quad K_p = K * P$$

Se obtiene la covarianza K_p de la regularizada Y_p al regularizar la covarianza $K(h)$ de Y con el covariograma transitivo de la función de ponderación. Se comparará este resultado con el obtenido en el caso de los métodos transitivos.

El variograma γ_p de la regularizada Y_p es $K_p(0) - K_p(h)$. Al reemplazar $K(h)$ por $K(0) - \gamma(h)$ en (2-9) y (2-10), observamos que $K(0)$ se elimina, y queda:

$$(2-12) \quad \gamma_p(h) = \int \gamma(h+z)P(z)dz - \int \gamma(z)P(z)dz$$

Se puede también escribir:

$$\gamma_p = \gamma * P - A$$

La constante A se determina con la condición $\gamma_p(0)=0$. Estas relaciones siguen siendo válidas para cualquier F.A. intrínseca (aún en el caso en que la covarianza no existe) (ver observación anterior).

2-3-3 La subida recta a potencia constante.

La subida constituye un caso particular de la regularización. En los métodos transitivos podíamos integrar la V.R. de $-\infty$ a $+\infty$ con respecto a una de las coordenadas, por ejemplo x_3 , debido a que esta V.R. era nula al exterior de un campo acotado. Ahora, solo podemos integrar en un largo finito ℓ . Llamaremos entonces subida bajo potencia constante ℓ a la operación que nos hace pasar de la F.A. $Y_3(x_1, x_2, x_3)$ definida en el espacio de tres dimensiones a la F.A. $Y_2(x_1, x_2)$ definida en el espacio de dos dimensiones por:

$$Y_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell Y(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

Si $Y_3(x)$ es la ley puntual en una formación estratiforme de potencia ℓ , $Y_2(x_1, x_2)$ es la ley media del sondaje implantado en el punto (x_1, x_2) de la superficie topográfica.

No es difícil establecer la fórmula para el variograma $\gamma_2(h_1, h_2)$ de la F.A. $Y_2(x_1, x_2)$ - que es intrínseca como Y_3 - en función del variograma γ_3 de Y_3 (el lector lo podrá hacer como ejercicio). En el caso particular en que $\gamma_3 = \gamma_3(r)$ es isótropo, se obtiene el algoritmo siguiente (de la subida recta bajo potencia constante en el caso isótropo):

$$\gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma_n(\sqrt{r^2 + x^2}) dx - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma_n(x) dx$$

Como en el caso de los métodos transitivos, existe también una regla de correspondencia término a término entre las partes irregulares de $\gamma_n(r)$ y $\gamma_{n-1}(r)$. Estas reglas, un poco menos simples que en el caso transitivo, se escriben:

$$(2-13) \quad \begin{cases} r^\lambda \rightarrow A_\lambda \frac{r^{1+\lambda}}{\ell} + A'_\lambda \frac{r^{2+\lambda}}{\ell^2} \\ r^{2n} \log(r) \rightarrow A_{2n} \frac{r^{2n+1}}{\ell} + A'_{2n} \frac{r^{2n+2}}{\ell^2} \log(r) \\ r^{2n+1} \rightarrow A_{2n+1} \frac{r^{2n+2}}{\ell} \log(r) + A'_{2n+1} \frac{r^{n+3}}{\ell^2} \end{cases}$$

En que los coeficientes A_λ , A_{2n} , A_{2n+1} son los mismos que los que aparecen en los métodos transitivos (fórmulas (1-10) a (1-13)), tenemos aquí una primera manifestación de la similitud profunda de los dos aspectos (transitivos y probabilísticos) de la teoría de las V.R. Observamos, además que las reglas (2-13) son menos simples que las reglas (1-10). En lugar de $r^{1+\lambda}$, encontramos $r^{1+\lambda}/\ell$, el coeficiente $1/\ell$ se introduce por razones dimensionales evidentes (en teoría intrínseca, se razona sobre las leyes medias y no sobre las acumulaciones como en la teoría transitiva). Pero al lado del término principal $A_\lambda r^{1+\lambda}/\ell$ - que es el equivalente exacto del término transitivo - vemos aparecer un término complementario $A'_\lambda r^{2+\lambda}/\ell^2$, con un coeficiente A'_λ cuya expresión explícita no es útil darla aquí (ver [4]). Este término suplementario proviene del carácter finito (subida bajo potencia finita ℓ) del campo de integración, o, si se prefiere, de la presencia del término en $x\gamma(\sqrt{r^2+x^2})$ bajo el signo de integración en el algoritmo de la subida recta. De todas maneras, este término suplementario es en $r^{2+\lambda}$, luego de orden más elevado que el término principal, y la parte principal de $\gamma_{n-1}(r)$ en una vecindad de $r=0$ es entonces idéntica a la que proporciona la regla transitiva.

Observamos también que el dominio de validez del desarrollo de $\gamma_{n-1}(r)$ obtenido por la regla (2-13) es necesariamente dentro de la bola de radio ℓ . En las grandes distancias, se deduce fácilmente del algoritmo de la subida recta que:

$$\gamma_{n-1}(r) \approx \gamma_n(r) - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma_n(x) dx \quad (r \gg \ell)$$

de manera que salvo una constante, el variograma subido es igual al variograma inicial.

2-4 VARIANZAS DE EXTENSION Y DE ESTIMACION

2-4-1 Varianza de extensión.

Definamos, en primer lugar, la noción fundamental de varianza de extensión. Sea $Y(x)$ una F.A., la cual supondremos, por el momento, como estacionaria de orden 2, y sea $K(h)$ su covarianza. Designemos por $Z(v)$ y $Z(v')$ las "leyes medias" de dos dominios v y v' del espacio de n dimensiones, es decir las integrales estocásticas:

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v Y(x) dx \quad ; \quad Z(v') = \frac{1}{v'} \int_{v'} Y(x) dx$$

La fórmula (2-9) muestra que, si v y v' son acotadas, $Z(v)$ y $Z(v')$ tienen varianzas finitas. La primera, por ejemplo, tiene la expresión:

$$\sigma^2(v) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v K(x-y) dy$$

Calculemos también la covarianza $\sigma(v, v')$ de $Z(v)$ y $Z(v')$. De:

$$Z(v)Z(v') = \frac{1}{vv'} \int_v Y(x) dx \int_{v'} Y(y) dy$$

se deduce, al pasar a las esperanzas matemáticas:

$$\sigma(v, v') = \frac{1}{vv'} \int_v dx \int_{v'} E[Y(x)Y(y)] dy = \frac{1}{vv'} \int_v dx \int_{v'} K(x-y) dy$$

Llamaremos varianza de extensión de v a v' (o de v' a v) a la varianza del error $Z(v') - Z(v)$ cometido al atribuir a v' la ley media $Z(v)$ de v . Esta varianza de extensión σ_E^2 es igual a:

$$\sigma_E^2 = \sigma^2(v) + \sigma^2(v') - 2\sigma(v, v')$$

Al considerar los valores calculados antes, se tiene entonces:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v K(x-y) dy + \frac{1}{v'^2} \int_{v'} dx \int_{v'} K(x-y) dy - \frac{2}{vv'} \int_v dx \int_{v'} K(x-y) dy$$

Reemplacemos $K(h)$ por $K(0) - \gamma(h)$: observamos que la constante $K(0)$ desaparece de la expresión de σ_E^2 , y queda la fórmula fundamental:

$$(2-14) \quad \sigma_E^2 = \frac{2}{v v'} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v'^2} \int_{v'} dx \int_{v'} \gamma(x-y) dy$$

Se puede demostrar que (2-14) sigue válida para toda F.A. intrínseca, luego también en el caso en que $K(h)$ no existe (esto resulta del mecanismo de cálculo del párrafo 2-2-1).

2-4-2 Varianza de estimación.

Supongamos ahora que en vez de conocer la "ley media" $Z(v')$ de $Y(x)$ en un volumen v' , conocemos la ley media:

$$Z' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(x_i)$$

de N muestras tomadas en los puntos x_i . Z' es una variable aleatoria, cuyas características se deducen sin dificultad a partir de $K(h)$ o de $\gamma(h)$. Llamaremos varianza de estimación σ_N^2 (de v por las N muestras tomadas en los N puntos x_i) a la varianza de la diferencia $Z(v) - Z(v')$. Para obtener la expresión de σ_N^2 , se debe, en cada una de las etapas del razonamiento que nos condujo a (2-14), reemplazar las integrales sobre el conjunto v' por sumas discretas sobre los N puntos x_i . Se encuentra así la segunda fórmula fundamental:

$$(2-15) \quad \sigma_N^2 = \frac{2}{Nv} \sum_i \int_v \gamma(x_i - x) dx - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy - \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j \gamma(x_i - x_j)$$

Esta fórmula, en la cual se alternan expresiones exactas y aproximadas de las mismas integrales, presenta una estructura sobresaliente; análoga, un poco más compleja, a la fórmula (1-14) de los métodos transitivos. En particular, se observa que la varianza de estimación es más débil:

- cuando la red de muestras x_i es más densa y más representativa de la geometría del volumen v a estimar
- cuando la función $\gamma(h)$ es más regular, luego cuando la F.A. es más continua en su variación espacial.

Sin embargo, en la práctica, si N es grande, la fórmula (2-15) conduce a cálculos bastante largos. Más adelante proporcionaremos fórmulas de aproximación más simples, las cuales permitirán una comparación metodológica muy instructiva con las fórmulas análogas de los métodos transitivos.

Observación: No hay ninguna diferencia conceptual entre las nociones de varianza de extensión y de estimación: la fórmula (2-15) es un caso particular de (2-14), en que v' se reemplaza por la unión de los N puntos x_i . La práctica ha reservado el término varianza de extensión a la extensión de una muestra única en su "área de influencia", y el de varianza de estimación a la extensión de un número más grande de muestras, en el depósito entero, o en un gran panel.

2-4-3 Varianza de v en V.

La noción de varianza $\sigma^2(v|V)$ de una muestra v en un dominio V parece, a primera vista, evidente desde el punto de vista experimental. Sin embargo, esta noción, solamente tiene sentido en el caso en que V es la unión $V = \cup v_i$ de volúmenes v_i disjuntos, todos iguales entre sí, e iguales a un conjunto v y trasladados unos de otros. Cuando se han tomado n muestras v_i en un campo V' cualquiera, suponiendo que se conocen sus leyes Y_i , el cálculo numérico siguiente:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_i Y_i$$
$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$$

constituye una estimación de la varianza de v en $V = \cup v_i$ (unión de n volúmenes v_i que constituyen las muestras reales). Este camino experimental va a inspirar las definiciones que siguen.

a/ Examinemos primero el caso en que las muestras v_i son puntos (en este caso la relación $V = \cup v_i$ se verifica evidentemente, porque V es la unión de puntos), y definamos la varianza $\sigma^2(0|V)$ de las muestras puntuales en V. Designemos por:

$$Z(V) = \frac{1}{V} \int_V Y(x) dx$$

la ley media de V. Cuando se fija la realización Y(x), Z(V) es una integral ordinaria, y la varianza experimental de las muestras puntuales es:

$$(2-16) \quad s^2(0|V) = \frac{1}{V} \int_V [Y(x) - Z(V)]^2 dx$$

También se puede interpretar esta relación (2-16) diciendo que $\sigma^2(0|V)$ es la varianza condicional (a realización fija) de la V.A. Y(x) obtenida al implantar al azar, con una densidad de probabilidad uniforme, un punto x en V. Llamaremos varianza $\sigma^2(v|V)$ de v en V a la varianza obtenida al des-condicionar la variable aleatoria Y(x) respecto de las realizaciones, es decir la varianza de la V.A. $Y=Y(x)$, en que Y(x) es esta vez la F.A. (y no su realización) y x un punto aleatorio en V. Si la realización es fija, la esperanza condicional de Y(x) es evidentemente Z(V). Se obtiene entonces:

$$(2-17) \quad \sigma^2(0|V) = E(s^2(0|V)) = \frac{1}{V} \int_V E[Y(x) - Z(V)]^2 dx$$

Que es el valor medio de $\gamma(x-y)$ cuando x e y describen separadamente V.

b/ Cuando V es la unión de N volúmenes v_i disjuntos, de leyes Z_i , la varianza experimental:

$$s^2(v|V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Z_i - Z(V)]^2 dx$$

es la varianza de la población finita constituida por N leyes Z_i (los Z_i son números, si la realización es fija), o, si se quiere, es la varianza de la V.A. Z_i obtenida al sortear al azar uno de los índices i . Al descondicionar con respecto a las realizaciones, se obtiene una V.A. Z_i en la cual el índice i se sortea como antes, y donde Z_i es ahora una integral estocástica (y no numérica). La varianza de esta variable descondicionada es (por definición) la varianza $\sigma^2(v|V)$ de v en V . Se confirma, como antes, que esta varianza es igual al valor medio en i

$$\sigma^2(v|V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E([Z_i - Z(V)]^2) dx$$

de la varianza de extensión de v_i en V . Un cálculo fácil a partir de la fórmula (2-14) muestra que se tiene esta vez:

$$(2-18) \quad \sigma^2(v|V) = \frac{1}{V^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

En particular, se tiene:

$$(2-19) \quad \sigma^2(v|V) = \sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v)$$

c/ En el caso general en que v y V son volúmenes cualesquiera, no necesariamente compatibles, se define la varianza por la misma fórmula (2-18): esta cantidad representa solamente un artificio de cálculo. En esta caso la varianza puede tomar valores negativos; en particular, se tiene siempre que: $\sigma^2(v|V) = -\sigma^2(V|v)$.

d/ Relación de aditividad. Sean v , V y V' tres volúmenes, tal que (por ejemplo): $v \subset V \subset V'$. De la relación (2-19) se deduce:

$$\begin{aligned} \sigma^2(v|V) &= \sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v) \\ \sigma^2(v|V') &= \sigma^2(0|V') - \sigma^2(0|v) \end{aligned}$$

y por diferencia:

$$\sigma^2(v|V') - \sigma^2(v|V) = \sigma^2(0|V') - \sigma^2(0|V) = \sigma^2(V|V')$$

es decir:

$$(2-20) \quad \sigma^2(v|V') = \sigma^2(v|V) + \sigma^2(V|V')$$

La varianza de la muestra v en el campo V' es igual a la suma de las varianzas de v en el panel V y del panel V en el campo V' .

e/ Covarianza de v y v' en V. De manera análoga, se define la covarianza $\sigma(v, v' | V)$ de dos muestras v y v' (cuya distancia y disposición mutua es fija) en el campo V. Se encuentra:

$$\sigma(v, v' | V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v v'} \int_V dx \int_{v'} \gamma(x-y) dy$$

f/ En particular, a menudo es cómodo expresar la varianza de estimación (2-15) o la varianza de extensión (2-14) en función de las varianzas y covarianzas de las muestras en un campo V arbitrario. Se encuentra, por ejemplo, que:

$$\sigma_E^2 = \sigma^2(v | V) + \sigma^2(v' | V) - 2\sigma(v, v' | V)$$

como puede verse al sustituir las expresiones de estas varianzas en V: el término:

$$\frac{1}{V^2} \iint_V$$

desaparece, y los tres términos que quedan proporcionan el segundo miembro de (2-14). Se obtiene así una expresión, quizás más intuitiva, de la varianza de extensión.

2-4-4 Aplicación: mallas aleatorias y aleatoria estratificada.

El caso de las mallas regulares, que es el más difícil, lo trataremos más adelante, examinaremos entonces los dos tipos usuales de mallas aleatorias.

a/ Malla aleatoria pura. Para estimar la ley $Z(V)$ de un volumen V, se dispone de los valores $Y(x_i)$ de la F.A. en N puntos x_i implantados "no importa donde" en V. Admitiremos que todo ocurre como si cada x_i estuviera implantado al azar en V con una densidad uniforme e independiente de las otras muestras. Se puede obtener la varianza de estimación σ_N^2 al integrar (2-15) en V relativamente a cada uno de los x_i . Este cálculo es simple, pero es aún más simple observar que los errores parciales $Y(x_i) - Z(V)$ son independientes unos de otros (si la realización es fija) y admiten la misma varianza $s^2(0|V)$: el error resultante que es:

$$\frac{1}{N} \sum [Y(x_i) - Z(V)]^2$$

admite entonces la varianza:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} s^2(0|V)$$

Basta ahora con des-condicionar respecto de las realizaciones para ver que la varianza de estimación, en el caso de una malla aleatoria pura, es igual a la varianza de una muestra en el campo V dividida por el número de muestras, es decir:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(0|V)$$

b/ Malla aleatoria estratificada. En este caso, el volumen V que se quiere estimar está dividido en N zonas de influencia iguales y disjuntas v_i , y en cada v_i se toma una muestra en un punto x_i elegido al azar en la zona de influencia v_i con una densidad de probabilidad uniforme, e independiente de las otras muestras. Se puede calcular σ_N^2 al integrar (2-15) en x_i dentro de v_i para cada uno de los v_i , pero es más simple observar que el error total es:

$$\frac{1}{N} \sum_i [Y(x_i) - Z(v_i)]$$

y que cada uno de los errores $Y(x_i) - Z(v_i)$ es independiente de los otros y admite la varianza $\sigma^2(0|V)$. Se deduce, razonando como antes, que, primero, con realización fija, luego des-condicionando respecto de la realización:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(0|v)$$

En el caso de la malla aleatoria estratificada, la varianza de estimación es entonces igual a la varianza de una muestra en su zona de influencia dividida por el número N de muestras.

Observación - Es claro que la malla aleatoria estratificada proporciona siempre mejores resultados que la malla aleatoria pura. En efecto, según (2-10) se tiene:

$$\frac{1}{N} [\sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v)] = \frac{1}{N} \sigma^2(v|V) \geq 0$$

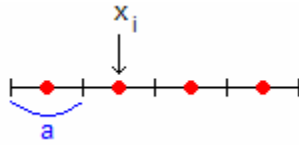
2-5 METODO DE APROXIMACION EN R^1

Cuando el número de muestras es grande, la fórmula (2-15) es un poco pesada de calcular numéricamente, luego es importante desarrollar métodos de aproximación que permitan un cálculo rápido de una varianza de estimación. Veremos reaparecer la similitud profunda con las fórmulas análogas obtenidas por los métodos transitivos, similitud e importancia metodológica que ya habíamos mencionado a propósito de la subida.

Pongámonos, por el momento, en el espacio de una dimensión.

2-5-1 El principio de correspondencia.

Sea un segmento de longitud $L=Na$ constituido por la unión de N segmentos de igual longitud a . En el centro de cada segmento se ha tomado una muestra puntual.



Para estimar la ley:

$$Z(L) = \frac{1}{L} \int_L Y(x) dx$$

se forma el estimador:

$$Z^*(L) = \frac{1}{N} \sum_i Y(x_i)$$

La varianza de estimación correspondiente está dada por la fórmula general (2-15). Al realizar cálculos análogos a los presentados con ocasión de los métodos transitivos, se pone en evidencia un principio de correspondencia término a término entre la parte irregular del variograma $\gamma(h)$ y el desarrollo limitado de la varianza de estimación en una vecindad de $a=0$. Este principio se resume por las reglas siguientes:

$$(2-21) \quad \begin{cases} |h|^\lambda \rightarrow -T_\lambda \frac{a^\lambda}{N} + T'_\lambda \frac{a^\lambda}{N^2} \\ |h|^{2n} \log(h) \rightarrow -T_{2n} \frac{a^{2n}}{N} \end{cases}$$

Para λ entero par, T_λ es nulo (pero no T'_λ). Los T_λ tienen los mismos valores que los que figuran en la regla análoga (1-18) de los métodos transitivos.

Tal como vimos en la subida, aparece un término suplementario, de orden más elevado (en $1/N^2$), ligado en este caso, al carácter finito de las operaciones que se efectúan en teoría intrínseca (promedio sobre un número N finito de muestras, y no, como en transitivo, en que la suma va, teóricamente desde $-\infty$ a $+\infty$). En la práctica este término es despreciable cuando N no es muy pequeño.

Las reglas (2-21) permiten obtener una expresión aproximada de la varianza de estimación, para mallas a muy pequeñas. Estas expresiones no son validas cuando a es mayor que la distancia r_0 a partir de la cual el desarrollo limitado de $\gamma(h)$ ya no es utilizable. Para valores de a superiores a r_0 , estamos conducidos de introducir un segundo principio de aproximación:

2-5-2 Principio de composición de varianzas de extensión elementales.

a/ Las funciones intrínsecas auxiliares. Además de $\gamma(h)$, se utilizan en las aplicaciones las funciones siguientes:

$$\chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$$

$$F(h) = \frac{1}{h^2} \int_0^h dx \int_0^h \gamma(x-y) dy = \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx$$

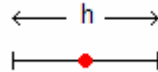
$F(h)$ es el valor medio de $\gamma(h')$ cuando las dos extremidades de h' describen el segmento $(0, h)$. Así, la varianza del segmento h en el segmento L es:

$$\sigma^2(h|L) = F(L) - F(h)$$

$\chi(h)$ permite el cálculo de covarianzas: la covarianza en L del segmento h con una de sus extremidades es:

$$\sigma^2(0, h|L) = F(L) - \chi(h)$$

b/ Varianza de extensión elemental. Se llama así a la varianza de extensión de una muestra puntual localizada en el centro del segmento h .

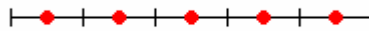


Está dada por:

$$(2-22) \quad \sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)$$

Se deduce (2-22) de (2-15) y de las relaciones establecidas en a/.

c/ Principio de composición de varianzas elementales. Sea el segmento $L=Na$ a estimar. L está dividido en N zonas de influencia de longitud a , en cuyos centros se ha tomado una muestra puntual.



Sea Y_i la ley de la muestra i , Z_i la ley media de su zona de influencia, y

$$Z = \frac{1}{N} \sum Z_i$$

la ley de L . El error total es la media:

$$Z = \frac{1}{N} \sum_i (Y_i - Z_i)$$

de los errores parciales $Y_i - Z_i$. El principio de aproximación consiste en admitir que estos errores parciales son independientes unos de otros (este principio se verifica con una aproximación muy razonable para los

$\gamma(h)$ usuales). Como la varianza de $Y_i - Z_i$ es justamente la varianza de estimación elemental calculada en (2-21), se encuentra:

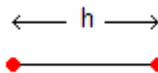
$$(2-23) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2 = \frac{1}{N} \left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) \right]$$

Se obtiene entonces la varianza de estimación al dividir la varianza de estimación elemental de una muestra en su zona de influencia por el número de sondajes.

d/ Caso del dispositivo cerrado. A partir de $N+1$ muestras a malla regular, se desea estimar el segmento $L=Na$ comprendido entre la primera y la última muestra:



Se demuestra que este dispositivo cerrado es equivalente al dispositivo centrado examinado en c/, y que la varianza de estimación está dada también por (2-23) (siempre que n sea superior a 1): el dispositivo cerrado con $N+1$ muestras es equivalente al dispositivo centrado con N muestras.



Observación: para $N=1$, el dispositivo cerrado con dos muestras proporciona la varianza de estimación:

$$\sigma_{E'}^2 = 2\chi(h) - F(h) - \frac{1}{2}\gamma(h)$$

que difiere de la varianza de estimación elemental (2-23). No se puede dividir $\sigma_{E'}^2$ por N , porque los errores parciales cometidos no son necesariamente independientes (en particular, estos dos segmentos tienen en común la muestra central).



e/ Comparación de los dos principios de aproximación. Para a pequeño, se deduce de (2-23) un principio de correspondencia análogo a (2-22), con coeficientes numéricamente cercanos a T_λ (para λ no muy grande), de manera que las reglas (2-23) y (2-22) son prácticamente equivalentes. Con un objetivo de simplificación, en la práctica se utiliza siempre la regla (2-23) de composición de varianzas elementales, debido a que esta fórmula es válida para las mallas grandes y pequeñas.

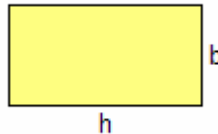
2-6 METODO DE APROXIMACION EN Rⁿ

Trataremos explícitamente el caso del espacio de dos dimensiones. El caso general se deduce fácilmente por analogía. EL principio de aproximación que utilizaremos es el principio de composición de términos de línea y de rebanada, estudiado en detalle en el párrafo 1-4-4. En el caso intrínseco se puede proporcionar una justificación análoga a la que presentamos a propósito de los métodos transitivos, pero los cálculos serían notoriamente más complicados.

Supondremos que el variograma es isótropo (solo depende de r). En caso de anisotropía geométrica es fácil adaptarse a este caso.

a/ Las funciones auxiliares.

Resulta cómodo introducir las funciones siguientes:



$\gamma_b(h)$: media de $\gamma(x-y)$ cuando x e y recorren los dos lados paralelos de longitud b del rectángulo $b \times h$ (salvo una constante $\gamma_b(h)$ se deduce de $\gamma(h)$ por subida de orden 1).

$\chi_b(h)$: media de $\gamma(x-y)$, cuando x describe uno de los lados del rectángulo e y recorre el interior del rectángulo. Se tiene:

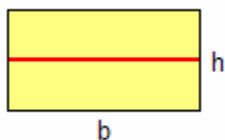
$$\chi_b(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma_b(x) dx$$

$F(b,h)$: media de $\gamma(x-y)$ cuando x e y describen el rectángulo. Esta función es simétrica en b y h , y verifica:

$$F(b,h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi_b(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma_b(x) dx$$

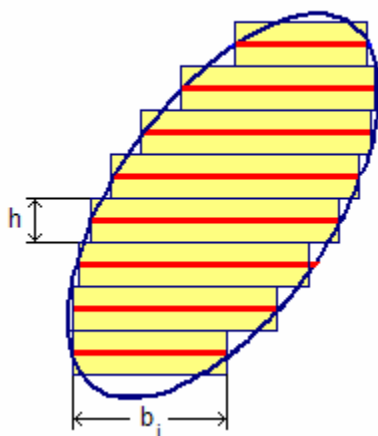
$Q(b,h)$: media de $\gamma(x-y)$, cuando x describe el lado b e y describe el lado h , o también, x describe el rectángulo e y está fijo en uno de los vértices.

b/ Extensión de un segmento medio en su rectángulo de influencia.



$$(2-24) \quad \sigma_E^2 = 2\chi_b\left(\frac{h}{2}\right) - F(b, h) - \gamma_b(0)$$

c/ Estimación de S por rebanadas paralelas equidistantes.



Sean b_1, b_2, \dots, b_n las longitudes de n rebanadas, h su equidistancia. Se asimila la superficie S que se quiere estimar a la unión de los rectángulos de influencia de las n rebanadas. La fórmula (2-24) proporciona la extensión de b_i a su rectángulo de influencia, es decir, σ_{Ei}^2 . Si Y_i es la ley de b_i , Z_i la de su zona de influencia, admitiendo que los $(Y_i - Z_i)$ son independientes, el error total:

$$\frac{\sum b_i(Y_i - Z_i)}{\sum b_i}$$

admite una varianza que se puede calcular ponderando por el cuadrado de los b_i de las varianzas de extensión σ_{Ei}^2 . Se obtiene entonces la varianza de estimación:

$$(2-25) \quad \sigma_E^2 = \frac{\sum b_i^2 \sigma_{Ei}^2}{(\sum b_i)^2}$$

Observación. Si los b_i son iguales, queda simplemente:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{n} \sigma_{E_i}^2$$

d/ Composición de término de línea y término de rebanada.

En el caso c/ anterior, sucede que a menudo no se conocen las leyes reales de las líneas, sino solamente una estimación de estas leyes a partir de muestras puntuales en una malla regular a ($a < h$). Se admite entonces que los errores cometidos al estimar las líneas a partir de las muestras y de S a partir de las líneas (supuestamente conocidas) pueden ser mirados como independientes. La varianza de estimación es entonces:

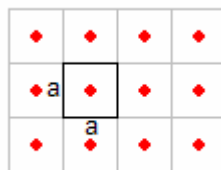
$$(2-26) \quad \sigma_E^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(a) + \frac{\sum b_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum b_i)^2}$$

$\sigma^2(a)$ es la varianza de extensión elemental (2-23) de una muestra puntual en su segmento a de influencia, N es el número total de muestras. $(1/N)\sigma^2(a)$ es el término de línea, varianza del error cometido al estimar las líneas a partir de las muestras.

El segundo término, que figuraba ya en (2-23) es el término de rebanada: varianza del error cometido al extender las líneas a sus rebanadas de influencia.

Este principio (2-26) de composición es válido siempre que a sea inferior a h. Se aplica, en particular, al caso de un reconocimiento con malla rectangular axh.

e/ Caso de una malla cuadrada. La varianza de extensión de un sondaje central a su cuadrado de influencia es:



$$(2-27) \quad \sigma_E^2 = 2Q\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) - F(a, a)$$

Para una malla cuadrada, se puede admitir que los errores cometidos al estimar cada cuadrado a partir de su sondaje central son independientes. La varianza de estimación con N sondajes es entonces:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2$$

con un σ_E^2 dado por (2-27).

2-7 EL EFECTO DE PEPITA.

2-7-1 Génesis de un efecto de pepita.

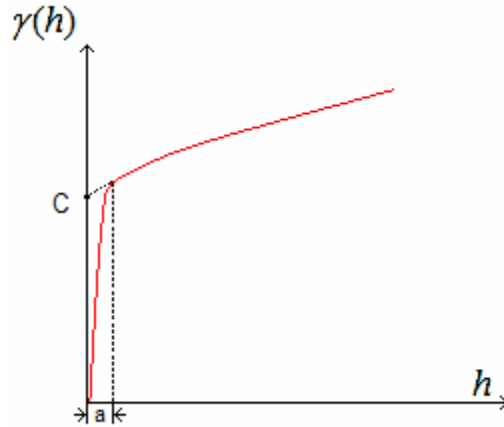
Un variograma de alcance a finito caracteriza lo que se llama fenómeno de transición: más lejos de la distancia a , se alcanza la independencia, y el alcance a proporciona la escala de las estructuras elementales del fenómeno regionalizado correspondiente. Por otra parte, a menudo existe superposición de varias estructuras de escalas bien diferentes, anidadas unas en otras. El variograma experimental muestra entonces una sucesión de alcances y de mesetas, cuyo análisis permite reconstituir la jerarquía de estas estructuras anidadas.

La noción de escala juega aquí un papel primordial. A la escala de la decena o de la centena de metros, un fenómeno de transición cuyo alcance es, por ejemplo, centimétrico, se manifiesta, sobre el $\gamma(h)$ experimental como una discontinuidad en el origen, es decir como un efecto de pepita. De una manera general, un efecto de pepita es una reminiscencia de una estructura de transición cuyas dimensiones fueron sobrepasadas a la escala a a la cual se trabaja: los detalles y las características cualitativas de esta estructura anterior han dejado de ser perceptibles hace tiempo, y, la escala superior solo ha conservado un parámetro único - la constante de pepita - que proporciona una suerte de medida global de la "intensidad" de esta estructura sobrepasada.

Para analizar la génesis de un efecto de pepita, localicémonos al nivel puntual, y supongamos que a una estructura primaria de dimensión a , se superpone una macro-regionalización, es decir una estructura secundaria de dimensiones mucho más grandes. Si solo existiera la estructura primaria, se podría describir la V.R. correspondiente como una realización de una F.A. con covarianza $C(h)$ de alcance a , o con un variograma:

$$\gamma_1(h) = C - C(h)$$

de alcance a y verificando $\gamma(\infty) = C = C(0)$. Para considerar la macro-regionalización, se debe agregar un segundo componente $\gamma_2(h)$, que representa la estructura secundaria, la cual varía con mucha lentitud a la escala de la primera estructura:



$$\gamma(h) = C - C(h) + \gamma_2(h)$$

$\gamma(h)$ presenta entonces, en la vecindad del origen, una zona de crecimiento muy rápido, con dimensiones del orden de a . A la escala de la macro-regionalización, este $\gamma(h)$ presenta entonces un efecto de pepita de amplitud C .

2-7-2 Influencia macroscópica de un efecto de pepita.

Examinemos las consecuencias de este efecto de pepita. Primero, al nivel macroscópico, las muestras no serán puntuales, sino volúmenes v ya grandes con respecto a a . Determinemos entonces el variograma $\gamma_v(h)$ de estas muestras v (el único variograma accesible experimentalmente). $\gamma_v(h)$ es la suma de una componente muy continua γ_2 (la cual no ha sido sensiblemente alterada en esta regularización) y de lo que se obtiene al aplicar la fórmula (2-12) a la componente $C-C(h)$: esta componente pepítica es entonces:

$$\gamma_p(h) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(h+x-y) dy$$

Estudiemos entonces γ_p . Se tiene $\gamma_p(0)=0$, pero cuando h sobrepasa las dimensiones del volumen v , se tiene $|h+x-y| \geq a$ si $x \in v$, $y \in v$ y $C(h+x-y)=0$. El primer término subsiste solo si h no es muy pequeño y se observa experimentalmente una discontinuidad en el origen, cuyo valor σ_p^2 (varianza de pepita) es:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy$$

Por otra parte, por hipótesis, las dimensiones de v son grandes con respecto a a y se tiene:

$$\int_v C(x-y) dy = \int C(h) dh$$

(integral extendida a todo el espacio) salvo si x está a una distancia inferior a a de la frontera de v pero estos puntos ocupan un volumen despreciable, se puede entonces despreciar su influencia, que es del orden de a. Queda entonces:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(h) dh = \frac{1}{v} \int C(h) dh$$

Luego, la constante de pepita σ_p^2 que se observa experimentalmente es inversamente proporcional al volumen de las muestras:

$$\sigma_p^2 = \frac{A}{v}$$

y el coeficiente $A = \int C(h) dh$, que es la covarianza de las microestructuras, es el único recuerdo de éstas el cual subsiste a la escala de los volúmenes v.

El efecto de pepita aumenta de la misma manera la varianza de v en V, las varianzas de extensión y las varianzas de estimación. En el caso de $\sigma^2(v|V)$, por ejemplo, el aporte del efecto de pepita será:

$$\frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy - \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V C(x-y) dy$$

es decir, según el cálculo anterior:

$$A \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$$

En el caso de la varianza de estimación de V por N muestras de tamaño v, se encuentra una componente pepítica igual a:

$$A \left(\frac{1}{Nv} - \frac{1}{V} \right)$$

En todos los casos, la varianza debida al efecto de pepita es inversamente proporcional al volumen de las muestras. Todo ocurre como si la V.R. admitiera dos componentes independientes, uno muy regular correspondiente al variograma γ_2 , el otro completamente aleatorio y discontinuo el cual considera el efecto de pepita.

2-8 EL ESQUEMA ESFERICO.

Para representar un fenómeno de transición, se pueden utilizar esquemas de la forma:

$$\gamma(h) = A[K(0) - K(h)]$$

en que $K(h)$ es el covariograma geométrico de un volumen v . Si se toma por v la esfera de diámetro a , se tiene (ver ejercicio 9 de los métodos transitivos, capítulo 1):

$$K(h) = \frac{\pi}{6} a^3 \left(1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right) \quad \text{si } (|h| < a)$$

$$K(h) = 0 \quad \text{si } (|h| \geq a)$$

El esquema esférico estará entonces definido por el variograma:

$$\gamma(r) = C \left(\frac{3r}{2a} - \frac{1}{2} \frac{r^3}{a^3} \right) \quad \text{si } r < a$$

$$\gamma(r) = 0 \quad \text{si } r \geq a$$

El alcance es a , la meseta es $C = \gamma(\infty)$, la pendiente en el origen es $(3/2)(C/a)$.

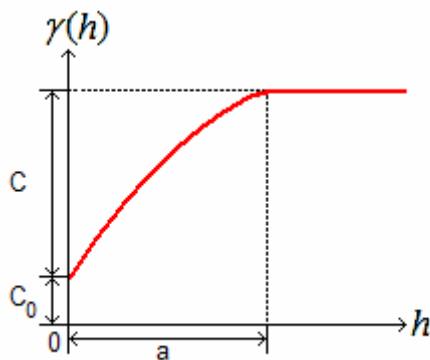
Se tienen los ábacos siguientes:

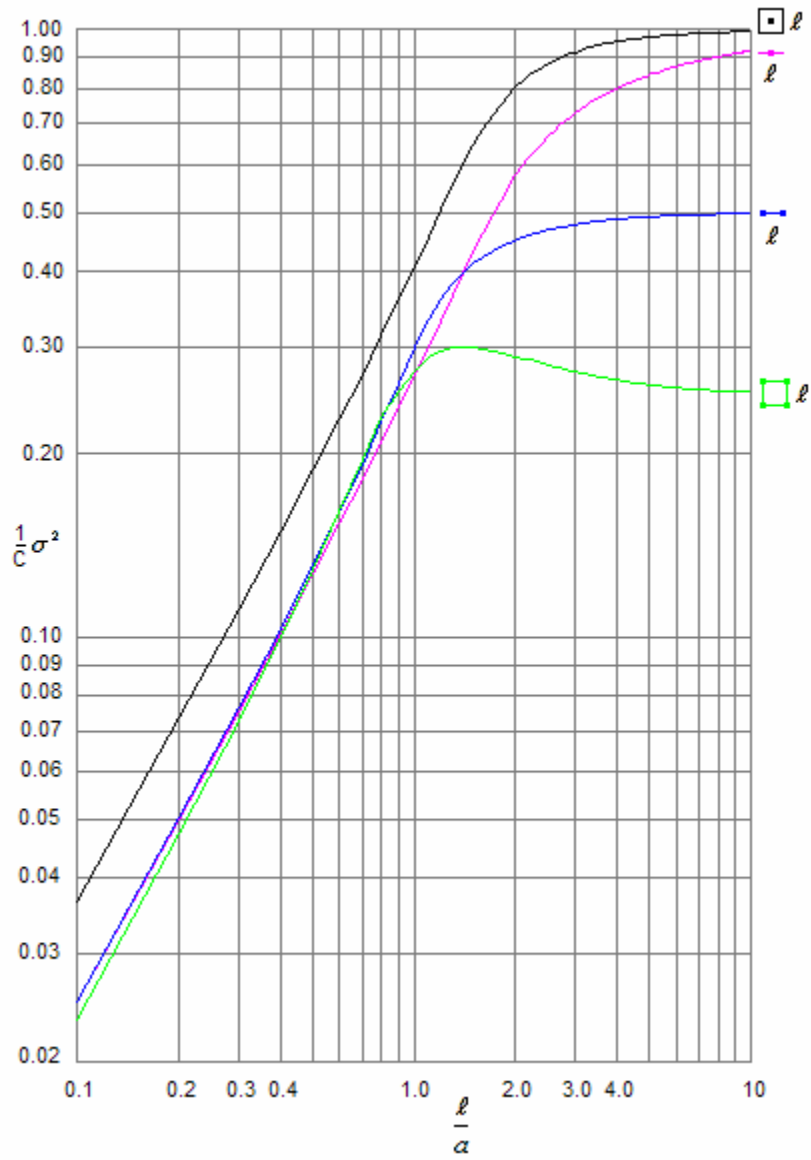
Varianzas de estimación diversas.

Varianza de un punto en el rectángulo $l \times h$:

$$\frac{1}{C} F\left(\frac{l}{a}, \frac{h}{a}\right)$$

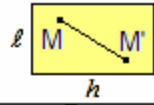
Observación - A menudo, en las aplicaciones, los fenómenos de transición están acompañados de un efecto de pepita: se les representará entonces por un esquema esférico con efecto de pepita C_0 :



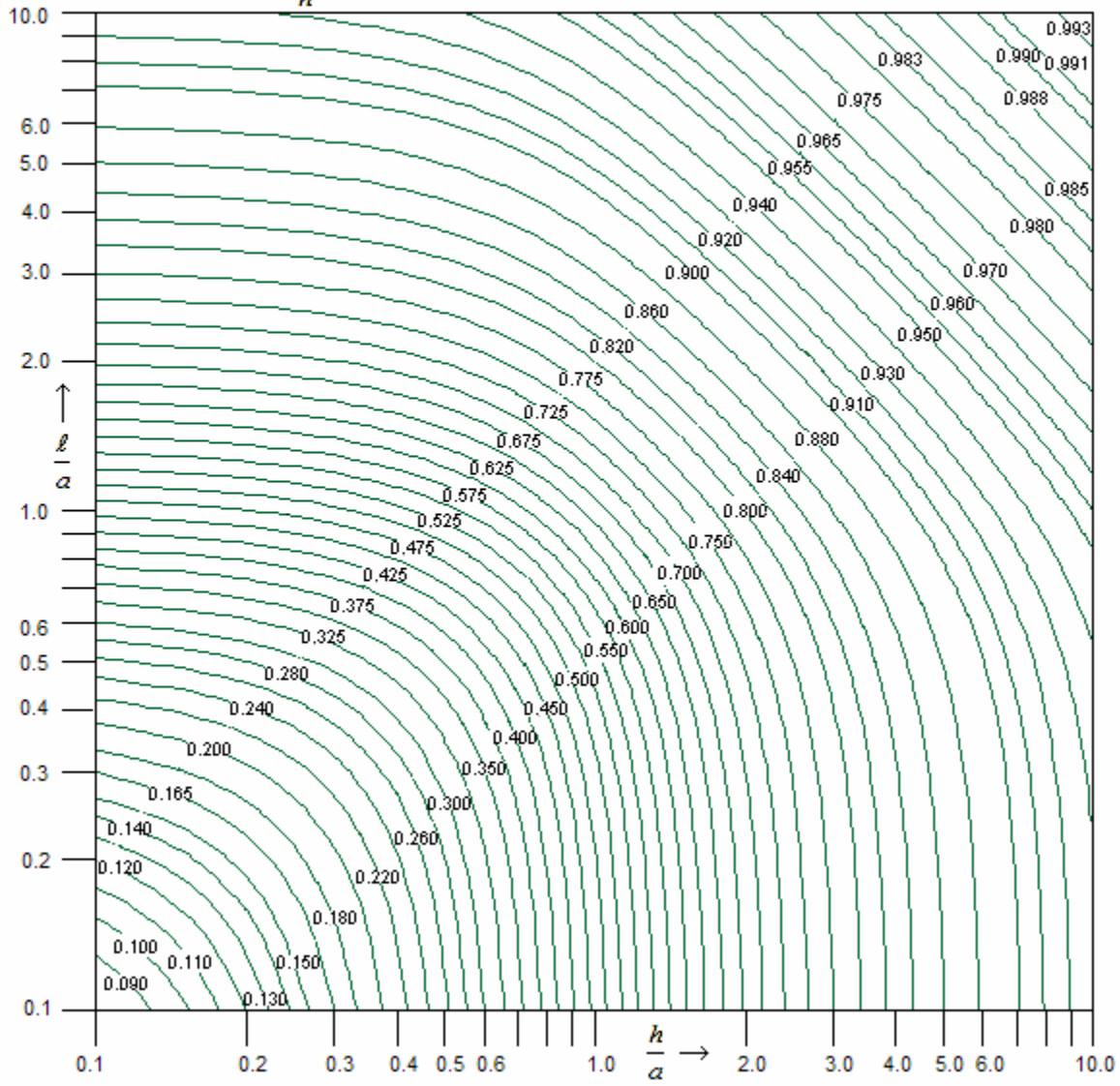


Esquema esférico
 Varianzas de extensión diversas

ESQUEMA ESFERICO



$$\frac{1}{C} F\left(\frac{h}{a}, \frac{l}{a}\right) = \text{varianza de un punto en el rectángulo } l \times h$$



2-9 INFERENCIA ESTADISTICA Y CUASI-ESTACIONARIDAD.

2-9-1 F.A. cuasi-estacionaria.

Volvamos al problema metodológico evocado en el párrafo 1-4-6. Se trata de mostrar - mediante una hipótesis bastante débil de tipo cuasi-estacionaridad - que el problema de la estimación global de un dominio acotado V tiene solución. Esta va a resultar de los dos puntos siguientes:

- La varianza de estimación solo depende (por lo menos para mallas pequeñas) del comportamiento en una vecindad del origen de un variograma o de una covarianza "media".
- Este comportamiento es accesible experimentalmente, dicho de otra manera, la inferencia estadística de lo que es útil conocer es posible a partir de una sola realización, siempre que la F.A. no sea derivable en media cuadrática.

Es posible poner como hipótesis mínima la característica cuasi-intrínseca, es decir la existencia de un variograma y localmente estacionario el cual se deforma lentamente en el espacio. Nos limitaremos aquí a la hipótesis ligeramente más fuerte de cuasi-estacionaridad que vamos a precisar: Una F.A. $Z(x)$ es cuasi-estacionaria si tiene una esperanza matemática $m(x)$ y una covarianza centrada $C(x,y)$ tales que:

a/ $m(x)$ es una función muy regular que varía de manera lenta en el espacio (a la escala de la malla utilizada); más precisamente, $m(x)$ puede ser considerada como una constante en el dominio cuyas dimensiones son las de la malla.

b/ Existe una función de tres argumentos $K(h;x,y)$ tal que se tiene $C(x,y)=K(x-y;x,y)$ y que, cuando h es fijo, $K(h;x,y)$ es una función regular y lentamente variable (en el mismo sentido anterior) de los argumentos x e y . Dicho de otra manera, cuando x e y pertenecen a un mismo dominio cuyas dimensiones son las de la malla, $K(h;x,y)$ solo depende de h , y todo sucede como si la covarianza C fuera localmente estacionaria.

En efecto, haremos aún una hipótesis un poco más restrictiva. Admitiremos que, en el dominio V que se quiere estimar, la función K admite un desarrollo en serie entera de la forma:

$$K(h;x,y) = \sum_n \varpi_n(x)\varpi_n(y)C_n(h)$$

Los ϖ_n son funciones regulares que varían de manera lenta en la escala de la malla, y los $C_n(h)$, funciones de covarianza.

Es posible entonces encontrar funciones aleatorias $Y_n(x)$ estacionarias de orden 2, de esperanza matemática nula, mutuamente independientes entre ellas, y tales que se tenga:

$$Z(x) = m(x) + \sum_n \varpi_n(x)Y_n(x)$$

Esta descomposición es suficientemente general para lo que tenemos en vista. Las operaciones de tipo cálculo de una varianza de estimación, estimación de un variograma, varianza de esta estimación, etc. se van a presentar de manera lineal respecto de las componentes independientes $Y_n(x)$. Luego es suficiente tratar separadamente las componentes $Y_n(x)$, y adicionar luego los resultados obtenidos. Resulta así una simplificación importante, porque nos reducimos al estudio del caso en que $Z(x)$ es de la forma:

$$(2-33) \quad Z(x) = m(x) + \varpi(x)Y(x)$$

La cual admite la esperanza $m(x)$ y una covarianza centrada de la forma:

$$(2-34) \quad C(x, y) = \varpi(x)\varpi(y)C_0(x - y)$$

Examinemos ahora como se presentan nuestros dos problemas cuando estas dos relaciones (2-33) y (2-34) se verifican.

2-9-2 Cálculo de la varianza de estimación.

Para simplificar, nos limitaremos al caso del espacio R^1 , y supondremos que se desea estimar el intervalo $(0, L)$ a partir de n muestras implantadas en una malla regular $L=na$ según el dispositivo centrado. Se designarán por $x_i=(i-1/2)a$ a los puntos de muestreo, y por:

$$Z_i = \frac{1}{a} \int_{(i-1)a}^{ia} Z(x) dx$$

la ley real de la zona de influencia número i . Si se toma el estimador:

$$\frac{1}{n} \sum_i Z(x_i)$$

el error de estimación es:

$$\frac{1}{n} \sum_i (Z(x_i) - Z_i)$$

En el término $Z(x_i) - Z_i$, la contribución de $m(x)$ es despreciable, porque $m(x)$ se considera constante en una zona de influencia: $m(x)$ no juega ningún papel en el problema. Queda entonces:

$$Z(x_i) - Z_i = \varpi(x_i)Y(x_i) - \frac{1}{a} \int_{(i-1)a}^{ia} \varpi(x)Y(x) dx$$

y, como $\varpi(x)$ se considera constante en una zona de influencia:

$$Z(x_i) - Z_i = \varpi(x) \left[Y(x_i) - \frac{1}{a} \int_{(i-1)a}^{ia} Y(x) dx \right] = \varpi(x_i) [Y(x_i) - Y_i]$$

La varianza de este error individual es entonces:

$$D^2[Z(x_i) - Z_i] = [\varpi(x_i)]^2 \sigma_{E_0}^2$$

al designar por $\sigma_{E_0}^2$ la varianza de extensión de x_i en su zona de influencia calculada con la covarianza C_0 de $Y(x)$. Por otra parte, los métodos de aproximación que hemos presentado en el párrafo (2-5) muestran que los errores $Y(x_i) - Y_i$ pueden ser considerados como sin correlación. Resulta que nuestra varianza de estimación es:

$$\sigma_{Est}^2 = \sigma_{E_0}^2 \frac{1}{n^2} \sum_i \varpi^2(x_i) \approx \frac{1}{n^2} \sigma_{E_0}^2 \frac{1}{a} \int_0^L \varpi^2(x) dx$$

es decir:

$$\sigma_{Est}^2 = \frac{1}{n} \sigma_{E_0}^2 \frac{1}{L} \int_0^L \varpi^2(x) dx$$

Luego, esta varianza de estimación es la misma que si se tuviera la covarianza estacionaria:

$$C(h) = C_0(h) \frac{1}{L} \int_0^L \varpi^2(x) dx$$

Designemos ahora por $\bar{C}(h)$ la covarianza (pseudo-estacionaria) media:

$$\bar{C}(h) = \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} C(x, x+h) dx = \frac{C_0(h)}{L-h} \int_0^{L-h} \varpi(x) \varpi(x+h) dx$$

Para $h \leq a$, $\varpi(x+h)$ no difiere mucho de $\varpi(x)$ y se tiene:

$$\frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} \varpi(x) \varpi(x+h) dx \approx \frac{1}{L} \int_0^L \varpi^2(x) dx$$

Luego, para $h \leq a$, $C(h) = \bar{C}(h)$, y la varianza de estimación es la misma que para una F.A. estacionaria cuya covarianza sería precisamente esta covarianza media $\bar{C}(h)$.

Para a pequeño, resta demostrar que es posible estimar efectivamente $\bar{C}(0) - \bar{C}(h)$.

2-9-3 Posibilidad de inferencia estadística.

Pondremos:

$$\bar{\gamma}(h) = \bar{C}(0) - \bar{C}(h), \quad \gamma_0(h) = C_0(0) - C_0(h), \quad \text{etc.}$$

Buscamos estimar el comportamiento de $\bar{C}(h)$ en una vecindad del origen, es decir de $\bar{\gamma}(h)$ para h pequeño. Para ello tomaremos el estimador:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} (\varpi(x+h)Y(x+h) - \varpi(x)Y(x))^2 dx \approx \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} \varpi^2(x)(Y(x+h) - Y(x))^2 dx$$

Con las aproximaciones que hemos realizado, este estimador es insesgado:

$$E(\gamma^*(h)) = \bar{\gamma}(h)$$

Queda por evaluar su varianza. Aquí es necesario introducir una hipótesis sobre la ley espacial de la F.A., porque van a intervenir, necesariamente, momentos de orden 4. Lo más simple es limitarse al caso gaussiano, como en el ejercicio 16. Los cálculos realizados en los párrafos a/ y b/ siguen siendo válidos y queda:

(2-35)

$$D^2(\gamma^*(h)) = \frac{1}{2(L-h)^2} \int_0^{L-h} \varpi^2(x) dx \int_0^{L-h} \varpi^2(y) [\gamma_0(x-y+h) + \gamma_0(x-y-h) - 2\gamma_0(x-y)]^2 dy$$

Evaluemos esta integral cuando h es pequeño. Es claro que esta integral es equivalente a:

$$\frac{1}{2L^2} \int_0^{L-h} \varpi^2(x) dx \int_0^{L-h} \varpi^2(y) [\gamma_0(x-y+h) + \gamma_0(x-y-h) - 2\gamma_0(x-y)]^2 dy$$

Pongamos:

$$F(u) = [\gamma_0(u+h) + \gamma_0(u-h) - 2\gamma_0(u)]^2$$

y designemos por R al covariograma transitivo de la función igual a $\varpi^2(x)$ en el intervalo $(0, L)$ e igual a γ_0 en otro caso. El algoritmo de Cauchy nos proporciona:

$$D^2(\gamma^*(h)) = \frac{1}{L^2} \int_0^L R(u) F(u) du$$

Para $u > h$, $F(u)$ es una función regular de u , equivalente a $h^4(\gamma''(u))^2$. Luego nuestra varianza es de la forma:

$$D^2(\gamma^*(h)) = Ah^4 + \frac{R(0)}{L^2} \int_0^h F(u) du$$

Todo va a depender ahora del comportamiento de $F(u)$ en una vecindad de 0. Designemos por bh^λ (eventualmente $bh^2 \log(h)$) la parte principal de γ_0 en $h=0$. La parte principal de $F(u)$ es:

$$b^2 h^{2\lambda} \left[\left(1 + \frac{u}{h}\right)^\lambda + \left(1 - \frac{u}{h}\right)^\lambda - 2u^\lambda \right]^2$$

Por consiguiente, la varianza será de la forma:

$$(2-36) \quad D^2(\gamma^*(h)) = Ah^4 + \frac{B}{L^2} h^{1+2\lambda}$$

Hay que distinguir entonces dos casos:

a/ $\lambda < 2$ (F.A. no derivable m.c.) - La varianza relativa, para h pequeño es del tipo:

$$\frac{D^2(\gamma^*(h))}{(\gamma(h))^2} = A' h^{4-2\lambda} + \frac{B'}{L^2} h$$

Esta varianza es infinitamente pequeña con h , y la inferencia estadística es posible. En el límite, cuando $\gamma(h)$ tiene un comportamiento en $h^2 \log(h)$, se encontraría una varianza relativa en $A'/\log(h)$: la inferencia estadística es aún posible, pero sería muy difícil, en la práctica, debido al decrecimiento muy lento de $1/\log(h)$.

b/ Para $\lambda=2$ (F.A. derivable m.c.) la varianza relativa $D^2(\gamma^*)/\gamma^2$ tiende hacia una constante A' no nula cuando h tiende a 0. Esto significa (a menos que L sea muy grande con respecto del alcance de $C_0(h)$) que la inferencia estadística es imposible.

En resumen, la inferencia estadística es siempre posible cuando la F.A. no es derivable en media cuadrática - y este es el único caso en el cual nuestro problema es solucionable de manera teórica en toda generalidad. Esta circunstancia, un poco extraña que castiga las F.A. muy regulares y prohíbe la inferencia de su covarianza a menos de disponer de una realización muy extendida, tomará todo su sentido en el estudio del krigeado universal, y, particularmente, la noción de deriva aleatoria.

2-10 EJERCICIOS SOBRE LAS FUNCIONES ALEATORIAS INTRINSECAS.

2-10-1 Construcción de F.A.I.

Ejercicio 1. Se elige al azar un origen x_0 en $(0, a)$, luego se divide la recta en segmentos de longitud a mediante los puntos de subdivisión $x_0 + ka$ (k entero, positivo o negativo). Sea $Y(x)$ la F.A. que toma en cada uno de estos segmentos de longitud a un valor aleatorio constante Y , sorteado al azar de manera independiente de un segmento a otro, según una ley de probabilidad de media m y de varianza σ^2 . Probar que la probabilidad de que dos puntos x y $x+h$ pertenezcan al mismo segmento es $1 - |h|/a$ para $|h| \leq a$ y 0 para $|h| > a$. Deducir el variograma de $Y(x)$ (Solución: $|h|\sigma^2/a$ para $|h| \leq a$ y σ^2 para $h > a$).

Ejercicio 2. La misma pregunta que en el ejercicio precedente, pero las longitudes de los segmentos sucesivos siguen la misma ley exponencial $\exp(-\lambda l)$ (dicho de otra manera, los puntos de discontinuidad constituyen un proceso de Poisson)

(Solución: la probabilidad para que x y $x+h$ estén en el mismo segmento es $\exp(-\lambda h)$. Se deduce: $\gamma(h) = \sigma^2(1 - \exp(-\lambda h))$).

Ejercicio 3. Sea en la recta real un proceso de Poisson (puntos aleatorios separados por distancias independientes las cuales admiten la misma ley de probabilidad de densidad $a \exp(-ax)$). Se define (salvo una constante) una F.A. $Y(x)$ tomando $Y(x) = \text{constante}$ fuera de los puntos poissonianos x_i , y, en cada x_i , $Y_+(x_i) - Y_-(x_i) = X_i$, con V.A. X_i independientes que siguen una misma ley de esperanza m y varianza σ^2 .

Probar que la F.A. es intrínseca (pero no es estacionaria de orden 2), que admite una deriva mh y el variograma $a(m^2 + \sigma^2)|h|/2$ (lineal). (Este proceso es un proceso de Poisson compuesto, con incrementos independientes y estacionarios. Para calcular la deriva y el variograma, se podrán calcular las esperanzas $E[Y(x+h) - Y(x)]$ y $E[(Y(x+h) - Y(x))^2]$ condicionando sobre el número n de puntos poissonianos que caen entre x y $x+h$, luego des-condicionar en n).

Ejercicio 4. Sea $Y(x)$ una F.A. estacionaria de orden 2, m su esperanza y $C(h)$ su covarianza. Probar que la F.A.

$$Z(x) = \int_0^x Y(y) dy$$

es intrínseca (pero no estacionaria de orden 2), admite la deriva mh y el variograma:

$$\gamma(h) = \int_0^h (h-x)C(x) dx$$

(Solución: partir de $\gamma'' = C$).

b/ Aplicación al proceso de pendientes aleatorias: se consideran puntos de discontinuidad poissonianos, como en el ejercicio 3, la pendiente w permanece constante en cada uno de los intervalos entre los puntos de discontinuidad. Estas pendientes w son aleatorias e independientes, de esperanza nula y de varianza σ^2 en cada intervalo. Probar que el proceso

$Y(x)$ así definido (salvo una constante) es una F.A.I. ($Y(x)$ no es estacionaria de orden 2) sin deriva, con variograma:

$$\sigma^2 \frac{e^{-ah} - 1 + ah}{a^2}$$

(Solución: el proceso derivado es del tipo del ejercicio 2, basta con aplicar a/ a $Y'(x)$).

2-10-2 Ejercicios sobre las varianzas de estimación.

Ejercicio 5 - Se considera el variograma h^λ ($0 < \lambda < 2$) en el espacio de una dimensión. Calcular las funciones auxiliares χ y F , la varianza de extensión elemental de un punto a su segmento de influencia (dispositivo centrado), la varianza de extensión a este segmento del promedio de sus dos extremidades (dispositivo cerrado). Comparar y discutir.

$$\chi(h) = \frac{h^\lambda}{\lambda + 1} ; F(h) = \frac{2h^\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}$$

$$\frac{2a^\lambda}{\lambda + 1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda + 2} \right] ; a^\lambda \left[\frac{2}{\lambda + 2} - \frac{1}{2} \right]$$

Se tiene: $\sigma^2_E > \sigma^2_{E'}$, para $\lambda > 1$ e inversamente, con igualdad para $\lambda = 1$: para $\lambda > 1$, alta continuidad y la muestra única pero bien ubicada es superior a las dos muestras mal ubicadas; para $\lambda < 1$, estamos próximos del caso aleatorio puro, y las dos muestras, a pesar de estar mal ubicadas, proporcionan siempre mejores resultados que la muestra única; para $\lambda = 1$ los dos dispositivos son equivalentes.

Ejercicio 6 - Con el variograma h^λ en el espacio de una dimensión, calcular la varianza de estimación del segmento $L=na$, por n muestras puntuales, en los tres casos siguientes:

- malla regular (dispositivo centrado)

$$\frac{1}{n} \frac{2a^\lambda}{\lambda + 1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda + 2} \right]$$

- malla aleatoria estratificada

$$\frac{1}{n} \frac{2a^\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}$$

- malla aleatoria pura

$$\frac{1}{n} \frac{2L^\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}$$

Ejercicio 7 - Sea, en el espacio de dos dimensiones, el variograma r^λ . Sea un depósito reconocido líneas de longitudes superiores a su equidistancia h .

a/ Calcular la varianza de extensión de una línea de largo l en su rectángulo $l \times h$ de influencia.

(Solución: la subida bajo potencia constante l transforma r^λ en $Ar^{\lambda+1}/l$ (o a $\log(r)$ en $\pi r/l$); de donde:

$$\sigma_E^2 = A \frac{2}{\lambda+2} \left[\frac{1}{2^{1+\lambda}} - \frac{1}{\lambda+3} \right] \frac{h^{1+\lambda}}{l} = B \frac{h^{1+\lambda}}{l}$$

b/ deducir la varianza de estimación (ponderar por los cuadrados de las longitudes de las líneas, poner $L = \sum l_i$ y $S = Lh$, poner entonces la varianza de estimación en la forma:

$$B \frac{S^{1+\lambda}}{L^{2+\lambda}}$$

Ejercicio 8 - Mismo problema que en 7, pero se supone que además las líneas están estimadas a partir de muestras (canaletas) a la malla a . Calcular el término de línea.

(Solución:

$$\frac{C}{L} a^{1+\lambda} \text{ con } C = \frac{2}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right])$$

Optimización económica: sea w el costo del metro de galería, p_0 el costo de una muestra, y $l_0 = p_0/w$. Optimizar la precisión si el presupuesto de reconocimiento es fijo, o, lo que es lo mismo, optimizar el costo de reconocimiento si la precisión es fija.

(Solución: Todo consiste en minimizar $Ca^{1+\lambda} + Bh^{2+\lambda}$ con la condición $1/(hl_0) + 1/(ha) = C$. Se obtiene la relación siguiente:

$$B(2+\lambda)h^{1+\lambda} = \lambda Ca^{1+\lambda} + C(1+\lambda) \frac{a^{2+\lambda}}{l_0}$$

que proporciona la equidistancia h de los niveles en función de la malla de canaletas.

2-10-3 Ejercicios sobre el efecto de pepita y el esquema esférico.

Ejercicio 9: Efecto de pepita al estado puro - Sean pepitas puntuales distribuidas en el espacio según un esquema de Poisson (definición: el número $N(v)$ de pepitas en un volumen v es una variable de Poisson de media λv ; si v y v' son disjuntos, $N(v)$ y $N(v')$ son independientes).

a/ Se toman volúmenes v , y se pone $Y(x) = N(v_x)$ en que v_x representa el trasladado de v implantado en el punto x . Probar que la covarianza de $Y(x)$ e $Y(x+h)$ es la varianza de $N(v_x \cap v_{x+h})$, es decir $\lambda K(h)$, siendo $K(h)$ el covariograma geométrico del volumen v .

b/ Se supone ahora que las pepitas tienen pesos aleatorios independientes (con media p_0 y varianza σ_p^2 , y se toma para $Y(x)$ la suma $P_1+P_2+\dots+P_N$ de los pesos de los $N=N(v_x)$ pepitas contenidas en v . Calcular la media y la varianza de $Y(x)$ (solución: $E(Y)=\lambda v p_0$, $D^2(Y)=\lambda v(p_0^2+\sigma_p^2)$). Deducir la covarianza de $Y(x)$ e $Y(x+h)$ (reemplazar v por $K(h)$).

Ejercicio 10: Esquema de dilución. - Se tienen gérmenes poissonianos como en el ejercicio 9. Sea $f(x)$ una función. Se pone:

$$Y(x) = \sum_i f(x-x_i)$$

en que x_i representa las implantaciones de los diferentes gérmenes. Se trata entonces de una dilución de estos gérmenes por la función f . Encontrar la covarianza $K(h)$ de $Y(x)$ e $Y(x+h)$ ($\lambda g(h)$, con $g = f * \tilde{f}$).

(Hay que limitarse al caso en que f es a soporte compacto, considerar dos puntos x_0 y x_0+h y un dominio acotado V que contiene los trasladados por x_0 y x_0+h del soporte de f . Se razonará suponiendo que el número n de puntos poissonianos caídos en V es fijo, luego se des-condicionará en n).

Ejercicio 11: Esquema esférico de una dimensión - Calcular las funciones auxiliares del esquema esférico:

$$\begin{aligned} \gamma(\ell) &= \frac{3\ell}{2a} - \frac{1\ell^3}{2a^3} \quad \text{para } \ell \leq a \quad 1 \quad \text{para } \ell \geq a \\ \chi(\ell) &= \frac{3\ell}{4a} - \frac{1\ell^3}{8a^3} \quad \text{para } \ell \leq a \quad 1 - \frac{3a}{8\ell} \quad \text{para } \ell \geq a \\ F(\ell) &= \frac{1\ell}{2a} - \frac{1\ell^3}{20a^3} \quad \text{para } \ell \leq a \quad 1 - \frac{3a}{4\ell} + \frac{1a^2}{5\ell^2} \quad \text{para } \ell \geq a \end{aligned}$$

b/ Varianza de extensión elemental de una muestra en su segmento b de influencia, para $b \leq a$ y $b \geq 2a$. Interpretar.

$$\left(\frac{1b}{4a} + \frac{3b^3}{160a^3} \quad \text{y} \quad 1 - \frac{3a}{4b} - \frac{1a^2}{5b^2} \right)$$

2-10-4 Ejercicios sobre las grandes mallas.

Los tres ejercicios que siguen constituyen un test. Si usted es capaz de comprender el camino de solución de los dos primeros, y de efectuar los cálculos correspondientes (que son fáciles), quiere decir que usted ha asimilado bien los mecanismos mentales que deben ser los mecanismos del geoestadístico. Si además, usted puede aceptar, sin confusión, las conclusiones críticas del tercer ejercicio (no validez en las grandes mallas del principio de composición de términos de línea y de rebanada, y validez solamente muy aproximada del principio de composición de varianzas de estimación elementales), esto prueba que vuestra comprensión se extiende en profundidad, permitiéndole juzgar el sentido y los límites de cada una de las hipótesis de aproximación de la Geoestadística operativa.

Del punto de vista epistemológico, se notará también que en las grandes mallas (es decir superiores al alcance), la forma exacta de la covarianza o del variograma $\gamma(h)$ pierde toda importancia: el $K(h)$ solo interviene por su valor C en el origen y sus primeros momentos (A_0 y A_1 en R^1 ; A_0 , A_1 , A_2 y A_3 en R^2 ; en R^3 habría que ir hasta A_5). Luego, en R^2 , por ejemplo, todos los esquemas se reducen, en las grandes mallas, a un tipo único, el cual depende solamente de los 4 parámetros esenciales A_0 , A_1 , A_2 y A_3 y del parámetro C (que solo interviene como un factor). En las grandes mallas estamos próximos de las condiciones de validez de la estadística clásica: a la varianza de estimación C/n a la cual conduciría la estadística, el cálculo geoestadístico agrega términos correctivos, cuyos coeficientes son precisamente los A_i .

Ejercicio 12 (1 dimensión) - Se designará por $\gamma(h)=\gamma(r)$ un variograma (isótropo) de tipo transitivo, es decir de la forma:

$$\gamma(r) = C - K(r) \text{ con } K(r) = 0 \text{ para } r > \text{alcance}$$

1/ En el espacio de una dimensión, para $\ell > \text{alcance}$, se tiene:

$$C - F(\ell) = \frac{2}{\ell^2} \int_0^{\ell} (\ell - x) K(x) dx = \frac{2}{\ell^2} \int_0^{\infty} (\ell - x) K(x) dx$$

Deducir que:

$$F(\ell) = C - \frac{A_0}{\ell} + \frac{A_1}{\ell^2}$$

$$\chi(\ell) = C - \frac{A_0}{2\ell}$$

Con:

$$A_0 = 2 \int_0^{\infty} K(x) dx$$

$$A_1 = 2 \int_0^{\infty} x K(x) dx$$

2/ Varianza de extensión para una malla $a > \text{alcance}$:

$$\sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) = C - \frac{A_0}{a} - \frac{A_1}{a^2}$$

Para una galería de longitud $\ell = na$, la varianza de estimación es:

$$\frac{1}{n} \sigma_E^2 = \frac{a}{\ell} C - \frac{A_0}{\ell} - \frac{A_1}{a\ell}$$

Ejercicio 13 (2 dimensiones) - 1/ Función $F(a,b)$: El valor medio de $\gamma(h)=\gamma(r)$ en el rectángulo (a,b) es:

$$F(a,b) = \frac{4}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b (a-x)(b-y) \gamma(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

2/ Sea $\gamma(h) = C - K(h)$ un esquema de tipo transitivo (es decir $K(h) = 0$ para $r = |h| > \varepsilon$, siendo ε el alcance). En las grandes mallas (a y $b >$ alcance) 1/ proporciona:

$$C - F(a,b) = \frac{4}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b (a-x)(b-y) K(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

deducir que:

$$F(a,b) = C - \frac{\pi A_1}{ab} + \frac{2A_2}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{A_3}{a^2 b^2}$$

Con:

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} K(h) dh = 2 \int_0^\infty r K(r) dr$$

$$A_2 = 2 \int_0^\infty r^2 K(r) dr$$

$$A_3 = 2 \int_0^\infty r^3 K(r) dr$$

3/ Deducir $\chi(a;b)$, $\gamma(a;b)$, $Q(a,b)$ (siempre para $a, b >$ alcance). Aplicar:

$$\chi(a;b) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 F}{2} \right)$$

$$\gamma(a;b) = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a^2 F}{2} \right)$$

$$Q(a,b) = \frac{1}{ab} \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \left(\frac{a^2 b^2 F}{4} \right)$$

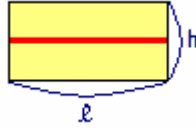
Lo cual debe dar:

$$\chi = C - \frac{\pi A_1}{2ab} + \frac{A_2}{ab^2}$$

$$\gamma = C$$

$$Q = C - \frac{\pi A_1}{4ab}$$

4/ Varianza de extensión de una galería en ℓ x h. $\ell, h/2 >$ alcance.



$$\sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{h}{2}; \ell\right) - F(h, \ell) - F(\ell)$$

$$\sigma_E^2 = \frac{A_0}{\ell} - A_1\left(\frac{\pi}{\ell h} + \frac{1}{\ell^2}\right) + 2A_2\left(\frac{1}{h\ell^2} - \frac{1}{h^2\ell}\right) + A_3\frac{1}{h^2\ell^2}$$

5/ Varianza de extensión S por galerías de longitud ℓ_i $>$ alcance (equidistancia $>$ alcance). Poner $\sum \ell_i = L$. Sea N el número de galerías.

$$\frac{\sum \ell_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum \ell_i)^2} = \frac{A_0}{L} - A_1\left(\frac{\pi}{Lh} + \frac{N}{L^2}\right) + 2A_2\left(\frac{N}{hL^2} - \frac{1}{h^2L}\right) + A_3\frac{N}{h^2L^2}$$

$$= A_0\frac{h}{S} - A_1\left(\frac{\pi}{S} + \frac{h^2N}{S^2}\right) + 2A_2\left(\frac{hN}{S^2} - \frac{1}{hS}\right) + A_3\frac{N}{S^2}$$

6/ Estimación de S por galerías (equidistancia $h >$ alcance), muestreadas con malla a superior al alcance:

$$\sigma_{Est}^2 = \frac{ah}{S}C + A_0\frac{h}{S} - A_1\left(\frac{\pi}{S} + \frac{h^2N}{S^2}\right) + 2A_2\left(\frac{hN}{S^2} - \frac{1}{hS}\right) + A_3\frac{N}{S^2}$$

7/ Varianza de extensión de un sondaje:



$$\sigma_E^2 = 2Q\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - F(a, a) = C - \frac{\pi A_1}{a^2} - 4\frac{A_2}{a^3} + \frac{A_3}{a^4}$$

De donde obtenemos la varianza de estimación de S:

$$\frac{1}{n} \sigma_E^2 = C \frac{a^2}{S} - \frac{\pi A_1}{S} - 4 \frac{A_2}{aS} + \frac{A_3}{a^2 S}$$

Ejercicio 14 (Crítica) - 1/ Dar una mirada crítica: Para $h=a$ la fórmula 6 no es compatible con el resultado encontrado en 7/ (salvo el primer término C/n , que es la aproximación de la estadística clásica). De los dos principios de aproximación siguientes:

- composición de términos de línea y de rebanada (utilizado en 6/)
- composición de varianzas de extensión elementales (utilizado en 7/)

por lo menos uno de ellos no es aplicable al caso de las grandes mallas. Al reflexionar, aparece que la varianza de estimación asociada a una malla rectangular (a,b) , cuando a y b son superiores al alcance, solo debe depender de la superficie ab del rectángulo de la malla, y no de su alargamiento (a/b) . Pero la fórmula 6/ hace intervenir, de manera explícita, esta razón a/h . Se puede concluir que el principio de composición de términos de rebanada y de línea no es aplicable a las grandes mallas, y que debe preferirse la fórmula 7/.

2/ Para verificarlo, de manera rigurosa, partir de la fórmula general:

$$\sigma_{Est}^2 = \frac{1}{S^2} \iint_S K(x-y) dx dy - \frac{2}{NS} \sum_i \int_S K(x_i - y) dy + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} K(x_i - x_j)$$

Cuando las distancias entre sondajes $|x_i - x_j|$, así como las distancias entre los sondajes y la frontera de S son superiores al alcance, la fórmula anterior se traduce en la fórmula (rigurosa) siguiente:

$$\sigma_{Est}^2 = C - F(S) + \frac{C}{N} - \frac{2\pi A_1}{S}$$

fórmula que es independiente de la forma de la malla (y aplicable, en particular, también a mallas irregulares).

$C - F(S)$ solo depende de la superficie S (y no de la malla) y tiene como parte principal (para S grande): $\pi A_1/S$, de donde se obtiene la fórmula de aproximación:

$$\sigma_{Est}^2 \approx \frac{C}{N} - \frac{\pi A_1}{S}$$

3/ Examinemos si el principio de composición de varianzas de extensión elementales proporciona mejores resultados. Se encuentra:

$$\frac{1}{N} \left[2Q \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) - F(a,b) \right] = \frac{C}{N} - \pi \frac{A_1}{S} - 2 \frac{A_2}{S} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{A_3}{Sab}$$

Los dos primeros términos son buenos. Los términos de orden superior (en A_2 y A_3) no son aceptables, porque aún dependen de a y de b , mientras que la fórmula exacta solo hace intervenir la geometría de S . Sin embargo esta fórmula es mejor que 6/ (en la cual solo el primer término es bueno).

4/ En el mismo espíritu que 2/ anterior, probar que la varianza de estimación de un segmento de longitud L por una malla a>alcance es (rigurosamente):

$$C - F(L) + \frac{C}{N} - 2\frac{A_0}{L}$$

Deducir que la varianza de estimación de una dimensión (Ejercicio 12, párrafo 2) es en realidad:

$$\sigma_{Est}^2 = \frac{C}{N} - \frac{A_0}{L} - \frac{A_1}{L^2}$$

Luego, en una dimensión, el principio de composición de varianzas de extensión proporciona el valor exacto en los dos primeros términos, pero no en el tercero.

5/ Concluir del párrafo anterior que solo los dos primeros términos de la fórmula del párrafo 5/ Ejercicio 13 son válidos (varianza de estimación de S por galerías perfectamente muestreadas).

Para reconstituir la fórmula exacta, se supondrá que S es el rectángulo $\ell x h$, y se razonará directamente sobre el variograma γ' deducido de γ por subida bajo potencia ℓ . Para h superior al alcance, la función $F'(h)$ de este esquema transitivo de una dimensión es de la forma:

$$F'(h) = C' - \frac{A'_0}{h} + \frac{A'_1}{h^2}$$

(ver ejercicio 12). Probar, por un razonamiento directo, que la nueva constante C' es:

$$C' = C - F(\ell, 0) = \frac{A_0}{L} - \frac{A_1}{L^2}$$

Para determinar los nuevos coeficientes A'_0 y A'_1 , identificar la expresión de $F(\ell, h)$ (Ejercicio 13, párrafo 2/), lo que da:

$$A'_0 = \pi \frac{A_1}{\ell} - 2\frac{A_2}{\ell^2}$$

$$A'_1 = 2\frac{A_2}{\ell} - \frac{A_3}{\ell^2}$$

Mostrar, al aplicar el resultado 4/ anterior, que la varianza de estimación por galerías de longitud ℓ equidistantes de $h=H/N$ es:

$$\begin{aligned} \sigma_{Est}^2 &= \frac{C'}{N} - \frac{A'_0}{H} - \frac{A'_1}{H^2} \\ &= \frac{A_0}{N\ell} - A_1 \left(\frac{1}{N\ell^2} + \frac{\pi}{S} \right) + 2\frac{A_2}{S} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{H} \right) + \frac{A_3}{S^2} \end{aligned}$$

Comparar con el ejercicio 13, párrafo 5.

2-10-5 Inferencia estadística para las F.A.

Ejercicio 15 (Estimación de un variograma) - Sea $Y(x)$ una F.A.I. sobre la recta real \mathbb{R}^1 , $\gamma(h)$ su variograma. Se supone conocida una realización de $Y(x)$ en el intervalo $(0,L)$, y, para estimar $\gamma(h)$ se forma el estimador siguiente:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} [Y(x+h) - Y(x)]^2 dx$$

a/ Probar que γ^* es un estimador insesgado, es decir $E[\gamma^*(h)] = \gamma(h)$.

b/ (Lema) Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 cuatro V.A. gaussianas de esperanzas nulas. Sea σ_{ij} la matriz de covarianzas de los X_i . Probar que:

$$E(X_1 X_2 X_3 X_4) = \sigma_{12} \sigma_{34} + \sigma_{13} \sigma_{24} + \sigma_{14} \sigma_{23}$$

(identificar el término en $u_1 u_2 u_3 u_4$ de la función característica de 4 variables. También se puede admitir este lema sin demostración y pasar adelante en el ejercicio).

c/ Se supone que los incrementos de la F.A.I. $Y(x)$ tienen leyes gaussianas (Nota: esta hipótesis tiene simplemente el objetivo de permitir el cálculo de los momentos de orden 4). Utilizando el lema b/, establecer la relación:

$$E[(Y(x+h) - Y(x))^2 (Y(y+h) - Y(y))^2] = 4\gamma^2(h) + 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2$$

y deducir la varianza $D^2(\gamma^*(h))$ del estimador $\gamma^*(h)$:

$$D^2(\gamma^*(h)) = \frac{1}{2(L-h)^2} \int_0^{L-h} dx \int_0^{L-h} [\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2 dy$$

(utilizar la simetría en x e y de la función a integrar)

d/ Efectuar los cálculos explícitos para $\gamma(h) = \omega|h|$. Para esto, mostrar que:

$$D^2(\gamma^*(h)) = \frac{4\omega^2}{(L-h)^2} \int_0^{L-h} dx \int_{\text{Sup}(0, x-h)}^x [h+x-y]^2$$

distinguir dos casos:

Para $h \leq L/2$, queda:

$$D^2(\gamma^*(h)) = \left(\frac{4}{3} \frac{h^3}{L-h} - \frac{1}{3} \frac{h^4}{(L-h)^2} \right) \omega^2$$

y para $h > L/2$,

$$D^2(\gamma^*(h)) = \left(2h^2 + \frac{1}{3}(L-h)^2 - \frac{4}{3}h(L-h) \right) \omega^2$$

En particular, para h muy pequeño, la varianza relativa es:

$$\frac{D^2(\gamma^*(h))}{(\gamma(h))^2} \approx \frac{4}{3} \frac{h}{L}$$

La cual tiende a 0 con h , y, por consiguiente la inferencia estadística es posible en condiciones aceptables respecto del comportamiento de $\gamma(h)$ en una vecindad del origen, a pesar de que solo se dispone de una sola realización de $Y(x)$.

Sin embargo, cuando h no es pequeño respecto de L , la varianza relativa es enorme y la inferencia estadística no es posible: el variograma experimental γ^* debe "normalmente" ser considerablemente diferente de su esperanza $\gamma(h)$. Por ejemplo, para $h=L/2$, la varianza relativa es igual a 1 (es decir enorme).

Ejercicio 17 (Estimación de la varianza $\sigma^2(0|L)$. - En las mismas condiciones que en el ejercicio anterior, se estima la varianza en L de las muestras puntuales por el estimador:

$$S^2 = \frac{1}{L} \int_0^L [Y(x) - \bar{Y}]^2 dx$$

con:

$$\bar{Y} = \frac{1}{L} \int_0^L Y(x) dx$$

a/ Poner S^2 en la forma:

$$\frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L (Y(x) - Y(y))(Y(x) - Y(y')) dx dy dy'$$

y probar que: $E(S^2) = \sigma^2(0|L)$.

b/ Calcular la varianza $D^2(S^2)$ suponiendo que los incrementos de $Y(x)$ son gaussianos. Para ello se formará S^4 que es una integral séxtuple, se utilizará el lema b/ del ejercicio 15 para explicitar el argumento de la integral, y se mostrará que el resultado se expresa, con la ayuda de las funciones auxiliares χ y F en la forma siguiente:

$$D^2(S^2) = 2(F(L))^2 + \frac{4}{L^2} \int_0^L (L-x)\gamma^2(x)dx - \frac{8}{L^3} \int_0^L x^2 \chi^2(x)dx$$

$$- \frac{8}{L^3} \int_0^L x(L-x)\chi(x)\chi(L-x)dx$$

c/ Aplicar b/ al caso en que $\gamma(h) = \omega|h|$, y probar que la varianza relativa en S^2 es igual a 4/5 (es decir enorme): las fluctuaciones de la varianza experimental respecto de su esperanza tienen siempre una amplitud enorme.

Ejercicio 17 (Seudo-covarianza) - A menudo es habitual admitir, sin un examen profundo, que las V.R. que se estudian pueden ser consideradas como realizaciones de funciones aleatorias estacionarias de orden 2 (mientras que a menudo, un estudio más fino muestra que solamente los incrementos de esta F.A. tienen momentos de orden 2 - dicho de otra forma, bien a menudo, no existe la covarianza $C(h)$, sino un variograma $\gamma(h)$). Por otra parte, se encuentra que los procedimientos de inferencia estadística que se utilizan, tienen, sistemáticamente, por efecto, a partir de los sesgos que implican, de hacer esta hipótesis admisible, aún cuando esta hipótesis es totalmente falsa.

Nos contentaremos con mostrar este fenómeno con un ejemplo: el caso del movimiento browniano, con variograma $\gamma(h) = |h|$, del cual se conoce una realización en el intervalo $(0, L)$. Se supone entonces que:

$$\begin{cases} E[Y(x+h) - Y(x)] = 0 \\ \frac{1}{2} D^2[Y(x+h) - Y(x)] = |h| \end{cases}$$

En la práctica usual, para estimar la hipotética covarianza $C(h)$, que en efecto no existe en este caso, se calculan sucesivamente los valores (experimentales) de las expresiones:

$$\bar{Y} = \frac{1}{L} \int_0^L Y(x) dx$$

$$C^*(x, y) = (Y(x) - \bar{Y})(Y(y) - \bar{Y})$$

y se deduce la "covarianza experimental":

$$C^*(h) = \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} C^*(x+h, x) dx$$

Ahora, si el variograma es $\gamma(h) = |h|$, la esperanza de $C^*(x, y)$ es:

$$E[C^*(x, y)] = \frac{2}{3}L + \frac{x^2 + y^2}{L} - 2Sup(x, y)$$

para $h > 0$ se tiene entonces:

$$E[C^*(x, x+h)] = \frac{2}{3}L + \frac{x^2 + (x+h)^2}{L} - 2x - 2h$$

y, al integrar en x, se ve que la "covarianza experimental" admite la esperanza:

$$E[C^*(h)] = \frac{1}{3}L - \frac{4}{3}h + \frac{2}{3} \frac{h^2}{L}$$

Que es una parábola de pendiente $-4/3$ en el origen. Se encontrará entonces una varianza aparente $C(0)=L/3$, ligada únicamente a la longitud L del intervalo en el cual se trabaja, y que constituye un artefacto puro (porque la varianza real es infinita). Cuando no existe covarianza estacionaria, sino solamente un variograma lineal, los sesgos que introduce este procedimiento de estimación, tienen como efecto proporcionar una confirmación aparente de la existencia de esta covarianza. Se observa que la estructura está profundamente deformada: no solamente la recta se reemplaza por una parábola, sino además la pendiente en el origen se encuentra afectada ($4/3$ en lugar de 1). El $C^*(h)$ es un puro artefacto, y no conserva casi nada de la estructura real del proceso.

Se observará que el variograma experimental:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} [Y(x+h) - Y(x)]^2 dx$$

tiene como esperanza:

$$E[\gamma^*(h)] = \gamma(h)$$

no está afectado por el sesgo anterior, y constituye, por consiguiente, una herramienta más segura para el experimentador que la covarianza.

CAPITULO 3

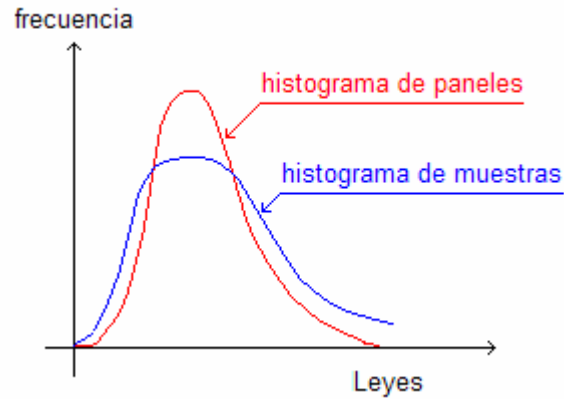
EL KRIGEADO

3-1 LOS OBJETIVOS DEL KRIGEADO

En términos mineros el kriging consiste en encontrar la mejor estimación lineal posible de la ley de un panel, considerando la información disponible, es decir las leyes de las diferentes muestras que se han tomado, sea al interior, sea al exterior del panel que se quiere estimar. El kriging consiste en efectuar una ponderación, es decir atribuir un peso a la ley de cada muestra, estos pesos se calculan de manera de hacer mínima la varianza de estimación resultante, considerando las características geométricas del problema (formas, dimensiones e implantación relativa del panel y de las muestras). En grueso, como es natural, el kriging atribuirá pesos débiles a las muestras alejadas, e inversamente. Sin embargo esta regla intuitiva puede ser parcialmente puesta en duda cuando aparecen fenómenos más complejos de efecto de pantalla y de transferencia de influencia. No es posible resolver un problema de kriging, es decir calcular efectivamente el peso óptimo que conviene atribuir a cada muestra, sin hacer ciertas hipótesis sobre las características Geoestadísticas del depósito que se estudia, es decir, esencialmente, de darse la función de covarianza o el variograma de la F.A. cuyas leyes puntuales se supone que constituyen una realización. En principio no es necesario introducir una hipótesis estacionaria o intrínseca, y las ecuaciones del kriging tienen un alcance general (en la práctica, naturalmente, es necesario comenzar por estimar la covarianza o el variograma a partir de los datos experimentales, y es aquí donde la hipótesis en cuestión encuentra su importancia). Nos limitaremos al caso de las F.A. intrínsecas o estacionarias de orden 2. El caso general de las F.A. no estacionarias corresponde al kriging universal.

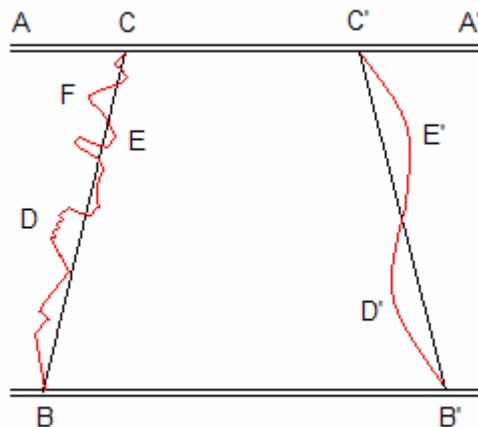
El primer interés del kriging deriva de su misma definición. Al minimizar la varianza de estimación, estamos seguros de sacar el mejor partido posible de la información disponible, o, si se prefiere, de obtener la estimación más precisa posible del panel en estudio. Esta ventaja es a menudo notable, pero no se justificaría siempre, debido a las complicaciones suplementarias que introduce necesariamente una ponderación. El interés práctico más importante - de lejos - del kriging, proviene, no del hecho que asegura la mejor precisión posible, sino más bien porque permite evitar un error sistemático. En la mayoría de los yacimientos metálicos, se deben seleccionar, para la explotación, un cierto número de paneles, considerados como rentables y se deben abandonar otros paneles considerados no-explotables. D. G. Krige ha mostrado que, si esta selección fuera realizada considerando exclusivamente las muestras interiores a cada panel, resultaría necesariamente - en promedio - una sobre-estimación de los paneles seleccionados. La razón de este problema muy general es que la varianza de las leyes reales de los paneles es siempre más débil que la varianza de los resultados de un muestreo interior. Dicho de otra manera, el histograma de las leyes reales de los paneles comporta menos leyes extremas (ricas o pobres) luego tiene más leyes intermedias que el histograma deducido de las muestras interiores, y, si se calcula el

efecto de una selección sobre este último histograma, los paneles eliminados serán en realidad menos pobres que lo que se había previsto, y los paneles conservados menos ricos.



Nuestra noción de kriging permite interpretar fácilmente este fenómeno, y corregir sus efectos. Cuando se selecciona un panel rico, la aureola de muestras exteriores tiene, en general, una ley más débil que las muestras interiores, sin embargo su influencia sobre el panel a estimar no es despreciable porque el kriging le atribuye un peso no nulo. Si no se toma en cuenta esta aureola exterior, se introduce, necesariamente, una causa de error sistemático por exceso.

Para ilustrar esta noción, imaginemos un yacimiento filoniano reconocido por dos galerías AA' y BB'

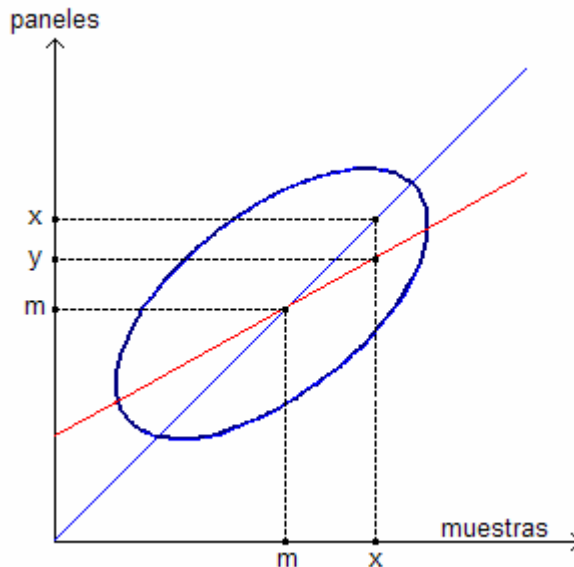


Se considera que las leyes de BB' con explotables, mientras que las leyes de AA' son explotables en el segmento CC'. Si nos contentamos con calcular la media de las leyes BB' y CC', estamos seguros de cometer un error por exceso: porque los trozos AC y C'A' - pobres por construcción - tienen una influencia no despreciable sobre el trapecio BB' CC'. Si fuera posible dibujar una frontera precisa entre mineral explotable e inexplorable, en general, la frontera real, no coincidiría con las rectas BC o B'C', sino que sería una curva cualquiera, a menudo bastante

irregular, tal como la línea complicada BDEFC. Además en el panel rico subsistirían enclaves pobres y recíprocamente. En la explotación estaremos obligados de abandonar ciertas porciones ricas, y de tomar ciertas partes pobres, y este ensuciamiento traduce de manera concreta la influencia de los trozos pobres AC y C'A' sobre el panel rico (como se trata de un yacimiento homogéneo, y que la frontera precisa de la ley es dudosa, nosotros hablaremos de kriging, y no de ensuciamiento. Emplearemos la palabra ensuciamiento en el caso en el cual los minerales ricos y pobres son geológicamente heterogéneos, y están separados por una frontera continua, representable por una curva relativamente regular, tal como B'D'E'C', que, por otra parte, no tiene ninguna razón para coincidir con la recta B'C'). En este caso el kriging conduce a ponderar las leyes de BB', CC', y de los trozos AC y C'A' por coeficientes convenientes, que serían - por ejemplo - 60% para BB', 27% para CC' y 13% para los dos trozos.

El efecto esencial de esta ponderación es eliminar - en promedio - un error sistemático por exceso, luego un error inquietante. Al considerar este objetivo primordial, la mejora de la precisión propiamente dicha, aparece como secundaria.

Proporcionaremos ahora, algunas indicaciones acerca de la manera como D.G. Krige formuló el problema en el comienzo de los años 50. Desde hacía tiempo, los mineros de Africa del Sur conocían este efecto de sobreestimación de los paneles ricos, y aplicaban ciertos factores correctivos empíricos. Para encontrar estos coeficientes, KRIGE parte de la hipótesis que el muestreo está bien hecho, dicho de otra forma, que la esperanza matemática de la ley de las muestras que se toman en un panel es igual a la ley media real de este panel. Si estas variables son gaussianas (en los yacimientos de Africa del Sur, las leyes eran en realidad lognormales, pero esto no cambia esencialmente nada), la recta de regresión que proporciona la esperanza condicional de la muestra en función de la ley del panel es entonces igual a la primera bisectriz.



La otra recta de regresión, la que entrega la esperanza de la ley media del panel en función de la ley de la muestra (que es la más interesante) tiene entonces una pendiente inferior a la unidad. Si la ley x de la muestra es superior a la media general m , la esperanza del panel es entonces inferior a x , e inversamente. KRIGE corrigió este error utilizando la ecuación:

$$(3-1) \quad y = m + \beta(x - m)$$

de esta segunda recta de regresión, con un coeficiente de regresión $\beta < 1$. Más precisamente, si ρ es el coeficiente de correlación, σ_x y σ_y las desviaciones estándares de las muestras y de los paneles, los dos coeficientes de regresión (1 y β respectivamente) son:

$$1 = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \quad \beta = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

y, por consiguiente:

$$\beta = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < 1$$

El coeficiente β es igual a la razón de las varianzas (en todo el yacimiento) de los paneles y de las muestras.

Un examen más detallado de (3-1) sugiere otras posibilidades. La ley media m , no es conocida en general, y se le estima tomando la media aritmética $m^* = (1/n) \sum x_i$ de las muestras disponibles en el yacimiento. Pero si se reemplaza m por m^* , (3-1) toma el aspecto:

$$Y^* = \sum_i a_i X_i$$

de una combinación lineal de las leyes disponibles X_i de las muestras, por otra parte con la condición:

$$\sum a_i = 1$$

Sobre la cual volveremos largamente: Pero ahora, en lugar de atribuir a todas las muestras exteriores el mismo peso $a_i = (1-\beta)/n$ sin diferenciar entre ellas, independientemente que se trate de muestras cercanas o alejadas, es natural buscar atribuir a cada una de ellas, un peso a_i apropiado, el cual considere su localización con respecto al panel a estimar. Se llega así a la investigación de los pesos óptimos a_i , es decir a la noción de krigado, tal como la hemos presentado anteriormente.

3-2. Notaciones

En todo el capítulo, utilizaremos el mismo sistema de notaciones:

- $Z(x)$ designa una F.A. (estacionaria o no), en general de esperanza no nula, e $Y(x)$ una F.A. (no necesariamente estacionaria ni intrínseca) de esperanza nula: por ejemplo, a menudo se tomará:

$$Y(x) = Z(x) - E[Z(x)]$$

- Se designará por S al conjunto de R^n sobre el cual se conoce experimentalmente la realización de la F.A. En el caso en que S es un conjunto finito, se designará, por índices griegos, los puntos experimentales x_α, x_β, \dots de S , es decir:

$$S = \{x_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}$$

- Dependiendo del caso, se buscará estimar, sea el valor $Z(x_0)$ en un punto x_0 que no pertenece a S , o bien el promedio $(1/V) \int_V Z(x) dx$ en un dominio V diferente de S , es decir, más generalmente (para reunir todos los casos posibles en una escritura única) un promedio:

$$Z_0 = \int p(dx) Z(x) \quad \left(\int p(dx) = 1 \right)$$

ponderado de $Z(x)$ por una medida p de suma unidad y de soporte disjunto de S .

- Para ello se formarán estimadores lineales a partir de los datos disponibles, que serán los $Z(x)$, $x \in S$. En el caso discreto se escribirá siempre:

$$Z_\alpha = Z(x_\alpha) \quad , \quad (x_\alpha \in S)$$

análogamente, para las funciones $f(x)$, $C(x, y)$, etc., ...:

$$f_\alpha = f(x_\alpha) \quad , \quad C(x_\alpha, x_\beta) = C_{\alpha\beta}$$

En el caso discreto, se tomará siempre la convención de suma mediante la cual se debe sumar sobre todo índice que aparezca dos veces (en general, una vez en posición inferior, o covariante, y una vez en posición superior, o contravariante). Así, se escribirá:

$$\lambda^\alpha Z_\alpha \text{ en vez de } \sum_\alpha \lambda^\alpha Z_\alpha$$

Los estimadores que utilizaremos se escribirán siempre en la forma:

$$Z^* = \lambda^\alpha Z_\alpha$$

En el caso en que S es infinito, se utilizarán, para formar los estimadores, medidas con soporte en S , es decir:

$$Z^* = \int_S \lambda(dx)Z(x)$$

se escribirá, simplemente:

$$Z^* = \int \lambda(dx)Z(x)$$

porque la medida λ , por definición, tiene su soporte en S.

Pasemos ahora a las ecuaciones del krigado, distinguiendo 3 casos (F.A. de esperanza nula o conocida; F.A. estacionaria de esperanza desconocida; F.A. intrínseca sin deriva). En todos los casos supondremos que la covarianza o el variograma son conocidos.

3.3 F.A. ESTACIONARIA DE ESPERANZA NULA O CONOCIDA A PRIORI.

Sea $Y(x)$ una F.A. de esperanza nula, $\sigma(x,y)$ su covarianza $S=\{x_\alpha\}$ el conjunto de los puntos experimentales, que en primer lugar supondremos finito, $Y_0 = \int p(dx)Z(x)$, la variable a estimar.

Como estimador se va a utilizar una combinación lineal:

$$Y_K = \lambda_K^\alpha Y_\alpha$$

y determinar los coeficientes λ_K^α por la condición de minimizar la esperanza de $E(Y_0 - Y_K)^2$, es decir (porque la esperanza de la F.A. es nula) la varianza $D^2(Y_0 - Y_K)$. Por otra parte esta varianza es:

$$E(Y_0 - Y_K)^2 = D^2(Y_0) - 2\lambda_K^\alpha \sigma_{\alpha Y_0} + \lambda_K^\alpha \lambda_K^\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

con:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha Y_0} = \int p(dx)\sigma(x_\alpha, x) \\ D^2(Y_0) = \iint p(dx)\sigma(x, y)p(dy) \end{cases}$$

Al derivar las derivadas parciales en λ_K^α de esta forma cuadrática, se obtiene el sistema:

$$(3-2) \quad \lambda_K^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha Y_0}$$

Este sistema que tiene N ecuaciones y N incógnitas es regular y admite una solución única si y solamente si la matriz de covarianzas $\sigma_{\alpha\beta}$ es estrictamente definida positiva (luego con determinante > 0), lo cual supondremos siempre. La varianza σ_K^2 (o varianza de krigado) de esta estimación óptima es igual al valor de la forma cuadrática $E(Y_0 - Y_K)^2$ cuando se toma como coeficientes λ_K^α la solución de (3-2). Por otra parte (3-2) implica:

$$\lambda_K^\alpha \lambda_K^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \lambda_K^\alpha \sigma_{\alpha Y_0}$$

Existe entonces, en el óptimo, igualdad entre el término rectangular y el término cuadrático, y se encuentra:

$$(3-3) \quad \sigma_K^2 = D^2(Y_0) - \lambda_K^\alpha \sigma_{\alpha Y_0}$$

En el caso del kriging puntual (estimación de $Y(x_0)$ para un punto x_0 que no pertenece a S) el sistema se reduce a:

$$(3-4) \quad \begin{cases} \lambda_K^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha, x_0} \\ \sigma_K^2 = \sigma_{x_0, x_0} - \lambda_K^\alpha \sigma_{\alpha, x_0} \end{cases}$$

La solución $\lambda_K^\alpha(x_0)$ depende, evidentemente de x_0 , y el estimador correspondiente:

$$\lambda_K^\alpha(x_0) = \lambda_K^\alpha(x_0) Y_\alpha$$

es un interpolador exacto, en el sentido de que:

$$Y_K(x_{\alpha_0}) = Y_{\alpha_0}$$

si x_0 viene a coincidir con un punto experimental $x_{\alpha_0} \in S$: esto se puede verificar directamente del sistema (3-4), pero es evidente a priori que el estimador Y_{α_0} es óptimo, porque es de varianza nula.

Cuando el conjunto S es infinito, se busca estimar Y_0 por medio de un estimador de la forma:

$$(3-5) \quad Y_K = \int_S \lambda_K(dx) Y(x)$$

y el sistema (3-2) queda:

$$(3-6) \quad \begin{cases} \int_S \lambda_K(dx) \sigma(x, y) = \sigma_{y, Y_0} & \forall y \in S \\ \sigma_K^2 = D^2(Y_0) - \int_S \lambda_K(dx) \sigma_{x, Y_0} \end{cases}$$

Pero aquí se imponen ciertas reservas. Si existe una medida λ_K con soporte en S verificando (3-6), esta solución es única, y (3-5) es el estimador óptimo. Sin embargo (a menos que la covarianza sea muy regular, ver ejercicio 8), no siempre existe una medida λ_K verificando este sistema. Se puede demostrar (ver [6]) que siempre existe un estimador óptimo único Y_K perteneciente al espacio de Hilbert $H(S)$ engendrado por los $Y(x)$, $x \in S$ (es decir: límite en media cuadrática de combinaciones lineales finitas de los $Y(x)$, $x \in S$), pero Y_K no admite necesariamente una representación de la forma (3-5) con una medida λ_K .

Se puede aclarar este resultado observando que los sistemas (3-4) y (3-6) pueden escribirse como:

$$(3-7) \quad \begin{cases} \text{Cov}(Y_K - Y_0, Y(y)) = 0 & (\forall y \in S) \\ \sigma_K^2 = D^2(Y_0) - \text{Cov}(Y_K, Y_0) \end{cases}$$

Así Y_K es el único elemento del espacio de Hilbert tal que $Y_K - Y_0$ es ortogonal a todos los elementos $Y \in H(S)$ (es decir, con covarianza nula con todo $Y \in H$). Esta propiedad caracteriza Y_K como la proyección ortogonal de Y_0 en $H(S)$, de donde resulta la existencia y la unicidad, pero esto no implica (salvo el caso finito en que H es un espacio euclídeo) la existencia de una representación integral de la forma (3-5)

Sea ahora $Z(x)$ una F.A. la cual admite una covarianza centrada $\sigma(x, y)$ y una esperanza constante $m = E[Z(x)]$, no nula, pero conocida. Llegamos inmediatamente al caso precedente al razonar sobre la F.A. $Y(x) = Z(x) - m$. El estimador óptimo es entonces:

$$(3-8) \quad Z_K = m + \lambda_K^\alpha (Z_\alpha - m)$$

o bien:

$$Z_K = m + \int_S \lambda_K(dx) (Z(x) - m)$$

Con coeficientes λ_K^α o una medida λ_K verificando los mismos sistemas (3-2) o (3-6). La varianza σ_K^2 mantiene la misma expresión.

3-4 FUNCION ALEATORIA ESTACIONARIA DE ESPERANZA DESCONOCIDA.

3-4-1 Las ecuaciones del krigado.

Sea ahora $Z(x)$ una F.A. de esperanza m constante pero desconocida, y $\sigma(x, y)$ su covarianza centrada. Se desea estimar:

$$Z_0 = \int p(dx) Z(x)$$

a partir de los Z_α , valores de la realización sobre un conjunto finito:

$$S = \{x_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}$$

por medio de una combinación lineal de la forma:

$$Z^* = \lambda^\alpha Z_\alpha$$

Debido a que la esperanza m no se conoce, es necesario imponer a los coeficientes λ_α la condición siguiente, llamada condición de universalidad:

$$(3-9) \quad \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1$$

En efecto, la mejor combinación lineal posible es la que minimiza la esperanza de $(Z_0 - Z^*)^2$. Se tiene:

$$\begin{aligned} E(Z^* - Z_0)^2 &= E(Z_0^2) - 2E(Z_0 Z^*) + E[(Z^*)^2] \\ &= m^2 \left(1 - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}\right)^2 + D^2(Z_0) - 2\lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha Z_0} + \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Como m es desconocido, solo se puede minimizar esta expresión cuando ella no depende de m , es decir, si (3-9) se verifica

También se puede justificar esta condición (3-9) imponiendo al estimador Z^* la condición de ser insesgado cualquiera que sea el valor (desconocido) de m (estimador universal). Se tiene:

$$E(Z_0 - Z^*) = m - m \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}$$

y, de nuevo, esta esperanza es nula cualquiera que sea m si se verifica (3-9).

Cuando esta condición (3-9) se verifica, $E(Z_0 - Z^*)$ es nula, y por consiguiente:

$$E(Z_0 - Z^*)^2 = D^2(Z_0 - Z^*) = D^2(Z_0) - 2\lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha, Z_0} + \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta}$$

Expresando que esta forma cuadrática es mínima considerando la condición (3-9), se obtiene el sistema siguiente donde figura un parámetro μ de Lagrange:

$$(3-10) \quad \begin{cases} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha, Z_0} + \mu \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por λ^{α} y teniendo en cuenta la segunda, se encuentra:

$$\lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha, Z_0} + \mu \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha, Z_0} + \mu$$

De donde se obtiene la expresión de la varianza del krigado, la cual hace intervenir el parámetro de Lagrange:

$$(3-10') \quad D^2(Z^* - Z_0) = D^2(Z_0) + \mu - \lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha, Z_0}$$

En el caso del krigado puntual de un punto x_0 , este sistema queda:

$$(3-11) \quad \begin{cases} \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha, x_0} + \mu \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \\ D^2(Z^* - Z_0) = \sigma_{x_0 x_0} + \mu - \lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha, x_0} \end{cases}$$

También se verifica directamente que el kriging puntual es un interpolador exacto.

Se demuestra que el sistema (3-10) es siempre regular. En el caso continuo, existe siempre un elemento único $Z^* \in H(S)$, límite en media cuadrática de combinaciones lineales finitas, las cuales verifican la condición (3-9), y tal que se tiene:

$$\text{Cov}(Z^* - Z_0, Z(y)) = 0 \quad \forall y \in S$$

Este elemento único es la proyección de Z_0 en la variedad lineal cerrada definida en $H(S)$ por la condición de universalidad, luego el estimador óptimo Z^* existe y es único. Aquí también Z^* no admite necesariamente una representación de la forma $\int_S \lambda(dx) Z(x)$ con una medida λ la cual verifica:

$$(3-12) \quad \begin{cases} \int_S \lambda(dx) \sigma(x, y) = \sigma_{y, Z_0} + \mu \quad \forall y \in S \\ \int_S \lambda(dx) = 1 \end{cases}$$

Pero, si se puede encontrar una medida λ la cual verifica (3-12), entonces:

$$Z^* = \int \lambda(dx) Z(x)$$

es la única solución del problema.

3-4-2 La estimación óptima de m.

En lugar de estimar una media espacial del tipo $\int p(dx) Z(x)$, se puede también buscar estimar la misma esperanza matemática $m = E[Z(x)]$. Formaremos el estimador óptimo m^* de m , y, en el párrafo siguiente, nos preguntaremos acerca de la relación entre m^* y Z^* . Nos limitaremos al caso en que S es finito, la extensión al caso infinito se puede hacer enseguida sin dificultad, con las reservas de uso respecto de la existencia de una representación de nuestros estimadores por medio de medidas con soporte en S .

Para estimar m , se forma una combinación lineal:

$$m^* = \lambda_0^{\alpha} Z_{\alpha}$$

Se impone a los coeficientes λ_0^α la condición de universalidad:

$$\sum_{\alpha} \lambda_0^\alpha = 1$$

Que expresa que m^* es insesgado cualquiera que sea el valor desconocido de m , y se eligen los coeficientes λ_0^α que minimizan $D^2(m^*) = E(m - m^*)^2$ considerando esta condición. De la relación:

$$D^2(m - m^*) = \lambda_0^\alpha \lambda_0^\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

se deduce que los λ_0^α constituyen la única solución del sistema siguiente, donde figura un parámetro de Lagrange μ_0 :

$$(3-13) \quad \begin{cases} \lambda_0^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \mu_0 \\ \sum_{\alpha} \lambda_0^\alpha = 1 \end{cases}$$

En el óptimo se encuentra que:

$$\lambda_0^\alpha \lambda_0^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \mu_0 \sum_{\alpha} \lambda_0^\alpha = \mu_0$$

de manera que el parámetro de Lagrange μ_0 es igual a la varianza del estimador óptimo:

$$(3-13') \quad D^2(m^*) = \mu_0$$

3-4-3 El teorema de aditividad.

Al final del párrafo (3-3), hemos indicado cómo formar el estimador óptimo cuando la esperanza m no es nula pero es conocida: se calculan los coeficientes λ_K^α óptimos del caso $m=0$, y se efectúa la corrección, muy simple, que consiste en reemplazar $Y(x)$ por $Z(x) - m$, es decir:

$$(3-8) \quad Z_K = m + \lambda_K^\alpha (Z_\alpha - m)$$

Probemos que el estimador óptimo Z^* del caso en que m no es conocida (párrafo 3-4-1) y el estimador óptimo m^* de m , están relacionados por la relación siguiente (muy similar a (3-8)):

$$(3-14) \quad Z_K^* = m^* + \lambda_K^\alpha (Z_\alpha - m^*)$$

con los mismos coeficientes λ_K^α , solución del sistema (3-2). Este resultado significa que se puede krigear como si m fuera conocida, con la condición de reemplazar el valor desconocido de m por su estimador óptimo m^* .

En efecto, consideremos el segundo miembro de (3-14):

$$m^* + \lambda_K^\alpha (Z_\alpha - m^*) = \left[\lambda_K^\alpha + \lambda_0^\alpha (1 - \sum_\beta \lambda_K^\beta) \right] Z_\alpha$$

Las cantidades:

$$\lambda'^\alpha = \lambda_K^\alpha + \lambda_0^\alpha (1 - \sum_\beta \lambda_K^\beta)$$

verifican la condición de universalidad, porque:

$$\sum_\alpha \lambda'^\alpha = \sum_\alpha \lambda_K^\alpha + \sum_\alpha \lambda_0^\alpha \left(1 - \sum_\beta \lambda_K^\beta \right) = 1$$

al considerar $\sum_\alpha \lambda_0^\alpha = 1$ (sistema (3-13)). Formemos ahora la expresión:

$$\lambda'^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \lambda_K^\beta \sigma_{\alpha\beta} + \left(1 - \sum_\gamma \lambda_K^\gamma \right) \lambda_0^\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

Según (3-2) y (3-13), queda:

$$\lambda'^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha, Z_0} + \left(1 - \sum_\gamma \lambda_K^\gamma \right) \mu_0$$

Luego, los λ'^β verifican bien la primera relación (3-11), con el parámetro de Lagrange

$$(3-15) \quad \mu = \left(1 - \sum_\gamma \lambda_K^\gamma \right) \mu_0$$

Según la unicidad de la solución, se tiene bien $\lambda'^\alpha = \lambda^\alpha$, luego la ecuación (3-14) es válida.

En lo que respectan las varianzas, se tiene igualmente un teorema de aditividad. En efecto, según (3-14) se tiene:

$$Z^* - Z_0 = (\lambda_K^\alpha Z_\alpha - Z_0) + (1 - \sum_\beta \lambda_K^\beta) m^*$$

Por otra parte, el sistema (3-2) expresa precisamente que $\lambda_K^\alpha Z_\alpha - Z_0$ está en correlación nula con todos los Z_β , luego también con sus combinaciones lineales, y, en particular, con m^* . Se tiene, entonces:

$$D^2(Z^* - Z_0) = D^2(\lambda_K^\alpha Z_\alpha - Z_0) + (1 - \sum_\beta \lambda_K^\beta)^2 D^2(m^*)$$

es decir:

$$(3-16) \quad D^2(Z^* - Z_0) = \sigma_K^2 + (1 - \sum_{\beta} \lambda_K^{\beta})^2 D^2(m^*)$$

El primer término es la varianza σ_K^2 del krigado cuando m es desconocido. El segundo proporciona una medida exacta de la pérdida de información que se tiene, relativo a Z_0 , cuando no se conoce el verdadero valor de m .

3-5 CASO DE UNA F.A.I. SIN COVARIANZA.

Sea ahora $Z(x)$ una F.A.I. sin deriva, con variograma γ pero no existe la covarianza. Para estimar:

$$Z_0 = \int p(dx)Z(x) \quad \text{con} \quad \int p(dx) = 1$$

buscaremos una combinación lineal

$$Z^* = \lambda^{\alpha} Z_{\alpha}$$

tal que:

- a/ el error $Z^* - Z_0$ sea una combinación lineal autorizada (párrafo 2-2-1), es decir su varianza es finita.
- b/ tal que esta varianza de estimación sea mínima.

La condición a/ proporciona:

$$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} - \int p(dx) = 0$$

es decir la misma condición de universalidad que en el párrafo anterior:

$$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1$$

Cuando esta condición se verifica, según el mecanismo de cálculo del párrafo (2-2-1) que se puede calcular la varianza de $Z^* - Z_0$ como si existiera una covarianza igual a $-\gamma$. Se puede entonces, transponer directamente el sistema (3-11): los coeficientes λ^{α} del estimador óptimo constituyen la única solución del sistema:

$$(3-17) \quad \begin{cases} \lambda^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = \int p(dx) \gamma(x, x_{\alpha}) - \mu \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

y la varianza σ_K^2 correspondiente es:

$$\sigma_K^2 = -\iint p(dx) \gamma(x, y) p(dy) + \mu + \lambda^{\alpha} \int p(dx) \gamma(x, x_{\alpha})$$

En el caso continuo (con las restricciones de uso respecto de la existencia de una representación de Z^* mediante una medida) se tiene, análogamente:

$$(3-18) \quad \begin{cases} \int_S \lambda(dx) \gamma(x, y) = \int p(dx) \gamma(x, y) - \mu \\ \int_S \lambda(dx) = 1 \\ \sigma_k^2 = - \int p \gamma p + \mu + \int p \gamma \lambda \end{cases}$$

Finalmente, en el caso puntual, se obtiene también un interpolador exacto.

Observación - Sea $\lambda^\alpha(x_0)$ la solución del krigeado en el punto x_0 :

$$(3-19) \quad \begin{cases} \lambda^\beta(x_0) \gamma_{\alpha\beta} = \gamma(x_0, x_\alpha) - \mu(x_0) \\ \sum_\alpha \lambda^\alpha(x_0) = 1 \\ \sigma_k^2(x_0) = \mu(x_0) + \lambda^\alpha(x_0) \gamma(x_0, x_\alpha) \end{cases}$$

según el carácter lineal de los segundos miembros de (3-17), la solución del krigeado de

$$\int p(dx) Z(x)$$

es:

$$\lambda^\alpha = \int p(dx) \lambda^\alpha(x)$$

Hay superposición, o combinación lineal de los krigeados puntuales: esta relación se extiende también al parámetro de Lagrange:

$$\mu = \int p(dx) \mu(x)$$

Sin embargo la varianza (3-17') no se obtiene por una combinación lineal de las varianzas $\sigma_k^2(x_0)$ de los krigeados puntuales.

3-6 EJERCICIOS SOBRE EL KRIGEADO.

Ejercicio 1 (Krigeado de un segmento de longitud 1) a/ Se tiene en la recta una F.A.I sin deriva cuyo variograma es $\gamma(h)$ y cuatro puntos de muestreo: $x_1, x_2=x_1+1, x_3=x_2+1, x_4=x_3+1$. Se desea krigear el segmento (x_2, x_3) de longitud 1 a partir de los valores Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 de la realización en x_1, x_2, x_3, x_4 . Escribir el sistema (3-17) utilizando las funciones auxiliares χ y F del párrafo 2-5-2.

(Solución: probar que $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda/2, \lambda_2 = \lambda_3 = (1-\lambda)/2$, lo cual es evidente por simetría, con λ solución del sistema:

$$\frac{\lambda}{2}\gamma(l) + \frac{1-\lambda}{2}\gamma(l) + \frac{\lambda}{2}\gamma(2l) = \chi(l) + \mu$$

$$\frac{1-\lambda}{2}\gamma(l) + \frac{1-\lambda}{2}\gamma(2l) + \frac{\lambda}{2}\gamma(3l) = 2\chi(2l) - \chi(l) + \mu$$

y eliminar el parámetro de Lagrange μ , de donde:

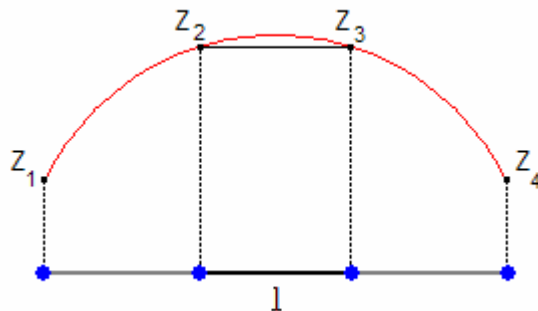
$$\lambda \left[\frac{1}{2}\gamma(3l) - \gamma(2l) - \frac{1}{2}\gamma(l) \right] = 2\chi(2l) - 2\chi(l) - \frac{1}{2}\gamma(2l)$$

b/ Aplicar al caso $\gamma(h) = |h|^\alpha$, $0 \leq \alpha < 2$, e interpretar.

(Solución: utilizar el ejercicio 5 del capítulo 2. Se encuentra:

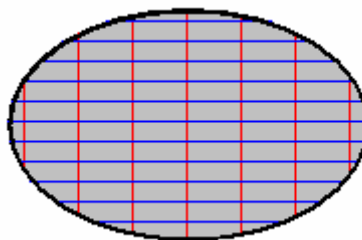
$$\lambda = \frac{2^\alpha - \frac{4}{\alpha+1}(2^\alpha - 1)}{1 + 2^{\alpha+1} - 3^\alpha}$$

Para $\alpha=0$, $\lambda=1/2$ (efecto de pepita puro, el estimador óptimo es la media aritmética de las 4 muestras). Cuando α aumenta, λ decrece, se anula para $\alpha=1$ (propiedad markoviana del variograma lineal) y es negativo para $1 < \alpha < 2$: para $\alpha > 1$, la realización presenta buenas propiedades de continuidad y el dibujo adjunto hace comprender que, para $(Z_1+Z_4)/2 < (Z_2+Z_3)/2$ (por ejemplo), el estimador debe ser mayor que $(Z_2+Z_3)/2$, luego $\lambda < 0$:



(comparar con el ejercicio 12 del capítulo 4)

Ejercicio 2 (Yacimiento reconocido por dos sistemas de líneas)- Sea un yacimiento reconocido por dos redes regulares de galerías paralelas a dos direcciones perpendiculares.



Sean Z_M y Z_T las leyes medias de las líneas, sea Z la ley media desconocida del yacimiento y sean $\sigma_T^2 = D^2(Z-Z_T)$ y $\sigma_M^2 = D^2(Z-Z_M)$ las varianzas de estimación del yacimiento por las solas líneas horizontales y las solas líneas verticales respectivamente. Se admite que (lo cual es verdadero con una buena aproximación) $E[(Z-Z_M)(Z-Z_T)]=0$.

a/ Probar que el estimador óptimo (krigeado) de Z es $Z^*=\lambda Z_M+(1-\lambda)Z_T$ con:

$$\lambda = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_M^2}$$

(ponderación por el inverso de las varianzas de estimación respectivas) y que la varianza correspondiente es:

$$\frac{\sigma_M^2 \sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_M^2}$$

(Solución: los ponderadores son de la forma λ y $1-\lambda$ debido a la condición de universalidad. Partir luego de:

$$D^2(Z-Z^*)=D^2[\lambda(Z-Z_M)+(1-\lambda)(Z-Z_T)]=\lambda^2\sigma_M^2+(1-\lambda)^2\sigma_T^2$$

y minimizar en λ .

Ejercicio 3 (Propiedad markoviana de la covarianza exponencial y del variograma lineal).

Este ejercicio preparatorio será de utilidad para la comprensión de los ejercicios siguientes.

a/ Una F.A. $Z(x)$ en la recta real es markoviana si, para todo x_0 , los $Z(x)$, $x > x_0$ y los $Z(x')$ son condicionalmente independientes a $Z(x_0)$ fijo. Probar que una F.A. estacionaria de orden 2 con ley gaussiana es markoviana si y solo si su covarianza centrada es de la forma $C(h)=Ce^{-a|h|}$. [Dos variable gaussianas son independientes cuando su coeficiente de correlación es nulo. Si X_1, X_2, X_3 son gaussianas, el coeficiente de correlación de X_1 y X_3 con X_2 fijo es:

$$\frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{23}^2)}}$$

Deducir que la F.A. es markoviana si y solo si $C(h+h')=C(h)C(h')$ (h, h' positivos)]

b/ Sea $Z(x)$ una F.A.I. en la recta real. Se dice que $Z(x)$ es a incrementos independientes si los $Z(x_i)-Z(y_i)$ son independientes cuando los intervalos (y_i, x_i) son disjuntos o tienen un punto en común. Probar que una F.A.I. cuyos incrementos son gaussianos es a incrementos independientes si y solo si su variograma es lineal (la F.A.I. constituye entonces un proceso de Wiener-Lévy, o proceso del movimiento browniano).

[Solución: un cálculo muy simple muestra que los incrementos son sin correlación si y solo si el variograma es lineal).

Ejercicio 4 (covarianza exponencial, caso continuo) - a/ Sea, en la recta, una F.A. $Y(x)$ de esperanza nula y sea $C(h)=e^{-a|h|}$ su covarianza. Se conoce la realización de $Y(x)$ en el intervalo $(-R,R)$. Krigear el punto $x_0=R+h$ ($h>0$).

[Solución: si $Y(x)$ es gaussiana, se deduce de la propiedad markoviana del ejercicio 3 que el estimador óptimo es $e^{-a|h|}Y(R)$ con la varianza $1-e^{-2a|h|}$. Esta propiedad, ligada exclusivamente a la covarianza permanece válida si $Y(x)$ no es gaussiana. Se verificará directamente que la medida $\lambda_K=e^{-a|h|}\delta_R$ (δ_R = Dirac localizada en el punto R) es efectivamente la solución de (3-6) para todo $y \leq R$, y se calculará directamente σ_K^2].

b/ Sea en la recta una F.A. de esperanza m desconocida y sea $C(h)=e^{-a|h|}$ su covarianza centrada. Probar que el estimador óptimo m^* de m (cuando la realización es conocida en $(-R,R)$) verifica:

$$m^* = \frac{ar}{1+ar} \bar{Z} + \frac{1}{1+ar} \frac{Z_R + Z_{-R}}{2} \quad (\bar{Z} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R Z(x) dx)$$

$$D^2(m^*) = \frac{1}{1+ar}$$

[Solución: establecer las relaciones:

$$\frac{1}{2} \int (\delta_R + \delta_{-R}) e^{-a|x-y|} = e^{-ar} \cosh(ay)$$

y:

$$\int_{-R}^R e^{-a|x-y|} dx = \frac{2}{a} - \frac{2}{a} e^{-ar} \cosh(ay) \quad -R \leq y \leq R$$

deducir que la medida:

$$\lambda_0 = \frac{1}{1+aR} \nu_0$$

es la solución buscada, con el parámetro de Lagrange:

$$\mu_0 = D^2(m^*) = \frac{1}{1+ar}]$$

c/ En las mismas condiciones que en b/, krigear el punto $x_0=R+h$ ($h>0$), aplicando el teorema de aditividad.

[Solución:

$$Z^* = e^{-a|h|} Z_R + (1 - e^{-a|h|}) m^*$$

$$D^2(Z_{x_0} - Z^*) = 1 - e^{-2a|h|} + \frac{(1 - e^{-a|h|})^2}{1+aR}$$

]

Ejercicio 5 (covarianza exponencial, caso discreto) a/ Sea, en la recta, $Y(x)$ una F.A. de esperanza nula y de covarianza estacionaria $C(h)=e^{-a|h|}$. Se conoce la realización en los $n+1$ puntos de abscisa $0, 1, 2, \dots, n$. Formar el krigado puntual del punto $x_0=i+\varepsilon$ ($0<\varepsilon<1$), ($i<n$).

[Solución: según la propiedad markoviana, se debe buscar una solución de la forma $Y_k=\lambda Y_i+\lambda' Y_{i+1}$. Probar que el sistema (3-4) se verifica para $\lambda_j=0$ ($j\neq i, j\neq i+1$):

$$\lambda_i = \lambda = \frac{\sinh(1-\varepsilon)a}{\sinh(a)} \quad \lambda_{i+1} = \lambda' = \frac{\sinh(\varepsilon a)}{\sinh(a)}]$$

b/ Sea, en las mismas condiciones, $Z(x)$ una F.A. de covarianza $C(h)=e^{-a|h|}$ y con esperanza m desconocida. Probar que el estimador óptimo m^* es de la forma:

$$m^* = (1-b)\bar{Z} + b \frac{Z_0 + Z_n}{2} \quad (\bar{Z} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n Z_i)$$

con:

$$b = \frac{2}{(n+1)e^a - (n-1)}, \quad \mu_0 = D^2(m^*) = \frac{1+e^a}{(n+1)e^a - (n-1)}$$

[Solución: establecer primero la relación:

$$\sum_{j=0}^n e^{-a|i-j|} = \frac{e^a + 1}{e^a - 1} - \frac{e^{-ai} + e^{-(n-1)a}}{e^a - 1}$$

buscar, para el sistema (3-13), una solución de la forma:

$$\lambda^\beta = A + B(\delta_0^\beta + \delta_n^\beta)$$

e identificar].

c/ En las mismas condiciones, krigear un punto x_0 comprendido entre i e $i+1$ cuando m es desconocido.

[Solución: aplicar la relación de aditividad).

Ejercicio 6 (variograma lineal) a/ Sea, en la recta, una F.A.I. sin deriva y $\gamma(h)=|h|$ su variograma. Se conoce la realización en $x=R$ y en un número finito o infinito de puntos $\langle R$. Probar que el krigado de $x_0=R+h$ ($h>0$) es $Z(R)$ mismo, con $\sigma_k^2=2|h|$.

[Solución: esta solución la sugiere la propiedad markoviana de $|h|$. Verificar que la medida $\lambda(dx)=\delta_R$ es bien la solución del sistema (3-18), para todo $y\leq R$].

b/ Se supone ahora que la realización es conocida en dos puntos x_1 y x_2 y en un número cualquiera de puntos exteriores al intervalo (x_1, x_2) . Probar que el krigado de un punto x_0 comprendido entre x_1 y x_2 es:

$$Y^*(x_0) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} Y(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} Y(x_2) \quad x_1 \leq x_0 \leq x_2$$

$$\sigma_K^2 = 2 \frac{(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

[Solución: la propiedad markoviana sugiere que la solución es del tipo $\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2$. Mostrar que con $\lambda = (x_2 - x_0)/(x_2 - x_1)$ (interpolación lineal entre los dos puntos más cercanos conocidos) la medida:

$$\nu = \lambda \delta_{x_1} + (1-\lambda) \delta_{x_2}$$

verifica:

$$\int \nu(dx) |x - y| = |x_0 - y| \quad y \leq x_1 \text{ o } y \geq x_2$$

para $y < x_1$ o $y > x_2$. El parámetro de Lagrange es nulo, y el cálculo de σ_K^2 es inmediato].

Ejercicio 7 (variograma lineal con efecto de pepita) - Se conoce, en el segmento $(-R, R)$, una realización de una F.A.I. cuyo variograma comporta un término lineal y un término de pepita. Como estamos en el caso continuo, se tomará $\gamma = |h| - \delta$ (efecto de pepita representado por una medida de Dirac). Krigear el punto $x_0 = R + h$ ($h > 0$): para ello:

a/ Establecer las relaciones:

$$\int_{-R}^R |x - y| \cosh(ax) dx = \frac{2R}{a} \sinh(aR) + \frac{2}{a^2} \cosh(ay)$$

$$\int_{-R}^R |x - y| \sinh(ax) dx = -\frac{2R}{a} \cosh(aR) + \frac{2}{a^2} \sinh(ay)$$

con:

$$a = \sqrt{\frac{2}{C}}$$

Deducir que:

$$\int_{-R}^R (|x - y| dx - C \delta(dx)) \cosh(ax) = \frac{2R}{a} \sinh(aR) y$$

$$\int_{-R}^R (|x - y| dx - C \delta(dx)) \sinh(ax) = -\frac{2R}{a} \cosh(aR) y$$

b/ Mostrar que la función:

$$\lambda(x) = \frac{a \operatorname{senh}(ax)}{2 \operatorname{cosh}(aR)} + \frac{a \operatorname{cosh}(ax)}{2 \operatorname{senh}(aR)}$$

verifica el sistema:

$$\int_{-R}^R \lambda(x) dx = 1$$

$$\int_{-R}^R (|x-y| dx - C \delta(dx)) \lambda(x) = -y + R$$

Deducir que el estimador óptimo es:

$$Z^*(x_0) = \int_{-R}^R \lambda(x) Z(x) dx$$

con el parámetro de Lagrange $\mu = x_0 - R = h$ y la varianza:

$$\sigma_K^2 = 2h + \frac{1}{a} \operatorname{cosh}(aR)$$

[observar que la presencia de un efecto de pepita ha hecho desaparecer la propiedad de Markov. La densidad $\lambda(x)$ atribuye pesos positivos a todas las muestras. Se dice que el efecto de pepita levanta las pantallas].

Ejercicio 8 (exponencial de Gauss) - Cuando la covarianza es muy regular, puede suceder que la solución del kriging no sea representable por una medida. Por ejemplo, consideremos sobre la recta una F.A. estacionaria la cual admite la covarianza $C(h) = \exp(-h^2/2)$ y una esperanza nula. Se desea krigear el punto $x_0 = R+h$, conociendo la realización en $(-R, R)$. Si el estimador óptimo tiene una representación del tipo:

$$Y_K = \int_{-R}^R \lambda(dx) Y(x)$$

entonces la medida λ verifica:

$$\int_{-R}^R \lambda(dx) e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} = e^{-\frac{(x_0-y)^2}{2}} \quad \forall y \in (-R, R)$$

Probar que no puede existir una medida λ que verifique esta relación.

[Solución: la medida:

$$\nu(dx) = e^{-\frac{x^2}{2}} \lambda(dx)$$

debería verificar la ecuación:

$$\int_{-R}^R e^{xy} v(dx) = e^{-\frac{x_0^2}{2} + x_0 y}$$

Según las propiedades de la transformada de Laplace, la única medida que verifica esta ecuación es:

$$e^{-x_0^2/2} \delta_{x_0}$$

pero su soporte no está en $(-R, R]$.

Ejercicio 9 (krigeado en las grandes mallas) (ver ejercicios 12 a 14 del capítulo 2) - Se desea krigear una superficie S con la ayuda de n+k muestras, de las cuales k fueron tomadas al interior de S y n al exterior. Se supone que las distancias entre dos muestras distintas y la distancia entre cada muestra a la frontera de S son todas mayores que el alcance. Las notaciones son las mismas que la de los ejercicios 12 a 14 del capítulo 2.

a/ Escribir las ecuaciones del krigeado. Probar que estas se reducen a:

$$\begin{aligned} C\lambda_i &= \sigma_{Si} + \mu \\ \sum \lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

con $\sigma_{Si}=0$ para las muestras exteriores y $\sigma_{Si}=\pi A_1/S$ para las muestras interiores.

Deducir que las k muestras interiores tienen el mismo peso λ y las n muestras exteriores el mismo peso λ' , con:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n+k} + \frac{n}{n+k} \pi \frac{A_1}{CS} \\ \lambda' &= \frac{1}{n+k} - \frac{k}{n+k} \pi \frac{A_1}{CS} \end{aligned}$$

b/ Calcular la varianza de este krigeado.

[Solución:

$$\sigma_K^2 = C - F(S) - \frac{2k}{n+k} \frac{\pi A_1}{S} - \frac{nk}{n+k} \left(\pi \frac{A_1}{S} \right)^2 \frac{1}{C} + \frac{C}{n+k}$$

en particular, si S es grande, se tiene la fórmula aproximada:

$$\sigma_K^2 \approx \frac{C}{n+k} + \frac{n-k}{n+k} \pi \frac{A_1}{S}]$$

c/ Comparar estos resultados con la fórmula (3-1) del párrafo 3-1, y probar que, en el caso de las grandes mallas, el estimador óptimo es

idéntico al que KRIGE obtuvo originalmente por su método de regresión lineal.

[Solución: el coeficiente de regresión es:

$$\beta = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{C - F(S)}{C/k} = \frac{k \pi A_1}{C S}$$

Cuando m es conocido, el estimador óptimo es idéntico al que proporciona la regresión lineal:

$$Z_k = m + \beta \left(\frac{1}{k} \sum_i X_i - m \right)$$

siendo X_i las leyes de las muestras interiores. Según (3-4-3) se debe tomar:

$$Z^* = m^* + \beta \left(\frac{1}{k} \sum_i X_i - m^* \right)$$

con:

$$m^* = \frac{1}{n+k} \left(\sum_i X_i + \sum_j Y_j \right)$$

(Y_j son las muestras exteriores). Se encuentra así λ y λ' .

d/ Calcular la varianza a partir del teorema de aditividad:

[Solución: si m es conocido, la varianza es:

$$\sigma_y^2(1 - \rho^2)$$

Probar que:

$$\rho^2 = \beta = \frac{k}{C} \pi \frac{A_1}{S}$$

Se deducirá entonces que:

$$\sigma_k^2 = \sigma_y^2(1 - \beta) + (1 - \beta)^2 D^2(m^*) = (1 - \beta) \pi \frac{A_1}{S} + (1 - \beta)^2 \frac{C}{n+k}$$

y se verificará que este resultado es idéntico al del párrafo b/].

CAPITULO 4

EL KRIGEADO UNIVERSAL

4-1 INTRODUCCION

4-1-1 Crítica de los métodos de mínimos cuadrados.

Nos proponemos, en lo que sigue, de formular, en términos de funciones aleatorias no estacionarias el problema de la estimación de las derivas¹² (o tendencias), y demostrar que el problema admite una solución óptima, bastante diferente de las soluciones propuestas por los métodos llamados "trend surface analysis": estos últimos, que consisten, en general, en ajustar un polinomio por el método de los mínimos cuadrados, proporcionan una sensación de incomodidad: en efecto, se tiene la impresión de violentar la naturaleza, imponiéndole a la fuerza una expresión polinómica, la cual no tiene ninguna razón a priori de presentar una mínima relación con la estructura real del fenómeno que se quiere representar. De una manera más precisa, haremos tres reproches principales a estos métodos de mínimos cuadrados:

En primer lugar, estos métodos implican a menudo una confusión de tipo operativo y conceptual. Pocos autores se dan el trabajo de definir la significación de este "trend" que ellos estiman por un método de mínimos cuadrados. Se tiene a menudo la impresión que este famoso trend no es más ni menos el resultado numérico al cual conduce un modo operativo - es decir, quizás, un puro y simple artefacto - Analizando, parece que el término poco claro de "trend" se refiere, uno después de otro, y, a veces simultáneamente en un mismo contexto, a tres nociones bien distintas, por lo menos: si $Z(x)$ es la variable regionalizada de interés, y $P(x)$ el polinomio ajustado por mínimos cuadrados a partir de valores experimentales en los puntos x_1, x_2, \dots , se puede atribuir al valor en x de $P(x)$ una de las significaciones incompatibles siguientes:

a/ $P(x)$ es (una estimación de) la esperanza a priori $E(Z(x))$: este sentido a/ es el que siempre daremos al término "deriva".

b/ $P(x)$ es una estimación del verdadero valor (desconocido) $Z(x)$ tomado por la variable regionalizada en el punto x : este sentido b/ que se asocia a nuestro término "krigeado puntual". Más precisamente, el krigeado puntual será el mejor estimador lineal de $Z(x)$ construido a partir de los datos disponibles $Z(x_1), Z(x_2), \dots$

c/ Finalmente, se atribuye a veces a $P(x)$ el sentido de una "media móvil". $P(x_0)$ sería entonces (una estimación) del valor medio de $Z(x)$ en una zona más o menos grande (a precisar) la cual contiene el punto x_0 . En nuestra terminología, el krigeado designará el mejor estimador lineal de esta media móvil.

Estas distinciones tienen una gran importancia teórica y práctica. Es esencial definir con precisión el objetivo que se desea (a/ b/ o c/). En cartografía submarina, son los valores verdaderos $Z(x)$ que hay que

² Para evitar cualquier antropomorfismo, utilizaremos siempre el término "deriva" en lugar de "tendencia", o "trend".

estimar y cartografiar (caso b/). En una explotación minera, el interés está en la ley media de un panel de tamaño dado (caso c/). Finalmente, en ciertos estudios de carácter más fundamental, se busca reconstituir los mecanismos generales que han dado nacimiento al fenómeno que se estudia, es en la deriva misma (caso a/) en la cual se espera encontrar un reflejo de la estructura de estos mecanismos. En geofísica, por ejemplo, la noción de anomalía regional, corresponde a nuestra noción de deriva.

Llegamos así al segundo cuestionamiento que se puede formular a los métodos de mínimos cuadrados. No es posible que el mismo polinomio resuelva a la vez los tres problemas a/ b/ y c/. Veremos que $P(x)$ constituye, en efecto, una solución del problema a/. Pero, en general, no es la mejor solución posible: estos métodos "llave maestra" que utilizan siempre los mismos polinomios, cualesquiera que sean las características estructurales del fenómeno que se estudia, tienen poca chance, en general, de conducir a un óptimo.

Finalmente, en tercer lugar, los métodos de mínimos cuadrados no permiten de ninguna manera evaluar el error que se comete al estimar la deriva con la ayuda de un polinomio $P(x)$. La varianza de los residuos, contrariamente a lo que se cree a veces, no es una varianza de estimación: la varianza de las desviaciones $Z(x_i) - P(x_i)$ en los puntos x_i en los cuales la realidad es conocida, es, por construcción, sistemáticamente más débil (en realidad bastante más débil) que la varianza de la desviación $Z(x) - P(x)$ en un punto x diferente de los x_i . Luego, la varianza de los residuos no es la varianza de estimación de $Z(x)$ (problema b/). Tampoco es la varianza de estimación de la deriva (problema a/), porque esta vez no hay ninguna relación conceptual entre la desviación $Z(x_i) - P(x_i)$ y la calidad de $P(x_i)$ considerado como un estimador de la esperanza a priori $E[Z(x_i)]$.

Si embargo, si los métodos de mínimos cuadrados se revelaban como insatisfactorios, el objetivo que perseguían, y que no alcanzaban o lo alcanzaban mal, corresponde a un problema muy real y muy importante. En la realidad existen fenómenos que absolutamente no se pueden asimilar a (realizaciones de) funciones aleatorias estacionarias. Retomando el ejemplo de la cartografía submarina, es cierto que la profundidad va en aumento cuando nos alejamos de las costas. Ensayaremos formular y resolver, en el marco de la teoría de las funciones aleatorias no estacionarias, los problemas importantes que crean las derivas.

4-1-2 Posición del problema e hipótesis generales.

La variable regionalizada que se estudia será interpretada como una realización de una función aleatoria $Z(x)$ en general no estacionaria. En un primer grupo de hipótesis, supondremos que $Z(x)$ admite momentos de orden 1 y 2:

$$(I) \quad \begin{cases} E[Z(x)] = m(x) \\ E[Z(x)Z(y)] = m(x)m(y) + C(x,y) \end{cases}$$

Diremos que la función $m(x)$ es deriva de la F.A. $Z(x)$. Nos parece, en efecto, que la única definición conceptualmente clara de la noción de deriva es bien esta: momento de orden 1 de una F.A. no estacionaria. La

función $C(x,y)$ que depende por separado de los puntos x e y es la covarianza (no estacionaria) habitual.

En muchos casos (como lo muestra la práctica de la Geoestadística) estas hipótesis (I) serán restrictivas, y deberán ser reemplazadas por las hipótesis (I') siguientes que expresan que los incrementos de la función aleatoria $Z(x)$ (y no $Z(x)$ misma) admiten momentos de orden 1 y 2:

$$(I') \quad \begin{cases} E[Z(x) - Z(y)] = m(x) - m(y) \\ \frac{1}{2} D^2[Z(x) - Z(y)] = \gamma(x, y) \end{cases}$$

En este caso la deriva queda determinada salvo una constante, porque, en general, la esperanza $E[Z(x)]$ no existe: el punto de vista de las hipótesis (I') consiste entonces en estudiar la función aleatoria $Z(x)$ salvo una constante aditiva. La función $\gamma(x,y)$ es el variograma habitual. (En el espacio de una dimensión, procesos tan usuales como el movimiento browniano o los procesos de Poisson proporcionan ejemplos simples de F.A. sin esperanza, los cuales verifican las hipótesis (I') pero no las hipótesis (I).

Vamos a resolver los dos problemas siguientes (relacionados, pero diferentes): conociendo los valores numéricos tomados sobre un conjunto S (el conjunto de los puntos donde se dispone de datos experimentales) por una realización $z(x)$ de la F.A. $Z(x)$, debemos:

- 1/ Estimar la función $m(x)$ (en S y al exterior de S): es el problema a/ anterior.
- 2/ estimar $z(x)$ en un punto $x \notin S$ (problema b/), o, más generalmente, estimar una "media móvil" $\int \mu(dx)z(x)$ en que μ es una medida dada cuyo soporte es disjunto de S (problema c/).

Además, deberemos ser capaces de representar por varianzas de estimación los errores cometidos en estas operaciones, y esforzarnos de elegir nuestros estimadores de manera de minimizar (si se puede) esta varianza de estimación.

Respecto de este último punto, indiquemos que nos limitaremos a investigar el mejor estimador lineal de $m(x)$ o de $\int \mu(dx)z(x)$ que se pueda formar a partir de los valores numéricos $z(y)$, $y \in S$: los estimadores no lineales son mucho más complicados para ser operativos, y, por otra parte, sus propiedades no solo están ligadas a los momentos de orden 1 y 2, que figuran en las hipótesis (I) o (I'), sino que hacen intervenir también la totalidad de la ley espacial de la F.A. $Z(x)$. (En el caso en que esta ley espacial es gaussiana, se sabe, por otra parte, que el mejor estimador lineal posible coincide con el mejor estimador lineal).

Formulado el problema en toda su generalidad (las funciones $m(x)$ y $C(x,y)$ son completamente desconocidas), nuestro problema es manifiestamente insoluble, y, por otra parte, desprovisto de sentido. Pero en los problemas concretos, la noción de deriva solo presenta una significación real en el caso en que la función $m(x)$ varía de una manera continua y regular respecto de la escala de trabajo (y de los datos disponibles experimentalmente): si la función $m(x)$ fuera irregular y caótica a esta escala, se debería considerar que $m(x)$ misma como una realización de una

nueva función aleatoria. Del punto de vista físico (y no matemático) la noción de deriva está así manifiestamente ligada a la de escala. Si se estudian las cotas topográficas, a la escala de una decena de metros, la noción de montaña se traduce por una deriva; a la escala de una decena de kilómetros, solo le corresponde una función aleatoria, y la deriva, a esta escala, expresará más bien la noción de cadena de montañas (ver también la noción de estructuras anidadas, [7]).

Pero esta condición de regularidad impuesta a priori a la función $m(x)$, para que la noción de deriva tenga un contenido físico real, implica también que una estimación de $m(x)$ debe ser siempre más o menos posible localmente. Esta condición expresa en efecto que - en una cierta vecindad V de un punto x_0 dado - la función $m(x)$ debe ser aproximada con una excelente precisión por una función de la forma:

$$(II) \quad m(x) \approx f(x) = \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} f^{\ell}(x) = a_{\ell} f^{\ell}(x)$$

En que los $f^{\ell}(x)$ son funciones conocidas, elegidas una vez para siempre (por ejemplo polinomios) y los a_{ℓ} coeficientes desconocidos: respecto de la vecindad V de x_0 en la cual la aproximación (II) es aceptable, sin ser demasiado grande, debe - si el problema tiene sentido - contener un número suficiente de puntos experimentales para que sea posible estimar los $k+1$ coeficientes a_1, a_2, \dots, a_k .

Queda el problema de la función $C(x, y)$, o $\gamma(x, y)$ sobre la cual no se sabe nada, tampoco a priori. Pero una vez más, y por las mismas razones, se puede suponer que C o γ son localmente asimilables a funciones de tipo conocido y que se deforman lentamente en el espacio, a la escala a la cual se trabaja.

El caso más favorable será aquel de una función γ (o C) de la forma:

$$\gamma(x, y) = \varpi r \quad (r = |x - y|)$$

(variograma lineal): Basta, para esto, que el verdadero variograma o la verdadera covarianza tenga un comportamiento lineal en una vecindad de $x=y$ hasta distancias comparables a las dimensiones de la vecindad V : esta circunstancia es tan común que a veces no se cree.

Sin embargo, en general, además del factor ϖ , será conveniente introducir uno o más parámetros suplementarios. Por ejemplo, se tomará:

$$\gamma(x, y) = \varpi r^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 2)$$

o también:

$$\gamma(x, y) = \varpi e^{-ar}$$

En el primer caso, el parámetro α está en relación con el grado de continuidad de la variable regionalizada. En el segundo (covarianza exponencial), el parámetro a , o más bien su inverso, proporciona una medida del alcance del fenómeno (distancia a partir de la cual las correlaciones se terminan).

Naturalmente, el control experimental de una hipótesis de este tipo, y de la estimación de los parámetros correspondientes (ϖ y sobretodo α o a) implicará problemas bastante delicados de estadística matemática: a pesar de su importancia crucial para las aplicaciones, no será posible tratar aquí completamente estos problemas, y apenas los evocaremos.

En resumen, el problema que debemos tratar se encuentra esquematizado como sigue: se tiene una F.A. $Z(x)$ la cual verifica las hipótesis (I) o (I'). En una vecindad V de x_0 , la deriva $m(x)$ es de la forma (II) con coeficientes a_i desconocidos. Se conoce a priori (eventualmente salvo un factor) la covarianza $C(x,y)$ o el variograma $\gamma(x,y)$. Finalmente, se conocen los valores numéricos de (la realización de) $Z(x)$ para los puntos que pertenecen a un conjunto $S \subset V$. Se quiere encontrar los mejores estimadores lineales:

1/ de los coeficientes a_i desconocidos de la deriva.

2/ del valor numérico de (la realización de) $Z(x)$ en $x_0 \notin S$ (pero $x_0 \in V$) o de $\int \mu(dx)Z(x)$ para una medida μ cuyo soporte es disjunto de S .

3/ deseamos además, poder controlar la validez de la hipótesis que hemos realizado al elegir una expresión matemática particular para la covarianza o el variograma, y estimar los parámetros de esta expresión.

Para simplificar la exposición, no formularemos la teoría en términos de espacios de Hilbert. Luego, habrá que referirse a [6] para ciertas demostraciones (sobre todo para establecer los teoremas de existencia y de unicidad). Utilizaremos las notaciones del párrafo 3-2. No habrá dificultades reales, salvo el caso en que el conjunto S de datos experimentales es infinito: la existencia (en el sentido de los espacios de Hilbert) de nuestros estimadores óptimos está siempre asegurada, pero no resulta necesariamente que los estimadores admitan representaciones del tipo $\int \lambda(dx)Z(x)$ con medidas λ con soporte en S . Escribiremos, en general, en adelante, las ecuaciones integrales relativas al caso continuo sin repetir explícitamente esta reserva esencial, que el lector debe siempre guardar presente en su espíritu.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] CARLIER, A. Contribution aux méthodes d'estimation des gisements d'uranium. Tesis. Fontenay aux Roses, 1964
- [2] FORMERY, Ph. Cours de Géostatistique. Ecole des Mines de Nancy, 1965 (no publicado).
- [3] MATHERON, G. Traité de Géostatistique Appliquée. Tomo 1 (1962), Tomo 2 (1963). Ediciones Technip, Paris.
- [4] MATHERON, G. Les Variables Régionalisées et leur estimation (Tesis). Masson, Paris, 1965.
- [5] MATHERON, G. Osnovy Prikladnoi Geostatistiki. Ediciones MIR, Moscú, 1968.
- [6] MATHERON, G. Le Krigeage Universel. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fascicule 1, Fontainebleau, 1968.
- [7] SERRA, J. Echantillonnage et estimation locale des phénomènes de transition minières. Tesis. Nancy, 1967.
- [8] FORMERY, Ph. y Matheron, G. Recherche d'optima dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers. Annales des Mines, Mayo y Junio 1963.