

G. MATHERON

**LAS VARIABLES REGIONALIZADAS
Y SU ESTIMACION**

**Una aplicación de la Teoría de las Funciones
Aleatorias a las Ciencias de la Naturaleza**

Traducido al español por

Marco Antonio Alfaro Sironvalle

2008

TESIS

PRESENTADA

A LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
UNIVERSIDAD DE PARIS

PARA OBTENER

EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS

POR

MATHERON Georges

TESIS. – LAS VARIABLES REGIONALIZADAS Y SU
ESTIMACION

Sostenida el 10 de Noviembre de 1965 delante la Comisión de examen.

Sres. SCHWARTZ	Presidente
FORTET	Examinador
CAILLEUX	Examinador

PREFACIO

Es para mí extremadamente agradable expresar mi reconocimiento a todos aquellos que me han guiado, aconsejado, animado en el desarrollo del trabajo que presento aquí: a su comprensión e indulgencia. Agradezco en particular:

Al Profesor FORTET, que ha aceptado dirigir mi trabajo y ser el Profesor Informante.

Al Profesor L. SCHWARTZ quien, además de inculcarme el rigor por un uso torpe de la teoría de las Distribuciones, me ha hecho el gran honor de presidir mi jurado de tesis.

Al Profesor CAILLEUX quien, al aceptar participar en mi jurado, me ha aportado una ayuda muy preciosa dado que venía del mundo de las Ciencias de la Tierra.

En el curso de diez años de actividad práctica, de la cual el presente trabajo trata de hacer una síntesis teórica, son numerosos los que me han ayudado, sea abriéndome, con su autoridad, campos nuevos de aplicaciones, sea haciéndome beneficiar de su experiencia práctica a través de fructuosos cambios de ideas, sea finalmente, al mío o en colaboración, pero siempre en un clima de perfecto acuerdo. Yo les debo mucho, y, no pudiendo agradecerles individualmente, les ruego encontrar aquí la expresión de mi gratitud.

Georges Matheron
París, Francia, 1965

PREFACIO DEL TRADUCTOR

Pongo a disposición de la comunidad geoestadística de habla hispana la Tesis de Doctor de Estado del Maestro Georges Matheron (1930-2000), publicada en 1965. A mi juicio, esta obra contiene el pasado, el presente y el futuro de la geoestadística.

El nivel matemático de la obra es bastante elevado, pero su contenido está siempre orientado a las aplicaciones, al uso de modelos probabilísticos para el estudio de fenómenos naturales únicos. Las conclusiones metodológicas de cada capítulo son fundamentales desde el punto de vista epistemológico y para las aplicaciones prácticas.

Para mi fue enriquecedor realizar la traducción de esta obra. He tratado de omitir, dentro de lo posible, las referencias al modelo de De Wijs, ya superado con la aparición de las computadoras.

Por fin logré entender la teoría de las Distribuciones de Laurent Schwartz: Si antes, para los problemas de estimación pensaba en términos de espacios de Hilbert, ahora, con esta teoría pienso en las leyes de mineral como una función generalizada.

En esta obra el tratamiento de la teoría de las variables regionalizadas es notable, sobre todo en lo que respecta a la teoría transitiva, las varianzas de estimación, las relaciones entre una variable regionalizada y su campo V y los límites de aplicación de la teoría intrínseca. Después de leer profundamente este texto, es difícil ser un detractor del concepto de varianza de estimación.

A Rodrigo Segovia
Quien fuera un gran geoestadístico y amigo.

Marco Alfaro
Santiago, Chile, 2008

Maestro, di; che terra e questa?

INTRODUCCION

1.- Noción de variable regionalizada.

En un gran número de actividades humanas, principalmente en las Ciencias de la Tierra, el arte de las minas, etc... interesa estudiar la variación espacial de ciertas magnitudes, que llamaremos, de manera general, *variables regionalizadas*. Como ejemplos simples de variables regionalizadas, citemos entre otras: las densidades de población humana en una zona geográfica, la potencia (o el espesor) de una formación geológica, la ley de un metal dado en un yacimiento minero, etc...

El técnico se puede interesar a esta magnitudes por razones de tipo puramente utilitario. Por ejemplo, para un minero, se puede tratar de estimar las reservas de un yacimiento, en tonelaje y en ley, a partir de un muestreo fragmentario, y, en la medida de lo posible, acompañar estas estimaciones de un cálculo de error. Pero también de una manera más general, puede interesarse en estas magnitudes para tratar de hacer comprensible el fenómeno natural (regionalizado) que estas magnitudes representan. Se trata entonces de extraer de la masa de datos numéricos brutos disponibles, los grandes rasgos estructurales y las características mayores de un fenómeno natural.

Estos dos puntos de vista no se oponen entre sí. En efecto, para resolver correctamente un problema esencialmente práctico, como el cálculo del error posible cometido en la estimación de un yacimiento minero, es imperativo tomar en cuenta ciertas características estructurales de la variable regionalizada, tal como su continuidad. El ejemplo elemental siguiente lo muestra de manera clara. Supongamos que se han realizado medidas, a intervalos regulares, a lo largo de una línea, las cuales han proporcionado, en el terreno, en un primer lugar, la secuencia A de valores numéricos:

A) 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1

y, en un segundo caso, la secuencia B:

B) 1 – 4 – 3 – 6 – 1 – 5 – 4 – 3 – 2 – 5 – 2

En el caso A, se tiene claramente una estructura simétrica muy fuerte, caracterizada por un decrecimiento muy regular a partir del punto central. En el segundo caso, la estructura, si es que existe, es muy débil, y la impresión que se tiene es la de una extrema irregularidad. A pesar que las once medidas tienen, en ambos casos, los mismos valores numéricos (en un

orden diferente), es claro que la estimación de un valor medio puede ser hecha, en el caso A, con una muy mejor precisión que en el caso B. La precisión depende, en efecto, de la continuidad en el espacio de la variable regionalizada.

En este ejemplo simple, se ve también, que la descripción puramente estadística del fenómeno es enteramente insuficiente. El estadístico que se conformaría con la construcción de los histogramas de las secuencias A y B concluiría, debido a que estos dos histogramas son idénticos, equivocadamente, a la identidad de los dos fenómenos naturales observados. En el tratamiento estadístico ordinario, en el cual se conformaría con clasificar en forma de histogramas las muestras disponibles, se hace abstracción del lugar donde han sido tomadas. Se destruyen las estructuras espaciales. Por otra parte, es claro que no basta con saber con qué frecuencia se repite una ley dada en un yacimiento minero. Es también importante saber de qué manera las leyes se suceden en el espacio, y, principalmente, cuál es el tamaño y la posición de las zonas explotables, etc...

Aparece así que las variables regionalizadas no pueden ser asimiladas a variables aleatorias, cuyo estudio es el objetivo de la estadística habitual. De hecho, la noción de variable aleatoria solo tiene un sentido concreto si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. Posibilidad, por lo menos teórica de repetir indefinidamente el experimento que atribuye un valor numérico definida a la variable aleatoria.
2. Independencia mutua de estos experimentos, el resultado de uno de estos no puede estar de ninguna manera influenciado por el resultado de los experimentos precedentes.

Una variable regionalizada no puede verificar estas dos condiciones. Si el experimento consiste, por ejemplo, en tomar una muestra de características definidas en un punto de coordenadas xyz, al interior de un yacimiento, la ley de esta muestra es única, físicamente bien determinada y de ninguna manera aleatoria. No hay ninguna posibilidad de repetición, y la condición 1 no se verifica. Sin embargo es posible tomar una nueva muestra, no en el mismo punto, sino en un punto vecino del precedente: a pesar que no se trata, estrictamente, del mismo experimento, se podría en rigor, admitir que la condición 1 se respeta de manera aproximada. Pero ahora la condición 2 no lo será de ninguna manera. Si la primera muestra ha sido tomada en una zona rica, la segunda implantada en su vecindad, tendrá tendencia, en promedio, a ser rica igualmente, y esta tendencia será más pronunciada cuando la mineralización será más continua.

2.- Características cualitativas de las variables regionalizadas.

Las variables regionalizadas que se presentan a observación, poseen características cualitativas, ligadas estrechamente a la estructura del fenómeno natural que ellas representan. Entre estas características que la estadística ordinaria es incapaz de expresar, y que deben, obligatoriamente ser tomadas en cuenta por la teoría de las variables regionalizadas, examinemos, usando como referencia el ejemplo ya dado de una ley en un yacimiento minero, algunas de las características más importantes:

a) Localización. Una variable regionalizada no toma sus valores en cualquier lugar, sino mas bien, en una región bien determinada del espacio, que se llama *campo geométrico*: El campo es en general una formación geológica, por ejemplo el espacio mineralizado del yacimiento mismo. Pero a veces es necesario limitar el estudio de la variable a una porción,

o panel, de su campo geométrico natural. Igualmente, la variable será a veces definida como una función $f(M)$ del punto M . Sin embargo, a menudo, no habrá interés en los valores puntuales, sino en los valores medios de la variable al interior de un dominio pequeño, o *soporte geométrico*. Para una ley, el soporte será el volumen v de la muestra tomada. El volumen v debe estar definido de manera precisa, con sus dimensiones, su forma geométrica, y su orientación en el espacio. Si se cambia el soporte v se obtiene una nueva regionalización, que presenta analogías con la primera, pero que no es idéntica. Es así como los bloques de algunos metros cúbicos no se distribuyen en el espacio de la misma manera que los testigos de sondajes de algunos kilos. Una de las tareas de la teoría de las variables regionalizadas, que se llama a veces también *geoestadística* cuando se aplica a problemas geológicos y mineros, consiste en prever las características de la variable definida sobre un soporte v y en un campo V , conociendo, por ejemplo, las de la variable puntual en un campo diferente V' .

b) Continuidad.- Una segunda característica esencial es el grado de mayor o menor continuidad de la regionalización en el espacio. En ciertos casos, por ejemplo, para variables que poseen una significación puramente geométrica, como la potencia de una formación geológica, se observará la continuidad estricta de los matemáticos, que se define con ε y δ . Lo más corriente, es observar una continuidad más floja, llamada *continuidad en media*. En este caso, cuando el punto M tiende hacia M_0 , solamente el valor medio de $[f(M) - f(M_0)]^2$ tiende a cero. La repartición en el espacio toma ahora una forma más irregular y discontinua. Finalmente puede suceder que la continuidad en media no se verifique. En este caso de extrema irregularidad, nosotros hablaremos de *efecto de pepita*. Los yacimientos de oro pepítico proporcionan un ejemplo clásico.

c) Anisotropía.- En tercer lugar, una regionalización puede ser anisótropa. Puede existir, por ejemplo, una dirección privilegiada, a lo largo de la cual los valores se modifican lentamente, mientras que éstos varían mucho más rápido en la dirección perpendicular. Este tipo de fenómenos conocidos con el nombre de corridas, de zonaciones, etc... está, en general asociado a la existencia de ciertas estructuras geológicas.

d) Fenómeno de transición.- Otros tipos de estructuras se pueden manifestar, ligados a la aparición en el campo geométrico de la variable, de una red de discontinuidades: se habla entonces, de una manera general, de fenómenos de transición. Como ejemplos simples, se pueden citar, para las formaciones sedimentarias, las estratificaciones y las repeticiones lenticulares de los estratos. Puede suceder que la variable la cual es constante o casi constante al interior de los estratos, tenga cambios bruscos al pasar de un estrato a otro. A estas discontinuidades verticales, materializadas en el espacio por las uniones estratigráficas, a menudo se adicionan discontinuidades horizontales, debidas al término lenticular y a la repetición de los estratos individuales. Esta red compleja de discontinuidades realiza una partición del espacio mineralizado en compartimientos casi independientes entre sí (correspondientes, por ejemplo, a antiguos micro-cuencas, donde las condiciones de depositación han evolucionado de manera más o menos autónoma).

Se puede observar que el efecto de pepita de origen granulométrico está también ligado a un fenómeno de transición. La red de discontinuidad es en este caso lo que separa, en el espacio, los diferentes granos de estéril y de mineral. La naturaleza del fenómeno es la misma, pero la escala es bastante diferente. El efecto de pepita aparece como una forma de

fenómeno de transición ligado a la presencia de micro-estructuras discontinuas en el campo de la regionalización.

3.- Los esquemas teóricos.

Para elaborar una representación matemática de las variables regionalizadas, capaz de tomar en cuenta las características estructurales mencionadas anteriormente, se puede pensar en utilizar la teoría probabilística de las funciones aleatorias. Sin embargo, es necesario ver bien, que los naturalistas tienen aquí una objeción muy fuerte, ligada a la unicidad de los fenómenos naturales y a la imposibilidad de la inferencia estadística.

Recordemos, en efecto, rápidamente la noción de función aleatoria. Partiendo de la noción de variable aleatoria simple X , definida por su ley de distribución probabilística $F(x)$, los matemáticos han introducido a continuación las variables aleatorias con varias componentes (X_1, X_2, \dots, X_n) descritas por leyes de distribución simultáneas $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, luego ellos han examinado lo que se produce cuando n es infinito. Una función aleatoria es, si se quiere, una variable aleatoria con una infinidad de componentes. En el caso que nos ocupa, estas componentes, en número infinito, serían los valores tomados por la variable regionalizada en cada uno de los puntos de su campo geométrico. Se ve cuál es la objeción de los naturalistas. Los valores tomados por la variable en todos los puntos de su campo deben ser considerados como el resultado de una prueba al azar, en un experimento único, efectuado según la ley de probabilidad con una infinidad de componentes que definen la función aleatoria. Pero el paso inverso no es posible. El experimento es único y no se puede remontar, a partir de los valores experimentales, la distribución teórica, como tampoco se puede inferir la ley de probabilidad $F(x)$ de una variable aleatoria ordinaria X cuando solo se dispone del resultado de un solo experimento, el cual ha dado un valor numérico particular (por ejemplo $x = 98$).

A pesar que la inferencia estadística no está fundamentada, es claro que los valores numéricos tomados efectivamente por la variable regionalizada, es decir, el fenómeno natural mismo, poseen una realidad física, y todo recurso a una interpretación probabilística aparece como perfectamente arbitraria. Este es el punto de vista adoptado por la teoría de las variables regionalizadas en un primer grupo de métodos llamados *representaciones transitivas*. Estos métodos que son el objeto de la primera parte de la obra, no hacen ninguna referencia a alguna hipótesis probabilística, ni tampoco a algún principio determinístico: el determinismo no es negado a priori, pero solo puede ser puesto en evidencia con la ayuda de estudios específicos, respecto de cada categoría de fenómenos naturales, y no serviría de nada invocarlos, *in abstracto*, a nivel de generalidades. El punto de vista puramente descriptivo y formal, adoptado en las representaciones transitivas, puede ser comparado con el de la cinemática, que desarrolla las leyes generales y formales que todo movimiento debe cumplir, cualquiera que sean las causas y contenido físico, del solo hecho que se trata de movimiento. El punto esencial consiste en asociar, a toda variable regionalizada, una función $g(h)$ más simple, llamada *covariograma transitivo*, capaz de expresar, de una forma sintética, las características mayores enumeradas anteriormente, y al mismo tiempo, de formular y de resolver los problemas importantes propuestos por la práctica, respecto de las variables regionalizadas.

Pero hay un caso particular en el cual la objeción de los naturalistas puede ser levantada. Es el caso llamado estacionario. En términos abstractos, se dice que una función aleatoria es estacionaria, si la ley de probabilidad de los valores tomados por esta función en k puntos

arbitrarios es invariante para toda traslación del conjunto de estos puntos. Dicho de otra manera, el carácter estacionario implica la homogeneidad del fenómeno en el espacio. Si se tienen sólidas razones para pensar, por ejemplo, que las condiciones físico-químicas del depósito, o de la génesis, de una mineralización son, efectivamente, homogéneas en el espacio del yacimiento, esta hipótesis puede ser adoptada, por lo menos en primera aproximación. En virtud del carácter estacionario, se puede decir que el fenómeno se repite en el espacio, y se concede que la inferencia estadística es ahora posible, y con ella una interpretación del fenómeno, fundada en la teoría clásica de las funciones aleatorias. Un papel determinante juega, en esta teoría, la función de auto-correlación $K(h)$, que representa la covarianza de los valores tomados por la función aleatoria en dos puntos distintos distantes de h , y que constituye el equivalente probabilística del covariograma $g(h)$ de las representaciones transitivas. Sin embargo, la teoría de la auto correlación se puede aplicar solamente en el caso en que la función aleatoria tiene una varianza a priori finita, mientras que muchos fenómenos naturales tienen una capacidad de dispersión casi ilimitada, y no pueden ser descritos correctamente si se les atribuye una varianza finita. Pero, a pesar que la varianza de la función aleatoria misma puede ser considerada como infinita, sus incrementos, o diferencias que la función aleatoria toma en dos puntos distintos, conserva, en general, una varianza finita. La teoría de los *esquemas estocásticos intrínsecos*, que es el objeto de la segunda parte de la obra, está consagrada al estudio de esta clase particular de funciones aleatorias accesibles solamente por sus incrementos. El papel mayor del covariograma transitivo $g(h)$, o la covarianza estacionaria $K(h)$, incumbe ahora a una *función de dispersión intrínseca* $\gamma(h)$, o *variograma*, la cual representa el incremento cuadrático medio de la función entre dos puntos distantes de h .

La teoría intrínseca postula la homogeneidad del fenómeno en el espacio y se formula en términos probabilísticos. Esta teoría se opone fuertemente a las representaciones transitivas. Es a la vez menos general y más potente. Menos general, porque grandes clases de fenómenos regionalizados que manifiestan, por ejemplo, un aspecto zonal en el interior de su campo geométrico, no pueden ser considerados como estacionarios, ni descritos por un esquema intrínseco, mientras que permanecen accesibles a las representaciones transitivas. Más potente, en el fondo por la misma razón, porque las representaciones transitivas no son capaces de distinguir, en una regionalización, lo que es imputable a la variable «misma», y lo que resulta de la geometría de su campo, mientras que la teoría intrínseca elimina de oficio toda interferencia geométrica, y permite, cuando ella es aplicable, un estudio más fino y más profundo de la variable «misma». A pesar de esta oposición, se constata una convergencia remarcable entre los resultados de los dos métodos, y un parentesco profundo de sus formalismos matemáticos. Se puede pensar que las representaciones transitivas poseen un carácter probabilístico implícito, o, al contrario, que la teoría intrínseca no utiliza realmente el contenido probabilístico de sus hipótesis de base, sino solamente su carácter estacionario. En efecto, covariogramas, auto correlaciones y funciones intrínsecas poseen significaciones muy cercanas, ligadas estrechamente, como lo muestra la física, a la energía de dispersión del fenómeno representado..

4.- Plan y objetivo de la obra.

Esta obra está destinada a todos aquellos, naturalistas o técnicos, que están relacionados, en su actividad científica o práctica, a fenómenos regionalizados: geólogos, geógrafos,

ingenieros de minas, meteorologistas, etc... Su objetivo es doble. Por una parte se trata de elaborar un aparato conceptual y un formalismo matemático capaz de describir, sintéticamente, los caracteres estructurales mayores de un fenómeno natural, por otra parte de introducir métodos de aplicación que permitan resolver efectivamente los problemas propuestos por la práctica, entre los cuales uno de los más importantes está relacionado a la estimación de las variables regionalizadas a partir de un muestreo fragmentario. Resulta, como sin duda para toda obra de matemática orientada a las aplicaciones, una naturaleza un poco mixta, y el riesgo de incurrir en reproches simétricos de parte de los prácticos y los matemáticos: los primeros encontrando la obra inútilmente abstracta, los segundos, insuficiente en el rigor. Reproches justificados, sin duda, pero difíciles de evitar. Para evitar en parte este inconveniente, propio de la naturaleza del objeto tratado, hemos puesto, al inicio de cada capítulo un sumario bastante detallado, que permitirá al lector seleccionar, y así retener lo que le concierne.

En lo esencial, la comprensión de la obra supone nada más que conocimientos de base en materias de cálculo de probabilidades. Es deseable igualmente, estar familiarizado con la teoría de los procesos estocásticos. Sin embargo el lector encontrará en el capítulo VII un recuerdo sobre las funciones aleatorias, el cual resume las nociones de base de esta teoría y los resultados utilizados en los capítulos siguientes. Es necesario igualmente decir una palabra sobre la teoría de las distribuciones. Esta teoría solo interviene explícitamente en los capítulos III y X, los cuales no son estrictamente necesarios para la comprensión del resto de la obra, y pueden ser omitidos por los lectores que no están familiarizados con esta teoría. Sin embargo, para estos lectores, damos, en el Anexo A una exposición simplificada, pero suficiente para nuestro propósito. En verdad, si las distribuciones solo son utilizadas en los dos capítulos ya citados, su presencia latente e implícita es sensible en todas partes. En efecto, los fenómenos naturales rara vez son conocidos, o estudiados, al nivel puntual. Se abordan, lo más a menudo, por intermedio de respuestas que ellos aportan a las operaciones técnicas a las cuales son sometidos: toma de muestras, explotación de paneles, ponderaciones diversas que hacen intervenir globalmente los valores tomados por la variable en un dominio, o soporte, de dimensiones no nulas, y no por los valores puntuales. La idea de representar estos fenómenos por distribuciones, en vez de funciones, está sugerida por la misma práctica: a pesar de no ser estrictamente obligatoria, esta teoría se impone con insistencia, y se revela como muy instructiva, en particular, para un naturalista. Las dos primeras partes de esta obra, consagradas respectivamente a las representaciones transitivas y a la teoría intrínsecas tienen desarrollos paralelos: En primer lugar se exponen los conceptos de base (capítulos I y VII-VIII respectivamente), y son extendidos, posteriormente, al caso de las co-regionalizaciones, es decir el caso donde, en un mismo campo geométrico coexisten varias regionalizaciones (capítulos V y IX respectivamente), y luego formulados en términos de distribuciones (capítulos III y X respectivamente). Después de estas generalidades vienen temas más específicos, y sobretudo orientados a las aplicaciones. El fenómeno muy general de la regularización de una variable, por ponderación o por toma de muestras no puntuales es estudiado profundamente con el proceso de la subida. La subida es la operación que permite pasar de una variable definida en el espacio de n dimensiones a variables definidas en los espacios de $n - 1$, $n - 2$, ... dimensiones, es la transposición abstracta de la técnica minera corriente que consiste en perforar sondajes verticales, y luego a trazar niveles horizontales, etc... La subida se acompaña de una regularización de la variable regionalizada, la cual se estudia en detalle debido a su importancia a la vez teórica y práctica (capítulos II y XI respectivamente).

Finalmente, se formulan en su generalidad, los problemas de estimación y se desarrollan métodos de aproximación los cuales permiten el cálculo numérico efectivo de las varianzas de estimación correspondientes a los diferentes tipos de mallas de muestreo (capítulos IV y XII respectivamente). Hay una estrecha relación, y es uno de los temas mayores de esta obra, entre la mayor o menor regularidad de una variable regionalizada y el comportamiento, en la vecindad del origen, de su covariograma o de su función intrínseca, comportamiento caracterizado por una parte irregular cuya aventura, a la subida, pone en evidencia el proceso de regularización, y que se puede hacer una correspondencia, término a término, con el desarrollo limitado de la varianza de estimación.

PRIMERA PARTE

LAS REPRESENTACIONES TRANSITIVAS

CAPITULO PRIMERO

EL SIMBOLISMO TRANSITIVO

SUMARIO

Este capítulo expone los conceptos fundamentales y el formalismo general de las representaciones transitivas. Con la excepción del párrafo 5, el contenido de este capítulo es indispensable para la comprensión de toda la primera parte.

*El párrafo 1 define el campo geométrico V de una variable regionalizada $f(x)$ (dominio fuera del cual $f(x) = 0$), y la variable geométrica $k(x)$ asociada a $f(x)$ ($k(x) = 1$ si x pertenece a V , y 0 en el caso contrario). Se precisan las condiciones impuestas a $f(x)$ ($|f(x)|$ debe ser sumable). Luego se define el covariograma transitivo $g(h) = \int f(x)f(x+h)dx = f * \hat{f}$, herramienta de base de la teoría, y el covariograma geométrico $K(h) = k * \hat{k}$. $K(h)$ es igual a la medida de la intersección de V y de su traslación por h . Las propiedades de $g(h)$ resultan del hecho que $g(h)$ es una función de tipo positivo (continuidad, desigualdad $|g(h)| \leq g(0)$, simetría $g(h) = g(-h)$). Enseguida se proporciona la definición de cantidad de metal Q (como una integral de $f(x)$) e indicaciones sobre las relaciones entre la regularidad de $g(h)$ en $h = 0$ y la regularidad de la variable misma.*

*El párrafo 2 define las variables con soporte no puntual (muestras) y, más generalmente, las regularizadas $f * \hat{p}$ de una variable f por una función de ponderación p . El covariograma de la regularizada se obtiene al regularizar g por el covariograma de p . Las variables regularizadas tienen, efectivamente, un comportamiento más regular que la variable puntual. Cuando $p = k$ es una variable geométrica, se obtiene el algoritmo de Cauchy, de utilidad más adelante (1, 2, 9).*

El párrafo 3 proporciona la definición general de la subida, operación que hace pasar de una variable de n dimensiones, (leyes en un yacimiento de 3 dimensiones) a una variable de $n - 1$ dimensiones (acumulaciones de los sondeos verticales). Los covariogramas suben y descienden de la misma manera que las variables.

El párrafo 4 proporciona el formalismo de la subida para los covariogramas isótropos. Un poco más difícil que los tres primeros, indispensable para comprender el fenómeno esencial de la regularización con la subida. Después de mencionar las anomalías posible debidas a un efecto rectangular, se definen subidas y descensos por la transformación de Fourier-Hankel (1, 4, 6), luego, directamente por una convolución (1, 4, 18).

El párrafo 5 tiene un carácter más teórico. Puede ser omitido, sin inconvenientes mayores por los naturalistas o los técnicos: La relación entre subida y transformación de Hankel (1, 5, 3) permite asociar a un covariograma isótropo, su covariograma isótropo recíproco, una subida para uno de ellos está asociada a un descenso de igual orden efectuada en el otro. Se estudia enseguida la estructura algebraica del conjunto de las subidas y de las transformaciones de Hankel, isomorfo del grupo de las translaciones-simetría, las subidas corresponden a las translaciones y las transformaciones d Hankel a las simetrías.

1.- El covariograma y su transformada de Fourier.

Hemos indicado, en la introducción, el sentido físico que convenía atribuir a la variable regionalizada. Independiente del hecho que ella representa la evolución en el espacio de un fenómeno natural, una variable regionalizada se define de un punto de vista puramente matemático, como una función $f(x)$ la cual toma, en cada punto x , de coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) del espacio de n dimensiones, un valor numérico definido. En la práctica se tendrá que $n = 1, 2$ o 3 , pero es cómodo no especificar de antemano, el número de dimensiones del espacio. Puede suceder que esta función $f(x)$ posea características suficientes de regularidad (ser continua y derivable) para que sea posible de representarla, de una manera satisfactoria al interpolarla por funciones más simples (polinomios por ejemplo). Pero al contrario, muy a menudo, la función $f(x)$ se comportará de manera extremadamente irregular. Ella no será, lo más a menudo, ni derivable, ni tampoco continua, y no se podrá representar gráficamente, de manera aproximada que por curvas en «dientes de sierra». En este caso, el estudio directo de $f(x)$ sería prohibitivo, y solo presentaría un interés limitado, a causa de su misma complicación. Pero, bajo la complejidad y la irregularidad extremas que presenta una regionalización en su variación espacial, se disimula, en general, la estructura de un fenómeno natural. Por otra parte, en las aplicaciones, es necesario resolver ciertos problemas de gran importancia práctica, como la estimación de una variable regionalizada a partir de un muestreo fragmentario. Reemplazar la función $f(x)$ por una función $g(h)$ mucho más simple, pero sin embargo capaz, a la vez, de representar de una manera sintética las características estructurales mayores de una regionalización, y de permitir la solución de problemas prácticos que se pueden proponer legítimamente – este es el primer objetivo de la teoría de las variables regionalizadas.

Campo geométrico y variable geométrica asociada. – Supondremos, en adelante, que la función $f(x)$ toma valores diferentes de cero en un dominio acotado V que llamaremos campo geométrico¹ de la variable regionalizada $f(x)$. Al exterior de su campo V , la variable se supone idénticamente nula: la regionalización se considera como aislada en el seno de un universo vacío. Pero las fronteras de este campo no son infranqueables, y es al franquear estas fronteras que se manifiestan, con menor o mayor intensidad la transición brutal, los fenómenos de *efecto de borde*, los que volveremos a estudiar en los capítulos V y VI. De allí el nombre de representaciones transitivas para los métodos expuestos en esta primera parte. De una manera general, en transitivo, una variable $f(x)$ no puede ser considerada

¹ La noción de campo geométrico de $f(x)$ es la misma que la de soporte de una función o de una distribución (ver Anexo A-1).

independiente de su campo, y no es posible de hacer una partición entre lo que es imputable a la variable «misma» y a su campo (ver capítulo V, párrafos 3 y 4).

Para caracterizar el campo V , es cómodo introducir la variable regionalizada $k(x)$, definida como sigue:

$$(I, 1, 1) \quad \begin{cases} k(x) = 1 & \text{si } x \text{ pertenece a } V \\ k(x) = 0 & \text{si } x \text{ no pertenece a } V \end{cases}$$

Esta variable $k(x)$ se llama variable geométrica² asociada a $f(x)$.

Sin embargo, en ciertos casos, se puede suponer que el campo geométrico es infinito, con la reserva que $f(x)$ verifique condiciones convenientes de sumabilidad. Se obtiene entonces un modelo de repartición zonal, donde la variable regionalizada tiende a cero, a partir de un núcleo, de manera más o menos regular, donde la variable toma valores considerables.

Condiciones impuestas a $f(x)$. - En todos los casos supondremos que $|f(x)|$ es sumable (al menos en el sentido de la integral de Lebesgue), de manera que todas las integrales $\int f(x)dx$ extendidas a dominios cualesquiera, tengan un sentido. Esta condición, impuesta por consideraciones físicas evidentes, es la única verdaderamente necesaria. En general no se supondrá que $f(x)$ es derivable, ni tampoco continua. Podrá tener una red completa de discontinuidades (puntos aislados, líneas y superficies) o aún no ser continua en ninguna parte. Se podrá aceptar además que $f(x)$ no está definida en ciertos puntos, siempre que estos puntos constituyan un conjunto de medida nula (por ejemplo una línea o una superficie en el espacio de 3 dimensiones).

Sin embargo, lo más común es que las variables regionalizadas serán del tipo «continua por trozos», es decir que serán continuas en todas partes salvo en ciertas superficies, las cuales constituyen una red de discontinuidad, que, al atravesarlas, $f(x)$ sufre un salto. Pero esta red puede ser muy compleja. En un yacimiento minero, por ejemplo, al nivel puntual, la ley $f(x)$ debe ser definida como una variable geométrica, igual a +1 si el punto x cae al interior de un grano mineralizado, y a 0 en el caso contrario. La red de discontinuidad está constituida por superficies de todos los granos mineralizados del yacimiento. Por otra parte, no es necesario precisar si $f(x)$ es igual a +1 o a 0 cuando el punto x se encuentra en la superficie de un grano de mineral, porque estas superficies constituyen un conjunto de medida nula.

El covariograma transitivo $g(h)$. - A la variable regionalizada $f(x)$ le asociaremos una función $g(h)$, llamada covariograma transitivo asociado a $f(x)$, o más brevemente covariograma de $f(x)$, definida, para un argumento vectorial h de coordenadas (h_1, h_2, \dots, h_n) por la expresión:

$$(I, 1, 2) \quad g(h) = \int f(x)f(x+h)dx$$

² En teoría de conjuntos, $k(x)$ se llama función característica del conjunto V . No usaremos esta terminología para evitar cualquier confusión con las funciones características del cálculo de probabilidades, y también para destacar el hecho que $k(x)$ y $f(x)$ son de la misma naturaleza.

En esta fórmula, la integral ³ es una integral múltiple de orden n , extendida a todo el espacio, y dx representa el elemento de volumen

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Según las notaciones generales utilizadas en esta obra, (I, 1, 2) nos recuerda la expresión del producto de convolución de dos funciones f_1 y f_2 (ver Anexo A, 6, 1):

$$f_1 * f_2 = \int f_1(x) f_2(h-x) dx$$

En efecto, al introducir la transpuesta \hat{f} de f , definida por:

$$\hat{f}(x) = f(-x)$$

Y, cambiando x por $x-h$, se pone (I, 1, 1) en forma equivalente:

$$(I, 1, 3) \quad g = \hat{f} * f = f * \hat{f}$$

El covariograma $g(h)$ asociado a una variable regionalizada $f(x)$ es igual al producto de convolución de f por su transpuesta. El covariograma está siempre definido, porque, debido a que la variable f tiene un campo geométrico V acotado, la integral (I, 1, 2) extendida a todo el espacio, se calcula en realidad en un dominio acotado.

De la misma manera, la variable geométrica $k(x)$ definida en (I, 1, 1) está caracterizada por su covariograma $K(h)$:

$$(I, 1, 4) \quad K(h) = k * \hat{k} = \int k(x) k(x+h)$$

Llamado covariograma geométrico asociado a V . La expresión $k(x)k(x+h)$ es igual a la unidad en el dominio definido por la intersección del campo V y de su traslación por $-h$, que notaremos $\tau_{-h}V$, y 0 en cualquier otra parte. En efecto $k(x)$ es igual a 1 cuando x está en V , y $k(x+h)$ es igual a 1 cuando $x+h = y$ está en V es decir si $x = y - h$ está en $\tau_{-h}V$.

Así, el covariograma $K(h)$ representa *la medida* (el volumen si $n=3$, la superficie si $n=2$, la longitud si $n=1$) *de la intersección del campo V y de su traslación por $-h$.* En notación de teoría de conjuntos, esta intersección se escribe $V \cap \tau_{-h}V$. Se tiene entonces:

$$(I, 1, 5) \quad K(h) = \text{Medida}(V \cap \tau_{-h}V) = \text{Medida}(V \cap \tau_h V)$$

Propiedades del covariograma. - Una función como $g(h)$ o $K(h)$ es evidentemente *simétrica*, como se ve al cambiar h por $-h$ (y, simultáneamente x por $x+h$) en (I, 1, 2):

³ Lo más común es tomar esta integral en el sentido de las integrales de Lebesgue.

$$(I, 1, 6) \quad g(h) = g(-h) \quad \text{o} \quad g = \hat{g}$$

Por otra parte, cuando el módulo del vector h es superior al diámetro máximo D de V (o *alcance*), $k(x)$ y $k(x+h)$ al menos uno es igual a 0, de manera que $k(x)k(x+h)=0$, y por consiguiente:

$$(I, 1, 7) \quad g(h) \equiv 0 \quad \text{para} \quad |h| > D$$

Luego, *el covariograma solo toma valores no nulos en un dominio acotado*, al igual que $f(x)$.

Propiedades más específicas pueden ser obtenidas mediante la transformación de Fourier.

Transformada de Fourier de $f(x)$ y de $g(h)$. - Como V es acotado, y $|f(x)|$ es sumable, la transformada $\varphi(u) = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $f(x)$ es:

$$(I, 1, 8) \quad \varphi(u) = F(f) = \int f(x)e^{-2\pi i u x} dx$$

Que es una función continua e indefinidamente derivable (Anexo A, 8, 1), y la transformada inversa:

$$f(x) = \bar{F}(\varphi) = \int \varphi(u)e^{2\pi i u x} du$$

Es siempre posible⁴.

Como la transformación de Fourier cambia los productos convolutivos en multiplicativos, se deduce de (I, 1, 3) que la transformada $G(u)$ del covariograma $g(h)$ es:

$$(I, 1, 9) \quad G(u) = \int g(h)e^{-2i\pi u h} dh = |\varphi(u)|^2$$

Es igual al cuadrado del módulo de $\varphi(u)$. Resulta entonces, del teorema de Bochner (Anexo A, 9, 1) *que el covariograma $g(h)$ es también una función de tipo positivo*, y esto implica las propiedades siguientes:

- a) $g(h)$ es una función *continua* de su argumento vectorial h .
- b) $g(h) = g(-h)$ conforme a (I, 1, 6)
- c) $g(h)$ está acotada en módulo por su valor $g(0)$ en el origen, valor que es obligatoriamente positivo.

$$(I, 1, 10) \quad |g(h)| \leq g(0) = \int [f(x)]^2 dx$$

Veremos, en el capítulo IV que la obligación impuesta a $g(h)$ de ser de tipo positivo, no es otra que la condición necesaria y suficiente para que todas las varianzas de estimación sean positivas.

⁴ Por lo menos en el sentido de las distribuciones (A, 8, 2).

Cantidad de metal. – Se llama cantidad de metal Q ⁵ asociada a la variable regionalizada a la integral extendida a todo el espacio:

$$(I, 1, 11) \quad Q = \int f(x)dx$$

Al hacer $u = 0$ en (I, 1, 8), se obtiene:

$$(I, 1, 12) \quad Q = \varphi(0)$$

Consideremos ahora la integral del covariograma $g(h)$ extendida a todo el espacio. Al hacer $u = 0$ en (I, 1, 9), se obtiene $|\varphi(0)|^2$, es decir Q^2 según (I, 1, 12):

$$(I, 1, 13) \quad Q^2 = \int g(h)dh$$

La integral del covariograma, extendida a todo el espacio, es igual al cuadrado de la cantidad de metal.

Si aplicamos este resultado a la variable geométrica y al covariograma geométrico $K(h)$, la cantidad de metal es reemplazada por la medida (volumen, superficie o longitud según que $n = 3, 2,$ o 1) del campo V , medida que designaremos también por V :

$$(I, 1, 14) \quad \begin{cases} V = \int k(x)dx = K(0) \\ V^2 = \int K(h)dh \end{cases}$$

Significación física del covariograma. - El comportamiento de $g(h)$ en la vecindad del origen es más regular cuando la regionalización es también más regular y continua en su variación espacial. Por ejemplo, si $f(x)$ admite derivadas de primer orden, $g(h)$ admite derivadas de orden 1 y 2. Tomemos, en efecto, una derivada en la dirección α , se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} * \frac{\partial \hat{f}}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} * \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^\wedge = \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$$

(se sabe, Anexo A, 6, 1 que para derivar un producto de convolución, basta con derivar uno de los factores). Como la derivada de la transpuesta es igual a la transpuesta de la derivada

con signo negativo, se ve además que $-\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$ es el covariograma asociado a $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$. Como

$g(h) = g(-h)$ es una función par, las primeras derivadas de g son nulas en el origen, y $g(h)$ presenta en el origen un comportamiento parabólico (en h^2).

⁵ Esta terminología es de origen minero: Si V es un yacimiento y $f(x)$ la ley en el punto x , expresada en metal contenido por unidad de volumen (ley volumétrica) si $n = 3$, o de superficie (acumulación) si $n = 2$, o de longitud (cantidad de metal al metro de profundidad) si $n = 1$, Q representa efectivamente la cantidad de metal contenido en V .

Por otra parte, el recíproco no es necesariamente exacto. Si $g(h)$ tiene en el origen un comportamiento en h^2 , es decir si $g(h)$ es dos veces derivable en $h = 0$, se sabe, que siendo $g(h)$ una función de tipo positivo, es derivable dos veces en todas partes (Anexo A, 9, 2). Pero de aquí no resulta que $f(x)$ sea también derivable. Solamente se puede afirmar que $f(x)$ es derivable en media cuadrática, es decir que la integral:

$$(I, 1, 15) \quad \int \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]^2 dx = -2 \left[\frac{g(h) - g(0)}{h^2} \right]$$

Tiende a un límite $-g(0)$ cuando $|h|$ tiende a 0.

De la existencia de $g''(0)$ se deduce solamente que $f(x)$ es continua casi en todas partes (es decir puede ser discontinua en un conjunto de medida nula).

En la práctica, las funciones $f(x)$ discontinuas que es posible encontrar son del tipo «continuas por trozos», es decir son continuas en todas partes, salvo al atravesar una red de discontinuidad, donde presentan saltos. Se ve fácilmente que para una función de este tipo, la integral (I, 1, 15) no puede tener límite, de manera que las derivadas segundas en el origen no existen. Así, *un covariograma que presenta en el origen un comportamiento parabólico caracteriza, prácticamente, una variable regionalizada continua en el sentido usual.*

Hemos visto, por otra parte, que $g(h)$ es siempre una función continua de h . Esto es una consecuencia de la hipótesis hecha sobre la sumabilidad de $|f(x)|$, es decir sobre la existencias de las cantidades de metal, y esto implica que:

$$(I, 1, 16) \quad \int |f(x+h) - f(x)|^2 dx = 2[g(0) - g(h)]$$

Tiende hacia 0 cuando $|h|$ tiende a 0. Se enuncia este resultado diciendo que $f(x)$ es continua en media cuadrática.

Recíprocamente, si $f(x)$ es continua en el origen, y, como $g(h)$ es de tipo positivo, esto basta para garantizar que $g(h)$ es continua en todas partes.

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, el hecho que el covariograma sea siempre continuo, y $f(x)$ siempre continua en media cuadrática, bajo la hipótesis que $|f(x)|$ es sumable, no debe ilusionarnos. Existen discontinuidades que equivalen - experimentalmente y en las aplicaciones prácticas - a una perfecta discontinuidad. Se puede encontrar siempre un η tal que $|h| \leq \eta$ implica $|g(0) - g(h)| \leq \epsilon$, pero puede ocurrir que este número η sea extremadamente pequeño a la escala humana. En esta caso, citado anteriormente, de una ley puntual $f(x)$ en un yacimiento minero, las distancias η a partir de las cuales se manifiesta la continuidad de $g(h)$ son del orden de magnitud de las dimensiones granulométricas, es decir, a lo más, algunos milímetros. A la escala del hombre, es decir, por ejemplo, para η del orden de algunos metros, se observa una total discontinuidad [tanto en el caso de $g(h)$ como para $f(x)$].

Se ve así aparecer un tipo de covariograma, importante en las aplicaciones prácticas, el cual se comporta prácticamente de una manera discontinua en el origen, el cual corresponde a variables regionalizadas de alto grado de irregularidad. Se dice que estos covariogramas

presentan un *efecto de pepita en el origen* ⁶. En realidad, no hay una discontinuidad verdadera, sino una zona de transición muy rápida donde $g(h)$ decrece de manera extremadamente rápida a partir de $g(0)$. La dimensión de esta zona de transición, o *alcance del efecto de pepita* es muy pequeña: en el ejemplo ya citado, este alcance es del orden del diámetro medio de los granos de mineral. Más allá de este alcance, el $g(h)$ decrece de manera más moderada. En las aplicaciones prácticas – (dado que los datos experimentales no permiten hacerlo de otra manera) - se representa el covariograma por una curva regular $g_I(h)$ extrapolando esta tendencia moderada justo hasta $h = 0$, y se introduce una constante de pepita C definida por:

$$C = g(0) - g_I(h)$$

En que $g(0) = \int |f(x)|^2 dx$ es conocida experimentalmente, y donde $g_I(0)$ se obtiene extrapolando la curva regular $g_I(h)$. Se tiene así:

$$(I, 1, 17) \quad \begin{cases} g(h) = g_I(h) & \text{para } h \neq 0 \\ g(0) = g_I(0) + C & \text{para } h = 0 \end{cases}$$

Con este covariograma esquematizado de esta manera, se debe, por ejemplo, calcular la varianza de estimación (ver capítulo IV) en presencia de efecto de pepita.

Mencionemos, para terminar, que las anisotropías del covariograma detectables experimentalmente, permiten poner en evidencia y de caracterizar las direcciones principales, que podrían haberse escapado al estudiar directamente la variable regionalizada misma.

2- Variable con soporte no puntual y regularización de las variables.

Muy a menudo, no se dispone experimentalmente de los valores de la variable puntual $f(x)$, sino solamente valores medios de esta variable en volúmenes v que tienen sus centros de gravedad en los puntos x_1, x_2, \dots , correspondientes a los puntos donde han sido tomadas las muestras de volumen v . Estas muestras definen una nueva variable regionalizada, diferente de $f(x)$, y cuyas características dependen del tamaño y de la forma de la muestra v . Esta nueva variable se llamará *regularizada de $f(x)$ por v* , y se espera, en efecto, a que ella sea más regular en su variación espacial que $f(x)$. El volumen v se llamará *soporte geométrico* de la variable regularizada por v , mientras que $f(x)$ se llama a veces variable con *soporte puntual*.

Se pueden definir dos variables de soporte v :

⁶ Esta terminología, de origen minero, evoca el comportamiento, particularmente errático, de los yacimientos de oro pepíticos. La noción de efecto de pepita será presentada, de manera más rigurosa, en el capítulo III.

$$(I, 2, 1) \quad \begin{cases} t(x) = \frac{1}{v} \int_{\nu} f(x+h) dx \\ q(x) = \int_{\nu} f(x+h) dx \end{cases}$$

En esta escritura, la integración se hace con respecto al argumento vectorial h , cuya extremidad recorre el volumen ν centrado en $x = 0$. La primera variable $t(x)$ representa el valor medio de $f(x)$ en el volumen centrado en x . En la terminología minera, es la ley media de la muestra ν tomada en el punto x . Esta ley solo está definida cuando el volumen ν es acotado. La segunda $q(x) = \nu t(x)$ representa la cantidad de metal contenido en esta misma muestra, y está definida aún en el caso en que ν no sea acotado, porque $|f(x)|$ es sumable.

Más generalmente, se puede definir una ley media y una cantidad de metal generalizadas (o ponderadas) asociadas a una función de ponderación $p(h)$. Se escribirá, por ejemplo:

$$(I, 2, 2) \quad \begin{cases} q(x) = \int f(x+h)p(h)dh \\ t(x) = \frac{1}{p} \int f(x+h)p(h)dh \\ p = \int p(h)dh \end{cases}$$

$p(x)$ y $t(x)$ se llamarán *regularizadas de $f(x)$ por la función de ponderación $p(h)$* . A veces se tomará para $p(h)$ una función idénticamente nula al exterior de un volumen ν centrado en el origen. En otros casos, el soporte de p puede ser no acotado, con la reserva natural de verificar las condiciones convenientes de sumabilidad.

Por otra parte (I, 2, 1) aparece como un caso particular de (I, 2, 2). Al introducir la variable geométrica $k(x)$ asociada al volumen ν centrado en el origen, (I, 2, 1) se escribe, en efecto:

$$(I, 2, 3) \quad \begin{cases} q(x) = \int f(x+h)k(h)dh \\ t(x) = \frac{1}{\nu} \int f(x+h)k(h)dh \end{cases}$$

En este caso particular, la función de ponderación $k(h)$ se llama también función de muestreo.

Para desarrollar el simbolismo transitivo, es útil poner estas diversas expresiones en la forma de productos de convolución. Al cambiar h por $h - x$, e introduciendo la transpuesta $\hat{p}(h) = p(-h)$, se encuentra fácilmente:

$$\int f(x+h)p(h)dh = \int f(h)\hat{p}(x-h)dh = f * \hat{p}$$

De aquí la escritura simbólica buscada, equivalente a (I, 2, 2):

$$(I, 2, 4) \quad \begin{cases} q(x) = f * \hat{p} \\ t(x) = \frac{1}{p} f * \hat{p} \end{cases}$$

Al comparar (I, 2, 4) con (I, 2, 3), se ve que el covariograma $g(h)$ puede ser interpretado como la cantidad de metal asociado a una función de ponderación idéntica a la variable $f(x)$ misma: El covariograma es la auto-regularizada de una variable regionalizada. En el caso particular de una variable geométrica $k(x)$, se encuentra también (I, 1, 5). En este caso, en efecto, $K(h)$ representa la medida de lo que se obtiene al tomar en V «una muestra» igual a V pero trasladado en la traslación h - es decir la medida de la intersección de V y de su trasladado -.

Covariograma de la variable regularizada. - Designemos, por ejemplo, por $g_q(h)$ al covariograma de $q(x)$. Este covariograma, por una aplicación inmediata de (I, 1, 3) está dado por:

$$g_q = f * \hat{p} * \hat{f} * p = f * \hat{f} * p * \hat{p}$$

Al tomar en cuenta las propiedades de asociatividad y de conmutatividad del producto de convolución, y designando por

$$P(h) = p * \hat{p}$$

Al covariograma asociado a la función de ponderación p , se obtiene el notable resultado siguiente:

$$(I, 2, 5) \quad g_q = g * P$$

El covariograma de la cantidad de metal asociado a una función de ponderación p se obtiene al regularizar el covariograma g de la variable puntual por el covariograma P de la función de muestreo. En el caso de una función de muestreo $k(x)$, se reemplaza P por el covariograma geométrico $K = k * \hat{k}$ asociado a $k(x)$.

Análogamente, para la ley media $t(x)$ asociada a p , se obtiene el covariograma:

$$(I, 2, 6) \quad g_t = \frac{1}{p^2} g * P$$

Se ve lo que es necesario entender por regularización: Si, por ejemplo, la función de muestreo p admite derivadas primeras (o si es solamente derivable en media cuadrática) P es dos veces derivable. Pero ahora, según la regla de derivación de productos convolutivos, g_q o g_t son también dos veces derivables, y $q(x)$ y $t(x)$ son derivables en media cuadrática, aún si $f(x)$ no lo fuera: P transmite a g_q y a g_t sus propias características de

regularidad. Esta regularización será estudiada con mucho más detalle, en los dos últimos párrafos de este capítulo y en los dos capítulos siguientes:

El valor en el origen $g_t(0)$ del covariograma regularizado se escribe:

$$(I, 2, 7) \quad g_t(0) = \frac{1}{p^2} \int g(u)P(u)du$$

Al reemplazar $P(u)$ por $p * \hat{p}$, luego cambiando u por $u - v$, queda:

$$g_t(0) = \frac{1}{p^2} \iint g(u)p(v)p(u+v)dudv = \frac{1}{p^2} \iint g(u-v)p(u)p(v)dudv$$

Al tomar $h = u - v$, se ve que esta expresión representa el valor medio de $g(h)$, cuando las extremidades v y u del vector h recorren el espacio, ponderado por $p(u)$ y $p(v)$. Como siempre se tiene que $g(h) \leq g(0)$, se tiene también

$$g_t(h) \leq g(0)$$

Y esto es otra manifestación de la regularización.

En el caso particular de una función de muestreo k , con covariograma geométrico K , correspondiente a una muestra v de volumen $K(0) = v$, la relación anterior se escribe:

$$(I, 2, 8) \quad g_t(0) = \frac{1}{v^2} \int g(h)K(h)dh = \frac{1}{v^2} \iint g(x-y)k(x)k(y)dx dy$$

Entonces $g_t(0)$ representa el valor medio de $g(h)$ cuando las dos extremidades x e y de h recorren, cada uno por su propia cuenta, el volumen v . Esta relación constituye el *algoritmo de Cauchy*, el cual será útil más adelante. Se aplica, naturalmente, a una función $F(h)$ cualquiera y se demuestra de la misma manera: la integral de orden $2n$ que da el valor medio de $F()$, cuando las extremidades x e y del vector h recorren un volumen v , se reduce así a una integral de orden n , donde figura el covariograma geométrico $K(h)$ del volumen v :

$$(I, 2, 9) \quad \frac{1}{v^2} \int \int_v F(x-y)dx dy = \frac{1}{v^2} \int F(h)K(h)dh$$

De la misma manera se obtiene

$$(I, 2, 10) \quad g_t(h) = \frac{1}{v^2} \int g(h+u)K(u)du = \frac{1}{v^2} \int \int_v g(h+x-y)dx dy$$

El valor medio de $g(h)$ aparece como el valor medio de $g(h')$, cuando las dos extremidades del vector h' recorren, cada una por su cuenta, dos volúmenes v_1 y v_2 iguales a v y trasladados uno del otro por la traslación h .

Cantidad de metal asociado a la variable regularizada. – Por razones de coherencia, es deseable que la cantidad de metal Q_t :

$$Q_t = \int t(x) dx$$

Asociada a la variable regularizada $t(x)$ coincide con la cantidad Q , asociada en (I, 1, 11) a la variable puntual correspondiente. Demostremos que es bien así. Sean $\omega(u)$ y $\varphi(u)$ las transformadas de Fourier de la función de ponderación p y de la variable $f(x)$. Se tiene:

$$\begin{cases} Q = \varphi(0) \\ Q_t = \frac{1}{p} \omega(0) \varphi(0) \end{cases}$$

Pero – porque $p = \int p(x) dx$ - se tiene justamente $\omega(0) = p$, de donde resulta bien

$$(I, 2, 11) \quad Q_t = Q$$

3. - Procesos de subida y de descenso.

Cuando el volumen de muestreo v no es acotado, la ley

$$t(x) = \frac{1}{v} f * \hat{k}$$

se desvanece, pero la cantidad $q(x) = f * \hat{k}$ queda perfectamente definida. En el límite, el volumen ilimitado v puede reducirse a una recta, a un plano (o a un hiperplano si se tienen más de tres dimensiones) y nada nos prohíbe definir variables regionalizadas con $n - 1$, $n - 2$, ... dimensiones, definidas como cantidades de metal en las rectas, los planos, ..., paralelos.

Para precisar esta noción, designemos por $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al valor de la variable regionalizada de n dimensiones en el punto de coordenadas:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

La variable de $n - 1$ dimensiones, definida por la integral:

$$(I, 3, 1) \quad f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

Representa las cantidades de metal de las rectas paralelas al eje de las x_n . Análogamente, la variable de $n - 2$ dimensiones definida por la integral:

$$(I, 3, 2) \quad f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) = \int f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_{n-1} = \iint f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_{n-1} dx_n$$

Representa las cantidades de metal de los planos paralelos a los ejes x_n y x_{n-1} . La operación (I, 3, 1), que hace pasar de f_n a f_{n-1} , será designada como *subida de orden 1* efectuada a lo largo del eje de las x_n . Análogamente, la operación (I, 3, 2) puede ser considerada como una *subida de orden 1*, a lo largo del eje de las x_{n-1} , que hace pasar de f_{n-1} a f_{n-2} , sea como una *subida de orden 2* en el plano de los $x_n x_{n-1}$, haciendo pasar directamente de f_{n-1} a f_{n-2} . En los espacios de más de 3 dimensiones, se definirá igualmente subidas de orden 3 o 4, etc. Para efectuar una subida a lo largo de un eje, o de un plano, no paralelo a un eje o plano de coordenadas, basta naturalmente de realizar una rotación conveniente en el sistema de ejes coordenados.

En el caso de una variable de 3 dimensiones $f_3(xyz)$ que representa una ley de un yacimiento minero (ley expresada en cantidad de metal por unidad de volumen), la subida toma una significación muy concreta. Se supone que el eje de las z es la vertical, la variable:

$$f_2(xy) = \int f_3(xyz) dz$$

Representa la cantidad de metal por unidad de superficie o acumulación, de un sondaje vertical implantado en el punto de coordenada (xy) . La subida vertical hace pasar de la variable de 3 dimensiones f_3 , ley volumétrica, a la variable f_2 , de 2 dimensiones o acumulación. Análogamente, la variable de 1 dimensión:

$$f_1(z) = \iint f_3(xyz) dx dy$$

Representa la cantidad de metal al metro cuadrado de profundidad en un nivel de cota z . Las leyes volumétricas son menos regulares, en su variación espacial, que las acumulaciones de los sondajes verticales, y estas son menos regulares que los tonelajes de metal al metro de profundidad. El estudio detallado que haremos, de este proceso de regularización por la subida presenta entonces un interés práctico cierto. Además, tendrá el mérito de aclarar, en un ejemplo preciso, el fenómeno general de la regularización. La operación de subida se formula, de manera particularmente simple, con la ayuda de la transformación de Fourier. Designemos en efecto por:

$$\varphi_n(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n), \quad \varphi_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad \text{y} \quad \varphi_{n-2}(u_1, \dots, u_{n-2})$$

A las transformadas de Fourier de $f_n(x_1, \dots, x_n)$ y de las variables $f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ y $f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})$, que se deducen por subida de orden 1 y 2 de acuerdo a (I, 3, 1) y (I, 3, 2). Se obtiene inmediatamente:

$$(I, 3, 3) \quad \begin{cases} \varphi_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) = \varphi_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0) \\ \varphi_{n-2}(u_1, \dots, u_{n-2}) = \varphi_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-2}, 0) = \varphi_n(u_1, \dots, u_{n-2}, 0, 0) \end{cases}$$

La operación de subida a lo largo del eje de las x_n se manifiesta por la anulación de la coordenada u_n de la transformada de Fourier, conforme a un mecanismo bien conocido, en cálculo de Probabilidades, para el paso de una ley de distribución a su ley marginal. Más generalmente, la subida a lo largo de una recta, de un plano, ... cualesquiera se traduciría por una, dos, ... relaciones lineales homogéneas entre las coordenadas u_i . No insistiremos aquí en el álgebra de la subida. Observamos solamente que, según (I, 3, 2), las subidas a lo largo de dos ejes perpendiculares constituyen operaciones conmutativas, cuyo producto proporciona la subida de orden 2 en el plano de estos dos ejes: esto se ve, más cómodamente aún en (I, 3, 3). La operación inversa de la subida o descenso, está estrechamente ligada al problema de Radon ⁷ que consiste en determinar una función, conociendo el valor de su integral sobre todas las rectas, o todos los planos, ... del espacio. Abordaremos este problema, en el párrafo siguiente, en el caso particular de funciones isótropas, lo cual es suficiente para las aplicaciones prácticas, y permite poner en evidencia las propiedades esenciales de las operaciones de subida y descenso.

Subida sobre los covariogramas. – Designemos por $g_n, g_{n-1}, g_{n-2}, \dots$ los covariogramas de $n, n-1, n-2, \dots$ dimensiones asociadas a las variables $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots$ introducidas en (I, 3, 1) y (I, 3, 2) y por G_n, G_{n-1}, G_{n-2} sus transformadas de Fourier. De las relaciones de definición:

$$\begin{cases} g_n = f_n * \hat{f}_n \\ g_{n-1} = f_{n-1} * \hat{f}_{n-1} \\ g_{n-2} = f_{n-2} * \hat{f}_{n-2} \end{cases}$$

Se concluye, inmediatamente, al tomar en cuenta (I, 3, 3):

$$\begin{cases} G_n(u_1, \dots, u_n) = |\varphi_n(u_1, \dots, u_n)|^2 \\ G_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) = |\varphi_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})|^2 = |\varphi_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)|^2 \\ G_{n-2}(u_1, \dots, u_{n-2}) = |\varphi_{n-2}(u_1, \dots, u_{n-2})|^2 = |\varphi_n(u_1, \dots, u_{n-2}, 0, 0)|^2 \end{cases}$$

Por consiguiente, se tiene:

$$(I, 3, 4) \quad \begin{cases} G_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) = G_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0) \\ G_{n-2}(u_1, \dots, u_{n-2}) = G_n(u_1, \dots, u_{n-2}, 0, 0) \end{cases}$$

Al comparar con (I, 1, 3), se concluye que el covariograma asociado a la nueva variable obtenida a partir de una subida puede obtenerse al efectuar directamente la misma subida sobre el covariograma de la variable primitiva. Subida y paso al covariograma son operaciones permutables.

⁷ El problema de Radon está tratado en Guelfand y Chilov *Les Distributions, Paris, Dunod, 1962. Ver también Guelfand e Igraiev, Integralnaia geometria, Moscú, 1962.*

Diremos, brevemente, que el covariograma *sube y desciende al mismo tiempo que la variable a la cual está asociada.*

4.- Subida y descenso para covariogramas isótropos.

Se dirá que la variable regionalizada $f_n(x)$ de n dimensiones obedece a un esquema transitivo isótropo si el covariograma transitivo $g_n(h)$ asociado, no depende de la dirección del argumento vectorial h , sino solamente de su módulo, que designaremos por r :

$$(I, 4, 1) \quad r = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$$

Se escribirá $g_n(r)$, en lugar de $g_n(h)$, el índice n sirve para recordar que $g_n(r)$, bien que solo depende de la sola variable r , es en realidad una función definida en el espacio de n dimensiones.

En las aplicaciones, se utilizarán casi exclusivamente esquemas isótropos, sea porque las regionalizaciones presentan realmente un grado suficiente de isotropía, sea porque es posible reducirse a esta caso simple por una transformación lineal conveniente de las coordenadas (afinidad geométrica).

Los esquemas isótropos nos permitirán, en los dos capítulos siguientes, de poner en evidencia el fenómeno de la regularización con la subida: un $g_n(r)$ que se comporta en r^λ en la vecindad del origen proporciona, por subidas sucesivas, covariogramas en $r^{\lambda+1}$, $r^{\lambda+2}$, ..., salvo en el caso particular en que λ es un entero par. En este último caso, se observará la secuencia r , $r^2 \log r$, r^3 , $r^4 \log r$.

Efecto rectangular. - Sin embargo, además del caso isótropo, nos podemos imaginar covariogramas que no se regularizan a la subida. Por ejemplo, si un covariograma de 3 dimensiones es de la forma:

$$g_3(xyz) = g(x)g(y)g(z)$$

Se obtendrá, por subidas de orden 1 y 2, los covariogramas:

$$\begin{cases} g_2(xy) = Ag(x)g(y) \\ g_1(z) = A^2g(z) \\ A = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du \end{cases}$$

Que presentan, en el origen, el mismo comportamiento que g_3 .

Un efecto de este tipo puede existir en la naturaleza, en una forma más o menos atenuada, imaginemos el caso límite de la variable geométrica $k(x)$ asociada al cubo de lado unidad. En este caso, se tiene:

$$\begin{cases} K(xyz) = (1 - |x|)(1 - |y|)(1 - |z|) & \text{para } |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \\ K(xyz) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la subida, se obtiene $(1 - |x|)(1 - |y|)$ y $(1 - |z|)$. Las potencias de los sondajes verticales, o de las superficies de las secciones horizontales varían, en los espacios de 2 y 1 dimensiones, con exactamente el mismo grado de irregularidad que $k(xyz)$ en el espacio de 3 dimensiones. Los fenómenos de esta naturaleza serán designados con el nombre de *efecto rectangular*. A pesar que un tal efecto puede a veces manifestarse, la mayoría de los fenómenos naturales podrán ser estudiados a partir de esquemas isótropos, o reduciéndolos a modelos isótropos.

Estudio de la subida isótropa por la transformación de Hankel. La subida isótropa puede estudiarse, sea directamente, o bien a partir de las relaciones (I, 3, 3). Examinaremos, en primer lugar, el método que se fundamenta en la transformación de Fourier. Como $g_n(r)$ tiene simetría esférica, ocurre lo mismo con su transformada, la cual puede ponerse en la forma $G(\rho)$, con:

$$(I, 4, 2) \quad \rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Se sabe (Anexo A, 8, 1) que $G(\rho)$ admite la expresión siguiente:

$$(I, 4, 3) \quad G(\rho) = F(g_n(\rho)) = 2\pi\rho^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{n}{2}} r^2 J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\rho r) g_n(r) dr$$

J_λ designa la función clásica de Bessel con índice λ . La fórmula (I, 4, 3) representa la transformación de Fourier en el espacio de n dimensiones cuando se considera que g_n y G son funciones isótropas definidas en este espacio. Si g_n y G se consideran como funciones de una sola variable (r o ρ), la misma fórmula representa la transformación de Hankel de orden n , y puede generalizarse, como también la fórmula recíproca, a valores no enteros de n .

El proceso de subida a lo largo del eje de las x_n (proporciona, evidentemente la misma función isótropa a lo largo de cualquier eje), se representa, según (I, 1, 3), anulando la coordenada u_n de la transformada de Fourier del covariograma. Esta transformada $G(\rho)$, solo depende de ρ . Ahora, al anular u_n en (I, 4, 2), se obtiene simplemente el mismo ρ , considerado como radio vector del espacio de $n - 1$ dimensiones. Por consiguiente, el covariograma g_{n-1} deducido de g_n por subida de orden 1 tiene, en su espacio de $n - 1$ dimensiones, una transformada de Fourier $G(\rho)$, la cual, como función de ρ no se distingue de la transformada $G(\rho)$ de g_n , tomada en su espacio de n dimensiones.

Así, en esquema isótropo, *una subida, o un descenso, de orden cualquiera*, a lo largo de una recta, de un plano, ... de orientación cualquiera, *deja invariante la transformada $G(\rho)$ del covariograma*. Escribiremos:

$$(I, 4, 4) \quad G(\rho) = F_n g_n = F_{n-1} g_{n-1} = \dots = F_{n-k} g_{n-k}$$

La inversa de la transformada de Fourier proporciona inmediatamente la expresión del covariograma obtenido por subida de orden k :

$$(I, 4, 5) \quad g_{n-k}(r) = F_{n-k}G(\rho) = 2\pi r^{1-\frac{n-k}{2}} \int_0^{\infty} \rho^{\frac{n-k}{2}} J_{\frac{n-k}{2}}(2\pi r \rho) G(\rho) d\rho$$

Esta fórmula da la solución teórica del problema de la subida y del descenso en esquema isótropo, una vez conocida la función $G(\rho)$. Para el descenso, basta, naturalmente, con dar a k un valor negativo. Como las transformaciones de Hankel se generalizan para índices no enteros o semi-enteros, nos podemos imaginar subidas o descensos de orden cualquiera (no entero).

Más generalmente, el conocimiento de la función $G(\rho)$ permite definir una *familia de covariogramas isótropos* $g_{\lambda}(r)$, la cual depende de un parámetro λ , definida por la relación:

$$(I, 4, 6) \quad g_{\lambda}(r) = F_{\lambda}G(\rho) = 2\pi r^{1-\frac{\lambda}{2}} \int_0^{\infty} \rho^{\frac{\lambda}{2}} G(\rho) J_{\frac{\lambda}{2}-1}(2\pi r \rho) d\rho$$

El juego del proceso de la subida y del descenso permite describir toda la familia de los g_{λ} , una subida de orden μ , por ejemplo, hace pasar de g_{λ} a $g_{\lambda-\mu}$, mientras que la transformada de Hankel:

$$F_{\lambda}g_{\lambda} = F_{\lambda-\mu}g_{\lambda-\mu} = G(\rho)$$

Queda invariante. Notemos bien que el orden de esta transformación debe ser tomado igual al índice λ (la transformada de Fourier debe ser tomada en el espacio de λ dimensiones al cual pertenece g_{λ}). Si se efectúa una transformación de índice α cualquiera pero fijo, veremos que $F_{\alpha}g_{\lambda}$ desciende cuando g_{λ} sube, y, recíprocamente.

Estudio directo de la subida. - En el caso de una función isótropa $g_n(r)$, las expresiones directas (I, 3, 1) y (I, 3, 2) de las subidas de orden 1 y 2 se ponen en la forma siguiente:

$$(I, 4, 7) \quad \begin{cases} g_{n-1}(r) = 2 \int_0^{\infty} g_n(\sqrt{r^2 + x^2}) dx \\ g_{n-2}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} g_n(\sqrt{r^2 + \rho^2}) \rho d\rho \end{cases}$$

La expresión de g_{n-2} se obtiene al pasar en coordenadas polares en el plano de (x_n, x_{n-1}) . Mediante el cambio de variable:

$$u = \sqrt{r^2 + \rho^2}$$

Se obtiene inmediatamente:

$$(I, 4, 8) \quad g_{n-2}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} u g_n(u) du$$

Se ve que la subida de orden 2 (y, en general, toda subida de orden impar) se reduce a una integración ordinaria. La operación recíproca, el descenso de orden par, se efectúa por medio de derivaciones simples. Por ejemplo, al derivar (I, 4, 8) en r , se obtiene la expresión del descenso de orden 2⁸:

$$(I, 4, 9) \quad g_n(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} g_{n-2}(r)$$

Por el contrario, las subidas de orden impar son operaciones más difíciles. El descenso de orden 1, en particular, no se puede expresar con la ayuda de derivaciones elementales. Esta circunstancia no es fortuita. Tomemos, en efecto, como nueva variable:

$$(I, 4, 10) \quad y = r^2$$

Y consideremos los $g_k(r)$ como funciones $g_k(\sqrt{y})$ de esta nueva variable.

Las dos ecuaciones (I, 4, 7) se ponen (mediante los cambios de variables $v = y + x^2$ y $v = y + \rho^2$) en la forma:

$$(I, 4, 11) \quad \begin{cases} g_{n-1}(\sqrt{y}) = \int_y^{\infty} g_n(\sqrt{v}) \frac{dv}{\sqrt{v-y}} \\ g_{n-2}(\sqrt{y}) = \pi \int_y^{\infty} g_n(v) dv \end{cases}$$

La segunda expresión es una integración simple de $g_n(\sqrt{u})$, mientras que la primera se presenta como un producto de convolución:

$$(I, 4, 12) \quad g_{n-1}(\sqrt{y}) = g_n(\sqrt{y}) * T(y)$$

De $g_n(\sqrt{u})$ por la función $T(y)$ definida como sigue:

$$\begin{cases} T(y) = |y|^{-\frac{1}{2}} & \text{para } y < 0 \\ T(y) = 0 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

Esta función $T(y)$ aparece como muy próxima del operador $Y_{\frac{1}{2}}$ que representa, en teoría de las distribuciones, la integración de orden $\frac{1}{2}$ (Anexo A, 7). Se tiene, en efecto:

⁸ Nota del Traductor: Las relaciones (I, 4, 8) y (I, 4, 9) son las ecuaciones de la simulación de una variable regionalizada por el método de las "líneas rotantes".

$$Y_{\frac{1}{2}}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} T(-y)$$

Reemplazar $T(y)$ por $Y_{\frac{1}{2}}$ en el producto de convolución (I, 4, 12) equivale a reemplazar la primera integral de (I, 4, 11) por:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y g_n(v) \frac{dv}{\sqrt{y-v}}$$

Es decir, prácticamente, a realizar la integración de 0 a y , y no de y al infinito. Como el producto de un número par de integraciones de orden $\frac{1}{2}$ es una integración de orden entero, no es sorprendente que la subida de orden par conduzca a resultados simples. Introduzcamos ahora las funciones $F_\lambda(y)$ definidas por⁹:

$$(I, 4, 13) \quad \begin{cases} F_\lambda(y) = \frac{|y|^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} & \text{para } y < 0 \\ F_\lambda(y) = 0 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

$\Gamma(\lambda)$ designa la función euleriana (Anexo B). Se demuestra fácilmente (Anexo A, 7, 1) que el producto de convolución de F_λ por F_μ es $F_{\lambda+\mu}$:

$$(I, 4, 14) \quad F_\lambda * F_\mu = F_{\lambda+\mu}$$

Como la subida de orden 1 puede representarse por el producto de convolución:

$$g_{n-1}(\sqrt{y}) = \sqrt{\pi} g_n(\sqrt{y}) * F_{\frac{1}{2}}(y)$$

La relación (I, 14, 4) permite escribir la subida de orden k en la forma:

$$(I, 4, 15) \quad g_{n-k}(\sqrt{y}) = \pi^{\frac{k}{2}} g_n(\sqrt{y}) * F_{\frac{k}{2}}(y)$$

Para $k = 0$, caemos de nuevo en la función $g_n(\sqrt{y})$ ¹⁰, y para k entero par caemos de nuevo en integraciones ordinarias. Análogamente, el descenso de orden k se obtiene al cambiar k por $-k$:

⁹ En realidad, cuando la parte real λ es negativa o nula, F_λ es una distribución, igual, por otra parte, a la transpuesta de Y_λ definida en (A, 5). Las relaciones que vamos a escribir, solo tienen sentido, para todos los valores de λ , cuando los g_n y los F_λ son distribuciones. En las aplicaciones, los valores de λ son tales que conservan su sentido si g_n y F_λ son funciones.

¹⁰ F_0 es la distribución de Dirac δ (Anexo A, 5).

$$g_{n+k}(\sqrt{y}) = \pi^{-\frac{k}{2}} g_n(\sqrt{y}) * F_{\frac{k}{2}}(y)$$

En efecto, la subida de orden k efectuada sobre un g_{n+k} proporciona bien g_n ¹¹. Finalmente, la subida de orden μ cualquiera (entero o no, positivo o negativo) se obtiene al reemplazar k por μ . Todos los covariogramas g_λ , que pertenecen a una misma familia, tal como los definimos en (I, 4, 6), pueden deducirse de uno cualquiera de ellos por el proceso de subida o de descenso, representados por los productos de convolución:

$$(I, 4, 16) \quad g_\lambda(\sqrt{y}) = \pi^{\frac{\mu}{2}} g_{\lambda+\mu}(\sqrt{y}) * F_{\frac{\mu}{2}}(y)$$

Al volver a las notaciones explícitas:

$$(I, 4, 17) \quad g_\lambda(\sqrt{y}) = \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)_y} \int_0^\infty g_{\lambda+\mu}(\sqrt{v})(v-y)^{\frac{\mu}{2}-1} dv$$

Finalmente, al reintroducir la variable primitiva $r^2 = y$, y cambiando v en u^2 , encontramos la expresión de la subida de orden μ bajo la forma siguiente:

$$(I, 4, 18) \quad g_\lambda(r) = \frac{2\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)_r} \int_r^\infty g_{\lambda+\mu}(u)(u^2 - r^2)^{\frac{\mu}{2}-1} u du$$

En un proceso de descenso (μ negativo), podría suceder que una integral como (I, 4, 18) sea divergente (en el sentido usual). En general, se podrá evitar el recurso a la teoría de las distribuciones, al descender primero en un entero, operación que solo introduce derivaciones ordinarias, y, efectuando a continuación la subida de orden positivo $2k - \mu$. Por ejemplo, la subida de orden 1:

$$g_{n-1}(r) = 2 \int_r^\infty g_n(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - r^2}} du$$

Admite como recíproco el descenso de orden 1:

$$(I, 4, 19) \quad g_n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty g'_{n-1}(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - r^2}} du$$

¹¹ Porque $F_{-k/2} * F_{k/2} = F_0 = \delta$.

Esta relación se interpreta como un descenso de orden 2, que conduce, según (I, 4, 9) a

$$g_{n+1} = -\frac{1}{2\pi u} g'_{n+1}(u), \text{ seguido de una nueva subida de orden 1.}$$

Elección de un modelo isótropo. – Las operaciones realizadas aquí tienen un carácter formal y no consideran para nada la capacidad de los covariogramas g_λ obtenidos para representar convenientemente a la variable regionalizada correspondiente a uno u otro fenómeno natural. Solamente, un conocimiento directo del fenómeno natural mismo puede permitir un juicio. En la elección de un «modelo» teórico de covariograma, es necesario buscar la mejor interpolación posible del covariograma experimental, construido sobre puntos discontinuos según los datos disponibles. Se deberá también asociar una extrema importancia al comportamiento de $g(r)$ en la vecindad del origen. Aún en los casos en que este comportamiento no está suficientemente puesto en evidencia por los datos experimentales, se podrá, en general, tener nociones a priori bastante precisas acerca de su naturaleza analítica, gracias a los conocimientos cualitativos que se pueden tener, por otra parte, sobre el fenómeno representado. Naturalmente, en este caso, la experiencia es el juez soberano y podrá por si sola decidir si tal u otro tipo de comportamiento conviene bien a tal u otro tipo de variable.

Sin embargo, *los covariogramas utilizados deberán siempre ser de tipo positivo*. Esta condición es imperativa, si no se desea caer un día en una varianza de estimación negativa. En este sentido, es importante observar que, *para que todos los covariogramas g_λ de una familia de covariogramas isótropos sean de tipo positivo, basta con que uno solo de ellos lo sea*. Esto resulta inmediatamente de la relación (I, 4, 4) y del teorema de Bochner (Anexo A, 9, 1). Para que un g_λ sea de tipo positivo, es necesario y suficiente que su transformada de Fourier $G(\rho)$, tomada en el espacio de λ dimensiones sea una función no negativa (más generalmente, una medida positiva). Como todos los g_μ tienen la misma transformada de Fourier $G(\rho)$, en sus espacios respectivos de μ dimensiones, son todos de tipo positivo si uno solo de ellos lo es.

5. Modelo recíproco y grupo de Hankel.

La operación de subida de orden μ , tal como está definida en (I, 4, 18), puede ser simbolizada por un operador M_μ . Por definición (I, 4, 18) se escribe entonces:

$$(I, 5, 1) \quad g_\lambda = M_\mu g_{\lambda+\mu}$$

Pero esta misma operación puede igualmente expresarse, con la ayuda de (I, 4, 6), según las transformaciones de Hankel F_α que están así en relación estrecha con los M_μ . La relación (I, 4, 6) se simboliza por las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} G = F_{\lambda+\mu} g_{\lambda+\mu} \\ g_\lambda = F_\lambda G \end{cases}$$

Resulta la relación:

$$(I, 5, 2) \quad g_\lambda = F_\lambda F_{\lambda+\mu} g_{\lambda+\mu}$$

Al comparar (I, 5, 1) y (I, 5, 2) obtenemos una relación entre operadores:

$$M_\mu = F_\lambda F_{\lambda+\mu}$$

Que escribiremos, al cambiar λ por α y μ por $\beta - \alpha$, en la forma siguiente:

$$(I, 5, 3) \quad M_{\beta-\alpha} = F_\alpha F_\beta$$

El producto de transformaciones de Hankel de orden α y β es igual a la subida de orden $\beta - \alpha$. Es necesario precisar bien que el operador $F_\alpha F_\beta$ el cual actúa sobre una función f , representa lo que se obtiene al efectuar, en primer lugar $F_\beta f$, y haciendo intervenir enseguida a F_α sobre el resultado obtenido.

En particular, para $\alpha = \beta$, se obtiene:

$$(I, 5, 4) \quad M_0 = F_\alpha F_\alpha$$

Como la subida de orden cero es el operador unitario ($M_0 f = f$), esta relación traduce simplemente la reciprocidad de la transformación de Hankel F_α .

Consideremos ahora $G = F_\lambda g_\lambda$ como el elemento G_0 de un nuevo modelo, que llamaremos modelo recíproco de los g_λ . El elemento general G_μ de este modelo se obtiene, por definición, al efectuar la subida de orden $-\mu$ sobre G_0 :

$$(I, 5, 5) \quad G_\mu = M_{-\mu} G_0$$

En estas condiciones, apliquemos los dos miembros de (I, 5, 3) sobre G_0 :

$$M_{\beta-\alpha} = F_\alpha F_\beta G_0$$

Al lado izquierdo, obtenemos $G_{\alpha-\beta}$ según (I, 5, 5). A la derecha, podemos reemplazar $F_\beta G_0$ por g_β según (I, 4, 6). Se tiene así:

$$(I, 5, 6) \quad G_{\alpha-\beta} = F_\alpha g_\beta$$

Al multiplicar a la izquierda los dos miembros de (I, 5, 6) por F_α , se obtiene:

$$(I, 5, 7) \quad g_{\alpha-\beta} = F_\alpha G_\beta$$

Las dos ecuaciones recíprocas (I, 5, 6) y (I, 5, 7) relacionan estrechamente los dos modelos g y G . Se pueden establecer directamente por cálculo, al utilizar la fórmula (A, 8, 30) del Anexo A, la cual proporciona la transformada de Hankel de la función Besseliana $r^\mu J_\mu(r)$. Estas relaciones justifican el nombre de modelos recíprocos. De (I, 5, 6), por ejemplo, se

deduce que una subida de orden λ efectuada sobre g_β , la cual tiene por efecto cambiar β en $\beta - \lambda$, tiene como recíproco, siendo α constante, un descenso del mismo orden λ efectuado sobre $G_{\alpha-\beta}$ que se transforma en $G_{\alpha-\beta+\lambda}$.

OBSERVACION. – El modelo recíproco de los G_λ no conviene necesariamente para la representación de un fenómeno real. Por ejemplo, si los g_μ son de tipo positivo, no resulta de ninguna manera que los G_λ también lo sean. Veremos ejemplos. Para que dos modelos recíprocos g_μ y G_λ sean ambos de tipo positivo, según el teorema de Bochner (Anexo A, 9, 1), es necesario y suficiente, que por lo menos uno de los g_μ y al menos uno de los G_λ sean funciones no negativas o medidas positivas. Veremos igualmente, en el capítulo siguiente, ejemplos de modelos isotropos que verifican esta condición.

El grupo de Hankel. De un punto de vista puramente formal (es decir sin preocuparse de la naturaleza de las funciones o las distribuciones sobre las cuales actúan los operadores introducidos simbólicamente) es interesante precisar la estructura algebraica del conjunto de transformaciones constituidas por la subida, los descensos y las transformaciones de Hankel. Veremos que este conjunto es un grupo, que llamaremos el grupo de Hankel. Consideremos en primer lugar el conjunto de las subidas M_μ . El producto de dos subidas es una subida, según (I, 1, 14), y se tiene:

$$(I, 5, 8) \quad M_\lambda M_\mu = M_{\lambda+\mu} = M_\mu M_\lambda$$

De manera que el producto, evidentemente asociativo, es, además conmutativo. Existe un elemento unidad, la subida de orden 0, M_0 , y cada elemento M_λ tiene un inverso $M_{-\lambda}$:

$$(I, 5, 9) \quad M_\lambda M_{-\lambda} = M_0$$

Así, el conjunto de las subidas constituye un grupo, por otra parte abeliano (conmutativo). Consideremos ahora el conjunto H constituido por el grupo de las subidas, y las transformadas de Hankel F . El producto de dos subidas es una subida, según (I, 5, 8). El producto de dos transformaciones de Hankel es una subida, según (I, 5, 3). Multipliquemos esta última relación a la derecha por F_β . Queda:

$$M_{\beta-\alpha} F_\beta = F_\alpha$$

Análogamente (el producto es evidentemente asociativo) multipliquemos a la izquierda por F_α . Queda:

$$F_\alpha M_{\beta-\alpha} = F_\beta$$

Al cambiar las notaciones, estas dos relaciones se escriben:

$$(I, 5, 10) \quad \begin{cases} M_{-\lambda} F_\mu = F_{\mu+\lambda} \\ F_\lambda M_\mu = F_{\mu+\lambda} \end{cases}$$

Las que muestran que el producto de una subida y de una transformación de Hankel es una transformación de Hankel. Por otra parte, existe un elemento neutro M_0 , y cada elemento tiene un inverso:

$$\begin{cases} M_\lambda M_{-\lambda} = M_0 \\ F_\alpha F_{-\alpha} = M_0 \end{cases}$$

H es entonces bien un grupo, el grupo de Hankel.

Comparemos este grupo con el grupo de las translaciones-simetrías en la recta euclidiana. Designemos por $S_{2\beta}$ la simetría respecto del punto de abscisa β , y por T_α la traslación por $-\alpha$ (traslación hacia la izquierda): Las propiedades geométricas elementales bien conocidas de este grupo proporcionan las reglas de cálculo siguientes:

$$(I, 5, 11) \quad \begin{cases} T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta} \\ S_\alpha S_\beta = T_{\beta-\alpha} \\ S_\alpha T_\beta = S_{\alpha+\beta} \\ T_\beta S_\alpha = S_{\alpha+\beta} \end{cases}$$

Si se establece una correspondencia (aplicación biyectiva) entre S_α y F_α y entre T_β y M_β , se ve que las reglas (I, 5, 11) no son diferentes de (I, 5, 8), (I, 5, 3) y (I, 5, 10).

Así *el grupo de Hankel es isomorfo con el grupo de las simetrías-traslaciones* en la recta euclidiana. En este isomorfismo, las transformaciones de Hankel corresponden a las simetrías, y las subidas a las translaciones. Si se considera que el grupo de Hankel opera sobre el eje de las dimensiones, una subida M_λ se interpreta como una traslación $-\lambda$ (hacia la izquierda) a lo largo de este eje, y una transformación de Hankel F_α como una simetría respecto del punto $\alpha / 2$ de este eje, simetría que tiene por efecto de hacer pasar de un modelo isótropo a su recíproco.

*
* *

CAPITULO SEGUNDO

EJEMPLOS DE MODELOS ISOTROPOS

SUMARIO

Este capítulo es una simple aplicación de la subida isotropa a modelos particulares, los cuales pueden ser utilizados en la práctica. Sin embargo su objetivo principal es poner en evidencia el fenómeno de la regularización a la subida. En el estudio del comportamiento de un covariograma $g(r)$ en la vecindad del origen, se distingue una parte regular (serie entera par $\sum a_k r^{2k}$) y una parte irregular, de la forma $\sum a_\mu r^\mu$ (μ diferente de un entero par). En cada uno de los ejemplos estudiados, se muestra que la subida puede hacerse término a término sobre la parte irregular, según la regla:

$$M_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\mu+\lambda}{2}\right) r^{\lambda+\mu}$$

Con la condición de reemplazar $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu$ por un término en $r^{2k} \log r$ cuando μ es un entero par $2k$. La serie logarítmica $\log r \rightarrow \pi r \rightarrow -\pi r^2 \log r \rightarrow \dots$ obtenida por subidas sucesivas de orden 1 es fundamental para las aplicaciones.

Esta regla de subida término a término sobre la parte irregular se aplica a todos los covariogramas usuales, pero proporciona el resultado salvo una serie entera. Esta serie solo puede ser determinada por un estudio directo de cada $g(r)$ particular.

La demostración de la validez general de esta regla será entregada en el capítulo siguiente. Nos contentaremos aquí con encontrarla en cada una de las familias de modelos estudiados: modelos de Bessel (párrafo 1), de Gauss (párrafo 2), de Laguerre (párrafo 3), modelos hipergeométricos (párrafo 4) y esféricos (párrafo 5).

A pesar de que numerosos cálculos se derivan a Anexos, esta capítulo es de lectura difícil. No es necesario profundizar cada uno de los ejemplos tratados para pasar a los capítulos siguientes. Sin embargo, debido a la importancia de la regularización con la subida, y de la regla de la subida término a término, y también para convencer al lector que la subida no es una operación elemental, aconsejamos leer, al menos el sub párrafo I.2 (modelos de Bessel de segunda especie) antes de pasar al capítulo III.

1. – Los modelos de Bessel.

Trataremos rápidamente el modelo de primera especie, poco importante para las aplicaciones, y con mucho más detalle el modelo de Bessel de segunda especie, cuya

importancia es muy grande tanto para las aplicaciones como para la teoría de la estimación (capítulo IV).

1.1. – El modelo de Bessel de primera especie. Tomemos, en el espacio de n dimensiones un covariograma $g_n(r)$ definido por:

$$(II, 1, 1) \quad g_n(r) = (cr)^{-\mu} J_\mu(cr)$$

En que c es una constante, y J_μ la función de Bessel de índice μ (Anexo C-1). Este covariograma tiene por transformada de Hankel de orden 2, según la fórmula (A, 8, 30) del Anexo A:

$$G_n(\rho) = F_n g_n = \frac{2^{n-\mu} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \mu - \frac{n}{2})} c^{-n} \left(1 - \frac{4\pi^2 \rho^2}{c^2}\right)^{\mu - \frac{n}{2}}$$

La subida de orden λ se efectúa según (I, 4, 5) al aplicar a G la transformación de orden $n-\lambda$. Al aplicar (A, 8, 9) del anexo A, se obtiene:

$$(II, 1, 2) \quad g_{n-\lambda} = F_{n-\lambda} G = c^{-\lambda} (2\pi)^{\frac{\lambda}{2}} (cr)^{\frac{\lambda}{2}-\mu} J_{\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr)$$

Así, salvo un factor constante, la subida de orden λ se manifiesta por el cambio del índice μ en $\mu - \lambda/2$. La aplicación de la definición directa (I, 4, 18), de su lado, conduce a la expresión:

$$(II, 1, 3) \quad g_{n-\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_r^\infty g_n(u) (u^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} u du$$

Al igualar (II, 1, 2) y (II, 1, 3), se encuentra una integral clásica de Sonine:

$$\int_r^\infty (cr)^{-\mu} J_\mu(cr) (u^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} u du = \frac{2^{\frac{\lambda}{2}-1} \Gamma(\frac{\lambda}{2})}{c^\lambda} (cr)^{\frac{\lambda}{2}-\mu} J_{\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr)$$

El modelo de Bessel de primera especie es bien de tipo positivo, porque sus transformadas son de la forma $\left(1 - \frac{4\pi^2}{c^2} \rho^2\right)^\mu$, luego son positivas. Sus covariogramas, que son todos con desarrollo en series pares, son, sin embargo, demasiado regulares en el origen para ser utilizados en las aplicaciones.

El modelo recíproco está constituido por funciones de la forma $\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\mu$, sobre las cuales la subida de orden λ se manifiesta por el cambio de μ en $\mu + \lambda/2$, conforme a la regla (I, 5, 6). Pero estas funciones no son de tipo positivo, porque sus transformadas, que son los $\rho^{-\mu}J_\mu$, toman valores negativos. No pueden servir entonces como modelos de covariograma.

1.2 . - El modelo de Bessel de segunda especie. Las funciones de Bessel modificadas de segunda especie, tomadas en la forma $x^\mu K_{-\mu}(x)$ (ver Anexo C.2), son mucho mejor adaptadas para los usos prácticos: Son siempre positivas y decrecen en el infinito como las exponenciales, además presentan en el origen una gama de comportamientos extremadamente variados.

Tomemos como covariograma de partida, en un espacio de n dimensiones la función:

$$(II, 1, 4) \quad g_n(r) = c^\mu r^\mu K_{-\mu}(cr)$$

El cual tiene por transformada de Hankel de orden n , según (A, 8, 30), la función:

$$(II, 1, 5) \quad G(\rho) = 2^{n-1+\mu} \pi^{\frac{n}{2}} c^{-n} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \mu\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{4\pi^2}{c^2} \rho^2\right)^{\mu + \frac{n}{2}}}$$

Para realizar la subida de orden λ , se debe, según (I, 4, 5) calcular $F_{n-\lambda}G$, lo que se hace fácilmente con la ayuda de la fórmula (A, 8, 27) del Anexo A. Se obtiene:

$$(II, 1, 6) \quad g_{n-\lambda}(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{\lambda}{2}}}{c^\lambda} (cr)^{\mu + \frac{\lambda}{2}} K_{-\mu - \frac{\lambda}{2}}(cr)$$

Así, salvo el factor $\frac{(2\pi)^{\frac{\lambda}{2}}}{c^\lambda}$, la subida de orden λ se efectúa al reemplazar en (II, 1, 4) el índice μ por $\mu + \lambda/2$.

Por ejemplo, tomemos $\mu = 0$. Se obtiene, como punto de partida, la función K_0 cuyo desarrollo está dado en (C, 2, 4): Por subidas sucesivas de orden 1, se describe la gama siguiente:

$$(II, 1, 7)^{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_n = K_0(cr) \\ g_{n-1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{c} \sqrt{cr} K_{-\frac{1}{2}}(cr) = \frac{\pi}{c} e^{-cr} \\ g_{n-2} = \frac{2\pi}{c^2} (cr) K_{-1}(cr) \\ g_{n-3} = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{c^3} (cr)^{\frac{3}{2}} K_{-\frac{3}{2}}(cr) = \frac{2\pi^2}{c^3} e^{-cr} (1+cr) \end{array} \right.$$

Así, a $g_n = K_0$ cuyo comportamiento en el origen es logarítmico, le sucede g_{n-1} que es el modelo exponencial, el cual es lineal en el origen, luego viene g_{n-2} que es en $r^2 \log r$, etc...

Más generalmente, la fórmula (II, 1, 6) permite captar en vivo el proceso de *regularización a la subida*. El desarrollo de g_n está dado, en el caso general (μ no entero) por la fórmula (6, 2, 3) del Anexo C. Este desarrollo tiene una parte regular, que es una serie entera par en r^{2k} , y una parte irregular que tiene términos en $r^{2\mu+2k}$. La parte regular no debe ser tomada en consideración. Si solo existiera esta parte, el covariograma sería indefinidamente derivable en el origen, y solo podría describir una variable $f(x)$ también indefinidamente derivable. Entonces, la parte irregular sola, representa el comportamiento de la variable $f(x)$, y su aventura a la subida debe poner en evidencia el fenómeno de la regularización. Consideremos en primer lugar, el término más irregular, que es $r^{2\mu}$ ($k = 0$). Es igual a:

$$-(cr)^\mu \frac{2^{-1-\mu}}{\Gamma(1+\mu)} \frac{\pi}{\text{sen}(\mu\pi)}$$

La subida de orden λ proporciona $g_{n-\lambda}$ por la fórmula (II, 1, 6): Si $\mu + \lambda/2$ no es un entero, el mismo desarrollo (C, 2, 3) nos da el término más irregular. Es de la forma $r^{2\mu+\lambda}$, y tiene por expresión exacta:

$$-\frac{(cr)^{2\mu+\lambda}}{c^\lambda} \frac{2^{-1-\mu}}{\Gamma\left(1+\mu+\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\pi^{1+\frac{\lambda}{2}}}{\text{sen}\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)\pi}$$

Al comparar estas dos expresiones, se obtiene la regla siguiente:

Si μ y $\mu + \lambda/2$ no son ni uno ni otro enteros, un término en $r^{2\mu}$ proporciona, a la subida de orden λ , un término en $r^{2\lambda+\mu}$, según la fórmula:

$$(II, 1, 8) \quad M_\lambda r^{2\mu} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma\left(1+\mu+\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\text{sen}\mu\pi}{\text{sen}\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)\pi} r^{2\mu+\lambda}$$

¹² Nota del traductor: g_{n-1} corresponde al modelo exponencial, de gran uso en geoestadística.

Se verifica fácilmente, con la ayuda del desarrollo (C, 2, 3) que esta regla (II, 1, 8) no solo se aplica al término más irregular, sino también la término general de la parte irregular (basta con reemplazar 2μ por $2\mu + 2k$). Así *la subida se puede efectuar término a término sobre la parte irregular*. Sin embargo, la parte regular no puede ser manipulada de manera tan simple, pero, como hemos visto, esta parte no presenta ninguna importancia en el estudio del comportamiento en el origen. Por otra parte, se observa que si se toma $2\mu = 2k$ entero par y λ cualquiera, el segundo miembro de (II, 1, 8) se anula. Y, en efecto, un término «regular» en r^{2k} no puede dar, a la subida, un término irregular en $r^{2k + \lambda}$. Se concluye que la subida sobre $r^{2\mu}$ está dada por (II, 1, 18) *salvo una serie par*, cuya expresión exacta, no nos interesa.

Al cambiar μ en $\mu/2$, y utilizando la fórmula de los complementos (B, 6), pondremos la regla (II, 1, 8) en la forma más simple siguiente:

$$(II, 1, 9) \quad M_{\lambda} \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^{\mu} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\mu + \lambda}{2}\right) r^{\mu + \lambda}$$

Queda por examinar casos especiales, que aparecen cuando, en (II, 1, 4), μ o $\mu + \lambda/2$ es un entero. Si μ es un entero m , el término más irregular de g_n es $x^{2m} \log x$. Su expresión exacta está dada por el desarrollo (C, 2, 5), es decir, al tomar la constante c igual a la unidad:

$$(-1)^{m+1} \frac{2^{-m}}{m!} r^{2m} \log r$$

Análogamente, si $\mu + \lambda/2$ es un entero p , el término más irregular de $g_{n-\lambda}$ es:

$$(-1)^{p+1} (2\pi)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{2^{-p}}{p!} r^{2p} \log r$$

Los otros casos se tratan de manera análoga, tomemos, por ejemplo μ cualquiera (no entero) y $\mu + \lambda/2 = p$ entero, es decir, una subida de orden:

$$\lambda = 2(p - \mu)$$

Obtenemos:

$$-M_{\lambda} r^{2\mu} \frac{2^{-1-\mu}}{\Gamma(1+\mu) \operatorname{sen} \mu \pi} = (-1)^{p+1} \frac{2^{-\mu} \pi^{p-\mu}}{p!} r^{2p} \log r$$

Utilicemos de nuevo la fórmula de los complementos, y cambiemos μ por $\mu/2$. La regla (II, 1, 9) queda reemplazada por la regla siguiente:

$$(II, 1, 10) \quad \begin{cases} M_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \frac{(-1)^{p+1}}{p!} 2\pi^{\frac{\lambda}{2}} r^{2p} \log r \\ \lambda = 2p - \mu \end{cases}$$

Los otros casos se tratan de manera similar. La regla (II, 1, 9) sigue siendo válida en todos los casos, con la condición de reemplazar $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) r^\alpha$ por $(-1)^{p+1} \frac{2}{p!} r^{2p} \log r$ cuando $\alpha = 2p$ es un entero par. Proponemos entonces una regla de equivalencia, la cual escribiremos simbólicamente:

$$(II, 1, 11) \quad \Gamma(-p) r^p \equiv (-1)^{p+1} \frac{2}{p!} r^{2p} \log r$$

Así completada, la regla (II, 1, 9) se aplica en cualquier caso. Se verifica fácilmente que esta regla permite efectuar la subida término a término sobre la parte irregular de g_n . La fórmula (II, 1, 11) puede encontrarse por un razonamiento más rápido. En efecto, la regla (II, 1, 9) proporciona, la subida de $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu$ salvo una serie entera par. Siempre, salvo una serie entera par, $(r^e - r^{2p})$ sube de la misma manera que r^e . Busquemos el límite de:

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) [r^\mu - r^{2p}]$$

Cuando μ tiende hacia el entero par $2p$. Pongamos:

$$\mu = 2p + \varepsilon$$

Se encuentra, para $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) &= \frac{\pi}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\mu\pi}{2}} = \frac{(-1)^{p+1} \pi}{\Gamma(p+1+\varepsilon) \operatorname{sen} \pi\varepsilon} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{\varepsilon p!} \left[1 - \varepsilon \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} + \dots \right] \end{aligned}$$

También se tiene:

$$r^\mu - r^{2p} = r^{2p} (2\varepsilon \log r + \dots)$$

Cuando ε tiende a 0, se obtiene el límite buscado, el cual coincide con (II, 1, 11):

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)[r^\mu - r^{2p}] \rightarrow \frac{(-1)^{p+1}}{p!} 2r^{2p} \log r$$

En las aplicaciones, se deberán efectuar subidas sucesivas de orden 1. Se obtendrá, sea la secuencia normal (μ no entero):

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)r^\mu \rightarrow \sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-1\right)r^{\mu+1} \rightarrow \dots$$

Sea, lo más corriente, *la serie excepcional* (μ entero), que hace alternar los términos impares r^{2k-1} y los términos logarítmicos $r^{2k} \log r$. Debido a su importancia, la escribiremos de manera explícita:

$$(II, 1, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log r \rightarrow \pi r \rightarrow -\pi r^2 \log r \\ r^{2k-1} \rightarrow -2^{1-2k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} r^{2k} \log r \rightarrow \frac{-2\pi}{2k+1} r^{2k+1} \rightarrow \dots \\ r^{2k} \log r \rightarrow \pi \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!} r^{2k+1} \rightarrow -\frac{\pi}{k+1} r^{2k+2} \log r \rightarrow \dots \end{array} \right.$$

La regla de la subida término a término sobre la parte irregular y las secuencias obtenidas para el modelo de Bessel, se encuentran idénticamente para todos los otros modelos estudiados en este capítulo, y mostraremos, en el capítulo siguiente que tienen un alcance general. Sin embargo, no debemos olvidar, que esta regla proporciona el resultado salvo una serie entera par. La parte regular de un covariograma, no tiene importancia en el comportamiento de la variable regionalizada, ni tampoco, y lo veremos también, tiene importancia en el cálculo de una varianza de estimación, no obstante esta parte es indispensable si se desea construir gráficamente $g_{n-\lambda}$, para compararlo, por ejemplo a una curva experimental. La parte regular solo puede ser obtenida por el estudio directo de cada covariograma particular, y no existe, en este sentido, una regla general simple.

Modelo recíproco. - El modelo recíproco construido sobre $G(\rho)$ de la fórmula (II, 1, 5) es

del tipo $\frac{1}{(1+\rho^2)^\lambda}$. La subida de orden μ cambia λ en $\lambda-\mu/2$. Como $G(\rho)$ es positivo, el

teorema de Bochner del Anexo A, 9, 1 muestra que el modelo de Bessel es de tipo positivo, como debe ser.

Inversamente, las funciones $x^\mu K_\mu$ son positivas, de manera que el modelo recíproco es también de tipo positivo. Pero este modelo recíproco, muy regular en el origen, además de decrecer muy lentamente en el infinito, no puede ser conveniente en las aplicaciones prácticas.

OBSERVACION. - Si comparamos el resultado (II, 1, 6) de la subida en el modelo de Bessel con la definición directa (I, 4, 18) que se escribe:

$$(II, 1, 13) \quad g_{n-\lambda} = 2 \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_r^{\infty} g_n(r) (u^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} u du$$

Obtenemos las relaciones notables siguientes ¹³:

$$(II, 1, 14) \quad (cr)^{\mu+\frac{\lambda}{2}} K_{-\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr) = \frac{2^{1-\frac{\lambda}{2}} c^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_r^{\infty} (cu)^{\mu} K_{-\mu}(cu) (u^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} u du$$

Cambiando u por rv , obtenemos el resultado equivalente:

$$(II, 1, 15) \quad (cr)^{\mu+\frac{\lambda}{2}} K_{-\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr) = \frac{2^{1-\frac{\lambda}{2}} c^{\lambda+\mu}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_1^{\infty} v^{\mu} K_{-\mu}(cvr) (v^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}-1} v dv$$

Si hacemos $\mu = -\lambda/2$ y $c = 1$ en esta última relación, obtenemos, considerando (C, 2, 6):

$$(II, 1, 16) \quad r^{-\nu} K_{\nu}(r) = \frac{2^{-\nu} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_1^{\infty} e^{-vr} (v^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} dv$$

Se tiene, como caso particular, la expresión (C, 2, 9) de K_0 .

2. - Modelo y representación de Gauss.

El modelo de Gauss está definido a partir de la exponencial:

$$(II, 2, 1) \quad g_n(r) = e^{-ar^2} = e^{-a(h_1^2 + \dots + h_n^2)}$$

Es el único modelo isótropo que presenta, en la subida, el efecto rectangular a su estado puro. La función $g_n(r)$ tiene por transformada de Fourier, según (A, 8, 20), la función:

¹³ Se compararan con los resultados análogos obtenidos por Guelfand (op. Cit.) para las funciones de Bessel de primera especie J_{λ} y la integración de orden no entero.

$$(II, 2, 2) \quad G(\rho) = F_n g_n = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \rho^2}$$

Que también es una exponencial gaussiana: en particular, vemos que el modelo de Gauss y su recíproco son de tipo positivo. La subida de orden λ se obtiene al efectuar la transformación de Hankel de orden $n - \lambda$. Se encuentra:

$$(II, 2, 3) \quad g_{n-\lambda}(r) = F_{n-\lambda} G = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{\lambda}{2}} e^{-ar^2}$$

Así, la subida de orden λ se traduce por una simple multiplicación por el factor $\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$.

Este modelo es demasiado regular en el origen para ser de utilidad en las aplicaciones prácticas. Pero la expresión (II, 2, 3), de la subida, notablemente simple puede ser utilizada, indirectamente, por intermedio de las representaciones de Gauss. Supongamos que el elemento g_n de un modelo admita una representación integral de la forma:

$$g_n(r) = \int_0^{\infty} e^{-ur^2} f(u) du$$

En este caso, la subida de orden λ se pone, según (I, 2, 3), en la forma siguiente, que también es una representación gaussiana:

$$(II, 2, 4) \quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{\infty} e^{-ur^2} \frac{f(u)}{u^{\frac{\lambda}{2}}} du$$

Análogamente, la transformación de Hankel de orden α proporciona:

$$(II, 2, 5) \quad F_{\alpha} g_{n-\lambda} = \pi^{\frac{\lambda+\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{u}} u^{-\frac{\alpha+\lambda}{2}} f(u) du$$

Es decir, al cambiar u en π^2 / u :

$$(II, 2, 6) \quad F_{\alpha} g_{n-\lambda} = \pi^{\frac{\lambda+\alpha}{2}+2} \int_0^{\infty} e^{-u\rho^2} u^{\frac{\alpha+\lambda}{2}-2} f\left(\frac{\pi^2}{u}\right) du$$

Que es aún una representación de Gauss. Si $f(u)$ es una función no negativa, el modelo definido en (II, 2, 4) y su recíproco (II, 2, 6) serán los dos de tipo positivo.

EJEMPLO:

Como aplicación, tomemos en (II, 2, 4) la función:

$$(II, 2, 7) \quad f(u) = \frac{c^{2\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u^{\beta-1} e^{-c^2 u}$$

Con constantes c y β arbitrarias. Al aplicar (B, 1), se encuentra:

$$(II, 2, 8) \quad \begin{cases} g_n(r) = \frac{c^{2\beta-1}}{(r^2 + c^2)^\beta} \\ g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \frac{c^{2\beta-1}}{(r^2 + c^2)^{\beta - \frac{\lambda}{2}}} \end{cases}$$

Tomemos la transformada de Hankel de orden 1 de g_n . Se tiene directamente, según (A, 8, 27):

$$F_1 g_n = 2 \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)} (c\rho)^{\beta - \frac{1}{2}} K_{-\beta + \frac{1}{2}}(2\pi c\rho)$$

Y, de la forma (II, 2, 5):

$$F_1 g_n = \frac{\pi^{2\beta - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta)} c^{2\beta-1} \int_0^\infty e^{-u\rho^2 - \frac{c^2 \pi^2}{u}} \frac{1}{u^{\beta + \frac{1}{2}}} du$$

Igualemos estas dos expresiones, al poner $\mu = \beta - 1/2$ y $2\pi c = b$. Se obtiene:

$$(II, 2, 9) \quad (b\rho)^\mu K_{-\mu}(b\rho) = b^{2\mu} 2^{-1-\mu} \int_0^\infty \exp\left(-u\rho^2 - \frac{b^2}{4u}\right) \frac{du}{u^{\mu+1}}$$

Se encuentra así la representación de Sonine-Schlöfli de las funciones de Bessel modificadas de segunda especie (C, 2, 8).

3. - El Modelo de Laguerre.

3.-1.- Modelo de Laguerre de primera especie. El modelo de Laguerre de primera especie está definido a partir del covariograma:

$$(II, 3, 1) \quad g_n(r) = F(\alpha, \gamma, -r^2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 e^{-wr^2} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

La función de Laguerre $F(\alpha, \gamma, x)$ y su representación integral se proporcionan en el Anexo D, fórmulas (D, 1) y (D, 3): El covariograma g_n , está en la forma de una representación de Gauss, luego es de tipo positivo.

Y la fórmula (II, 2, 4) permite escribir inmediatamente la expresión de la subida de orden λ :

$$(II, 3, 2) \quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} F\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}, \gamma - \frac{\lambda}{2}, -r^2\right)$$

Así, salvo un factor, la subida de orden λ , se efectúa al cambiar α y γ por $\alpha - \lambda/2$ y $\gamma - \lambda/2$. Sin embargo, este modelo es demasiado regular en el origen para ser utilizado en las aplicaciones. El modelo recíproco, también de tipo positivo, presenta, en el origen, una gama de comportamientos más interesante. Este covariograma se obtiene al tomar la transformación de Hankel de orden μ de (II, 3, 1), según (II, 2, 5):

$$(II, 3, 3) \quad \begin{cases} F_{\mu} g_n = \pi^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi^2 \rho^2}{u}\right) u^{-\frac{\mu}{2} + \alpha - 1} (1-u)^{\gamma - \alpha - 1} du \\ F_{\mu} g_n = \pi^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_1^{\infty} \exp(-u\pi^2 \rho^2) u^{\frac{\mu}{2} - \gamma} (u-1)^{\gamma - \alpha - 1} du \end{cases}$$

3.-2. – El modelo de Laguerre de segunda especie. – El modelo de Laguerre de segunda especie es el recíproco del anterior. Lo definiremos, modificando ligeramente las notaciones de (II, 3, 3), a partir del covariograma:

$$(II, 3, 4) \quad g_n(r) = \frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_1^{\infty} e^{-uc^2 r^2} u^{\alpha - 1} (u-1)^{\gamma - \alpha - 1} du$$

La subida se efectúa fácilmente, porque g_n tiene la forma de una representación de Gauss:

$$(II, 3, 5) \quad g_{n-\lambda}(r) = \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}} c^{-\lambda}}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_1^{\infty} e^{-uc^2 r^2} u^{\alpha - 1 - \frac{\lambda}{2}} (u-1)^{\gamma - \alpha - 1} du$$

Al comparar con las fórmulas (D, 7) y (D, 8) del Anexo D, se pone en evidencia la parte regular y la parte irregular de este covariograma. Se encuentra:

$$(II, 3, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{n-\lambda} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} c^{-\lambda} L\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}, \gamma - \frac{\lambda}{2}, -c^2 r^2\right) \\ = \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \gamma\right)}{c^\lambda \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \alpha\right)} F\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}, \gamma - \frac{\lambda}{2}, -c^2 r^2\right) \\ + \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{c^\lambda} (c^2 r^2)^{1 + \frac{\lambda}{2} - \gamma} F\left(1 - \gamma - \alpha, 2 + \frac{\lambda}{2} - \gamma, -c^2 r^2\right) \end{array} \right.$$

Se observa que salvo un factor $\pi^{\frac{\lambda}{2}} c^{-\lambda}$, la subida se efectúa simplemente al reemplazar α y γ por $\alpha - \lambda/2$ y $\gamma - \lambda/2$ en la función $L(\alpha, \gamma, c^2 r^2)$.

En particular, según la fórmula (D, 11), la subida de orden:

$$\lambda = 2(\alpha - 1)$$

Proporciona el resultado simple:

$$(II, 3, 7) \quad g_{n-2(\alpha-1)} = \pi^{\alpha-1} c^{2(1-\alpha)} (c^2 r^2)^{\alpha-\gamma} e^{-c^2 r^2}$$

Así, la familia de modelos entera puede ser engendrada por subidas efectuadas sobre $(c^2 r^2)^{\alpha-\gamma} e^{-c^2 r^2}$. Se verificará fácilmente que la subida de orden $\lambda - 2(\alpha - 1)$, efectuada sobre esta función, proporciona para g_n una segunda expresión, que es la representación integral (D, 10), y permite encontrar la fórmula (D, 9) de la transformación de las funciones L.

Se puede ver también, en la fórmula (II, 3, 6), que la regla de la subida término a término, para la parte irregular, y la fórmula (II, 1, 9) se aplican de manera exacta. Esta verificación es fácil en el caso particular en que $\gamma - \alpha - 1 = 0$ (modelo *integral-exponencial*). La parte irregular se reduce entonces, según (D, 13), a un término único:

$$\pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) (c^2 r^2)^{-\alpha + \frac{\lambda}{2}}$$

La secuencia logarítmica (II, 1, 12) se encuentra también, con la ayuda de los desarrollos (D, 14) y (D, 15), correspondientes al caso en que $1 - \gamma = p$ es un entero.

4. - Los modelos hipergeométricos.

3.-1. - Los modelos hipergeométricos de primera especie. - Se define un modelo de primera especie al tomar, como covariograma de partida:

$$(II, 4, 1) \quad g_n(r) = F(\alpha, \beta, \gamma, -r^2)$$

La función $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ está definida por la fórmula (E, 1, 1) del Anexo E. Al utilizar la representación integral (E, 1, 4), se obtiene:

$$(II, 4, 2) \quad g_n(r) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1+r^2u)^{-\alpha} du$$

Es una representación de $g_n(r)$ por medio de la función $(1+r^2u)^{-\alpha}$, función de tipo positivo, dado que es la transformada de Hankel de una función de Bessel del tipo $r^\mu K_{-\mu}$. La familia de modelos engendrada por g_n será también de tipo positivo. Por otra parte, se verifica fácilmente que la subida de:

$$(1+r^2u)^{-\alpha}$$

Se efectúa según la fórmula:

$$(II, 4, 3) \quad M_\lambda (1+ur^2)^{-\alpha} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} u^{-\frac{\lambda}{2}} (1+ur^2)^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}$$

Al cambiar los símbolos de integración y de subida, se deduce la expresión de la subida del g_n definido en (II, 4, 2):

$$(II, 4, 4) \quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} F\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}, \beta - \frac{\lambda}{2}, \gamma - \frac{\lambda}{2}, -r^2\right)$$

Así, salvo un factor, la subida se efectúa al reemplazar α , β y γ por $\alpha - \lambda/2$, $\beta - \lambda/2$, $\gamma - \lambda/2$.

El modelo hipergeométrico es demasiado regular en el origen para ser útil. Su recíproco, el cual no es hipergeométrico, presente, al contrario, comportamientos muy variados en el origen. Para definirlo, tomemos la transformada de Hankel de orden μ de (II, 4, 2). Al aplicar la fórmula (A, 8, 27), bajo el signo sumatoria, en (II, 4, 2), queda:

$$(II, 4, 5) \quad F_\mu g_n = \frac{4\pi^\alpha \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_1^\infty v^{1+\mu-2\gamma} (v^2-1)^{\gamma-\beta-1} (v\rho)^{\alpha-\frac{\mu}{2}} K_{\frac{\mu}{2}-\alpha}(2\pi v\rho) dv$$

Al hacer $\gamma = \beta$, se encuentra el modelo de Bessel de segunda especie, del cual (II, 4, 5) constituye una generalización.

4.-2.- Modelos hipergeométricos de segunda especie.

Se pueden definir varios tipos de modelos de segunda especie. El que daremos aquí presenta la particularidad de tener un *alcance finito*, el cual, para simplificar, tomaremos como unidad de longitud.. Todos los covariogramas $g_{n-\lambda}$ serán idénticamente nulos para $r > 1$. Veremos, en el capítulo consagrado a la estimación, que un alcance finito está ligado a anomalías inesperadas, conocidas con el nombre de Zitterbewegung, y cuya amplitud puede ser considerable.

De la misma manera que en el modelo de Laguerre de segunda especie, el cual se puede obtener, totalmente, por subidas, a partir de la función $r^{2(\alpha-\gamma)} \exp(-r^2)$, definiremos el modelo de segunda especie a partir de la función:

$$(II, 4, 6) \quad \begin{cases} g_{\mu}(r) = \pi^{\beta-1} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} (1-r^2)^{\beta-\gamma} r^{2(\gamma-\alpha-1)} & \text{para } r < 1 \\ g_{\mu}(r) = 0 & \text{para } r \geq 1 \end{cases}$$

Efectuemos la subida de orden ν :

$$g_{n-\nu}(r) = \frac{\pi^{\beta-1+\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} \int_{r^2}^1 u^{\gamma-\alpha-1} (1-u)^{\beta-\gamma} (u-r^2)^{\frac{\nu}{2}-1} du$$

Poniendo $u = 1 - (1-r^2)v$, queda (siendo entendido que $g_{n-\mu}(r) \equiv 0$ para $r > 1$):

$$g_{n-\nu}(r) = \frac{\pi^{\beta-1+\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} (1-r^2)^{\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}} \int_0^1 [1-(1-r^2)v]^{\gamma-\alpha-1} v^{\beta-\gamma} (1-v)^{\frac{\nu}{2}-1} dv$$

Comparemos esta expresión con la representación integral (E, 1, 4) de la función hipergeométrica (Anexo E). Se obtiene:

$$g_{n-\nu} = \pi^{\beta+\frac{\nu}{2}-1} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma\left(1+\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}\right)} (1-r^2)^{\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}} F\left(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}, 1-r^2\right)$$

Con el propósito de simplificar la expresión obtenida pongamos:

$$\begin{cases} \mu = n + 2(1-\beta) \\ \nu = \lambda + 2(1-\beta) \end{cases}$$

Queda entonces:

(II, 4, 7)

$$\begin{cases} g_n(r) = (1-r^2)^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma, 1-r^2) \\ g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma\left(2-\gamma+\frac{\lambda}{2}\right)} (1-r^2)^{1-\gamma+\frac{\lambda}{2}} F\left(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma+\frac{\lambda}{2}, 1-r^2\right) \end{cases}$$

Tomando el elemento $g_n(r)$ como elemento de base, se ve que la subida de orden λ se efectúa, salvo un factor, reemplazando α, β y γ por $\alpha - \lambda/2, \beta - \lambda/2, \gamma - \lambda/2$. Por otra parte, la fórmula de cambio (E, 2, 3) del Anexo E permite separar fácilmente la parte irregular de estos covariogramas. Se encuentra:

(II, 4, 8)

$$\begin{cases} g_{n-\lambda} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma\left(\gamma+\frac{\lambda}{2}-\alpha-\beta\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\beta+\frac{\lambda}{2}\right)} F\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}, \beta-\frac{\lambda}{2}, \alpha+\beta+1-\gamma-\frac{\lambda}{2}, r^2\right) \\ + \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma\left(\alpha+\beta-\gamma-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(1+\beta-\gamma)} r^{2\gamma-\alpha-\beta+\lambda} F\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma+\frac{\lambda}{2}-\alpha-\beta, r^2\right) \end{cases}$$

Esta fórmula permite encontrar inmediatamente la regla de la subida término a término sobre la parte irregular y su expresión exacta por la fórmula (II, 1, 9). La secuencia logarítmica (II, 1, 12) aparece en el caso en que $\gamma - \alpha - \beta$ es entero, y puede estudiarse con la ayuda de las fórmulas de paso al límite, proporcionadas en el Anexo (E, 2, 4).

CASO PARTICULAR: *Subida para r^λ .*

Tomemos en (II, 4, 6), $\gamma = \beta$. Se tiene:

$$\frac{\pi^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} g_\mu = r^{2(\beta-\alpha-1)}$$

Y pongamos $\lambda = \beta - \alpha - 1$. Las fórmulas adjuntas proporcionan la subida de orden ν para la función r^λ (más exactamente, se trata de la función igual a r^λ para $r < 1$ y 0 para $r > 1$) en la forma siguiente:

$$(II, 4, 9) \quad M_\nu r^\lambda = \frac{\pi^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} g_{\mu-\nu} = \frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{\nu}{2}} F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 1+\frac{\nu}{2}, 1-r^2\right)$$

El ajuste con el eje de las r , en $r = 1$, es de orden $\nu/2$. La fórmula de cambio, de su lado, permite separar las partes regulares e irregulares. Esta fórmula da:

$$(II, 4, 10) \quad M_\nu r^\lambda = \frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{2}{\lambda + \mu} F\left(1 - \frac{\nu}{2}, -\frac{\lambda + \nu}{2}, 1 - \frac{\lambda + \nu}{2}, r^2\right) + \pi^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda + \nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{\lambda + \mu}$$

La parte irregular se reduce al término monomio que la regla general (II, 1, 9) hacía prever. Por otra parte, la parte irregular se encuentra, también, determinada, pero esto se relaciona con la función particular introducida aquí (idénticamente nula para $r > 1$).

Como las subidas de orden 2 se reducen a integrales elementales, se tendrá que efectuar subidas de orden 1, sobre todo, en las aplicaciones. Es la razón por la cual vamos a estudiar especialmente el caso $\nu = 1$. El comportamiento en la vecindad del alcance ($r = 1$) resulta, de manera inmediata de (II, 4, 9):

$$(II, 4, 11) \quad M_1 r^\lambda = 2\sqrt{1-r^2} F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1-r^2\right)$$

El comportamiento en el origen está dado por (II, 4, 10), con $\nu = 1$:

$$(II, 4, 12) \quad M_1 r^\lambda = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{1+\lambda} + \frac{2}{1+\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1-\lambda} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n}$$

Cuando λ es un entero par positivo, es preferible utilizar la fórmula (II, 4, 11) la cual se reduce, en este caso, al producto de un polinomio en r^2 por $\sqrt{1-r^2}$. El caso de $\lambda = 2k - 1$ entero impar puede estudiarse con la ayuda de las fórmulas generales (E, 2, 4). Es más simple efectuar el paso al límite directamente sobre (II, 4, 12).

Se obtiene sin dificultad:

$$(II, 4, 13) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 r^{2k-1} = \frac{1}{k} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{r^{2n}}{k-n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{r^{2n}}{n-k} \\ \quad - \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left[2 \log \frac{r}{2} + \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{2k-1} \right. \\ \quad \left. - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{k} \right] r^{2k} \end{array} \right.$$

Se puede además, por medio de integraciones directas, obtener fórmulas integradas explícitamente. Por ejemplo, se tiene:

$$(II, 4, 14) \quad M_1 r = 2 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} (r^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} du = \sqrt{1-r^2} + r^2 \log \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r}$$

Por integración por partes, se obtiene una fórmula de recurrencia, que permite calcular, uno a uno todos los $M_1 r^{2k-1}$:

$$(II, 4, 15) \quad M_1 r^{2k-1} = 2\sqrt{1-r^2} + (2k+1)M_1 r^{2k-1}$$

Finalmente, se calcula $M_1(r^{2k} \log r)$ al derivar (II, 4, 12) respecto de λ y haciendo $\lambda = 2k$ en la expresión obtenida. El término logarítmico desaparece, porque $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ es infinito, y queda:

$$(II, 4, 16) \quad M_1(r^{2k} \log r) = \pi \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} r^{1+2k} - \frac{2}{(2k+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n}}{(2n-2k-1)^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} r^{2n}$$

OBSERVACION. – Para valores cualesquiera de α , β y γ , el modelo hipergeométrico no es de tipo positivo, y no puede ser utilizado directamente. Pero las fórmulas de la subida para r^{λ} pueden servir para efectuar, término a término, la subida sobre un covariograma de tipo positivo, y de alcance finito tomado como unidad de largo.

5. – Los modelos esféricos.

En el espacio de μ dimensiones consideremos una esfera de diámetro unidad. Esta esfera tiene por volumen:

$$(II, 5, 1) \quad V_{\mu} = \frac{2^{-\mu} \pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}$$

Determinemos el covariograma geométrico $K_{\mu} = k * \hat{k}$, de la variable $k(x)$ igual a 1 dentro de la esfera y 0 al exterior. Se sabe que $K_{\mu}(r)$ representa la medida del hipervolumen con μ dimensiones de la intersección de esta esfera con su trasladado en una traslación r de dirección cualquiera. Salvo un signo, la derivada de K_{μ} representa la medida de la hiperesfera de $\mu - 1$ dimensiones, que constituye el contorno aparente de esta intersección. Tenemos entonces:

$$-K'_{\mu}(r) = V_{\mu-1} (1-r^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$$

Y, al integrar (teniendo en cuenta que $K_\mu(1) = 0$):

$$K_\mu(r) = V_{\mu-1} \int_r^1 (1-h^2)^{\frac{\mu-1}{2}} dh$$

Así, $K_\mu(r)$ es un caso particular del modelo hipergeométrico de segunda especie. A priori sabemos que K_μ es de tipo positivo debido a su misma significación geométrica. Se obtienen fácilmente las dos expresiones siguientes de K_μ :

$$(II, 5,2) \quad \left\{ \begin{aligned} K_\mu(r) &= \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}} 2^{-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3+\mu}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{1+\mu}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\mu}{2}, \frac{3+\mu}{2}, 1-r^2\right) \\ &= V_\mu - V_{\mu-1} r F\left[\frac{1}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right] \end{aligned} \right.$$

Las constantes V_μ y $V_{\mu-1}$ están definidas en (II, 5, 1): Como es normal, $K_\mu(0) = V_\mu$ es la medida de la hipersuperficie que constituye el volumen aparente de la hiperesfera.

CASOS PARTICULARES. - Para $\mu = 3$ (esfera ordinaria) se tiene un polinomio:

$$(II, 5, 3) \quad K(r) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} r + \frac{\pi}{12} r^3 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} r F\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}, r^2\right) \quad 14$$

Para $\mu = 2$ (caso del círculo), se obtiene:

$$(II, 5, 4) \quad K(r) = \frac{1}{2} \left[\text{Arc cos } r - \sqrt{1-r^2} \right] = \frac{\pi}{4} - r F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right)$$

Finalmente, para $\mu = 1$ (segmento de largo unidad), se encuentra:

$$(II, 5, 5) \quad K(h) = 1 - |h| = 1 - h F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1-r^2\right)$$

Cada uno de estos covariogramas engendra, por subidas y descensos, un modelo particular, por ejemplo el modelo esférico propiamente dicho ($\mu = 3$), el modelo circular ($\mu = 2$), etc... Para μ impar, los K_μ son polinomios, y la subida se hace término a término sin dificultad. Si μ es un entero par, debemos recurrir a la fórmula (E, 2, 4). Por ejemplo, el modelo circular ($\mu = 2$), definido por su elemento:

¹⁴ Nota del Traductor: este covariograma corresponde al modelo esférico, de gran importancia en geostatística minera: $K(r) = \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} r^3 \right)$

$$g_2(r) = \frac{\pi}{4} - rF\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right) = \frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1-r^2\right)$$

Proporciona, por subida de orden 1:

$$g_1(r) = \frac{\pi}{8}(1-r^2)^2F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 1-r^2\right)$$

Este covariograma $g_1(r)$ es el covariograma de las cuerdas del círculo de diámetro unidad (transversales horizontales). Al aplicar (E, 2, 4), el covariograma queda:

(II, 5, 6)

$$\left\{ \begin{aligned} g_1(r) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!(n+1)!} \left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(2+n)}{\Gamma(2+n)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma'\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} - 2\log r \right] r^{2+2n} \\ &= \frac{2}{3} + (2\log r + 1 - 4\log 2) \frac{r^2}{2} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} + 4\log 2 - 2\log r \right) r^4 \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2^{2-2n} \left[1 + \dots + \frac{1}{n} + 1 + \dots + \frac{1}{n+1} \right. \\ &\quad \left. + 4\log 2 - 2 - \frac{2}{3} - \dots - \frac{2}{2n-3} - 2 - \frac{2}{3} - \dots - \frac{2}{2n-1} - 2\log r \right] r^{2+2n} \end{aligned} \right.$$

CAPITULO TERCERO

REPRESENTACIONES TRANSITIVAS PARA LAS DISTRIBUCIONES

SUMARIO

Este capítulo generaliza para el caso de las distribuciones ¹⁵, los resultados obtenidos para las variables regionalizadas. No es necesario para la comprensión del resto de la obra (con la excepción del capítulo X, consagrado a las distribuciones aleatorias y a la teoría intrínseca de las distribuciones) y puede ser omitido por los lectores que no conocen la teoría de las distribuciones. Sin embargo, los principios de esta teoría se han resumido, de la manera más simple posible, en el Anexo A de esta obra. Aconsejamos entonces, de recorrer este Anexo antes de leer el capítulo III.

*El párrafo 1 extiende, sin dificultad, el formalismo transitivo, a las distribuciones con soporte (campo geométrico) acotado. La regularización de una distribución T por una función suficientemente regular α es una función $\hat{\alpha} * T$, que representa una operación de tomar una muestra. El covariograma $g = T * \hat{T}$ de la distribución se regulariza por el covariograma de la función α , g es una distribución de tipo positivo. Este covariograma sube al mismo tiempo que T . El efecto de pepita se puede representar con la ayuda de una medida de Dirac $C\delta(h)$ ajustada a un covariograma continuo.*

El párrafo 2 define las subidas y los descensos para las distribuciones temperadas isótropas de soporte cualquiera. De lectura más difícil que el párrafo I, se desarrolla la conclusión de que las operaciones de subida y descenso no operan sobre las mismas distribuciones, sino solamente sobre las clases de equivalencia analítica: el resultado de la subida queda definido salvo una serie entera, y esto justifica la regla de la subida término a término sobre la parte irregular, regla ya encontrada en el capítulo precedente.

El párrafo 3 aplica los resultados obtenidos a la distribución r^μ , y establece la validez general de la regla $M_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\lambda + \mu}{2}\right) r^{\mu + \lambda}$.

1. - El simbolismo transitivo para las distribuciones con soporte acotado.

La idea de representar ciertos fenómenos por distribuciones, en vez de funciones, a menudo está sugerida por la misma práctica. El geógrafo, que estudia la repartición de las

¹⁵ En español la palabra “distribución” puede generar confusión con la *distribución de probabilidad de una variable aleatoria*. En inglés no hay confusión porque se usa “generalized function”.

densidades de población de un país, no se preocupa de saber si un hombre está presente, o no, en el punto de coordenadas (x, y) . El está interesado en el número de individuos que habitan una cierta superficie de referencia, que es en general, una circunscripción administrativa. Análogamente, en un yacimiento minero, el explotador no está interesado de saber si en un punto dado, se encuentra un grano de estéril o de mineral. Todo lo que le interesa, es de saber, o de prever, el resultado de operaciones tecnológicas bien definidas (toma de una muestra, explotación de un panel), que se aplican al espacio donde se distribuye la mineralización. Se podrían citar otros casos numerosos en los cuales el fenómeno puntual no es conocido y no representa ningún interés por si mismo, debido a su gran complejidad, y donde se conoce solamente la respuesta que proporciona la naturaleza, en una forma numérica, a las operaciones técnicas a las cuales es sometida. Si se simbolizan estas operaciones por funciones φ (funciones de muestreo del capítulo I, por ejemplo) las cuales pertenecen a un espacio conveniente de funciones, las respuestas numéricas de la naturaleza definen, en este espacio, una funcional $T(\varphi)$, generalmente lineal y continua, de manera que el fenómeno natural estudiado debe ser estudiado por una *distribución*.

En las representaciones transitivas, donde se supone que el campo geométrico de la regionalización es finito, se utilizarán exclusivamente *distribuciones con soporte acotado*, es decir distribuciones del espacio (ζ') definidas en el espacio (ζ) de las funciones de base φ indefinidamente derivables. Por otra parte, muy a menudo, estas distribuciones serán simplemente medidas que actúan en el espacio de las funciones borelianas. Para una medida μ , la «cantidad de metal» $\int_V d\mu$ contenida en un volumen V está siempre definida.

Si se introduce la variable geométrica $k(x)$ asociada a este volumen V , que es una función boreliana, se tiene, en efecto:

$$(III, 1, 1) \quad Q = \int_V d\mu = \mu(k)$$

Luego, una mineralización, o bien la repartición de una población en la superficie de un país, son medidas, positivas por otra parte.

El simbolismo transitivo es exactamente el mismo para las distribuciones y las funciones. En efecto, en el capítulo I, la variable regionalizada con soporte puntual era ya, implícitamente considerada como una distribución. Por otra parte, se reduce al caso de una variable puntual al regularizar la distribución T por una función $\alpha(x)$ conveniente. Pongamos:

$$(III, 1, 2) \quad f(x) = \hat{\alpha} * T = \int T(x+u)\alpha(u)du$$

Este producto de convolución existe, porque T es con soporte acotado. Si la función α es suficientemente regular, $f(x)$ es efectivamente una función. Por ejemplo, si se toma:

$$\alpha(x) = \frac{1}{v} k(x)$$

Siendo $k(x)$ la variable geométrica asociada a un volumen v centrado en el origen, y si T es una medida, la regularizada $f(x)$ no es otra cosa que la ley media de la muestra igual a v e implantada en el punto x .

El covariograma g_α asociado a la variable $\hat{\alpha} * T$, regularizado de la distribución T está dado, según la definición (I, 1, 13), por:

$$g_\alpha = \hat{\alpha} * T * \alpha * \hat{T} = T * \hat{T} * \alpha * \hat{\alpha}$$

Introduciendo el covariograma:

$$A = \alpha * \hat{\alpha}$$

Asociado a la función regularizante α , y por lo mismo, definamos una distribución g :

$$(III, 1, 3) \quad g = T * \hat{T}$$

Que llamaremos *covariograma de la distribución T* . Este covariograma existe siempre, porque T es con soporte acotado. Obtenemos entonces la generalización exacta de (i, 2, 5):

$$(III, 1, 4) \quad g_\alpha = g * A$$

Luego, el covariograma de la regularizada de T por α es la regularizada del covariograma $g = T * \hat{T}$ de T por el covariograma $A = \alpha * \hat{\alpha}$ de α . Por otra parte, esta propiedad subsiste si α es una distribución cualquiera, siempre que los productos de convolución existan (esto es siempre así porque la distribución α , como T , tienen su soporte acotado).

La transformada de Fourier θ de T .

$$(III, 1, 5) \quad \theta = FT$$

Existe siempre, en el sentido de las distribuciones, además, como T tiene soporte acotado, sabemos que θ es una función indefinidamente derivable (prolongable en una función holomorfa entera, Anexo A, párrafo 8, 2). Análogamente, la transformada de Fourier G del covariograma g existe, y, como los productos de convolución se transforman en productos ordinarios, se tiene, como en (I, 4, 9):

$$(III, 1, 6) \quad G = Fg = |\theta|^2$$

Aplicando sobre T y sobre g la función de base $\varphi = I$, cuya transformada de Fourier es la medida de Dirac, se define, sin dificultad la cantidad de metal Q , y se encuentran de nuevo los resultados (I, 1, 12) y (I, 1, 13):

$$(III, 1, 7) \quad \begin{cases} Q = T(1) = \int T(x)dx = \theta(0) \\ Q^2 = G(1) = \int G(x)dx = |\theta(0)|^2 \end{cases}$$

Propiedades del covariograma. - Las propiedades del covariograma resultan, naturalmente, del hecho que $T * \hat{T} = g$ es una distribución de tipo positivo (ver Anexo A, párrafo 9. 2). De acuerdo al teorema de Bochner, si la transformada $G = |\theta|^2$ de g es sumable, g es también, obligatoriamente, una función continua de tipo positivo, mientras que si G no es sumable, g no puede ser una función continua.

Efecto de pepita. - El efecto de pepita, mencionado en el párrafo 1 del capítulo I, a propósito de la significación física del covariograma, puede ser definido de manera más rigurosa con la ayuda de las medidas δ de Dirac. Supongamos que el covariograma g sea la suma de una medida de Dirac (distribución de tipo positivo) y de una función $g_1(h)$ continua y de tipo positivo:

$$(III, 1, 8) \quad g = C\delta + g_1$$

La constante C será llamada constante de pepita. Regularicemos T por una función α , y a continuación g mismo por $A = \alpha * \hat{\alpha}$. Se obtiene:

$$g_\alpha = CA(h) + g_1 * A$$

El covariograma regularizado es una función igual a la suma de un término «regular» $g_1 * A$, el cual se observaría normalmente solo, en ausencia del efecto de pepita, y de la función $CA(h)$, producto de la constante de pepita por el covariograma de α . En particular, si se toma:

$$\alpha = \frac{1}{v}k(x)$$

En que $k(x)$ es la variable geométrica asociada a un muestreo v , de covariograma geométrico $K = k * \hat{k}$, se obtiene:

$$g_\alpha = \frac{C}{v^2}K(h) + g_1 * \frac{K}{v^2}$$

Si el volumen v de la muestra es pequeño, $g_1 * \frac{K}{v^2}$ no difiere prácticamente de g_1 , salvo quizás para $|h| < D$, siendo D el diámetro más grande de v . Pero, para $|h| < D$, el término más importante es $\frac{C}{v^2}K(h)$, que representa la perturbación aportada por el efecto de pepita. Esta perturbación es más intensa cuando el dominio $|h| < D$, donde ésta se hace sentir, es más pequeño. El valor de g_α en el origen es inferior a la cantidad:

$$(III, 1, 9) \quad \frac{C}{v^2} K(0) = \frac{C}{v}$$

Porque $K(0) = v$, según (I, 1, 5). En la teoría de la estimación, se verá que este término C/v repercute en las varianzas de estimación, en la forma de una varianza adicional, o varianza de pepita, inversamente proporcional al volumen de muestreo.

Notamos también que se tiene, según (I, 1, 4):

$$(III, 1, 10): \quad \frac{C}{v^2} \int K(h) dh = C$$

La integral, extendida a todo el espacio, del término perturbador es siempre igual a la constante de pepita C , la cual caracteriza, globalmente, el efecto de pepita. Físicamente, es C la constante que tiene la mayor significación, porque, contrariamente a $g(0)$, no depende del tamaño del volumen de muestreo v .

Subidas y descensos. - La subida de orden 1, a lo largo del eje de las x_n , tal como fue definida en (I, 3, 1) para una función, se generaliza inmediatamente a una distribución $T_n(x_1 \dots x_n)$, en la forma de producto de convolución:

$$(III, 1, 11) \quad T_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1}) = T_n(x_1 \dots x_n) * [\delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_{n-1}) 1(x_n)]$$

La definición de las subidas de orden 2, 3, ... es inmediata. Entre las transformadas de Fourier θ_{n-1} y θ_n de T_{n-1} y T_n , tenemos aún la relación:

$$(III, 1, 12) \quad \theta_{n-1}(u_1 \dots u_{n-1}) = \theta_n(u_1 \dots u_{n-1}, 0)$$

Porque hay cambio de productos convolutivos y multiplicativos, y cambio de $\delta(x_i)$ con $1(u_i)$.

Si S_n y T_n son dos distribuciones con soporte acotado del espacio de n dimensiones, las cuales tienen por transformada de Fourier las funciones σ_n y θ_n , el producto de convolución $U_n = S_n * T_n$ tiene por transformada el producto ordinario $\sigma_n \theta_n$. Sea U_{n-1} la distribución obtenida al hacer la subida (III, 1, 11) sobre la distribución U_n . Se tiene, según (III, 1, 12):

$$FU_{n-1} = \sigma_n(u_1 \dots u_{n-1}, 0) \theta_n(u_1 \dots u_{n-1}, 0)$$

Y, aplicando la transformación inversa:

$$U_{n-1} = S_{n-1} * T_n$$

Así, la subida sobre un producto de convolución proporciona el mismo resultado que el producto de convolución de los resultados de la subida efectuada sobre cada una de las

distribuciones. Se dice, brevemente, que un *producto de convolución sube al mismo tiempo que cada uno de sus factores*.

Hay que tener cuidado, sobre todo en el caso de las distribuciones isótropas, que $S_n * T_n$ y S_{n-1} y T_{n-1} son productos de convolución definidos en sus espacios respectivos, de n o de $n-1$ dimensiones.

Una aplicación inmediata de este resultado a la distribución $g = T * \hat{T}$ muestra que *el covariograma sube al mismo tiempo que la distribución a la cual está asociado*. Análogamente, el covariograma $g_\alpha = g * A$ de una regularizada $T * \hat{\alpha}$ sube al mismo tiempo que g y A , y por consiguiente, al mismo tiempo que T y α .

Si nos limitamos a considerar solamente distribuciones con soporte acotado, todos los resultados del capítulo I se transponen sin dificultad: Esto proviene del hecho que las transformadas de Fourier son funciones. Se definirá sin dificultad la operación inversa de la subida, que es el descenso, como también el empleo de la transformación de Hankel para definir modelos isótropos. Por otra parte, si los soportes no son acotados, aparecen dificultades. Se encontrará, en GUELFAND y GRAEV ¹⁶ indicaciones acerca del problema de Radon para las distribuciones. Nos limitaremos, en el párrafo siguiente, al caso particular de las distribuciones isótropas, con el objetivo de poner en evidencia el fenómeno de la regularización a la subida.

2. - Subida y descenso para las distribuciones temperadas isótropas.

En este párrafo, solo consideraremos distribuciones temperadas (que pertenecen a ζ'), cuyas transformadas de Fourier existen siempre, además de ser ellas mismas temperadas. Las funciones de base φ serán entonces las funciones de (ζ) , indefinidamente derivables, las cuales decrecen rápidamente en el infinito como también todas sus derivadas, cuyas transformaciones de Fourier pertenecen también a (ζ) .

La definición (III, 1, 11) de la subida solo tiene sentido cuando la transformada de Fourier es una función, de manera de que (III, 1, 12) se pueda aplicar. Esta condición se verifica para una distribución con soporte acotado, pero no para una distribución temperada cualquiera. Al generalizar la relación (I, 4, 4), vamos a definir una subida para las distribuciones temperadas isótropas.

Se dirá que una distribución T_n del espacio de n dimensiones es isótropa, y se escribirá $T_n(r)$, si se tiene para toda función de base φ :

$$(III, 2, 1) \quad T_n(\varphi) = T_n(\psi)$$

Siendo ψ una función isótropa igual al valor medio $\psi(r)$ de φ sobre la esfera de radio r . Se demuestra que una función de este tipo es indefinidamente derivable, con decrecimiento rápido, como también sus derivadas (entonces pertenece a ζ como función de la variable r sola) y que todas sus derivadas impares son nulas en $r = 0$. La parte «irregular» de ψ es idénticamente nula. La distribución isótropa T_n está perfectamente definida cuando se conoce su acción sobre todas las funciones ψ de este tipo, es decir sobre las funciones isótropas de (ζ) .

En escritura simbólica, se tiene:

¹⁶ *Integralnaia geometriia* (Moscú, 1962).

$$(III, 2, 2) \quad T_n(\varphi) = \Omega_n \int_0^\infty T_n(r) \varphi(r) r^{n-1} dr$$

La constante $\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ representa la superficie de la esfera de radio unidad en el

espacio de n dimensiones. $T_n(r)$ puede así ser identificada con una distribución que actúa en un espacio de una dimensión, sobre las funciones de base de la forma $r^{n-1}\varphi(r)$, siendo φ una función par de (ζ) . Esta función de una dimensión tendrá también como notación T_n . La transformada de Fourier:

$$(III, 2, 3) \quad \theta = F_n T_n$$

De la distribución isótropa de n dimensiones T_n es una distribución isótropa de n dimensiones. Análogamente, puede ser identificada a una distribución θ del espacio de una dimensión, actuando sobre las funciones de la forma $r^{n-1}\varphi(r)$, siendo φ par y perteneciendo a (ζ) .

De un punto de vista formal, se puede definir la subida, al generalizar (I, 1, 4) en la forma:

$$(III, 2, 4) \quad T_\lambda = F_\lambda(\theta)$$

Para que esta definición tenga un sentido, es necesario que T_λ sea una distribución la cual actúa sobre $\psi_\lambda = F_\lambda \varphi$ de la misma manera que θ actúa sobre una función de base φ en el espacio de λ dimensiones, o aún de la misma manera que θ actúa sobre $\Omega_\lambda r^{\lambda-1} \varphi(r)$ en el espacio de una dimensión. Pero θ , en efecto, solo está definida para funciones de la forma $r^{n-1}\varphi(r)$, y, para λ cualquiera, su acción sobre $r^{\lambda-1}\varphi$ no está definida, de manera que (III, 2, 4) no tiene sentido.

Sin embargo, en el caso particular $\lambda = n + 2k$ (descenso de orden entero par $2k$), se tiene bien:

$$r^{\lambda-1} \varphi = r^{n-1} (r^{2k} \varphi)$$

y $r^{2k} \varphi$ es una función par de (ζ) , de manera que θ actúa efectivamente sobre $r^{\lambda-1} \varphi$. En esta caso T_{n+2k} está definida, sin ambigüedad, por:

$$(III, 2, 5) \quad \begin{cases} T_{n+2k}(\psi_{n+2k}) = \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n} \theta(r^{2k} \varphi) = \frac{\pi^{2k} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \theta(r^{2k} \varphi) \\ \psi_{n+2k} = F_{n+2k} \varphi(r) \end{cases}$$

En escritura simbólica, también se puede escribir:

$$\Omega_{n+2k} \int_0^{\infty} T_{n+2k}(r) \psi_{n+2k}(r) r^{n+2k-1} dr = \Omega_{n+2k} \int_0^{\infty} \theta(r) (r^{2k} \varphi) r^{n-1} dr$$

Introduzcamos también la función $\psi_n(r)$, transformada de $\varphi(r)$ en el espacio de n dimensiones:

$$\psi_n(r) = F_n \varphi$$

La cual se deduce de ψ_{n+2k} por subida de orden $2k$. En este espacio de n dimensiones, se tiene, según la fórmula de Parseval, y las propiedades del laplaciano (Anexo A, párrafo 8):

$$\theta(r^{2k} \varphi) = T_n \left[\left(-\frac{1}{4\pi^2} \right)^k \Delta^k \psi_n \right] = \left(-\frac{1}{4\pi^2} \right)^k \Delta^k T_n(\psi_n)$$

Se deduce entonces, la relación notable, la cual asocia, en un descenso simultáneo de orden par, una distribución T_n y una función de base ψ_n isótropas:

$$(III, 2, 6) \quad T_{n+2k}(\psi_{n+2k}) = \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n} \left(-\frac{1}{4\pi^2} \right)^k \Delta^k T_n(\psi_n) = \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n} \left(-\frac{1}{4\pi^2} \right)^k T_n(\Delta^k \psi_n)$$

Estas relaciones – (III, 2, 5) o (III, 2, 6) – definen el descenso de orden par $2k$ sin ninguna ambigüedad. Pero, en la subida de orden par $2k$ aparecen indeterminaciones. Estas ya eran visibles en la expresión misma de (III, 2, 6), porque, si se reemplaza T_n por:

$$T_n + \sum_{p=0}^{k-1} a_p r^{2p}$$

El laplaciano iterado $\Delta^k T_n$ no queda modificado: En escritura simbólica se tiene:

$$(III, 2, 7) \quad \begin{cases} T_{n+2k}(\psi_{n-2k}) = \Omega_{n-2k} \int_0^{\infty} \theta(r) r^{n-2k-1} \varphi(r) dr \\ \psi_{n-2k} = F_{n-2k} \varphi \end{cases}$$

Pero, siendo una distribución de una dimensión, $\theta(r)$ solo actúa sobre $r^{n-2k-1} \varphi$ cuando $r^{2k} \varphi$ pertenece a (ζ) . Esto solo se produce cuando la función par de (ζ) se anula en el origen como también sus $2k-1$ primeras derivadas [o bien $2(k-1)$, porque las derivadas impares son todas nulas en el origen]. Designaremos por $\zeta_{2(k-1)}$ al espacio de las funciones de ζ las cuales se anulan en el origen como también sus $2(k-1)$ primeras derivadas y por $\zeta^{2(k-1)}$ al espacio de las funciones de (ζ) que tienen todos sus momentos nulos, hasta el orden $2(k-1)$. Estos dos espacios se cambian de uno a otro en la transformación de Fourier. Se ve, en (III, 2, 7) que θ , considerada como una distribución en un espacio de $n-2k$ dimensiones, está definida solamente en $\zeta_{2(k-1)}$. Solo se prolonga,

como distribución isótropa sobre (ζ) , mediante un polinomio de laplacianos de grado $k - 1$, con coeficientes cualesquiera:

$$a_0 + a_1 \Delta + \dots + a_{k-1} \Delta^{k-1}$$

Por reciprocidad, T_{n-2k} no está entonces definida como distribución del espacio de $n - 2k$ dimensiones, sino más bien en el espacio ζ^{2k-1} , y se prolonga en ζ con un polinomio par cualquiera de grado $2(k - 1)$:

$$b_0 + b_1 r^2 + \dots + b_{k-1} r^{2(k-1)}$$

La subida par $2k$ solo define entonces una clase de distribuciones. Dos distribuciones son equivalentes si su diferencia es un polinomio par en r de grado $2(k - 1)$.

Respecto de la subida o el descenso de orden impar, las cosas se complican aún más. Para efectuar un descenso de orden $2k + 1$, sería necesario dar un sentido a la acción de θ sobre $r^{n+2k} \varphi$. Pero para una función par cualquiera de (ζ) , θ solo actúa sobre $r^{n+2k} \varphi$, y $r^{2k+1} \varphi$ no es una función de (ζ) , porque no es indefinidamente derivable en el origen. Para dar un sentido a la subida o al descenso de orden impar, o, más generalmente, de orden λ cualquiera, es entonces necesario restringir mucho más el espacio de las funciones de base.

Necesitamos un espacio (ζ_ω) como el espacio de funciones pares de (ζ) que se anulan rápidamente (es decir más rápido que r^{2k} , cualquiera que sea el entero k) en el origen como también todas sus derivadas. Si una función de la forma $\psi(\rho^2)$ pertenece a (ζ) ,

$$\psi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) \text{ pertenece a } (\zeta_\omega).$$

Si φ es una función de (ζ_ω) , $r^\mu \varphi$ pertenece también a (ζ) . La distribución θ , considerada como operando sobre las funciones de base de la forma $r^{n-1} \varphi$ actúa entonces, en particular, sobre $r^{n-1} (r^{\lambda-n+1} \varphi) = r^{\lambda-1} \varphi$. Y, por consiguiente la definición simbólica de $T_\lambda = F_\lambda \theta$ tiene el sentido preciso siguiente:

$$(III, 2, 8) \quad \begin{cases} T_\lambda(\psi_\lambda) = \Omega_\lambda \int_0^\infty \theta(r) r^{\lambda-1} \varphi(r) dr \\ \psi_\lambda = F_\lambda \varphi \end{cases}$$

La función de base ψ_λ , inversa de Fourier en el espacio de λ dimensiones de una función φ de (ζ_ω) tiene, en este espacio, todos sus momentos pares iguales a cero, luego verifica, para todos los enteros k positivos o nulos, la relación:

$$\int_0^\infty \psi_\lambda(r) r^{\lambda+2k-1} dr = 0$$

El espacio de las funciones ψ_λ será designado por (ζ_λ^ω) . Solamente en este espacio T_λ ha sido definido. Si se quiere definir T_λ sobre (ζ) entero, es necesario, en primer lugar, prolongar θ sobre todas las funciones φ de (ζ) . Pero, en el espacio de λ dimensiones, θ

está definido solamente en (ζ_ω) . Su prolongación sobre (ζ) no proporciona una distribución única, sino una clase de distribuciones, las cuales se deducen unas de otras por la adición de una distribución arbitraria T_0 concentrada en el origen. Como nos limitamos solo a las distribuciones isótropas, T_0 es de la forma:

$$T_0 = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \Delta^p$$

Los coeficientes a_p son arbitrarios. Así θ , en el espacio de λ dimensiones, es conocido salvo una serie entera de laplacianos. Por reciprocidad, se ve que T_λ también está definida salvo una serie entera par de la forma:

$$(III, 2, 9) \quad T_0 = \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^{2p}$$

Se dice que dos distribuciones son *analíticamente equivalentes* si solo difieren en una serie par. Se ve que las operaciones de subida y de descenso no actúan sobre las mismas distribuciones, sino solamente sobre las clases de equivalencia analítica. Así se explica la regla de la subida término a término sobre la parte irregular de los covariogramas. Dos covariogramas que tienen la misma parte irregular son analíticamente equivalentes, como distribuciones, y deben entonces proporcionar, salvo una equivalencia, es decir una serie entera par, el mismo resultado a la subida. Al contrario, la parte regular constituye una distribución de la clase 0. En la subida también proporciona una distribución de la clase cero, es decir, una serie entera par, la cual puede ser absolutamente cualquiera.

3. - Subida y descenso para la distribución r^μ .

Apliquemos los resultados del párrafo precedente a la distribución r^μ , o, más exactamente, a la clase de distribuciones que tienen r^μ como parte irregular. La subida de orden λ efectuada sobre esta distribución, permite encontrar muy simplemente la regla (II, 1, 9).

Si se considera que $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)r^\mu$ es una distribución en el espacio de n dimensiones, su transformada de Fourier es, según la fórmula (A, 8, 22):

$$F_n \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)r^\mu = \pi^{-\mu-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)\rho^{-\mu-n}$$

Se obtiene la subida de orden λ al efectuar la transformación de Hankel de orden $n-\lambda$, lo que da:

$$\pi^{-\mu-\frac{n}{2}} F_{n-\lambda} \Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)\rho^{-\mu-n} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$$

Se encuentra bien la regla habitual:

$$M_{\lambda} \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^{\mu} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\mu+\lambda}{2}\right) r^{\lambda+\mu}$$

Como en realidad, r^{μ} o $r^{\lambda+\mu}$ están definidos salvo una serie entera, nada nos impide de reemplazar:

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^{\mu} \quad \text{por} \quad \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) [r^{\mu} - r^{2k}]$$

Y encontrar de nuevo la secuencia logarítmica (II, 1, 11), haciendo tender μ hacia $2k$.

CAPITULO CUARTO

LA ESTIMACION DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS

SUMARIO

Este capítulo, fundamental para las aplicaciones prácticas, está consagrado enteramente al problema de la estimación de las variables regionalizadas. De un punto de vista teórico se demuestra que la varianza de estimación está ligada a la parte irregular del covariograma y se desarrollan las reglas de correspondencia que deben compararse con las reglas de la subida.

El párrafo 1 define, para una malla regular de muestreo a , la noción de varianza de estimación $\sigma^2(a)$, y se proporcionan dos expresiones equivalentes: la primera (IV, 1, 2) a partir del covariograma mismo, la segunda (IV, 1, 9) a partir de su transformada de Fourier. Se demuestra que esta varianza es tanto más pequeña cuando la regionalización es más regular y la red de muestreo más estrecha, y que esta varianza es siempre positiva si $g(h)$ es de tipo positivo. Se observa enseguida un punto un poco perturbador: si, en estas fórmulas, se reemplazan los valores verdaderos de $g(h)$ por los valores experimentales, se obtiene una varianza de estimación idénticamente igual a cero. No se puede deducir de los mismos datos a la vez una estimación y la precisión de ésta. Recurrir a un modelo teórico es obligatorio, y esto equivale a hacer una hipótesis sobre el comportamiento del $g(h)$ en el origen. Este párrafo, de fácil lectura termina por una aplicación al modelo de Bessel.

El párrafo 2 desarrolla, en el caso de una dimensión, un principio de correspondencia término a término entre la parte irregular de $g(h)$ y el desarrollo limitado de $\sigma^2(a)$ respecto de $a = 0$, con la reserva que el término fluctuante, o Zitterbewegung, casi imprevisible, el cual aparece cuando el alcance es finito, y que se desprecia en la práctica. Enseguida se obtiene la forma explícita de la regla de correspondencia, con la ayuda de las funciones de Bessel. Un término en x^λ en la parte irregular, proporciona una componente $T_\lambda a^\lambda$ en $\sigma^2(a)$, con $T_{2k} = 0$ para $\lambda = 2k$ (parte regular). El lector puede saltar rápidamente el detalle de los cálculos, pero los resultados (IV, 2, 9) y (IV, 2, 10) son fundamentales. Se observará también que dos covariogramas que tienen la misma parte irregular (equivalentes analíticamente) conducen al mismo desarrollo limitado de $\sigma^2(a)$.

El párrafo 3 generaliza, al caso de varias dimensiones el principio de correspondencia, y proporciona una expresión (IV, 3, 3) en la forma de una serie múltiple. El caso $n = 2$, examinado en detalle, hace aparecer un principio de composición de términos de línea y de tajada. Para una malla a_1, a_2 ($a_1 \geq a_2$), se tiene $\sigma^2(a_1 a_2) = \sigma^2_1(a_1) + a_1 \sigma^2_2(a_2)$, las varianzas σ^2_2 y σ^2_1 se calculan en una dimensión sobre el covariograma g_2 , y el covariograma g_1 , que se deducen por subida. Las fórmulas explícitas son (IV, 3, 11) y (IV, 3, 12).

El párrafo 4 trata el caso de las mallas aleatorias estratificadas, y compara los resultados con los de las mallas regulares. En el caso en que las mallas son adaptadas, las segundas son mejores a las primeras.

1. - Teoría general de las mallas regulares.

Uno de los problemas más importantes que se proponen a propósito de una variable regionalizada $f(x)$, con covariograma $g(h)$, es el de la estimación de la cantidad de metal:

$$(IV, 1, 1) \quad Q = \int f(x)dx$$

Con la ayuda de los datos disponible experimentalmente. Supondremos que estos datos están constituidos por una red de muestras efectuadas según una malla regular, en un paralelepípedo (a_1, a_2, \dots, a_n) . Dicho de otra manera, el espacio de n dimensiones de la regionalización está referido a un sistema de ejes rectangulares, paralelos a las direcciones principales de la malla, las diferentes muestras se tomaron en los puntos:

$$(IV, 1, 2) \quad y + ka = (y_1 + k_1a_1, y_2 + k_2a_2, \dots, y_n + k_na_n)$$

Los k_i son números enteros, los cuales toman todos los valores posibles, positivos y negativos. El punto $y = (y_1, \dots, y_n)$ es, uno cualquiera de los puntos de muestreo, tomado como origen de la red. Se admite implícitamente, que la red se expande hasta el infinito. En la práctica, debido a que el campo geométrico de la regionalización se supone acotado, bastará con que la red real se extienda un poco más allá de los límites del campo, es decir, en terminología minera, que el reconocimiento ha sido exhaustivo.

Se supone que los muestreos mismos son puntuales (si no son puntuales y resultan de la acción sobre $f(x)$ de una ponderación o de un muestreo simbolizado por una función $p(u)$, basta con reemplazar f por $f * \hat{p}$ y g por $g * p * \hat{p}$ para llegar al caso de muestras puntuales). Los datos disponibles para proceder a la estimación de Q están entonces constituidos por el conjunto infinito de valores numéricos $f(y + ka)$ para todos los sistemas de enteros $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. En realidad solamente un número finito de estos valores son diferentes de 0, porque el campo geométrico está acotado. Para estimar la cantidad de metal Q , es decir para calcular un valor aproximado de la integral (IV, 1, 1), se forma la suma múltiple, extendida a todos los sistemas de enteros positivos o negativos:

$$(IV, 1, 3) \quad Q^*(y_1, \dots, y_n) = a_1 a_2 \dots a_n \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} f(y_1 + k_1 a_1, \dots, y_n + k_n a_n)$$

Que llamaremos estimador de Q , y que escribiremos, en notación simbólica abreviada:

$$(IV, 1, 4) \quad Q^*(y) = |a| \sum_k f(y + ka)$$

El símbolo $|a|$ representa aquí el volumen (a_1, a_2, \dots, a_n) del paralelepípedo de base, y k representa el sistema de n números enteros (k_1, k_2, \dots, k_n) .

El estimador $Q^*(y)$ es evidentemente *una función periódica*, con períodos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ del argumento vectorial y , porque es indiferente tomar como origen una u otra de las muestras de la red. Resulta que el problema de la estimación puede ser tratado con la ayuda de los desarrollos en serie de Fourier. Se representará $Q^*(y)$ en la forma clásica:

$$(IV, 1, 5) \quad Q^*(y) = \sum_{p_1 \dots p_n} C_{p_1 \dots p_n} \exp \left[2\pi i \left(\frac{p_1 y_1}{a_1} + \dots + \frac{p_n y_n}{a_n} \right) \right]$$

Los coeficientes $C_{p_1 \dots p_n}$ se calculan por las fórmulas:

$$(IV, 1, 6) \quad C_{p_1 \dots p_n} = \frac{1}{a_1 \dots a_n} \int_P Q^*(y) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{p_1 y_1}{a_1} + \dots + \frac{p_n y_n}{a_n} \right) \right] dy_1 \dots dy_n$$

En una forma condensada, se escribirá simbólicamente:

$$(IV, 1, 6) \text{ bis} \quad \begin{cases} Q^*(y) = \sum_p C_p e^{2\pi i \frac{p \cdot y}{a}} \\ C_p = \frac{1}{|a|} \int_P Q^*(y) e^{-2\pi i \frac{p \cdot y}{a}} dy \end{cases}$$

En la expresión (IV, 1, 5) o (IV, 1, 6) del coeficiente C_p la integración se extiende en el paralelepípedo P de aristas $a_1 \dots a_n$ que es el paralelepípedo de base de la red. Si se reemplaza, en esta integral, $Q^*(y)$ por su expresión (IV, 1, 4), se hace aparecer la integral de la variable f extendida en todo el espacio:

$$C_p = \int f(y) e^{-2\pi i \frac{p \cdot y}{a}} dy$$

Se reconoce la expresión de la transformada de Fourier (A, 8, 1) de $f(x)$:

$$\Phi(u) = Ff = \int f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

Y se puede reemplazar (IV, 1, 6) por el sistema equivalente siguiente:

$$(IV, 1, 7) \quad \begin{cases} Q^*(y) = \sum_p C_p e^{2\pi i \frac{p \cdot y}{a}} \\ C_p = \Phi \left(\frac{p}{a} \right) = \Phi \left(\frac{p_1}{a_1}, \frac{p_2}{a_2}, \dots, \frac{p_n}{a_n} \right) \end{cases}$$

En particular, para $p = 0$ (es decir $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$), se tiene:

$$(IV, 1, 8) \quad C_0 = \Phi(0) = \int f(x)dx = Q$$

El término constante del desarrollo $Q^*(y)$ no es otro que la cantidad de metal Q que se desea estimar. El conjunto de los términos periódicos representa el error asociado a esta estimación.

Para caracterizar la magnitud de este error, es natural introducir la varianza de estimación $\sigma^2(a)$, definida como el valor medio de:

$$[Q^*(y) - Q]^2$$

En el paralelepípedo P construido sobre los períodos $a_1 \dots a_n$. Esta cantidad, puramente geométrica, es muy próxima de las varianzas del cálculo de probabilidades. En efecto, si nos imaginamos que el origen de la red de muestreo está implantado al azar en el paralelepípedo de base P , de manera tal que todos los puntos de P tengan la misma probabilidad a priori de ser elegidos, se ve que relativamente a esta implantación aleatoria, $Q^*(y)$ es una verdadera variable aleatoria, cuya varianza no difiere de la varianza de estimación $\sigma^2(a)$. Cualquiera que sea la implantación retenida, esta varianza está dada por:

$$(IV, 1, 9) \quad \sigma^2(a) = \frac{1}{|a|} \int_P [Q^*(y) - Q]^2 dy$$

Reemplacemos $Q^*(y)$ por su desarrollo en serie de Fourier (IV, 1, 7), en el cual solo subsisten, según (IV, 1, 8) los términos periódicos. Utilizando la propiedad clásica de ortogonalidad de las exponenciales imaginarias, se llega inmediatamente a (fórmula de Parseval):

$$\sigma^2(a) = \sum_p |C_p|^2 - C_0^2 = \sum_p \left| \Phi\left(\frac{p}{a}\right) \right|^2 - Q^2$$

Pero, según la fórmula (I, 1, 9), $|\Phi(u)|^2$ no es otra que la transformada de Fourier $G(u)$ del covariograma $g(h)$ asociado a la variable $f(x)$:

$$G(u) = Fg$$

Entonces la varianza de estimación está dada por la fórmula siguiente:

$$(IV, 1, 10) \quad \sigma^2(a) = \sum_p G\left(\frac{p}{a}\right) - G(0)$$

Ahora buscaremos una segunda expresión para $\sigma^2(a)$ que haga intervenir al covariograma $g(h)$, y no a su transformada de Fourier $G(u)$. Partiendo de la definición (IV, 1, 9), y desarrollando el cuadrado que figura en el símbolo sumatoria, se obtiene, debido a que el valor medio en P de $Q^*(y)$ es igual a Q :

$$(IV, 1, 11) \quad \sigma^2(a) = \frac{1}{|a|} \int_P [Q^*(y)]^2 dy - Q^2$$

Al elevar (IV, 1, 4) al cuadrado, se pone $[Q^*(y)]^2$ en la forma de una serie múltiple (de orden $2n$) cuya escritura simbólica es la siguiente:

$$[Q^*(y)]^2 = |a|^2 \sum_{p,q} f(y+pa)f(y+qa)$$

Reemplacemos q por $p+k$ antes de integrar en P . Queda:

$$\int_P [Q^*(y)]^2 dy = |a|^2 \int_P \sum_{p,k} f(y+pa)f(y+pa+ka) dy$$

Pero la sumatoria sobre los índices $p = (p_1, \dots, p_n)$ permite reemplazar la integración en P por una integración extendida a todo el espacio, y se ve aparecer la expresión (I, 1, 2) que nos sirvió para definir el covariograma $g(h)$:

$$\int_P [Q^*(y)]^2 dy = |a|^2 \int \sum_k f(y)f(y+ka) dy = |a|^2 \sum_k g(ka)$$

Al sustituir este resultado en (IV, 1, 11), y teniendo en cuenta la expresión (I, 1, 13) del cuadrado Q^2 de la cantidad de metal, obtenemos la segunda fórmula fundamental buscada:

$$(IV, 1, 12) \quad \sigma^2(a) = |a| \sum_k g(ka) - \int g(h) dh$$

Se verificará fácilmente, con la ayuda de la fórmula sumatoria de Poisson (A, 4, 3) que las dos expresiones (IV, 1, 10) y (IV, 1, 13) de la varianza de estimación son estrictamente equivalentes. En las aplicaciones se aplicará una u otra, según la mayor comodidad.

Propiedades de la varianza de estimación $\sigma^2(a)$. - Intuitivamente nos damos cuenta que la estimación debe ser tanto más precisa cuando la red de muestreos es más apretada, y cuando la regionalizaciones más continua y más regular en su variación espacial. La influencia de estos dos factores es visible sobre la fórmula (IV, 1, 12). En efecto, la varianza de estimación aparece como la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de una misma integral $\int g(h) dh$, es decir como el error cometido en el cálculo aproximado de esta integral a partir de los valores numéricos de $g(ka)$. Este error es naturalmente más débil cuando los valores numéricos disponibles son más numerosos, es decir cuando la red es más apretada, y también, como lo muestra la teoría del cálculo

aproximado de integrales, tanto más débil cuando $g(h)$ es más regular, es decir cuando $f(x)$ es ella misma más regular en el espacio. Por otra parte, del punto de vista práctico, nos damos cuenta, que la varianza $\sigma^2(a)$ será difícil de calcular numéricamente, si la red es muy apretada, porque se tratará de poner en evidencia la diferencia de dos cantidades muy vecinas una de la otra y con cálculos laboriosos. Seremos conducidos entonces, en los párrafos siguientes, precisamente con la ayuda de métodos que tomaremos prestados de la teoría del cálculo aproximado de integrales, a poner a punto fórmulas de aproximación más directas.

Naturalmente, la varianza de estimación es *obligatoriamente positiva*. Esto resulta de su misma definición (IV, 1, 9). Sin embargo, las fórmulas equivalentes (IV, 1, 10) y (IV, 1, 12) aplicadas a una función $g(h)$ cualquiera y a su transformada de Fourier $G(u)$ podrían bien conducir a una varianza negativa. En efecto, para que tales valores negativos no sean nunca posibles, cualquiera que sea la malla a , es necesario que la función $g(h)$ utilizada como covariograma sea de *tipo positivo*. En efecto, el teorema de Bochner (ver Anexo A, párrafo 9, 1), nos indica que, si $g(h)$ es de tipo positivo, su transformada de Fourier $G(u)$ solo toma valores positivos o nulos: La expresión (IV, 1, 10) es entonces una suma de

términos todos positivos $G\left(\frac{p_1}{a_1} \dots \frac{p_n}{a_n}\right)$, extendida a los enteros tal que el producto $p_1 p_2 \dots p_n \neq 0$.

La estimación de $\sigma^2(a)$. - Para estimar el valor numérico de los $g(ka)$ de la fórmula (IV, 1, 2), nos contentaremos con los datos disponibles, que son los $f(y + ka)$. En lugar de los valores exactos de $g(ka)$, que siguen siendo desconocidos, se dispondrá de sus estimaciones $g^*(ka)$ calculados de la manera siguiente:

$$g^*(ka) = |a| \sum_p f(y + pa) f(y + pa + ka)$$

Análogamente, para estimar Q^2 , el único recurso es elevar al cuadrado el estimador $Q^*(y)$, lo que proporciona, ya lo hemos visto:

$$[Q^*(y)]^2 = |a|^2 \sum_{p,k} f(y + pa) f(y + pa + ka)$$

Si se reemplazan estos valores estimados $g^*(ka)$ y $[Q^*(y)]^2$, en lugar de los valores verdaderos desconocidos, en la fórmula (IV, 1, 12) se obtiene *idénticamente cero*. La fórmula (IV, 1, 10) también conduce al mismo resultado negativo, porque es bien conocido que una red periódica de datos experimentales no permite ninguna estimación de las componentes armónicas cuyos períodos son sub múltiplos de la red.

Se debe concluir que es teóricamente imposible deducir, de los mismos datos experimentales a la vez una estimación y la precisión de esta estimación. El formalismo desarrollado hasta aquí parece entonces conducir a un impasse experimental. En efecto, la dificultad se levanta dándose a priori el covariograma en la forma de una expresión matemática $g(h, \lambda, \mu, \dots)$ la cual depende de uno o varios parámetros λ, μ, \dots . Los valores numéricos de estos parámetros podrán siempre ser determinados por un ajuste sobre los valores experimentales de los $g^*(ka)$. Es a la función $g(h)$, así determinada, a la que se le

aplicaran las fórmulas (IV, 1, 12) o (IV, 1, 10). Naturalmente, el resultado obtenido valdrá lo mismo que valdrá el modelo, o esquema matemático $g(h, \lambda, \mu, \dots)$ utilizado. Solo la experiencia podrá indicarnos los esquemas¹⁷ que convienen a cada tipo de regionalización. Veremos en los párrafos siguientes, que el factor determinante es aquí el comportamiento del covariograma en la zona $|h| < a$, que es justamente la zona inaccesible experimentalmente, comportamiento ligado a la parte irregular de $g(h)$. En definitiva, la elección de esta parte irregular, es el elemento decisivo. Puede ser sugerido por conocimientos directos que se poseen acerca de la naturaleza física del fenómeno estudiado.

Ejemplo del modelo de Bessel de segunda especie. - Como ejemplo, aplicaremos las fórmulas de este párrafo al modelo de Bessel modificado de segunda especie (capítulo II, párrafo 1. 1) en el caso de una estimación por una malla a en el espacio de *una sola dimensión*. El resultado obtenido será de utilidad más adelante.

Sea el covariograma:

$$g(h) = (Ch)^\lambda K_{-\lambda}(Ch)$$

El cual tiene como transformada de Fourier, según la fórmula (A, 8, 30), con $n = 1$:

$$G(u) = 2^\lambda \sqrt{\pi} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{C^{2\lambda}}{(C^2 + 4\pi^2 u^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}}$$

Apliquemos la fórmula (IV, 1, 10)

$$(IV, 1, 13) \quad \sigma^2(a) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{n}{a}\right) = 2^{-\lambda} \pi^{-2\lambda - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) C^{2\lambda} a^{2\lambda + 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{a^2 C^2}{4\pi^2}\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}}$$

Si la malla a es inferior al «alcance» del fenómeno, que es $2\pi / C$, se pueden utilizar desarrollos de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b + n^2)^\alpha} = S(2\alpha) - \alpha S(2\alpha + 2)b + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!} S(2\alpha + 4)b^2 - \dots$$

En que $S(\mu)$ representa la función de Riemann:

¹⁷ El punto de vista «estadístico» un poco ingenuo, que consistiría en admitir la independencia (en el sentido probabilístico) de las diferentes muestras conduciría a una varianza $|a|g(0) - Q^2$: la hipótesis hecha implícitamente sobre la independencia de los datos equivale a admitir que el $g(h)$ es idénticamente nulo, o constante, salvo en la vecindad del origen. Se adopta entonces un esquema particular, bastante mal adaptado a la mayoría de las regionalizaciones reales, el cual conduce, según la forma de las redes de muestreo, a valores muy fuertes o muy débiles, desprovistos de significación práctica.

$$S(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}}$$

la cual está ligada a los números de Bernoulli ($B_2 = 1/6$, $B_4 = 1/30$, $B_6 = 1/42, \dots$), en el caso en que μ es un entero par $2k$, por la relación clásica:

$$S(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$$

Al llevar este desarrollo en (IV, 1, 13), se obtiene la varianza de estimación en la forma siguiente:

$$(IV, 1, 14) \quad \sigma^2(a) = \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{C^{2\lambda} a^{2\lambda+1}}{2^{\lambda} \pi^{2\lambda+\frac{1}{2}}} \left[S(2\lambda+1) - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) S(2\lambda+3) \frac{a^2 C^2}{4\pi^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(\lambda + \frac{3}{2}\right) S(2\lambda+5) \left(\frac{a^2 C^2}{4\pi^2}\right)^2 - \dots \right]$$

Cuando la malla a es inferior a $2\pi / C$, este desarrollo converge y permite el cálculo de $\sigma^2(a)$. A menudo es posible, si a es pequeño, de contentarse con la parte principal de esta expresión, que es en $a^{1+\lambda}$:

$$(IV, 1, 15) \quad \sigma^2(a) = \frac{C^{2\lambda} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{2^{\lambda} \pi^{2\lambda+\frac{1}{2}}} [1 + O(a^2)] a^{1+2\lambda} S(1+2\lambda)$$

Esta fórmula nos permitirá más adelante de desarrollar una regla de correspondencia término a término entre el desarrollo de $\sigma^2(a)$ y la parte irregular de $g(h)$. Pero es necesario ver bien que el resultado obtenido supone a pequeño. Si a es grande respecto de $2\pi / C$, el decrecimiento exponencial de las funciones de Bessel nos indica que, en (IV, 1, 12), todos los $g(ka)$ son despreciables respecto de $g(0)$. Se obtiene la fórmula asintótica:

$$(IV, 1, 16) \quad \sigma^2(a) = |a| g(0) - \int g(h) dh$$

la cual tiene una significación aleatoria evidente: es esta relación, en efecto, la que se obtendría en cálculo de probabilidades, suponiendo los muestreos independientes¹⁸. De hecho, para un modelo $g(h)$ el cual tiene un alcance finito b ($g(h) \equiv 0$ para $|h| > b$), con una malla a tal que $a > b$, una de las muestras, a lo más, proporciona un resultado no nulo. Todo se pasa como si esa muestra única estuviera implantada al azar en una banda de longitud a la cual contiene el campo geométrico de la regionalización. En el caso de una

¹⁸ Ver nota, p. 81

función de Bessel, este resultado es solamente asintótico, debido a que $g(h)$ se anula asintóticamente. La varianza se explicita en la forma:

$$\sigma^2(a) = 2^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) a - 2^\lambda \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{C}$$

2. - Cálculo de varianzas de estimación en una dimensión.

Recordemos primero la fórmula clásica de Euler Mac-Laurin, utilizada en la teoría del cálculo aproximado de integrales

Si un intervalo (x_0, x_n) ha sido subdividido en n intervalos iguales (x_i, x_{i+1}) , y si $f(x)$ es una función derivable $(2p + 2)$ veces, asumiendo que f es continua como también sus $(2p + 2)$ primeras derivadas en el intervalo (x_0, x_n) , comprendiendo las extremidades, se tiene:

$$(IV, 2, 1) \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{(x_n - x_0)}{n} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] \\ &- \frac{B_2}{2!} \left[\frac{x_n - x_0}{n} \right]^2 [f'(x_n) - f'(x_0)] \\ &+ \frac{B_4}{4!} \left[\frac{x_n - x_0}{n} \right]^4 [f'''(x_n) - f'''(x_0)] \\ &+ \dots + (-1)^p \frac{B_{2p}}{(2p)!} \left[\frac{x_n - x_0}{n} \right]^{2p} [f^{2p-1}(x_n) - f^{2p-1}(x_0)] + R_p \end{aligned} \right.$$

Los B_{2p} son los números de Bernouilli:

$$\left(B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = \frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = \frac{1}{30}, \dots \right)$$

Y el resto R_p verifica la desigualdad:

$$|R_p| < \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!} n \left(\frac{x_n - x_0}{n} \right)^{2p+3} M_p$$

Siendo M_p el máximo de la derivada de orden $(2p + 2)$ en el intervalo (x_0, x_n) .

Vamos a utilizar esta fórmula en el cálculo de la varianza de estimación $\sigma^2(a)$, la cual se escribe, según (IV, 1, 2):

$$(IV, 2, 2) \quad \sigma^2(a) = ag(0) + 2a \sum_{n=1}^{\infty} g(na) - 2 \int_0^{\infty} g(x) dx$$

Esta expresión nos recuerda estrechamente la fórmula de Euler Mac Laurin.

Sin embargo, es necesario tomar en consideración que el covariograma $g(h)$ presenta, en general, irregularidades analíticas en $h = 0$, y también, en $h = b$, siendo b el alcance del covariograma, si éste es finito ($g(h) \equiv 0$ para $|h| > b$). Esta es la razón porqué, designando por $(k+1)$ el entero más grande tal que $(k+1)a$ sea inferior o igual al alcance b :

$$(IV, 2, 3) \quad (k+1)a \leq b < (k+2)a$$

separaremos, en el segundo miembro de (IV, 2, 2) los tres primeros términos siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = a[g(0) + g(a)] - 2 \int_0^a g(x) dx \\ R_2 = 2a \left[\frac{1}{2} g(a) + g(2a) + \dots + g[(k-1)a] + g(ka) \right] - 2 \int_a^{ka} g(x) dx \\ R_3 = ag(ka) - 2 \int_{ka}^b g(x) dx + 2ag[(k+1)a] \end{array} \right.$$

Se obtiene entonces, según (IV, 2, 1), la expresión siguiente para R_2 :

$$R_2 = 2a^2 \frac{B_2}{2!} [g'(ka) - g'(a)] - 2a^4 \frac{B_4}{4!} [g'''(ka) - g'''(a)] + \dots$$

Agruparemos ahora los términos de R_2 que contienen las derivadas en el punto a con R_1 , y los términos que contienen las derivadas en el punto ka con R_3 . Se obtiene así la descomposición de $\sigma^2(a)$ en la forma de una suma de dos términos T_0 y T_z :

$$(IV, 2, 4) \quad \sigma^2(a) = T_0(a) + T_z(a)$$

dados por la fórmula siguiente:

$$(IV, 2, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0(a) = a[g(0) + g(a)] - 2 \int_0^a g(x) dx - 2a^2 \frac{B_2}{2!} g'(a) + 2 \frac{a^4}{4!} B_4 g'''(a) - \dots \\ T_z(a) = ag(ka) - 2 \int_{ka}^b g(x) dx + 2a^2 \frac{B_2}{2!} g'(ka) - 2a^4 \frac{B_4}{4!} g'''(a) + \dots + 2ag[(k+1)a] \end{array} \right.$$

T_0 se llama término de extensión. Solo depende del comportamiento de $g(h)$ en el intervalo $(0, a)$, es decir en la vecindad del origen. El término T_z , al contrario, está ligado, a la manera en la cual ocurre el contacto de $g(x)$ en $x = b$ con el eje de las x . Tiene el nombre de *Zitterbewegung*, o *término fluctuante*. Lo estudiaremos en primer lugar.

EL Zitterbewegung.¹⁹ - Para estudiar el término fluctuante $T_z(a)$, supongamos que en la vecindad de $x = b$, el covariograma $g(x)$ admita un desarrollo de la forma siguiente:

$$g(x) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} (b-x)^{\lambda}$$

Y busquemos la contribución a T_z de la componente $(b-x)^{\lambda}$, el exponente λ es cualquiera. Pondremos, para simplificar las escrituras:

$$(IV, 2, 6) \quad \varepsilon = \frac{b}{a} - (k+1)$$

ε es el resto de la división de b por a . Está comprendido entre 0 y 1 . Al reemplazar en (IV, 2, 5), se obtiene el Zitterbewegung $T_z(\lambda)$ del monomio $(b-x)^{\lambda}$ por la fórmula:

$$(IV, 2, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_z(\lambda) = a^{1+\lambda} \left[(1+\varepsilon)^{\lambda} - \frac{2}{\lambda+1} (1+\varepsilon)^{\lambda+1} - 2\lambda \frac{B_2}{2!} (1+\varepsilon)^{\lambda-1} \right. \\ \left. + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \frac{B_4}{4!} (1+\varepsilon)^{\lambda-3} - \dots \right] \end{array} \right.$$

Este término es entonces en $a^{\lambda+1}$. Cuando ε varía entre 0 y 1 , pasa alternativamente por valores positivos y negativos. Se puede mostrar que la integral $\int_0^1 T_z d\varepsilon$, es decir el valor medio de T_z relativo a ε , es igual a cero. Por ejemplo un término en $(b-x)$, correspondiente a $\lambda = 1$, proporciona:

$$T_z(1) = a^2 \left(\varepsilon - \varepsilon^2 - \frac{1}{6} \right)$$

Este Zitterbewegung es muy molesto en la práctica, debido a que, en general, no se tiene ninguna indicación relativamente a ε . Del hecho que el valor medio de T_z respecto de ε es igual a cero, nos autorizamos para *despreciar puramente y simplemente este término* desagradable. Es lo que haremos en todo lo que sigue. Pero este término existe, y puede implicar fluctuaciones de amplitud importante (y prácticamente imprevisibles) entre el verdadero valor de $\sigma^2(a)$ y su estimación a partir de un solo término de extensión T_0 . Se verá un ejemplo en la figura 1 del capítulo VI.

En el caso en que el alcance b es infinito, o cuando $g(h)$ se anula asintóticamente en el infinito, el término fluctuante desaparece (siempre que el decrecimiento de este $g(h)$ sea bastante rápido). Así, los modelos de Bessel y de Laguerre están desprovistos de Zitterbewegung.

¹⁹ Para mayores detalles acerca del Zitterbewegung, ver el Anexo F, y en particular, su expresión explícita (5) en la forma de desarrollo en serie de Fourier.

El término de extensión. - Para evaluar el término de extensión T_0 , de la fórmula (IV, 2, 5), supongamos que $g(x)$ admite, en la vecindad del origen, un desarrollo de la forma:

$$C_\lambda x^\lambda$$

Válido justo hasta $x = a$. La contribución a T_0 de la componente (x^λ) será designada por $T_0(x^\lambda)$. Se tendrá:

$$T_0 = \sum C_\lambda T_0(x^\lambda)$$

A menos que la suma tenga un número finito de términos, o no sea convergente, se obtendrá, en general, un desarrollo limitado de T_0 y no una expresión exacta.

El cálculo de $T_0(x^\lambda)$, según (IV, 2, 5) es inmediato:

$$(IV, 2, 7) \text{ bis} \quad T_0(x^\lambda) = a^{1+\lambda} \left[1 - \frac{2}{1+\lambda} - 2\lambda \frac{B_2}{2!} + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \frac{B_4}{4!} - \dots \right]$$

Así, el término x^λ aporta una contribución en $a^{1+\lambda}$. Si λ es un entero par $2k$, se verifica fácilmente, con la ayuda de la fórmula de Euler Mac-Laurin aplicada a $f(x) = x^\lambda$ entre 0 y 1, que $T_0(x^{2k})$ se anula:

$$T_0(x^{2k}) = 0$$

Se ve que solo los términos de la parte irregular de $g(x)$ aportan una contribución en el desarrollo limitado de la varianza de estimación, y, para una parte irregular de la forma:

$$\sum C_\lambda x^\lambda$$

este desarrollo limitado es de la forma:

$$(IV, 2, 8) \quad \sum C_\lambda T_\lambda a^{\lambda+1}$$

Los coeficientes T_λ definidos por $T_0(x^\lambda) = T_\lambda a^{\lambda+1}$ son independientes de a . Se establece así un principio de correspondencia término a término entre el desarrollo de la parte irregular de $g(x)$ y el de la varianza de estimación (excluyendo el Zitterbewegung). Este principio, cercano de la regla de la subida término a término sobre la parte irregular, muestra como la precisión de una estimación está ligada al comportamiento del covariograma en el origen, finalmente a la regularidad de la regionalización misma. En adelante diremos que dos covariogramas son analíticamente equivalentes si tienen la misma parte irregular. Se ve que las varianzas de estimación $\sigma^2(a)$ calculadas con dos covariogramas analíticamente equivalentes admiten un mismo desarrollo limitado en a , respecto de $a = 0$. Señalemos bien que el resultado obtenido en la forma (IV, 2, 8) supone que la malla a es pequeña, o más exactamente, que el desarrollo de $g(x)$ en la forma $\sum C_\lambda x^\lambda$ es utilizable hasta $x = a$. Cuando la malla a es grande y los puntos de muestreo no son muy numerosos, la fórmula (IV, 1, 12) puede ser calculada directamente. En el caso

intermedio en el cual a sería demasiado grande para (IV, 2, 8) pero donde (IV, 1, 12) contiene un número excesivo de términos, se podrá a menudo contentar, en la práctica, con un ajuste gráfico simple entre las dos zonas donde $\sigma^2(a)$ es calculable: Este ajuste gráfico se hace, en general, bastante bien.

Por otra parte, no hay que perder de vista que (IV, 2, 8) es solamente un desarrollo limitado respecto de $a = 0$. Para un covariograma desprovisto de parte irregular (analíticamente equivalente a cero) de la forma:

$$g(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} x^{2k}$$

La regla de correspondencia conduciría a una varianza idénticamente nula, porque $T_{2k} = 0$. En realidad, para a diferente de cero, $\sigma^2(a)$ no es nula. El resultado obtenido significa solamente que $\sigma^2(a)$ se anula en $a = 0$, como también sus derivadas de todos los órdenes, de manera que los desarrollos limitados a un número cualquiera de términos desaparecen. Para dar un ejemplo, tomemos:

$$g(x) = e^{-ux^2} = \sum (-1)^n \frac{(ux^2)^n}{n!}$$

La varianza de estimación está dada por:

$$\sigma^2(a) = a \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-un^2 a^2} \right] - \sqrt{\frac{\pi}{u}}$$

Apliquemos la fórmula de intercambio de las funciones theta (A, 8, 21). Queda:

$$\sigma^2(a) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{u}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ua^2} n^2}$$

$\sigma^2(a)$ no es nula para $a \neq 0$ pero se anula, efectivamente, como todas sus derivadas en $a = 0$. Del punto de vista práctico, esto significa que esta varianza solo puede tomar valores extremadamente débiles cuando a es pequeño.

Forma explícita de la regla de correspondencia. - Queda por calcular los coeficientes T_λ del desarrollo limitado (IV, 2, 8). Más que utilizar la fórmula (IV, 2, 7), poco cómoda, observamos que, si es posible obtener un desarrollo para un covariograma particular, el cual admita x^λ como término irregular de orden más bajo, T_λ se deducirá inmediatamente por identificación. Utilizaremos el modelo de Bessel de segunda especie, y la fórmula (IV, 1, 5). El covariograma $x^\mu K_{-\mu}(x)$ admite por parte irregular la serie:

$$\frac{-\pi 2^{-1-\mu}}{\text{sen } \mu\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-2k}}{k! \Gamma(\mu + k + 1)} x^{2(\mu+k)}$$

Como se puede ver en la fórmula (C, 2, 3) del Anexo C, la varianza de estimación, según (IV, 1, 15), se pone, para $a < 2\pi$, en la forma:

$$\sigma^2(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)}{2^{\mu+2k} \pi^{2\mu+2k} \sqrt{\pi} k!} S(1+2\mu+2k) a^{1+2(\mu+k)}$$

En que $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es la serie de Riemann. Al tomar $\lambda = 2(\mu + k)$, se deduce inmediatamente el valor del coeficiente T_λ de la regla (IV, 2, 8):

$$T_\lambda = -2\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\text{sen}\frac{\lambda\pi}{2}\pi^{-\lambda-\frac{3}{2}}S(1+\lambda)$$

Simplifiquemos esta expresión con la ayuda de la fórmula de duplicación de la función de Euler, fórmula (B 6) del Anexo B:

$$T_\lambda = -\text{sen}\frac{\lambda\pi}{2}\frac{\Gamma(1+\lambda)}{2^{\lambda-1}\pi^{1+\lambda}}S(1+\lambda)$$

Introduzcamos los números de Bernouilli generalizados:

$$B_\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^\alpha 2^{\alpha-1}} S(\alpha) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^\alpha 2^{\alpha-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Tomando en cuenta, igualmente, la fórmula de los complementos (B, 4), pondremos la regla de correspondencia en dos formas equivalentes siguientes:

$$(IV, 2, 9) \quad \begin{cases} T_0(x^\lambda) = T_\lambda a^{1+\lambda} = -2\text{sen}\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)\frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda} a^{1+\lambda} \\ T_0\left[\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)x^\lambda\right] = \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)T_\lambda a^{1+\lambda} = \frac{2\pi}{(1+\lambda)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} B_{1+\lambda} a^{1+\lambda} \end{cases}$$

En la primera forma, se verifica que T_λ se anula cuando λ es un entero par $2k$. En la segunda forma, se puede obtener $T_0(x^{2k} \log x)$ al reemplazar x^λ por $x^\lambda - x^{2k}$ y haciendo tender λ hacia $2k$. Pero es mucho más simple derivar la primera forma en λ y hacer $\lambda = 2k$. Así, para los términos pares, impares y logarítmicos, se obtienen las expresiones siguientes, importantes para las aplicaciones prácticas:

$$(IV, 2, 10) \quad \begin{cases} T_0(x^{2k}) = 0 \\ T_0(x^{2k-1}) = \frac{(-1)^k}{k} B_{2k} a^{2k} \\ T_0(x^{2k} \log x) = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{1+2k} B_{1+2k} a^{1+2k} \end{cases}$$

Proporcionaremos aquí, los valores numéricos de los primeros B_k :

$$(IV, 2, 11) \quad \begin{cases} B_2 = 0.166667 = \frac{1}{6} \\ B_3 = 0.058153 \\ B_4 = 0.033333 = \frac{1}{30} \\ B_5 = 0.025413 \\ B_6 = 0.023809 = \frac{1}{42} \\ B_7 = 0.026921 \\ B_8 = 0.033333 = \frac{1}{30} \end{cases}$$

3. - Cálculo de varianzas de estimación con varias dimensiones.

Con varias dimensiones, las varianzas de estimación se calculan de manera análoga, pero las cosas se complican un poco. Partiendo de la fórmula general (IV, 1, 2), se puede demostrar que existe, aquí de nuevo, un término fluctuante y un término de extensión. El Zitterbewegung – prácticamente imprevisible en las aplicaciones – será despreciado, a pesar que su magnitud puede ser a veces considerable (ver, por ejemplo, la figura 1 del capítulo VI). Respecto del término de extensión, se establecerá fácilmente que el principio de correspondencia, término a término, sobre la parte irregular del covariograma se aplica también, y así aparece la posibilidad de obtener desarrollos limitados $\sigma^2(a_1 a_2 \dots a_n)$ ordenados según las potencias crecientes de los monomios $(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n})$. Naturalmente, aquí también, se trata de desarrollos limitados, utilizables solamente para pequeños valores de los $a_1 a_2 \dots a_n$. Para los grandes valores de la malla, es preferible utilizar directamente (IV, 1, 2) que solo contiene un pequeño número de términos. En el límite, cuando la malla contiene al campo geométrico $(a_1 > b_1, \dots, a_n > b_n)$, hay a lo más una muestra positiva, y todo pasa como si esta muestra estuviera implantada al azar en un paralelepípedo P de aristas (a_1, a_2, \dots, a_n) el cual contiene la regionalización. La fórmula general toma entonces la forma «aleatoria»:

$$(IV, 3, 1) \quad \sigma^2(a_1, \dots, a_n) = (a_1 a_2 \dots a_n) g(0) - \int g(h) dh$$

Entre los dos casos extremos de las grandes y las pequeñas mallas, a menudo nos reducimos a proceder por simple interpolación gráfica. Pero, en la práctica, esta interpolación no ocasiona dificultades, debido a que se encuentra, muy a menudo, que los desarrollos limitados conservan su valor, aún para mallas considerables.

El principio de correspondencia. - Nos limitaremos al caso de un covariograma isótropo $g(r)$. Si éste admite, en la vecindad del origen, un desarrollo de la forma:

$$g(r) = \sum C_\lambda r^\lambda$$

La varianza de estimación admite un desarrollo limitado de la forma:

$$(IV, 3, 2) \quad \sigma^2(a_1 \dots a_n) = \sum C_\lambda T_0(r^\lambda)$$

Donde los $T_0(r^\lambda)$ son expresiones polinómicas de grado $\lambda + n$ respecto a los (a_1, a_2, \dots, a_n) . Vamos a entregar la expresión teórica de $T_0(r^\lambda)$ en el caso general, para explicitarlo luego, en el espacio de dos dimensiones.

Para establecer la expresión general de $T_0(r^\lambda)$, haremos el razonamiento rápido siguiente: En el espacio de n dimensiones, r^λ tiene, por transformada de Fourier, según (A, 8, 22) la función:

$$G(\rho) = F_n r^\lambda = \pi^{-\lambda - \frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda - n}$$

Aplicaremos a $G(\rho)$ la fórmula general (IV, 1, 10). Se obtiene así la expresión de $T_0(r^\lambda)$ en la forma siguiente:

$$(IV, 3, 3) \quad T_0(r^\lambda) = \frac{\pi^{-\lambda - \frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p_1 p_2 \dots p_n \neq 0} \frac{1}{\left[\frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{p_n^2}{a_n^2}\right]^{\frac{\lambda + n}{2}}}$$

La sumatoria múltiple que figura en el segundo miembro, se extiende a todos los sistemas de enteros positivos o negativos (p_1, p_2, \dots, p_n) con la excepción del único sistema $(p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0)$. Este razonamiento rápido no es correcto porque las operaciones efectuadas sobre r^λ y $\rho^{\lambda - n}$ no son legítimas. Sin embargo, el lector puede verificar fácilmente que el resultado obtenido se puede justificar rigurosamente, razonando, como ya lo hemos realizado en el caso $n = 1$, sobre un modelo de Bessel el cual contenía un término en r^λ : el modelo de Bessel utilizado sirvió simplemente como intermediario, y el resultado final obtenido, que es (IV, 3, 3), tiene un valor general.

Composición de término de línea y de tajada. - Naturalmente, el cálculo directo de (IV, 3, 3) sería difícil en las aplicaciones. Vamos a buscar el desarrollo de una fórmula de aproximación, limitándonos primero a dos dimensiones solamente ($n = 2$). La fórmula general toma, para $n = 2$, la forma:

$$(IV, 3, 4) \quad T_0(r^\lambda) = \frac{\pi^{-\lambda-1} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p_1 p_2 \neq 0} \frac{1}{\left[\frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

En todo lo que viene, supondremos $a_2 \leq a_1$. En la red de muestreo, distinguiremos líneas de mayor densidad, que son las líneas a lo largo de las cuales el espaciamiento de las muestras es a_2 . Hagamos, en el límite, $a_2 = 0$, lo que equivale, en efecto, a efectuar una subida a lo largo de los puntos de mayor densidad. En esta subida, el término r^λ (salvo una

parte regular) queda, según (II, 1, 9), $\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{1+\lambda}$, y esta expresión figura en el

covariograma de la nueva variable de una sola dimensión obtenida al subir a lo largo de las líneas. La varianza de estimación, en el reconocimiento de esta nueva variable según la malla a_1 , es entonces necesariamente igual a:

$$\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a^{2+\lambda}$$

El T_λ tiene la expresión (IV, 2, 9). De hecho, si hacemos $a_2 = 0$ en la fórmula (IV, 3, 4), solo subsisten los términos correspondientes a $p_2 = 0$, y se verifica inmediatamente que se tiene bien:

$$(IV, 3, 5) \quad 2 \frac{\pi^{-\lambda-1} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} a_1^{2+\lambda} \sum_{p_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{\lambda+2}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a^{2+\lambda}$$

Hemos obtenido así el término principal de $T_0(r^\lambda)$, relativo a la razón a_2 / a_1 la cual se supone muy pequeña. Este término representa la extensión de las líneas de mayor densidad (las que se supone perfectamente conocidas) en las tajadas de dos dimensiones que las separan. Lo llamaremos término de tajada.

Cuando a_2 no es nulo, naturalmente, no se tiene el derecho de despreciar los términos de (IV, 3, 4) correspondientes a los enteros p_2 no nulos. Consideremos los términos para los cuales $p_2 = q$ tiene un mismo valor q , y pongámoslos en la forma siguiente:

$$(IV, 3, 6) \quad 2\pi^{-\lambda-1} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \left(\frac{a_2}{q}\right)^{2+\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\left[1+p^2 \frac{a_2^2}{a_1^2 q^2}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

Para evaluar la sumatoria (tomada sobre el índice p) podemos aplicar la fórmula sumatoria de Poisson (A, 4, 3) a la función $(1+bx^2)^{-(1+\frac{\lambda}{2})}$ cuya transformada de Fourier está dada en (A, 8, 27). Se obtiene así:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2 b^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b} \frac{2^{\frac{1-\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}} K_{-\frac{(1+\lambda)}{2}}\left(\frac{2\pi n}{b}\right)$$

Se verificará fácilmente, sobre el desarrollo (C, 2, 3), que $x^{\frac{1+\lambda}{2}} K_{\frac{1+\lambda}{2}}(x)$ toma, en $x = 0$, el valor $2^{\frac{\lambda-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$. Si separamos, en la expresión anterior, los términos correspondientes a $n = 0$, queda:

$$(IV, 3, 7) \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2 b^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} - 1 + \frac{2^{\frac{3-\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}} K_{\frac{1+\lambda}{2}}\left(\frac{2\pi n}{b}\right)$$

Cuando b tiende a 0, la serie que figura en el segundo miembro decrece más rápido que cualquier potencia de b , debido al decrecimiento exponencial, en el infinito, de las funciones de Bessel $K_{\frac{1+\lambda}{2}}$. Esta no aporta ninguna contribución al desarrollo limitado en

b . Pongamos ahora:

$$b = \frac{a_2}{a_1 q}$$

Y llevemos el resultado obtenido en (IV, 3, 7) en la expresión (IV, 3, 6) del término general en q . Esta queda:

$$\pi^{-\lambda-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} a_1 a_2^{1+\lambda} - \pi^{-\lambda-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{a_2^{2+\lambda}}{q^{2+\lambda}} + R_q \left(\frac{a_2}{a_1 q}\right) a_2^{2+\lambda}$$

Según lo anterior, sabemos que el término complementario R_q decrece más rápido que cualquier potencia de $\left(\frac{a_2}{a_1 q}\right)$ cuando a_2 tiende a cero.

Finalmente, la expresión obtenida debe ser sumada sobre todos los valores enteros, no nulos, positivos o negativos, del entero q . Se verifica fácilmente, con la ayuda de (IV, 2, 9) que se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi^{-\lambda-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\lambda}} = T_\lambda \\ 2\pi^{-\lambda-1} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+\lambda}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} \end{array} \right.$$

Al considerar, también, al término de tajada ($q = 0$), obtenemos finalmente la expresión siguiente de $T_0(r^\lambda)$:

$$(IV, 3, 8) \quad T_0(r^\lambda) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} (a_1^{2+\lambda} - a_2^{2+\lambda}) + T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda} + R_\lambda \left(\frac{a_2}{a_1}\right) a_2^{2+\lambda}$$

Del término complementario $R_\lambda \left(\frac{a_2}{a_1}\right)$, no sabemos mucho, sino que es positivo, y decrece más rápido que cualquier potencia de $\frac{a_2}{a_1}$ cuando a_2 tiende a 0. No lo despreciaremos y,

en compensación, tampoco despreciaremos $a_2^{2+\lambda}$ delante de $a_1 a_2^{1+\lambda}$, y conservaremos solamente los dos primeros términos del desarrollo:

$$(IV, 3, 9) \quad T_0(r^\lambda) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a_1^{2+\lambda} + T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda} \quad (a_1 < a_2)$$

Para valores de λ no muy elevados (inferiores a 7 u 8), la fórmula (IV, 3, 9) aún proporciona resultados utilizables para $a_2 = a_1$. Naturalmente, cuando a_2 es superior a a_1 se deben cambiar los papeles de a_1 y a_2 .

Se ve aparecer en (IV, 3, 9), *el principio de composición de términos de tajada y de línea*. El término de tajada en $a_1^{2+\lambda}$ representa, lo hemos visto, la varianza de estimación de una dimensión calculada para la malla a_1 y la variable obtenida luego de una subida a lo largo de las líneas. El término en $a_1 a_2^{1+\lambda}$ se llama término de línea. Se observa que $T_\lambda a_2^{1+\lambda}$ no es otra cosa que la varianza de una sola dimensión calculada sobre el covariograma en x^λ para la malla a_2 .

Sean entonces $g_2(r)$ un covariograma de dos dimensiones, $g_1(r)$ el covariograma que se deduce por subida, sean:

$$\sigma_1^2(a) \quad \text{y} \quad \sigma_2^2(a)$$

Las varianzas de estimación de una sola dimensión calculadas sobre g_2 : El principio de composición se puede escribir:

$$(IV, 3, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(a_1, a_2) = \sigma_1^2(a_1) + a_1^2 \sigma_2^2(a_2) \\ (a_1 > a_2) \end{array} \right.$$

Válido con la misma aproximación que (IV, 3, 9), este principio expresa que *se pueden mirar como independientes la estimación de las líneas de mayor densidad a partir de las muestras y la de la tajadas a partir de las líneas* (las cuales se supone perfectamente reconocidas), y por consiguiente, componer las varianzas de estimación correspondientes, como si se tratara de variables aleatorias independientes (en el sentido usual del cálculo de probabilidades). Esta justificación intuitiva permite comprender porqué la fórmula (V, 3, 9) es aún utilizable para $a_1 = a_2$ y para valores de λ considerables ($\lambda = 6$ o 7).

En las aplicaciones, se utilizarán sobre todo los resultados relativos a los valores enteros de λ y a los términos logarítmicos en $r^{2k} \log r$. De (IV, 3, 9), se deduce sin dificultad:

$$(IV, 3, 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0(r^{2k}) = 0 \\ T_0(r^{2k-1}) = \frac{(-1)^k 2^{2-2k} (2k-2)!}{\left(k + \frac{1}{2}\right) [(k-1)!]^2} B_{1+2k} a_1^{1+2k} + \frac{(-1)^k}{k} B_{2k} a_1 a_2^{2k} \\ T_0(r^{2k} \log r) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2+2k} (k!)^2}{(2k+3)!} \pi B_{2+2k} a_1^{2+2k} + \frac{(-1)^{k+1} \pi}{1+2k} B_{1+2k} a_1 a_2^{1+2k} \end{array} \right.$$

En particular, siempre con $a_1 \geq a_2$:

$$(IV, 3, 12) \quad \begin{cases} T_0(r) = -\frac{1}{6}a_1a_2^2 - 0.609a_1^3 \\ T_0(r^2 \log r) = 0.0609a_1a_2^3 + 0.03490a_1^4 \\ T_0(r^3) = \frac{1}{60}a_1a_2^4 + 0.01198a_1^5 \end{cases}$$

Generalización para más de 2 dimensiones. - Finalmente, el principio de composición se generaliza al caso en que hay más de dos dimensiones. Para $n = 3$, por ejemplo, con $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, y designando por $\sigma_3^2(a)$, $\sigma_2^2(a)$ y $\sigma_1^2(a)$ las varianzas de estimación de una dimensión calculadas, respectivamente, sobre el covariograma g_3 de la variable a estimar, y los covariogramas g_2 y g_1 que se deducen por subida de orden 1 y 2, se tendrá:

$$(IV, 3, 13) \quad \sigma^2(a_1, a_2, a_3) = \sigma_1^2(a_1) + a_1\sigma_2^2(a_2) + a_1a_2\sigma_3^2(a_3)$$

Se ve aparecer y compositar un término de tajada, un término de sección y un término de línea, y todo sucede como si las estimaciones de las tajadas por las secciones, de las secciones por las líneas, y de las líneas por las muestras fueran independientes unas de otras. El principio de correspondencia permite, igualmente, calcular fácilmente el aporte $T_0(r^\lambda)$ para esta varianza de tres dimensiones, del término en r^λ de la parte irregular del covariograma:

$$(IV, 3, 14) \quad T_0(r^\lambda) = -\frac{2\pi}{\lambda+2}T_{2+\lambda}a_1^{3+\lambda} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}T_{1+\lambda}a_1a_2^{2+\lambda} + T_\lambda a_1a_2a_3^{1+\lambda}$$

Caso de las mallas no rectangulares. - Sucede a menudo, en la práctica, que las redes de muestreo sean construidas sobre paralelogramos cualesquiera (en dos dimensiones) o paralelepípedos oblicuos (en tres dimensiones). El principio de composición se extiende y las fórmulas subsisten: Basta, para $n = 2$, con tomar por a_2 la distancia entre muestras sobre las líneas de mayor densidad, y por a_1 , la distancia entre estas líneas. Análogamente, en 3 dimensiones, a_3 representará la malla sobre las líneas de mayor densidad, a_2 la distancia más pequeña distancia entre dos de estas líneas, y a_1 el espaciamiento de los planos de mayor densidad.

Respecto de la fórmula general (IV, 1, 12), se verificará que subsiste mediante muy ligeras modificaciones: Si se designa por a, b, c, \dots los vectores de base de la malla, tal que los muestreos están realizados en los puntos $y + p_a a + p_b b + p_c c$, siendo p_a, p_b, p_c enteros cualesquiera, y por $v = (a, b, c)$ el volumen del paralelepípedo de base de la malla, se tiene:

$$(IV, 3, 15) \quad \sigma^2(a, b, c, \dots) = (a, b, c, \dots) \sum_{p_a p_b p_c} g(p_a a + p_b b + p_c c + \dots) - \int g(h) dh$$

4. - Mallas aleatorias estratificadas.

En algunas situaciones prácticas, las redes de muestreo no están construidas según una malla regular, sino según el tipo llamado estratificado al azar, en el cual, cada punto de muestreo se elige al interior de una « zona de influencia » según un procedimiento de sorteo al azar, el cual entrega para cada punto de la zona de influencia, la misma probabilidad de ser sorteado. Cuando estas zonas de influencia están unidas, son iguales entre sí, y no se solapan, se habla de malla aleatoria estratificada. En dos dimensiones, estas zonas de influencia pueden ser paralelogramos o hexágonos. En tres dimensiones, son generalmente, paralelepípedos oblicuos o rectangulares. Nos proponemos, en este párrafo, definir y calcular la varianza de estimación asociada a una malla aleatoria estratificada, y compararla con la malla regular construida sobre las mismas zonas de influencia. Para simplificar las notaciones, supondremos que la zonas de influencia es un paralelepípedo rectangular P de aristas $a = (a_1 a_2 \dots a_n)$ paralelas a los ejes de coordenadas, pero los resultados se extenderán de ellos mismos a otros tipos de poliedros. Si se conoce la posición:

$$v = (v_1 v_2 \dots v_n)$$

Del centro de una de las zonas de influencia, los centros de todas las otras están localizados en los puntos $v + ka = (v_1 + k_1 a_1, \dots, v_n + k_n a_n)$, en que k designa un sistema de enteros cualesquiera $(k_1 k_2 \dots k_n)$. En la zona de influencia P_k de centro $v + ka$, se implanta al azar un punto de muestreo, según una ley de probabilidad uniforme. Designaremos por:

$$v + ka + u_k$$

este punto de muestreo. Todo ocurre, en efecto, como si un punto u_k fuera tirado al azar dentro del paralelepípedo P con centro en el origen. Designaremos por $\omega(x)$ la variable geométrica asociada a P y por $\pi(h) = \omega * \hat{\omega}$ su covariograma geométrico. La variable regionalizada que se desea estimar se designará por $f(x)$, y su covariograma por $g(h)$. Los datos disponibles, que son los valores numéricos de los $f(v + ka + u_k)$ para todos los sistemas de enteros k , que permiten formar la estimación Q^* de la cantidad de metal, según la fórmula siguiente:

$$(IV, 4, 1) \quad Q^* = |a| \sum_k f(v + ka + u_k)$$

Q^* aparece como una variable aleatoria, relativamente a los u_k , tirados independientemente al azar según una ley de probabilidad uniforme en P , y también relativamente a la posición del origen v de la red, que también se puede considerar como tirado al azar dentro de P como los u_k , pero independientemente de ellos (en efecto, da lo mismo tomar como origen v o uno cualquiera de los $v + ka$). Razonaremos primero con v fijo. Si v es fijo, la esperanza matemática de Q^* es:

$$E(Q^* | v) = |a| \sum_k \frac{1}{|a|_p} \int f(v + ka + u_k) du_k = \int f(x) dx = Q$$

Es igual, naturalmente, al verdadero valor de la cantidad de metal, luego, por consiguiente, la esperanza a priori de Q^* (relativa a la vez a u_k y a v) es:

$$(IV, 4, 2) \quad E(Q^*) = E(Q^* | v) = Q$$

Pasemos a las varianzas, y pongamos, para abreviar:

$$f_k = f(v + ka + u_k)$$

Para calcular la varianza con v fijo, formemos el cuadrado:

$$[Q^*]^2 = |a|^2 \sum_{kp} f_k f_p$$

Para $k \neq p$, f_k y f_p son independientes con v fijo (porque u_k y u_p son independientes). Para $k = p$, la varianza de f_k aparece. Luego, se tiene:

$$\begin{cases} E(f_k f_k | v) = [E(f_k | v)]^2 + D^2(f_k | v) \\ E(f_k f_p | v) = E(f_k | v) E(f_p | v) \end{cases}$$

Se deduce, según (IV, 4, 2):

$$\begin{cases} E(Q^{*2} | v) = |a|^2 \sum_{kp} E(f_k | v) E(f_p | v) + |a|^2 \sum_k D^2(f_k | v) \\ = Q^2 + |a|^2 \sum_k D^2(f_k | v) \end{cases}$$

Se obtiene entonces la expresión de la varianza, cuando el origen v de la red es fijo:

$$(IV, 4, 3) \quad D^2(Q | v) = |a|^2 \sum_k D^2(f_k | v)$$

Como $E(Q^* | v) = Q$ no depende de v , se tendrá la varianza a priori $D^2(Q^*)$, que es la varianza de estimación buscada, al tomar el valor probable²⁰ relativo a v de $D^2(Q^* | v)$. Para explicitar su expresión, introduzcamos la variable:

$$y(x) = \frac{1}{|a|_p} \int f(x + u) du = \frac{1}{|a|} f * \hat{\omega}$$

²⁰ Nota del traductor: En español se usa más bien « esperanza matemática » en vez de « valor probable »

igual al valor medio $y(x)$ de la variable f en el paralelepípedo P centrado en el punto x (ley media de este paralelepípedo). Se tiene:

$$D^2(f_k | v) = \frac{1}{|a|} \int_P f^2(v + ka + u) du - [y(v + ka)]^2$$

Llevemos este resultado a (IV, 4, 3): Queda:

$$\begin{aligned} D^2(Q^* | v) &= |a| \int f^2(x) dx - |a|^2 \sum_k [y(v + ka)]^2 \\ &= |a| g(0) - |a|^2 \sum_k [y(v + ka)]^2 \end{aligned}$$

El primer término es independiente de v . El segundo, cuando el origen v de la red se elige al azar en P , tiene como valor probable:

$$|a|^2 E \left[\sum_k y^2(v + ka) \right] = |a| \int [y(x)]^2 dx = |a| g_p(0)$$

En que $g_p(h)$ es el covariograma de $y(x)$, igual a:

$$g_p(h) = \frac{1}{|a|^2} g * \omega * \hat{\omega} = \frac{1}{|a|^2} g * \pi$$

De donde, finalmente, el resultado buscado:

$$(IV, 4, 4) \quad \sigma^2(a) = D^2(Q^*) = |a| [g(0) - g_p(0)]$$

o también, en forma explícita:

$$(IV, 4, 5) \quad \sigma^2(a) = |a| \left[g(0) - \frac{1}{|a|^2} \int g(h) \pi(h) dh \right]$$

Si nos referimos a la significación del algoritmo de Cauchy (I, 2, 9), vemos que la varianza de estimación es igual al producto del volumen $|a|$ de la malla por diferencia entre $g(0)$ y el valor medio de $g(h)$ en el paralelepípedo de base P . Esta varianza solo depende del comportamiento de $g(h)$ en este paralelepípedo, y toma un valor más elevado cuando el decrecimiento de $g(h)$ en P es más rápido – luego, cuando la regionalización es menos regular.

Mallas adaptadas. - Se dice que una malla aleatoria estratificada es *adaptada* si produce el mínimo de la varianza de estimación (IV, 4, 5) para un mismo volumen $|a|$ de la malla, es decir, prácticamente para un mismo número de muestras. En el caso de un covariograma isótropo $g(r)$, esta malla adaptada está construida sobre un poliedro regular. En dos

dimensiones, por ejemplo, se obtienen los hexágonos regulares y los cuadrados, con una ínfima superioridad para la malla hexagonal, en la medida en que el hexágono se aproxima más al círculo que el cuadrado.

De la misma manera, se dirá que una malla regular es adaptada, si produce el mínimo, con $|a|$ fijo de la varianza de estimación (IV, 1, 12). Para un mismo $g(h)$, no es evidente que las mallas adaptadas regulares y aleatorias estratificadas estén construidas sobre los mismos poliedros, sin embargo este será generalmente el caso: todo depende del tipo de anisotropía que presenta el covariograma $g(h)$ en la vecindad del origen. Para un covariograma isótropo $g(r)$, o que presenta una anisotropía susceptible de ser corregida por una transformación lineal de las coordenadas, estamos asegurados que los poliedros adaptados coinciden.

De manera general, *la malla regular adaptada proporciona siempre mejores resultados que la malla aleatoria adaptada*. La excepción sería un covariograma aberrante, el cual comporte una componente armónica de amplitud excepcionalmente elevada para un período que sea, justamente, uno de los periodos de la red.

Por otra parte, de dos mallas adaptadas construidas sobre un mismo poliedro, una regular y la otra aleatoria estratificada, no es posible, en general, prever a priori cuál proporcionará los mejores resultados.

CAPITULO QUINTO

REPRESENTACION TRANSITIVA DE LAS CORREGIONALIZACIONES

SUMARIO

Los resultados de los capítulos precedentes se generalizan a las corregionalizaciones, es decir al caso en el cual varias variables se definen en el mismo campo. La independencia de dos variables puede ser definida en dos sentidos diferentes, no equivalentes: La independencia interna y la ausencia de correlación diferida. Los tres primeros párrafos son importantes en las aplicaciones (estimación simultánea de varias variables; por ejemplo, en un yacimiento minero, estimación simultánea de la ley media y de los tonelajes de mineral y de metal).

El párrafo 1, de lectura fácil, define la matriz de covariación $C_{ij}(h)$, generalización del covariograma. La covarianza de las estimaciones simultáneas de las dos variables f_i y f_j se calcula a partir de C_{ij} , de la misma manera que una varianza de estimación a partir de $g(h)$.

El párrafo 2 define la independencia interna de dos variables f_i y f_j por la condición que $f_i(x)$ y $f_j(x)$ y todas sus regularizadas son independientes en el sentido ordinario. La condición se escribe $C_{ij}(h) = m_i m_j K(h)$, siendo $K(h)$ el covariograma geométrico.

El párrafo 3 aplica esta noción al caso de una variable $f(x)$ y de la variable geométrica $k(x)$ asociada a su campo y formula la condición de independencia interna de la variable y de su campo (ausencia de zonaciones de la deriva).

El párrafo 4 retoma la noción usual de correlación diferida, correlación entre $f_i(x)$ y $f_j(x+h)$, y muestra que la ausencia de correlación diferida no implica la independencia interna, ni recíprocamente. Entre una variable y su campo una correlación diferida traduce la existencia de una deriva²¹ orientada.

1. - La matriz de covariación.

A menudo es necesario estudiar varias variables regionalizadas, definidas sobre un mismo soporte, puntual o no. Hablaremos, en este caso de corregionalización, y debemos asociar una importancia particular a las corregionalizaciones que pueden ligar las diferentes componentes de la corregionalización. Además de las corregionalizaciones directas, que son las que ligan los valores $f_i(x)$ y $f_j(x)$ en un mismo punto x , conviene igualmente considerar las correlaciones «diferidas», que ligan los valores de $f_i(x)$ y $f_j(x+h)$ en dos puntos distintos.

²¹ Nota del traductor: La “deriva” no ha sido hasta ahora definida. En términos intuitivos una deriva es una suerte de tendencia en la regionalización.

Supongamos entonces que en un campo V definido, según la fórmula (I, 1, 1) por la variable geométrica habitual $k(x)$, de covariograma:

$$(V, 1, 1) \quad K(h) = k * \hat{k}$$

Se distribuyen, simultáneamente, varias variables regionalizadas $f_1(x), f_2(x) \dots$ con soporte puntual. A la variable $f_i(x)$ se le asocia su covariograma transitivo $g_i(h)$, definido por:

$$(V, 1, 2) \quad g_i = f_i * \hat{f}_i$$

Para introducir cómodamente la matriz de covariación, vamos a introducir una nueva variable regionalizada:

$$(V, 1, 3) \quad f(x, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(x)$$

Combinación lineal de las variables f_i dadas, con coeficientes λ_i cualesquiera. Esta nueva variable está asociada al covariograma:

$$(V, 1, 4) \quad g(h, \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j C_{ij}(h)$$

En algunos problemas, puede haber interés en considerar separadamente cada uno de los dos componentes $f_i * \hat{f}_j$ y $\hat{f}_i * f_j$ de los términos rectangulares. Lo más corriente es que intervengan por intermedio de la expresión simétrica:

$$(V, 1, 5) \quad C_{ij}(h) = C_{ji}(h) = \frac{1}{2} [f_i * \hat{f}_j + \hat{f}_i * f_j]$$

El covariograma (V, 1, 4) puede escribirse entonces:

$$g(h, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2 g_i(h) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j C_{ij}$$

Se escribirá, como es natural:

$$C_{ii}(h) = g_i(h)$$

De manera que (V, 1, 4) se escribirá, en la forma simetrizada:

$$(V, 1, 6) \quad g(h, \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j C_{ij}(h)$$

El término $C_{ij}(h)$ será llamado *covariograma rectangular* asociado a las variables f_i y f_j , y la matriz de los covariogramas rectangulares será llamada *matriz de covariación*. La

fórmula (V, 1, 6) permite extender a los $C_{ij}(h)$ casi todas las propiedades de los covariogramas $g(h)$. Basta para ello, de observar que $g(h, \lambda_i)$ debe verificar cada una de estas propiedades, cualesquiera que sean los λ_i y los λ_j , y proceder por identificación. Así los C_{ij} suben de la misma manera que un covariograma, y si se regulariza f_i y f_j por una función de muestreo o de ponderación p , con covariograma $P = p * \hat{p}$, las regularizadas $f_i * \hat{p}$ y $f_j * \hat{p}$ tienen $C_{ij} * P$ como covariograma rectangular.

El término $C_{ij}(h)$ expresa, a su manera, la correlación que liga $f_i(x)$ y $f_j(x + h)$. Para precisar su significación, imaginemos que, para estimar la cantidad de metal:

$$(V, 1, 7) \quad Q(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i Q_i$$

asociada a la variable $f(x, \lambda_i)$ definida en (V, 1, 3), disponemos de una red de muestreos puntuales implantados según una malla rectangular $(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$.

La varianza de estimación $\sigma^2(a)$ se obtiene al hacer actuar sobre el covariograma g el operador lineal ξ_a , definido, según (IV, 1, 12) por la fórmula:

$$(V, 1, 8) \quad \sigma^2(a) = \xi_a(g) = |a_1 a_2 \dots a_n| \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} g(k_1 a_1, \dots, k_n a_n) - \int g(h) dh$$

Este operador es manifiestamente lineal, la varianza asociada a la estimación de la cantidad de metal $Q(\lambda_i)$ toma la expresión siguiente:

$$(V, 1, 9) \quad \begin{aligned} \sigma^2(a, \lambda_i) &= \xi_a[g(h, \lambda_i)] = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \xi_a(C_{ij}) \\ &= \sum_i \lambda_i^2 \xi_a(g_i) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \xi_a(C_{ij}) \end{aligned}$$

En esta relación, $\xi_a(g_i)$ es naturalmente igual a la varianza de la estimación de la cantidad de metal Q_i relativa a la variable f_i , varianza que se puede notar como $\sigma^2_i(a)$. Si de la misma manera designamos por $\sigma_{ij}(a)$ la covarianza de las estimaciones simultáneas de Q_i y Q_j , se tiene necesariamente:

$$\sigma^2(a, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i^2(a) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}(a)$$

Basta con identificar, porque los λ_i son cualesquiera, el término en $\lambda_i \lambda_j$ con el de (V, 1, 9) para obtener:

$$(V, 1, 10) \quad \sigma_{ij}(a) = \xi_a(C_{ij})$$

Luego la covarianza de la estimación simultánea de Q_i y Q_j por una misma malla de muestreo se obtiene al aplicar al covariograma rectangular C_{ij} el mismo operador lineal ξ_a que sirve para el cálculo de una varianza de estimación ordinaria $\sigma^2(a)$.

2. - Condición de independencia interna.

En general, la covarianza de estimación definida en (V, 1, 10) no será nula, y las cantidades de metal Q_i y Q_j no serán estimadas independientemente una de la otra, aún en el caso en que f_i y f_j aparezcan como independientes en el sentido estadístico usual. Como están ligadas a un mismo campo geométrico V , estas dos variables no pueden ser ciertamente « independientes » en absoluto. En ausencia de cualquier causa de ligazón, el hecho de tener el mismo campo geométrico, implica, por ejemplo, para las variables f_i y f_j que solo toman valores positivos, un valor necesariamente positivo de la covarianza de estimación $\xi_a(C_{ij})$. Si la red de muestreos ha sido implantada, por casualidad, de manera que pueda sobre estimar la evaluación del volumen V , resulta una tendencia a sobre estimar simultáneamente las dos cantidades de metal Q_i y Q_j - e inversamente.

La noción usual de independencia de f_i y f_j es una noción interna al campo V . Veremos, en la segunda parte, que esta noción se expresa de manera más cómoda en la teoría intrínseca. La independencia corresponde al caso en que la covarianza directa, u ordinaria, de las variables puntuales $f_i(x)$ y $f_j(x)$ es igual a 0. Con nuestras notaciones, esta independencia, en el sentido usual, se traduce por la relación:

$$(V, 2, 1) \quad C_{ij}(0) = m_i m_j K(0) = \frac{Q_i Q_j}{K(0)}$$

$K(0)$ es igual al volumen del campo geométrico V , según (1, 1, 5), y m_i, m_j son las medias $\frac{Q_i}{K(0)}$ y $\frac{Q_j}{K(0)}$ de las variables f_i y f_j en V .

Pero, es necesario ver bien que la relación (V, 2, 1) solo expresa la independencia (usual) de las variables puntuales. No implica de ninguna manera la independencia de variables no puntuales que se pueden deducir por los procedimientos habituales de regularización y de muestreo. Sea, en efecto, p una función de ponderación o de muestreo, con covariograma $P = p * \hat{p}$. Las variables y_i y y_j , o leyes medias de f_i y f_j en un muestreo están definidas por:

$$(V, 2, 2) \quad \begin{cases} y_i = \frac{1}{v} f_i * \hat{p} \\ y_j = \frac{1}{v} f_j * \hat{p} \end{cases} \quad \left(v = \int p(x) dx \right)$$

Estas nuevas variables y_i y y_j tienen el covariograma rectangular:

$$\frac{1}{v^2} C_{ij} * P = \frac{1}{v^2} \int P(h-u) C_{ij}(u) du$$

Pero, para tomar en cuenta el efecto de arista que se produce en las fronteras del campo cuando se pasa a las variables cuyo soporte no es puntual, el covariograma geométrico K del campo V debe ser reemplazado por:

$$\frac{1}{v^2} K * P = \frac{1}{v^2} \int P(h-u)K(u)du$$

Se verifica que la regularización por p no modifica ni las cantidades de metal $\frac{1}{v} \int f_i * \hat{p} dx = Q_i$ ni el « volumen » generalizado:

$$\frac{1}{v} \int k * \hat{p} dx = K(0) = V$$

Luego no cambia las medias m_i y m_j . Para que las variables y_i y y_j sean aún independientes, en el sentido usual, debemos entonces tener, según (V, 2, 1):

$$(V, 2, 3) \quad \int P(u)C_{ij}(u)du = m_i m_j \int P(u)K(u)du$$

Pero esta relación no es para nada una consecuencia necesaria de (V, 2, 2). Para que dos variables regularizadas y_i y y_j sean independientes, en el sentido usual, cualquiera que sea la función de ponderación o de muestreo p , es decir para que (V, 2, 3) se verifique para todo covariograma $P(u)$ es necesario y suficiente que se tenga:

$$(V, 2, 4) \quad C_{ij}(h) = m_i m_j K(h)$$

Es decir, que *el covariograma rectangular C_{ij} sea proporcional al covariograma geométrico K* . Cuando esta relación se verifica, diremos que las dos variables f_i y f_j verifican la condición de independencia interna (interna al campo V). Esta condición es *extremadamente severa*, y en la práctica no podrá nunca ser rigurosamente verificada. Pero si las fluctuaciones de $C_{ij}(h)$ de un lado y de otro de $m_i m_j K(h)$ no tienen una amplitud muy grande, se podrá, a menudo, admitir la independencia interna, como una aproximación. En la segunda parte, encontraremos esta relación (V, 2, 4) y la interpretaremos, desde un punto de vista estocástico, como una relación entre valores probables de ciertas magnitudes aleatorias.

Cuando la condición (V, 2, 4) de la independencia interna se verifica, la covarianza $\xi_a(C_{ij})$ de las estimaciones simultáneas de las cantidades de metal Q_i y Q_j se pone en la forma:

$$(V, 2, 5) \quad \sigma_{ij}(a) = \xi_a(C_{ij}) = m_i m_j \xi_a(K) = m_i m_j \sigma_V^2$$

La varianza $\sigma_V^2 = \xi_a(K)$ no es otra que la varianza de estimación del volumen V del campo geométrico, llamada a veces, brevemente, *varianza geométrica*. En este caso, la varianza del error cometido en la estimación de la razón Q_i / Q_j puede ponerse – en primera aproximación – en la forma:

$$(V, 2, 6) \quad \frac{\sigma_i^2(a)}{Q_i^2} + \frac{\sigma_j^2(a)}{Q_j^2} - 2 \frac{\sigma_{ij}(a)}{Q_i Q_j} = \frac{\sigma_i^2(a)}{Q_i^2} + \frac{\sigma_j^2(a)}{Q_j^2} - 2 \frac{\sigma_V^2}{V^2}$$

En general, la condición de independencia interna (V, 2, 4) no será verificada, y el valor de la diferencia:

$$(V, 2, 7) \quad C_{ij}(h) - m_i m_j K(h)$$

Entregará una idea de la correlación que rige a la vez entre $f_i(x)$ y $f_j(x+h)$ y entre $f_i(x+h)$ y $f_j(x)$: El C_{ij} definido en (V, 2, 5), al ser simétrico, no permite separar estas dos correlaciones. En el párrafo 4 expresaremos las correlaciones diferidas en una forma no simetrizada, la cual permitirá separar los efectos relativos a $+h$ y a $-h$, es decir de poner en evidencia el fenómeno del avance de una variable sobre la otra. Pero observamos inmediatamente que si la expresión (V, 2, 7) toma, para $|h|$ pequeño, valores positivos, no debe necesariamente, por compensación, tomar valores negativos para $|h|$ más grande. En efecto, la integral total de la expresión (V, 2, 7) es siempre nula. Se tiene siempre:

$$(V, 2, 8) \quad \int C_{ij}(h) dh = Q_i Q_j = m_i m_j [K(0)]^2$$

Como se puede verificar en la definición (V, 1, 5); al invertir el orden de las integraciones de h y x , se tiene:

$$\begin{aligned} \int C_{ij}(h) dh &= \frac{1}{2} \int \int [f_i(x) f_j(x+h) + f_i(x+h) f_j(x)] dx dh \\ &= \frac{1}{2} \int [Q_j f_i(x) + Q_i f_j(x)] dx = Q_i Q_j \end{aligned}$$

Así, una correlación positiva a corta distancia está obligatoriamente compensada por una correlación negativa a mayor distancia.

3. - Relación entre una variable y su campo geométrico.

Un caso particular notable de correionalización se obtiene al asociar una variable $f(x)$ y la variable geométrica $k(x)$ relacionada con su campo V . Al escribir $C(h)$ en lugar de $C_{ij}(h)$, la condición de independencia interna se escribe simplemente:

$$(V, 3, 1) \quad C(h) = mK(h)$$

En que $m = Q / K(0)$ designa el valor medio de f en su campo. Cuando esta ecuación se verifica, la relación (V, 2, 6) se pone en la forma:

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}$$

La varianza relativa del error cometido en la estimación de la media m se obtiene al restar las varianzas relativas de estimación del metal y del volumen. Esto significa que, en el producto, $Q = mV$, las cantidades m y V pueden ser consideradas como que fueron estimadas independientemente una de la otra. Diremos, en este caso, que no hay interferencia entre el problema geométrico (estimación de V) y la estimación de la media m . En la medida en que esta relación manifiesta la ausencia de influencia de la posición de un punto x al interior del campo, y especialmente a más o menos una gran distancia a las fronteras de V , esta condición (V, 3, 1) puede servir de criterio para la validez de la teoría intrínseca (segunda parte).

Debido a la importancia de esta relación, vamos a examinarla con algunos detalles, y para esto es necesario, en primer lugar, introducir dos nociones nuevas.

Los algoritmos $m(h)$ y $Q(h)$. - Hemos visto (I, 1, 5) que el covariograma geométrico $K(h)$ proporciona la medida del volumen $V' = V \cap \tau_h V$ de la intersección del campo V y de su trasladado en la traslación h , o del volumen $V'' = V \cap \tau_{-h} V$ obtenido por la traslación opuesta $-h$. Designemos por $m(h)$ y $Q(h)$ el valor medio de f en V' y la cantidad de metal correspondiente:

$$Q(h) = m(h)K(h) = \int_{V'} f(x) dx$$

Este volumen V' tiene, por variable geométrica, el producto $k(x)k(x-h)$. En efecto, $k(x)$ es igual a 1 si x está en V y 0 en caso contrario, análogamente, $k(x-h)$ es igual a 1 o a 0 según que $y = x-h$ pertenezca o no, a V , es decir, según que $x = y+h$ pertenezca a $V' = V \cap \tau_h V$. Análogamente, el volumen $V'' = V \cap \tau_{-h} V$ tiene por variable geométrica $k(x)k(x+h)$. El factor $k(x)$ puede, por otra parte, ser suprimido, porque $f(x)$ es nula cuando $k = 0$. Definiremos entonces los algoritmos correspondientes por las relaciones siguientes:

$$(V, 3, 2) \quad \begin{cases} Q(h) = m(h)K(h) = \int f(x)k(x-h)dx = f * \hat{k} \\ Q(-h) = m(-h)K(h) = \int f(x)k(x+h)dx = \hat{f} * k \end{cases}$$

El covariograma rectangular $C(h)$. - Volvamos ahora al covariograma rectangular $C(h)$ relativo a $f(x)$ y a su variable geométrica $k(x)$. De la definición (V, 1, 5), deducimos inmediatamente:

$$C(h) = \frac{1}{2}[f * \hat{k} + \hat{f} * k]$$

refiriéndonos a los algoritmos (V, 3, 22), obtenemos:

$$(V, 3, 3) \quad C(h) = \frac{1}{2}[Q(h) + Q(-h)]$$

Así, $C(h)$ es igual a la media aritmética de las cantidades de metal contenidas en las intersecciones del campo V con sus trasladados por $+h$ y $-h$. La condición de independencia interna (V, 3, 1) toma entonces la forma notable siguiente:

$$(V, 3, 4) \quad \frac{1}{2}[m(h) + m(-h)] = m$$

Existe *independencia interna entre una variable y su campo* si la media de los valores tomados por la variable en las intersecciones del campo V con sus trasladados por h y $-h$ es constante e igual a la media general m . Esta condición traduce la ausencia de una deriva sistemática de los valores tomados por la variable, siempre con la excepción de una deriva lineal que podría seguir compatible con (V, 3, 4). En la segunda parte, y de un punto de vista estocástico, veremos que la teoría intrínseca admite o bien que los valores probables sean constantes, o bien, eventualmente, una deriva lineal. Solamente podrán usar esta teoría las variables que verifican (V, 3, 4), es decir independientes de su campo. En la práctica, se podrán tolerar algunas desviaciones, que se interpretarán como fluctuaciones estadísticas normales, con la condición que estas desviaciones no tomen mucha amplitud. En el caso de una deriva con zonación, donde se tiene, por ejemplo, un corazón rico y periferias de más en más pobres, se ve fácilmente que se tiene:

$$\begin{cases} C(h) > mK(h) & \text{para } |h| \text{ pequeño} \\ C(h) < mK(h) & \text{para } |h| \text{ grande} \end{cases}$$

Sin embargo, se observará que, en todos los casos las relaciones siguientes se verifican:

$$(V, 3, 5) \quad \begin{cases} C(0) = mK(0) = Q \\ \int C(h)dh = m \int K(h)dh = QV \end{cases}$$

La primera resulta de la definición (V, 3, 3) de $C(h)$, y la segunda resulta directamente de (V, 2, 8). Por comparación con (V, 2, 1), se observará que la relación $C(0) = mK(0)$ expresa que *la covarianza (ordinaria) de una variable $f(x)$ y de su campo es siempre nula*. La correlación diferida entre $f(x)$ y $k(x+h)$, es decir $C(h)$ puede servir para representar la influencia del campo, y de sus fronteras, sobre la forma de la regionalización.

4. - Las correlaciones diferidas.

Los covariogramas $C_{ij}(h)$ tienen el inconveniente de ser simétricos, y que no permiten, por consiguiente, distinguir la influencia de $f_i(x)$ sobre $f_j(x+h)$ y la de $f_i(x)$ sobre $f_j(x-h)$. Para poner en evidencia el avance o el retardo de una variable sobre la otra, es necesario separar las dos componentes de (V, 1, 5). Pondremos:

$$(V, 4, 1) \quad \begin{cases} D_{ij}(h) = \hat{f}_i * f_j = \int f_i(x) f_j(x+h) dx \\ D_{ji}(h) = f_j * \hat{f}_i = \int f_i(x+h) f_j(x) dx \end{cases}$$

Naturalmente se tiene:

$$(V, 4, 2) \quad \begin{cases} D_{ij}(h) = D_{ji}(-h) \\ C_{ij}(h) = \frac{1}{2} [D_{ij}(h) + D_{ji}(h)] \end{cases}$$

Para un vector h dado, examinemos la covarianza, en el sentido usual, de $f_i(x)$ y $f_j(x+h)$. Debemos, naturalmente, limitarnos a los puntos x tales que x y $x+h$ están ambos en el campo V , de manera que ni $f_i(x)$ ni $f_j(x+h)$ se anulen. En realidad, entonces, nos interesamos en la correlación de las dos variables $k(x+h)f_i(x)$ y $k(x)f_j(x+h)$, limitadas, respectivamente, a las intersecciones del campo V con los trasladados por $-h$ y por h . Conforme a los algoritmos (V, 3, 2) estas variables tienen, en los campos geométricos de medida $K(h)$ en los cuales las hemos restringido, los valores medios:

$$(V, 4, 3) \quad \begin{cases} m_i(-h) = \frac{1}{K(h)} \hat{f}_i * k \\ m_i(h) = \frac{1}{K(h)} f_j * \hat{k} \end{cases}$$

La covarianza, en el sentido usual, de $f_i(x)$ y $f_j(x+h)$ está definida por:

$$S_{ij}(h) = \frac{1}{K(h)} \int k(x+h) f_i(x) k(x) f_j(x+h) dx - m_i(-h) m_j(h)$$

Se deduce inmediatamente:

$$(V, 4, 4) \quad S_{ij}(h) = \frac{D_{ij}(h)}{K(h)} - m_i(-h) m_j(h)$$

Así, la condición para que no exista correlación diferida se escribe:

$$(V, 4, 5) \quad C_{ij}(h) = m_i(-h) m_j(h) K(h)$$

La cual no es para nada idéntica a la condición de independencia interna. Cuando se verifica (V, 4, 5), se tiene, necesariamente, según la segunda relación (V, 4, 2):

$$(V, 4, 6) \quad C_{ij}(h) = \left[\frac{m_i(-h)m_j(h) + m_i(h)m_j(-h)}{2} \right] K(h)$$

relación que no coincide, en general, con (V, 2, 7), a menos que el producto $m_i(-h)m_j(h)$ sea constante e igual a $m_i m_j$.

Tomemos, por ejemplo, $f_i = f$ y $f_j = k$, es decir una variable y su variable geométrica asociada. Entonces $m_j(h) = m_j(-h) = 1$ cualquiera que sea h , y según (V, 4, 3), el $D_{ij}(h)$ se reduce a:

$$(V, 4, 7) \quad D_{ij}(h) = \hat{f} * k = Q(-h)$$

La condición (V, 4, 5) para que no exista correlación diferida entre una variable y su campo se escribe entonces:

$$Q(h) = m(h)K(h) = Q(-h)$$

Es decir:

$$(V, 4, 8) \quad m(h) = m(-h)$$

En ausencia de correlación diferida entre una variable y su campo, la variable tiene un mismo valor medio en las intersecciones simétricas del campo V con sus trasladados por $+h$ y $-h$. Pero esto no implica, en general, que este valor medio sea independiente de h . (V, 4, 8) no implica (V, 3, 4), ni recíprocamente. Entre una variable y su campo, la independencia interna y la ausencia de correlación diferida son condiciones de naturaleza diferentes. Si por ejemplo, $f(x)$ es una función la cual tiene simetría esférica, es decir de la forma $f(r)$, (V, 4, 8) se verifica, pero no (V, 3, 4): $f(r)$ no tiene correlación diferida con su campo, pero no es independiente en el sentido de la independencia interna.

Al contrario, una función $f(x)$ la cual estaría definida por:

$$f(x) = (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) k(x) = (ax) k(x)$$

Es decir que variaría linealmente en su campo V , y sería nula al exterior, presentaría una fuerte correlación diferida con $k(x)$. Se tendría, en efecto:

$$Q(h) - Q(-h) = \int [f(x+h) - f(x)] k(x) k(x+h) dx = (ah) K(h)$$

O sea:

$$m(h) - m(-h) = (ah) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n$$

Pero, si además, el campo V admite un centro de simetría, es decir si $k = \hat{k}$, se tendría también para esta misma función f :

$$f = -\hat{f}$$

De donde se deduciría:

$$Q(h) + Q(-h) = (f + \hat{f}) * K = 0$$

Y la función f sería independiente de su campo, en el sentido de la independencia interna. De una manera general, la ausencia de correlación diferida entre una variable y su campo manifiesta la ausencia de una deriva orientada, mientras que la independencia interna traduce la ausencia de deriva con zonación, o, si se quiere, el hecho de estar a mayor o menor proximidad de las fronteras del campo no tiene influencia sobre el comportamiento de la regionalización.

CAPITULO SEXTO

APLICACION AL PROBLEMA GEOMETRICO

SUMARIO

Este capítulo proporciona un ejemplo de aplicación de la teoría al problema geométrico propuesto por la estimación de volúmenes y superficies.

El párrafo 1 muestra que el covariograma geométrico $K(h)$ es de la forma $V - S_\alpha|h|$ en la vecindad del origen, luego es lineal, S_α es la variación diametral en la dirección α del vector h . De aquí sale la posibilidad de calcular la varianza de estimación por el principio de correspondencia. En el caso de un volumen V convexo, $K(h)$ se deduce de una manera simple por el histograma de las transversales paralelas a h .

El párrafo 2 proporciona algunas indicaciones prácticas sobre el caso particular de dos dimensiones. Las fórmulas establecidas muestran que la varianza está en razón inversa de la potencia $3/2$ del número de puntos positivos.

1. - Propiedades de los covariogramas geométricos.

El problema geométrico, que se encuentra frecuentemente en la práctica, es el de la estimación de la superficie o del volumen del campo geométrico V asociado a una variable regionalizada. En general, se dispone, para hacer esta estimación, los mismos datos que para la estimación de la misma variable. Si se trata, por ejemplo, de una red de muestras puntuales de origen y y de malla a , es posible decir, para cada punto de la red $y+pa = (y_1 + p_1a_1, \dots, y_n + p_na_n)$ si pertenece, o no, al campo V . Dicho de otra forma, si se designa por $k(x)$ la variable geométrica asociada al campo V , se conocen los valores numéricos (0 o 1) de $k(y+pa)$ para todos los sistemas de enteros p . La cantidad a estimar, que es la medida del campo V , no es otra cosa que la « cantidad de metal » asociada a $k(x)$:

(VI, 1, 1)

$$V = \int k(x)dx$$

El problema geométrico se presenta entonces como un caso particular del problema general de la estimación de las variables regionalizadas, tal como fue tratado en el capítulo IV. En particular, si se conoce el covariograma geométrico $K(h) = k * \hat{k}$, sabemos calcular la varianza de estimación asociada a una red de malla a por la fórmula general (IV, 1, 12), o por los procedimientos basados en el principio de correspondencia.

Por otra parte, a menudo, los datos no serán simplemente puntuales, sino que podrán tener una dimensión (si se han medido longitudes, transversales, o espesores de V paralelos a una dirección) o dos dimensiones (si se han medido áreas de las secciones de V en diferentes niveles. En este caso, la variable que se busca estimar no es la variable $k(x)$ de n dimensiones, sino las variables k_{n-1} o k_{n-2} de $n-1$ o $n-2$ dimensiones, las cuales se deducen por subidas de orden 1 y 2, y cuyos covariogramas se deducen de $K(h)$ por las mismas operaciones de subida.

Pero el covariograma geométrico posee ciertas particularidades importantes, que permiten, a menudo abreviar el cálculo de la varianza de estimación. Hemos visto, en el capítulo I, que $K(h)$ es la medida (volumen si $n = 3$) de la intersección del campo V con su trasladado en la traslación h , luego, en particular, se tiene la relación:

$$(VI, 1, 2) \quad K(0) = V$$

Recordemos igualmente la fórmula (I, 1, 14):

$$(VI, 1, 3) \quad \int K(h)dh = V^2$$

Se conoce entonces (o al menos somos capaces de estimar) el valor en el origen y la integral de $K(h)$. Pero hay más. En efecto, tomemos, para h un vector δh de módulo infinitamente pequeño. La medida $K(\delta h)$ de la intersección de V y de su trasladado en la traslación infinitamente pequeña δh difiere de $K(h)$ por una cantidad infinitamente pequeña:

$$(VI, 1, 4) \quad K(0) - K(h) = S(\alpha) |\delta h|$$

Proporcional a $|\delta h|$, como aproximación de segundo orden, que representa la mitad del volumen recorrido por el pequeño vector δh cuando recorre todos los puntos de la superficie límite de V . El coeficiente de proporcionalidad $S(\alpha)$ se llama semi variación diametral en la dirección α (de cosenos directores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) del vector δh . Si se consideran las secciones $S(z)$ de las intersecciones de V por planos P perpendiculares a la dirección α , y coordinados por la abscisa z de su intersección con una recta paralela a α , la variación diametral $[2S(\alpha)]$ aparece como el límite superior de todas las sumas posibles de la forma:

$$|S(z_1) - S(z_2)| + |S(z_2) - S(z_3)| + \dots + |S(z_n) - S(z_{n-1})|$$

Este límite superior existe efectivamente para todos los volúmenes V que se pueden encontrar en la naturaleza. No es necesario que sean conexos (con un solo cuerpo), y sus superficies límites pueden presentar aristas afiladas, puntos angulosos, etc... En el caso particular en que el volumen V es conexo, la semi variación diametral $S(\alpha)$ representa el área del contorno aparente en la dirección α .

Entonces, en todos los casos, los dos primeros términos del desarrollo de $K(h)$ son conocidos:

$$(VI, 1, 5) \quad K(h) = V - S(\alpha)|h| + \dots$$

Y se ve que un covariograma geométrico *es obligatoriamente lineal en la vecindad del origen*, el coeficiente del término en $|h|$ es la variación diametral $S(\alpha)$ en la dirección α del vector h . Los métodos desarrollados en el capítulo IV permiten entonces obtener la parte principal de las varianzas de estimación para las mallas pequeñas, con la condición, siempre, de poder reducirse al caso de un covariograma isótropo. Por ejemplo, si la variación diametral $S(\alpha)$ es casi constante e igual a S para todas las direcciones α , se tendrá, para una malla $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ del espacio de tres dimensiones, la parte principal siguiente:

$$\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = S \left[\frac{1}{6} a_1 a_2 a_3^2 + 0.0609 a_1 a_2^3 + \frac{\pi}{90} a_1^4 \right] + \dots$$

Que es en cuarto orden respecto de la malla. En el caso en que a_3 es nulo, es decir si se han medido las transversales de V a lo largo de la dirección a_3 , solo subsisten los dos últimos términos, y el último subsiste solo si se han medido las secciones paralelas al plano $a_1 a_2$ examinaremos más en detalle, en el párrafo siguiente, el caso correspondiente a dos dimensiones solamente.

Relación entre histograma y covariograma para los volúmenes convexos.

En el caso particular en que el volumen V es convexo, existe una relación notable entre el covariograma geométrico $K(h)$ y el histograma de las transversales paralelas a la dirección α del vector h . Sea, en efecto, S_α el área del contorno aparente de V en la dirección α , en proyección sobre el plano P_α perpendicular a α . Cada paralela D a α corta V en dos puntos cuya distancia es una transversal (paralela a α). Designemos por $S_\alpha H_\alpha(u)$ el área ocupada en el plano P_α por el pie de las rectas D para las cuales esta transversal es superior a u . $H_\alpha(u)$ es la función de distribución de probabilidades de las transversales, y su derivada, si ella existe, es igual, salvo el signo, a la densidad de probabilidad p_α de las transversales:

$$(VI, 1, 6) \quad p_\alpha = -H'_\alpha(u)$$

pero $S_\alpha H_\alpha(u)$ representa también la proyección, sobre P_α , de la intersección de V con su trasladado por el vector h de módulo u y de dirección α .

Si damos a h un incremento δh en esta misma dirección, la variación de $K(h)$ es igual al volumen recorrido por el vector δh cuando describe esta proyección, y se tiene:

$$K(h) - K(h + \delta h) = S_\alpha H_\alpha(u) |\delta h|$$

De donde obtenemos, finalmente, la relación buscada entre el covariograma $K(u)$ y la función de distribución de probabilidades $H_\alpha(|h|)$ de las transversales paralelas a la dirección α del vector h :

$$(VI, 1, 7) \quad \frac{\partial K(h)}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial h_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial K}{\partial h_n} = -S_\alpha H_\alpha(|h|)$$

La derivada del covariograma en la dirección α es proporcional a la función de distribución de probabilidades de las transversales paralelas a α . Al tomar $|h| = 0$, se encuentra de nuevo, naturalmente, la relación (VI, 1, 5). Si existe una función de densidad de probabilidades, se tiene además, al derivar una segunda vez en la dirección α :

$$(VI, 1, 8) \quad \frac{\partial^2 K(h)}{\partial \alpha^2} = S_\alpha P_\alpha(|h|)$$

Inversamente, si se conoce la función de densidad de probabilidades $p_\alpha(u)$ de la transversales en la dirección α se deduce $K(h)$ para un vector h que tiene esta dirección, al integrar (VI, 1, 8), considerando las condiciones límites (VI, 1, 5). Tomemos, por ejemplo, la dirección $(\alpha = 1, 0, 0, \dots)$ paralela al eje de las x_1 . Se tendrá:

$$(VI, 1, 9) \quad K(h_1, 0, 0, \dots) = V - h_1 S_1 \int_0^{h_1} (h_1 - u) p_1(u) du$$

Como ejemplo, consideremos la esfera del espacio de μ dimensiones cuyo covariograma se escribió en (II, 5, 2). Se tiene:

$$K'_\mu(r) = -V_{\mu-1} (1-r^2)^{\frac{\mu-1}{2}} = -S(1-r^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$$

De donde, al derivar de nuevo, se obtiene la función de densidad de probabilidades $p(h)$ de las transversales de la hipersfera con μ dimensiones:

$$(VI, 1, 10) \quad p(h) = (\mu-1)(1-h^2)^{\frac{\mu-3}{2}} h$$

2. - Aplicación a la estimación de superficies.

Examinemos, en el espacio de dos dimensiones, el problema de la estimación del área S de una superficie caracterizada por un covariograma geométrico $K(h)$, a partir de una malla rectangular (a_1, a_2) . Nos podemos imaginar que los puntos de muestreo son los puntos de impacto de una red de sondajes verticales destinados para constatar la presencia o la ausencia de una cierta formación geológica. Si se tienen n sondajes positivos, se toma como estimador del área, la expresión:

$$(VI, 2, 1) \quad S^* = na_1 a_2$$

En lo que respecta al cálculo de la varianza asociada a esta estimación, se presentan dos problemas bien distintos: La elección de una fórmula, y la estimación de los parámetros que se deben hacer intervenir en esta fórmula.

Examinémoslos sucesivamente:

Elección de una fórmula. - Supongamos primero que la variación diametral D_α sea aproximadamente independiente de la dirección α , y sea $D = D_\alpha$ este valor casi constante. El término lineal del covariograma es isótropo:

$$(VI, 2, 2) \quad K(h) = S - D|h| + \dots$$

De manera que la parte principal de la varianza de estimación está dada por la primera fórmula (IV, 3, 12), es decir, con $a_1 \geq a_2$:

$$(VI, 2, 3) \quad \sigma^2(a_1, a_2) = D \left[\frac{1}{6} a_1 a_2^2 + 0.0609 a_1^3 \right]$$

Es cómodo poner:

$$n = \frac{S}{a_1 a_2}$$

En que n representa el número de sondajes positivos (o más exactamente el valor probable de este número cuando el origen de la red es implantado al azar en un rectángulo $a_1 a_2$); designemos por λ la razón de la malla:

$$\lambda = \frac{a_2}{a_1} \leq 1$$

Se expresa fácilmente a_1 y a_2 en función de n y λ :

$$a_2 = \sqrt{\frac{\lambda S}{n}} \quad a_1 = \sqrt{\frac{S}{\lambda n}}$$

Al llevar a (VI, 2, 3), y dividiendo por S^2 , obtenemos la varianza relativa, cantidad sin dimensión, en la forma:

$$(VI, 2, 4) \quad \frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{D}{\sqrt{S}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{6} + 0.0609 \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Se ve que esta varianza está en razón inversa a la potencia $3/2$ del número n de sondajes positivos.

Pero, en general, la variación diametral D_α no es una constante. Sin embargo, en muchas ocasiones, una transformación lineal permite reducirse al caso anterior. Existen, a menudo, dos direcciones principales α_1 y $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ perpendiculares, las cuales tienen variaciones diametrales D_1 y D_2 tales que una afinidad paralela a α_1 y de módulo D_2/D_1 proporciona una nueva figura de variación diametral aproximadamente constante e igual a D_2 . En esta afinidad, el número n no ha cambiado, ni tampoco la varianza

relativa. Al contrario, S queda reemplazado por SD_2/D_1 , y la red rectangular (a_1a_2) se transforma en una red construida sobre un paralelogramo generalmente cualquiera (salvo si las direcciones de la malla coinciden con α_1 y α_2). En esta nueva red, se distinguirán las líneas de mayor densidad, en las cuales el espaciamento de los muestreos será a'_2 , y se designará por a'_1 la distancia que separa dos de las líneas de mayor densidad. Se pondrá entonces:

$$\lambda' = \frac{a'_2}{a'_1}$$

$$(VI, 2, 5) \quad \frac{\sigma^2}{S^2} = \sqrt{\frac{D_1D_2}{S}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{\lambda'}}{6} + 0.0609 \frac{1}{\lambda'^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Pero, no se debe olvidar que estas fórmulas representan el primer término de un desarrollo limitado, luego solo se pueden aplicar a las mallas pequeñas. Por otra parte, estas fórmulas hacen abstracción de un Zitterbewegung, que existe, en general, porque el alcance es finito. Por otra parte, para las mallas grandes, es preferible utilizar directamente la fórmula general (IV, 1, 12) que comporta pocos términos. En el límite, cuando S puede estar totalmente contenido en un solo rectángulo a_1a_2 , de manera que solo existe a lo más una muestra positiva, la fórmula general toma la forma « aleatoria »:

$$\sigma^2(a_1, a_2) = a_1a_2K(0) - \int K(h)dh = a_1a_2S - S^2$$

Es decir, en una forma de varianza relativa, y con:

$$n = \frac{S}{a_1a_2} < 1$$

$$(VI, 2, 6) \quad \frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{1}{n} - 1$$

Una simple interpolación gráfica entre (VI, 2, 5) y (VI, 2, 6) permite, en general, obtener la varianza de estimación para mallas intermedias.

Se puede ver, en la figura 1, la curva que proporciona la varianza de estimación del círculo de diámetro unidad, cuyo covariograma está en (II, 5, 4),

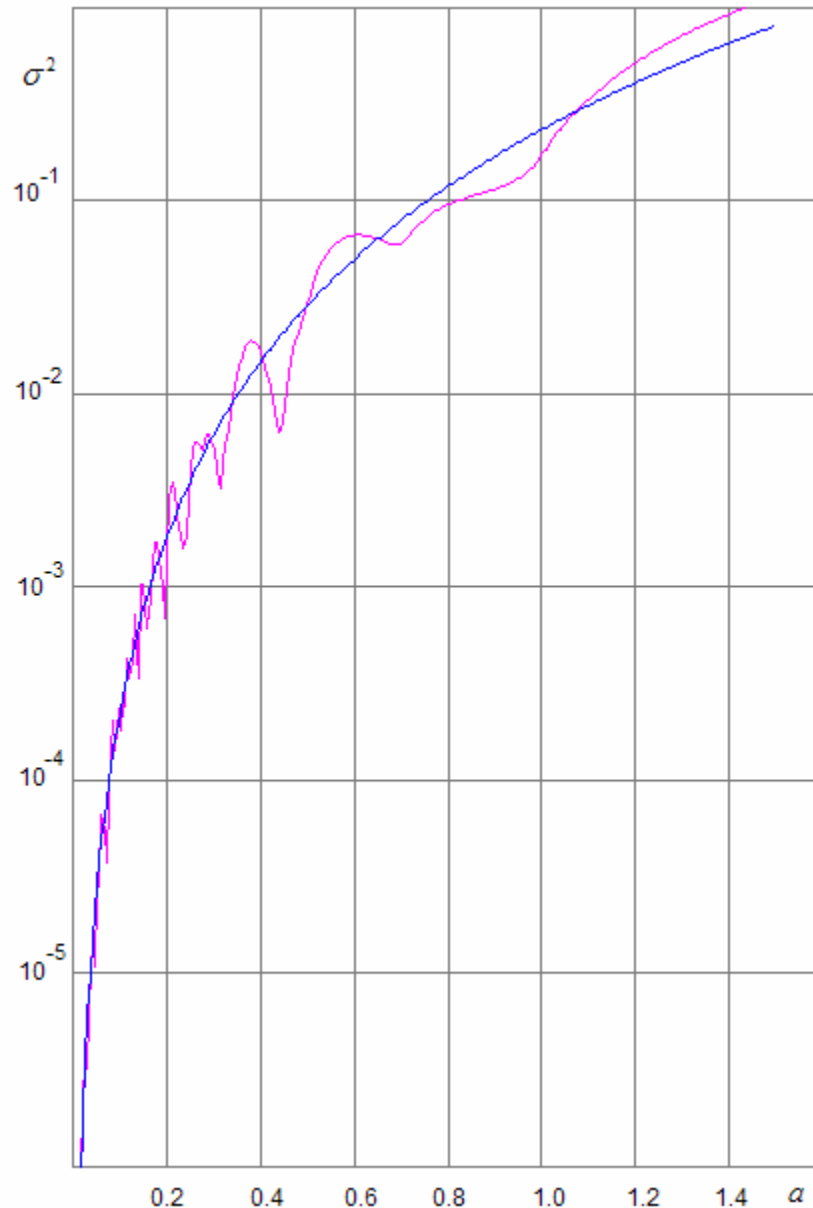


Fig. 1. - Zitterbewegung en la estimación de la superficie de un círculo de diámetro unidad con la ayuda de una red con malla cuadrada. En abscisa la malla a . En ordenada, la varianza de estimación correspondiente $\sigma^2(a)$. La curva azul representa el valor exacto, calculado a partir de la fórmula exacta (IV, 1, 12). La curva morada representa la fórmula $\sigma^2(a) = 0.2276 a^3 + 0.00477 a^5$ obtenida al despreciar el Zitterbewegung y reteniendo los dos primeros términos del desarrollo limitado dado por el principio de correspondencia. Nota del traductor: La figura 1 no es la original, la cual es en parte errónea.

para una malla cuadrada a . Cuando a es inferior a 1, la curva fluctuante representa el valor exacto de la varianza, calculada según la fórmula rigurosa (IV, 1, 12), mientras que la curva regular se construyó según la ecuación (VI, 2, 3), con $a_1 = a_2 = a$. Se ve que el Zitterbewegung tiene una amplitud considerable, sin embargo las fluctuaciones se hacen hacia una parte y hacia otra de la curva regular. Esta última que es la única que puede ser utilizada en la práctica, se ajuste bastante bien con la curva obtenida, por la fórmula de tipo

« aleatorio » para $a > 1$, de manera que los desarrollos limitados de tipo (VI, 2, 3) conservan un valor práctico aún para mallas grandes.

Elección de los parámetros. - Se tomará para n , en la práctica, el número de sondajes positivos realmente disponibles, y se estimará S sea por (VI, 2, 1), sea dibujando un contorno « plausible », el cual toma en cuenta los conocimientos directos que se pueden tener, por otra parte, sobre el fenómeno estudiado; este método proporcionará a menudo mejores resultados. Enseguida viene el problema de estimar D_1 y D_2 : Lo más simple es también, de operar sobre el mismo contorno plausible. Si se sabe de antemano que el contorno real presenta ciertamente irregularidades notables (dientes de sierra, protuberancias, etc...) a una escala inferior a la malla utilizada, e indetectables por esta malla, será necesario, en general, de agregar a $K(h)$ un efecto de pepita, es decir, prácticamente, de aumentar la varianza con una cantidad igual al área total s que se atribuye a estas protuberancias, multiplicada por la malla, es decir $s a_1 a_2$.

SEGUNDA PARTE

LA TEORIA INTRINSECA

CAPITULO SEPTIMO

RESUMEN SOBRE LAS FUNCIONES ALEATORIAS**SUMARIO**

Este capítulo es un simple resumen de la definición y de las propiedades de las funciones aleatorias ²², y, más particularmente, de las funciones aleatorias estacionarias de orden 2, utilizadas en la segunda parte. Puede ser saltado sin inconvenientes por los lectores ya familiarizados con esta teoría.

El párrafo 1 define una función aleatoria $f(x)$ por el conjunto de las leyes de distribución de probabilidades $F(f_1 \dots f_k, x_1 \dots x_k)$ de los valores tomados por $f(x)$ en un número cualquiera de puntos arbitrarios $(x_1 \dots x_k)$. Cuando estas leyes son invariantes para toda traslación de los puntos $x_1 \dots x_k$, $f(x)$ es estacionaria. El momento

$$M \alpha_1 \dots \alpha_k (x_1 \dots x_k),$$

si existe, es igual al valor probable de $[f(x_1)]^{\alpha_1} \dots [f(x_n)]^{\alpha_n}$.

El párrafo 2 define las funciones aleatorias estacionarias de orden 2, caracterizadas por su función de covarianza $K(h)$. $K(h)$ es de tipo positivo, y su comportamiento en $h = 0$ caracteriza la regularidad de $f(x)$.

*El párrafo 3 introduce las nociones de convergencia y de derivaciones en media cuadrática. Una función aleatoria es continua en media cuadrática si $K(h)$ es continuo en $h = 0$, es derivable una vez en media cuadrática si $K(h)$ es dos veces derivable en $h = 0$. Si $p(h)$ es una función de ponderación, con covariograma transitivo $P = p * \hat{p}$, la integral estocástica:*

$$I = \int f(x)p(x)dx$$

Existe si y solo si, la integral que representa su varianza $D^2(I) = \int K(h)p(h)dh$ es también convergente.

²² Seguiremos la exposición clásica de GNEDENKO, *Théorie des Probabilités*. 3ª edición, Moscú, 1961; traducción francesa a aparecer en Dunod -(Nota del traductor: la versión en francés nunca fue publicada; la referencia en inglés es GNEDENKO, *Probability Theory*, Editorial Chelsea 1960. Existe una versión en español, difícil de encontrar, de la editorial Rubiños, Madrid 1988)-. El lector se puede referir también a FORTET BLANC-LAPIERRE *Théorie des fonctions aléatoires*. París, 1953; M. S. Bartlett *An introduction to Stochastic Processes*, Cambridge 1955, etc.

1. - Definición de las funciones aleatorias.

Una función aleatoria $f(x)$ debe ser mirada como una variable aleatoria con una infinidad de componentes. En cálculo de probabilidades, se define una variable aleatoria $Z = (Z_1 \dots Z_k)$ con k componentes, con la ayuda de una función de distribución de probabilidades:

$$F(z_1, z_2 \dots z_k) = Pr \{ Z_1 < z_1, Z_2 < z_2 \dots Z_k < z_k \}$$

Que proporciona la probabilidad para que las k variables aleatorias ordinarias $Z_1 \dots Z_k$ sean simultáneamente inferiores a los números dados $z_1, z_2 \dots z_k$. Si k se hace infinito, se puede considerar que la componente Z_i representa, en forma de variable aleatoria, el valor $f(x_i)$ tomado por una función aleatoria $f(x)$ en un punto determinado x_i del espacio de n dimensiones. Así $f(x)$ misma aparece como una variable aleatoria con una infinidad de componentes, estas componentes aleatorias no son otras que los valores tomados por $f(x)$ en cada uno de los puntos x del espacio de n dimensiones. En el caso particular del espacio de una sola dimensión, interpretado como un tiempo t , la función aleatoria $f(t)$, que representa entonces la evolución del fenómeno en el tiempo, se llama también proceso estocástico, terminología que no utilizaremos aquí.

Naturalmente, este paso a un número infinito (y además no numerable) de componentes implica problemas difíciles. Nosotros nos contentaremos, en esta obra, con la definición siguiente, no rigurosa, pero suficiente, en general, para las aplicaciones: Una función aleatoria $f(x)$ será considerada como definida si, para todo conjunto $x_1, x_2 \dots x_k$ de puntos del espacio de n dimensiones, en número k cualquiera pero finito, se conoce la función de distribución de las variables aleatorias $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_k)$ las cuales representan los valores tomados por $f(x)$ en esos puntos, es decir la función $F(f_1, f_2, \dots, f_k; x_1, x_2, \dots, x_k)$ definida por:

$$(VII, 1, 1) \quad F(f_1, f_2, \dots, f_k; x_1, x_2, \dots, x_k) = Pr \{ f(x_1) < f_1, f(x_2) < f_2 \dots f(x_k) < f_k \}$$

Estas funciones de distribución de probabilidades F dependen, naturalmente, de los puntos x_1, x_2, \dots, x_k . Sin embargo ellas deben verificar las dos condiciones siguientes:

Condición de simetría. - El orden en el cual se toman los puntos $x_1 \dots x_k$ y los valores correspondientes $f_1 \dots f_k$ no tiene ninguna importancia. Para toda permutación i_1, i_2, \dots, i_k de los índices $1, 2, \dots, k$, se debe entonces tener:

$$F(f_{i_1}, f_{i_2} \dots f_{i_k}; x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_k}) = F(f_1, f_2 \dots f_k; x_1, x_2 \dots x_k)$$

Condición de coherencia. - Si, en (VII, 1, 1), se toma $f_k = \infty$, la desigualdad $f(x_k) < f_k$ queda superflua, de manera que se debe obtener la función de distribución de probabilidades de las $k - 1$ variables aleatorias $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{k-1})$. Las leyes F deben entonces verificar la condición siguiente:

$$F(f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, \infty; x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = F(f_1, f_2, \dots, f_{k-1}; x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$$

Realización de una función aleatoria.- Se llama realización particular de una función aleatoria $f(x)$ al conjunto de los valores numéricos $f(x_i)$ obtenidos, para todos los puntos x_i del espacio, por un sorteo particular al azar efectuado según las leyes F . Existe la misma relación entre una función aleatoria y una de sus realizaciones que entre una variable aleatoria Z y un valor numérico particular z obtenido por sorteo al azar según la ley de distribución de probabilidades de Z . Una realización de $f(x)$ puede ser considerada como una variable regionalizada. Inversamente, una regionalización dada puede ser interpretada como una realización particular de una cierta función aleatoria $f(x)$, sin embargo una tal interpretación tendrá significación real solamente si la inferencia estadística es posible, es decir si es posible deducir, de los valores numéricos $f(x_i)$ de la variable regionalizada, una estimación de las leyes F de la función aleatoria $f(x)$. Como una ley F con k componentes $f_1 \dots f_k$ depende, en general, de más de k parámetros, la inferencia estadística no será muy posible en la práctica, salvo el caso llamado « estacionario ».

Función aleatoria estacionaria. - Un caso particular muy importante es aquel en el cual todas las leyes F son invariantes para toda traslación de conjunto efectuada sobre los puntos $x_1 \dots x_k$. Cuando, para todo conjunto de puntos $x_1 \dots x_k$ y todo vector h , se tiene:

$$(VII, 1, 2) \quad F(f_1 \dots f_k; x_1 + h, \dots, x_k + h) = F(f_1 \dots f_k; x_1, \dots, x_k)$$

Se dice que la función aleatoria $f(x)$ es estacionaria. Cuando es así, las leyes F solo dependen de la geometría relativa de los puntos $x_1 \dots x_n$ y no de la posición de su centro de gravedad. El carácter estacionario implica la homogeneidad de $f(x)$ en el espacio, y significa, si se quiere, que el fenómeno representado por $f(x)$ se repite indefinidamente por sí mismo en todo el espacio de n dimensiones.

Los momentos de las leyes F . - El momento de orden $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ de la ley de distribución F definida en (VII, 1, 1) es igual al valor probable del producto $[f(x_1)]^{\alpha_1} [f(x_2)]^{\alpha_2} \dots [f(x_n)]^{\alpha_n}$ es una función de los puntos $x_1 \dots x_k$, que notaremos $M_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_1, \dots, x_k)$:

$$(VII, 1, 3) \quad M_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_1, \dots, x_k) = E\{[f(x_1)]^{\alpha_1} \dots [f(x_k)]^{\alpha_k}\} \\ = \int f_1^{\alpha_1} \dots f_k^{\alpha_k} dF(f_1 \dots f_k; x_1, \dots, x_k)$$

El momento de orden l es el valor probable de $f(x)$ en el punto x . A menudo escribiremos $m(x)$:

$$(VII, 1, 4) \quad m(x) = M_1(x) = E[f(x)] = \int f dF(f, x)$$

En lugar del momento rectangular $M_{11}(x_1, x_2)$, se introduce a menudo la función $K(x_1, x_2)$, definida por:

$$(VII, 1, 5) \quad K(x_1, x_2) = M_{11}(x_1, x_2) - m(x_1)m(x_2) \\ = E\{[f(x_1) - m(x_1)][f(x_2) - m(x_2)]\}$$

La función $K(x_1, x_2)$ es la *covarianza* de las variables aleatorias $f(x_1)$ y $f(x_2)$. La covarianza depende, en general, a la vez de x_1 y de x_2 . Cuando los dos puntos coinciden, es decir $x_1 = x_2 = x$, la función $K(x, x)$ del punto x representa la *varianza* de la variable aleatoria $f(x)$:

$$(VII, 1, 6) \quad K(x, x) = D^2[f(x)]$$

Naturalmente, estos diversos momentos no existen siempre. En la práctica se pueden encontrar funciones aleatorias para las cuales las leyes F no admiten momentos de orden 2, ni aún momentos de orden 1. Cuando la varianza $K(x, x)$ existe en todo punto x , la covarianza $K(x_1, x_2)$ existe también para todos los puntos x_1 y x_2 : Se dice que la función aleatoria $f(x)$ tiene varianza finita.

2. - Funciones aleatorias estacionarias de orden 2.

Si la función aleatoria $f(x)$ es estacionaria, es decir si todas las leyes F son invariantes por las traslaciones de los puntos $x_1 \dots x_k$, los diferentes momentos, si existen, poseen evidentemente la misma propiedad. En particular, se tiene, para todo vector h :

$$\begin{cases} m(x+h) = m(x) \\ K(x_1+h, x_2+h) = K(x_1, x_2) \end{cases}$$

Se deduce inmediatamente que el valor probable $m(x)$ de $f(x)$ es independiente del punto x , luego es una constante m . Análogamente, la covarianza $K(x_1, x_2)$ solo depende del vector $x_2 - x_1$ y puede ponerse en la forma de una función $K(x_2 - x_1)$ de este único argumento. En resumen, se tiene:

$$(VII, 2, 1) \quad \begin{cases} m(x) = m \\ K(x_1, x_2) = K(x_2 - x_1) \end{cases}$$

En todo este capítulo, supondremos $m = 0$, debido a que siempre es posible reducirse a este caso, al reemplazar $f(x)$ por $f(x) - m$.

Inversamente, supongamos que las leyes F de una función aleatoria $f(x)$ admitan momentos de orden 1 y 2, y que se verifican las relaciones (VII, 2, 1). Se dice, en este caso, que $f(x)$ es *estacionaria de orden 2*, o estacionaria en sentido amplio. Es necesario ver bien que (VII, 2, 1) no implica, en general, (VII, 1, 2), de manera que, en general, una función aleatoria estacionaria de orden 2 no es estacionaria en sentido estricto. En un gran número de aplicaciones prácticas, en los que efectivamente solo intervienen los momentos de orden 1 y 2, el carácter estacionario es la única hipótesis requerida. Esta hipótesis será adoptada en adelante.

La covarianza $K(h)$. - La función de covarianza:

$$(VII, 2, 2) \quad K(h) = E[f(x+h)f(x)]$$

de una función aleatoria estacionaria de orden 2, de media nula ($m = 0$), no puede, absolutamente, ser una función cualquiera. En efecto, debe ser tal que todas las combinaciones lineales de la forma:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i)$$

Tengan una varianza positiva o nula, cualquiera que sean los puntos x_i y los coeficientes λ_i . Esta varianza está dada, según (VII, 2, 2), por la expresión siguiente:

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[f(x_i) f(x_j)] = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j K(x_i - x_j)$$

Si esta expresión, cualquiera que sean los λ_i y los x_i , es positiva o nula, se dice, por definición (Anexo A, párrafo 9, 1) que *la función $K(h)$ es de tipo positivo*. Por otra parte, inversamente, si $K(h)$ es una función de tipo positivo, se puede construir una función aleatoria $f(x)$ estacionaria, admitiendo leyes F gaussianas y $K(h)$ como función de covarianza. Se deducen las propiedades de la covarianza $K(h)$. Estas propiedades no difieren de las de los covariogramas transitivos $g(h)$ del capítulo I.

Se supone, en general, que $K(h)$ es una función continua. Para esto basta, según las propiedades de las funciones de tipo positivo, con que sea continua en $h = 0$ para que sea continua en todas partes. El valor $K(0)$ de $K(h)$ en $h = 0$ no es otro que la varianza de $f(x)$. Se tiene, necesariamente:

$$(VII, 2, 3) \quad \begin{cases} K(h) = K(-h) \\ K(0) > 0 \\ K(h) \leq K(0) \end{cases}$$

Finalmente, el teorema de Bochner (A, 9, 1) nos indica que, para que una función continua $K(h)$ sea de tipo positivo, es necesario y suficiente que ella sea la transformada de Fourier de una medida positiva sumable, cuya suma es entonces igual a la varianza $K(0)$.

En algunos casos, estamos conducidos a utilizar funciones $K(h)$ continuas en todas partes, salvo en $h = 0$. Se dice, en este caso que se tiene *un efecto de pepita* en el origen, caracterizado por la constante de pepita:

$$C = K(0) - \lim_{|h| \rightarrow \infty} K(h)$$

En realidad, y es lo más corriente, no se tiene una verdadera discontinuidad en el origen, sino una zona de transición muy pequeña respecto de $h = 0$, en la cual el decrecimiento de $K(h)$ es continuo pero extremadamente rápido.

Finalmente, existe una relación estrecha entre el comportamiento de $K(h)$ en la vecindad de $h = 0$ y el grado de regularidad de la función aleatoria o de sus diferentes realizaciones posibles. Esta relación será precisada en el capítulo siguiente.

3. Integración y derivación estocástica.

Entre todos los tipos de convergencia estocásticas, utilizaremos exclusivamente la convergencia en media cuadrática, definida como sigue:

Se dice que una variable aleatoria Z_n converge en media cuadrática hacia una variable aleatoria Z si la esperanza matemática de $(Z_n - Z)^2$ tiende a 0 cuando n tiende hacia el infinito:

$$(VII, 3, 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[(Z_n - Z)^2] = 0$$

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que una sucesión Z_n con varianzas finitas converja en media cuadrática es que la esperanza matemática de $(Z_n - Z_m)^2$ tienda a cero cuando el más pequeño de los dos enteros n y m tiende a infinito:

$$(VI, 3, 2) \quad \lim E[(Z_n - Z_m)^2] = 0 \quad \text{para } \text{Min}(m, n) \rightarrow \infty$$

Cuando esta condición de convergencia en media cuadrática se realiza, la esperanza matemática del límite Z es igual al límite de las esperanzas matemáticas de los Z_n :

$$(VII, 3, 3) \quad E[\lim Z_n] = \lim E(Z_n)$$

Esto significa que - con la reserva de que se verifiquen (VII, 3, 1) o (VII, 3, 2) - estamos autorizados para invertir el símbolo de la esperanza matemática E y el paso al límite en media cuadrática.

Continuidad de una función aleatoria. - Se dice que una función aleatoria $f(x)$ es continua en media cuadrática en un punto x_0 si se tiene:

$$(VII, 3, 4) \quad \lim_{|x-x_0| \rightarrow 0} E\{[f(x) - f(x_0)]^2\} = 0$$

En el caso estacionario de orden 2, basta con que $f(x)$ sea continua media cuadrática en un punto x_0 para que ella sea continua en todo punto x , y la condición (VII, 3, 4) es, en este caso, equivalente a la siguiente relación:

$$(VII, 3, 5) \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} [K(h)] = K(0)$$

Dicho de otra manera, *para que una función aleatoria estacionaria de orden 2 sea continua en media cuadrática, es necesario y suficiente que su covarianza $K(h)$ sea continua en $h = 0$.* Por otra parte se sabe que en este caso $K(h)$ es obligatoriamente continua en todo punto h .

Derivación de una función aleatoria. - Designemos (contrariamente a las notaciones del resto de este capítulo) por $x_1, x_2 \dots x_n$ las coordenadas de un punto x . Se dirá que la

función aleatoria $f(x) = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ es derivable en media cuadrática, respecto de x_1 en el punto $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ y tiene en este punto como derivada parcial en x_1 la función aleatoria $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ si se tiene:

$$(VII, 3, 6) \quad \lim_{|h_1| \rightarrow 0} E \left\{ \left[\frac{f(x_1 + h_1, x_2 \dots x_n) - f(x_1, x_2 \dots x_n)}{h_1} - \frac{\partial f(x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial x_1} \right]^2 \right\} = 0$$

Se definirán, análogamente, las derivadas en media cuadrática con respecto a $x_2 \dots x_n$, y la derivada en una dirección cualquiera α de cosenos directores $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$:

$$VII, 3, 7) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

En el caso de una función aleatoria estacionaria de orden 2, de media nula y de covarianza $K(h)$ basta con que se verifique la condición (VII, 2, 6) en un punto para que lo sea en todos los puntos, es decir para que $f(x)$ sea derivable en media cuadrática en todas partes. Se demuestra fácilmente que la condición necesaria y suficiente para que así sea es que la función $K(h) = K(h_1, h_2 \dots h_n)$ sea dos veces derivable con respecto a h_1 en el punto $h = 0$. $K(h)$ es entonces dos veces derivable con respecto a h_1 en todo punto h , y se tiene además:

$$(VII, 3, 8) \quad E \left[\frac{\partial f(x+h)}{\partial x_1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right] = - \frac{\partial^2}{\partial h_1^2} K(h)$$

Así, las funciones aleatorias *derivables una vez en media estocástica están caracterizadas por covarianzas dos veces derivables*, es decir, por funciones $K(h)$ las cuales tienen, en $h = 0$ un comportamiento parabólico y recíprocamente. Además, salvo el signo, la segunda derivada de la covarianza $K(h)$ es la covarianza de la primera derivada correspondiente de la función aleatoria.

Integrales estocásticas. - De la misma manera, es posible definir la integración en media cuadrática. Sea una función aleatoria $f(x)$, un volumen V , dividido en m volúmenes Δv_i adyacentes, y una función φ cualquiera, consideraremos variables aleatorias I_m de la forma:

$$I_m = \sum_{i=1}^m f(x_i) \varphi(x_i) \Delta v_i$$

El punto x_i es un punto cualquiera al interior de Δv_i . Si se hace tender hacia el infinito al número m de volúmenes Δv_i , de manera que la medida del más grande entre ellos tienda a cero, las variables aleatorias I_m convergen, en media cuadrática, hacia un límite I , es decir si se tiene:

$$\lim_{\text{Max}|\Delta v_i| \rightarrow 0} E[(I_m - I)^2] \rightarrow 0$$

Se escribirá:

$$(VII, 3, 9) \quad I = \int_V f(x)\varphi(x)dx$$

Y se dirá que la variable aleatoria I es la *integral estocástica de $f(x)\varphi(x)$* en el volumen V .

Se demuestra que *la condición necesaria y suficiente para que la integral estocástica I exista, en el caso en que $f(x)$ es estacionaria de segundo orden, es que la integral ordinaria:*

$$(VII, 3, 10) \quad D^2(I) = \int_V \varphi(x)dx \int_V K(y-x)\varphi(y)dy$$

exista igualmente, y, en este último caso, esta integral es igual a la varianza $D^2(I)$ de la variable aleatoria I .

Si se introduce la función de ponderación, o de muestreo $p(x)$, definida por:

$$\begin{cases} p(x) = \varphi(x) & \text{si } x \text{ pertenece a } V \\ p(x) = 0 & \text{si } x \text{ no pertenece a } V \end{cases}$$

Las expresiones (VII, 3, 9) y (VII, 3, 10) quedan:

$$(VII, 3, 11) \quad \begin{cases} I = \int f(x)p(x)dx \\ D^2(I) = \iint K(y-x)p(x)p(y)dxdy \end{cases}$$

Si finalmente se designa por $P(h)$ al covariograma transitivo asociado a $p(x)$:

$$P(h) = p * \hat{p} = \int p(x)p(x+h)dx$$

La varianza $D^2(I)$ puede escribirse también, según el algoritmo de Cauchy (1, 2, 9):

$$(VII, 3, 12) \quad D^2(I) = \int K(h)P(h)dh$$

CAPITULO OCTAVO

LOS ESQUEMAS ESTOCASTICOS INTRINSECOS

SUMARIO

Este capítulo fundamental expone la teoría llamada intrínseca, que permite, en un gran número de aplicaciones, trabajar sobre funciones aleatorias cuya varianza sería infinita. El párrafo 5, que está relacionado a un problema particular, puede ser omitido en primera lectura.

El párrafo 1 define los esquemas intrínsecos como funciones aleatorias con incrementos estacionarios, e introduce los momentos. El estudio de los momentos de orden 1 pone en evidencia el fenómeno de deriva lineal. El estudio de los momentos de orden 2 conduce a la definición de la función intrínseca $\gamma(h)$, la cual permite el cálculo de todos los momentos de orden 2 y juega un papel fundamental en toda la teoría.

El párrafo 2 examina la relación entre función intrínseca $\gamma(h)$ y covarianza $K(h)$, cuando esta existe (esquemas de tipo transitivo). Pero $\gamma(h)$ sigue definida en un gran número de casos en los cuales $K(h)$ no lo es. Las propiedades de $\gamma(h)$ se enuncian a continuación. $\gamma(h)$ debe ser de tipo positivo condicional. Finalmente, se examina la significación física de $\gamma(h)$, y diferentes modelos de anisotropía.

*El párrafo 3 estudia las variables no puntuales y las regularizadas $f * \hat{p}$ por una función de ponderación p . La noción de base es la de varianza de extensión, o varianza $D^2(Y - Z)$ de la diferencia de dos variables no puntuales, regularizadas de f por funciones de muestreo p_1 y p_2 .*

El párrafo 4 define la noción de varianza de un volumen v en un volumen V , inmediata si v es muy pequeño: $\sigma^2(v, V)$ es entonces el valor medio, para todas las posiciones de v en V , de la varianza de extensión de v en V . Se generaliza al caso de volúmenes cualesquiera con la ayuda de la relación de aditividad (VIII, 4, 5). Misma definición para la covarianza de v y v' en V .

El párrafo 5 examina la relación entre esquema intrínseco y representación transitiva, en el caso en que una realización de un esquema intrínseco se detiene arbitrariamente en las fronteras de un campo V . La relación /VIII, 5, 10) da, en valor probable, el $g(h)$ en función del $\gamma(h)$ y del covariograma geométrico $K(h)$ de V .

1. - Definición y momentos.

Llamaremos esquema con ley de dispersión intrínseca, o, más brevemente, esquema intrínseco, a una función aleatoria con incrementos estacionarios. Un gran número de regionalizaciones pueden ser interpretadas, en primera aproximación, como realizaciones de esquemas de este tipo.

Precisemos esta definición. Sean $f_i = f(x_i)$, $f_j = f(x_j)$... los valores tomados por una variable regionalizada con soporte puntual, considerada como la realización de una función aleatoria $f(x)$. De las leyes a priori de los $f_i f_j$..., no diremos nada. La función aleatoria puede no tener ni varianza finita, ni tampoco momentos de orden uno. Nos interesamos solamente en los incrementos:

$$(VIII, 1, 1) \quad \varepsilon_{ij} = f_j - f_i = f(x_j) - f(x_i)$$

Definidos solamente como la diferencia de los valores tomados por la variable regionalizada en dos puntos x_i y x_j , y considerados como variables aleatorias. Como función aleatoria, $f(x)$ está definida - salvo una constante arbitraria - por el conocimiento de todas las leyes de distribución:

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl} \dots ; x_i, x_j, x_k, x_l)$$

De un número cualquiera de incrementos $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}$ entre puntos cualesquiera x_i, x_j, x_k, x_l ... Estas leyes dependen, en general, de las coordenadas de los puntos x_i, x_j ... Se dirá que la función aleatoria $f(x)$ es a incrementos estacionarios, y que define un esquema estocástico con ley de dispersión intrínseca, si verifica las dos condiciones siguientes:

1) Como $f(x)$ está definida salvo una constante, las leyes de distribución F no deben ser modificadas si se conoce el valor numérico tomado por uno cualquiera de los $f_i = f(x_i)$. Naturalmente, si se conocen dos, o varios, de estos valores, por ejemplo f_i y f_j , el incremento correspondiente $\varepsilon_{ij} = f_i - f_j$ es igualmente conocido, y las leyes F deben ser reemplazadas por las leyes condicionales tomadas cuando los ε_{ij} son fijos.

2) Los incrementos poseen el carácter estacionario, dicho de otra manera, las leyes $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \dots, x_i, x_j, x_k, x_l)$ son invariantes para toda traslación de conjunto efectuada sobre los puntos x_i, x_j ... Para todo vector h , se tiene entonces:

$$(VIII, 1, 2) \quad \begin{aligned} F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \dots, x_i + h, x_j + h, x_k + h, x_l + h) \\ = F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \dots, x_i, x_j, x_k, x_l) \end{aligned}$$

Luego, las leyes F solo dependen de la geometría relativa de los puntos x_i, x_j, \dots y no de la posición en el espacio de su centro de gravedad. Se ve que una regionalización considerada como la realización de un esquema intrínseco, conserva, respecto de sus variaciones, un aspecto homogéneo en todo el espacio. Su variabilidad en el espacio posee bien un carácter intrínseco, es decir independiente del lugar.

Los *momentos* de los incrementos se definen, sin dificultad, a partir de las leyes F , como los valores probables, si es que existen, de expresiones de la forma: $[\varepsilon_{ij}]^{\alpha_1} [\varepsilon_{kl}]^{\alpha_2} \dots$. En un esquema intrínseco estos momentos son estacionarios, es decir, invariantes para toda traslación de conjunto efectuada sobre los puntos x_i, x_j ... Excluyendo problemas muy especiales los cuales serán abordados en el capítulo XIV (fluctuaciones y estimación de

momentos de orden 2), solo tendremos necesidad, en realidad, de utilizar momentos de los dos primeros órdenes. Supondremos siempre que estos momentos de orden 1 y 2 existen y son estacionarios. Las leyes F mismas no intervendrán prácticamente nunca, de manera que la casi totalidad de los resultados que estableceremos subsisten si los incrementos ε_{ij} son solamente estacionarios en sentido amplio (estacionarios de orden 2).

Momentos de orden 1 y deriva lineal. - Designemos por D_{ij} al valor probable a priori del incremento ε_{ij} . Según la definición misma de los esquemas intrínsecos, este valor probable solo depende del vector $h_{ij} = x_j - x_i$. Escribiremos:

$$E(\varepsilon_{ij}) = D_{ij} = D(h_{ij})$$

Pero, de la definición (VIII, 1, 1) de los incrementos, resultan relaciones de cerradura, sobre las cuales volveremos, y que se pueden escribir en la forma:

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}$$

Si tomamos valor probable en los dos miembros de esta relación, vemos que la función $D(h)$ debe verificar:

$$D(h_{ij}) + D(h_{jk}) = D(h_{ik})$$

Para todos los argumentos vectoriales h_{ij} , h_{jk} y h_{ik} tales que:

$$h_{ij} + h_{jk} = h_{ik}$$

Se deduce que $D(h)$ es una forma lineal respecto del vector $h = (h_1, \dots, h_n)$, dicho de otra forma que existe un vector D , de componentes (D_1, D_2, \dots, D_n) tal que $D(h)$ sea igual al producto escalar de los vectores D y h :

$$(VIII, 1, 3) \quad D(h) = Dh = D_1h_1 + D_2h_2 + \dots + D_nh_n$$

Así, en esquema intrínseco, los momentos de primer orden traducen la existencia de una *deriva lineal* de la variable regionalizada $f(x)$, deriva caracterizada por un gradiente constante D . Es fácil eliminar esta deriva al reemplazar $f(x)$ por $f(x) - xD = f(x) - x_1D_1 - x_2D_2 - \dots - x_nD_n$. El incremento ε_{ij} es entonces, en efecto, reemplazado por $\varepsilon_{ij} - Dh_{ij}$, expresión cuyo valor probable es nulo. Es por esto que, en adelante, supondremos que los momentos de orden 1 son idénticamente nulos:

$$(VIII, 1, 4) \quad E(\varepsilon_{ij}) = 0$$

Los momentos de orden 2 y la ley de dispersión intrínseca $\gamma(h)$. - El momento de orden 2, $E(\varepsilon_{ij}^2)$, el cual, según (VIII, 1, 4), es igual a la varianza $D^2(\varepsilon_{ij})$ del incremento ε_{ij} , es una función del único argumento vectorial:

$$h_{ij} = x_j - x_i$$

Como resulta de la definición de los esquemas intrínsecos. Pondremos, por definición:

$$(VIII, 1, 5) \quad \gamma(h_{ij}) = \frac{1}{2} D^2(\varepsilon_{ij})$$

La función $\gamma(h)$, es igual a la mitad de la varianza del incremento $f(x+h) - f(x)$, es decir:

$$(VIII, 1, 6) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2} D^2[f(x+h) - f(x)]$$

Y lleva el nombre de *función de dispersión intrínseca*, o, más brevemente, de función intrínseca. Se llama también *semi-variograma*, o bien *variograma*²³. El variograma es accesible experimentalmente para valores discontinuos de h . Esta función $\gamma(h)$ juega, en la teoría intrínseca, el mismo papel que la covarianza $K(h)$ en la teoría de las funciones aleatorias estacionarias.

El conocimiento de la función $\gamma(h)$ permite por ella sola, de definir todos los momentos de orden 2. Para las varianzas, esto resulta directamente de (VIII, 1, 5).

Busquemos la covarianza de los dos incrementos ε_{ij} y ε_{kl} . Pondremos, para abreviar las escrituras:

$$(VIII, 1, 7) \quad \begin{cases} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} D^2(\varepsilon_{ij}) \\ E(ij, kl) = E(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}) \end{cases}$$

Consideremos primero dos incrementos ε_{ij} y ε_{jk} los cuales tienen un punto de apoyo en común x_j . Para los tres índices i, j y k (VIII, 1, 1) implica la relación de cerradura:

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}$$

Tomemos la varianza de los dos miembros. Al considerar (VIII, 1, 7), queda:

$$(VIII, 1, 8) \quad E(ji, jk) = -E(ij, jk) = \gamma_{ij} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik}$$

Sean ahora, dos incrementos cualesquiera $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$. La relación de cerradura, para los cuatro índices $ijkl$, se escribe:

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il}$$

Tomemos la varianza de los dos miembros. Queda:

$$\gamma_{ij} + \gamma_{jk} + \gamma_{kl} + E(ij, jk) + E(jk, kl) + E(ij, kl) = \gamma_{il}$$

²³ Nota del traductor: La práctica ha conducido a que se considere como sinónimos variograma y semi-variograma; se prefiere el uso del primero.

Al considerar la relación (VIII, 1, 8) ya obtenida, se encuentra, sin dificultad:

$$(VIII, 1, 9) \quad E(ij, kl) = \gamma_{il} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik} - \gamma_{jl}$$

Esta relación fundamental muestra que todos los momentos de orden dos se deducen de la única función intrínseca $\gamma(h)$, como la habíamos anunciado.

2. - Significación y propiedades de la función intrínseca $\gamma(h)$.

En este párrafo nos vamos a interrogar sobre la relación que existe entre la función intrínseca $\gamma(h)$ y la función de covarianza $K(h)$ de una función aleatoria estacionaria, examinar las propiedades de $\gamma(h)$ y finalmente precisar su significación física.

Relaciones entre $\gamma(h)$ y $K(h)$. - Supongamos primero que $f(x)$ sea una función aleatoria estacionaria, con varianza finita $K(0)$ y con covarianza $K(h)$. De la definición (VIII, 1, 6) de la función intrínseca $\gamma(h)$ se deduce inmediatamente, en este caso:

$$(VIII, 2, 1) \quad \gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Para las funciones aleatorias usuales, con varianza finita, la covarianza $K(h)$ tiende hacia cero cuando $|h|$ tiende al infinito. Las correlaciones se desvanecen en las grandes distancias. En este caso, $\gamma(h)$ tiende hacia la varianza a priori $K(0)$, y por consiguiente permanece acotado. Se tiene:

$$(VIII, 2, 2) \quad \gamma(\infty) = K(0)$$

Inversamente, si $\gamma(h)$ permanece acotado y tiende hacia un límite $\gamma(\infty)$ cuando $|h|$ tiende a infinito, se puede reconstituir $K(h)$ a partir de $\gamma(h)$ escribiendo:

$$(VIII, 2, 3) \quad K(h) = \gamma(\infty) - \gamma(h)$$

Es claro que, en este caso, la función intrínseca $\gamma(h)$ no aporta nada más que lo que aporta la covarianza $K(h)$. Sin embargo, puede suceder que $\gamma(h)$ crezca indefinidamente cuando $|h|$ tienda al infinito. En efecto, esta circunstancia se encuentra frecuentemente en la práctica, en la cual los variogramas en r^λ ($\lambda > 0$) o en $\log r$ son de uso corriente. La relación (VIII, 2, 2) muestra que la función aleatoria $f(x)$ tiene, en este caso, una *varianza a priori infinita*, de manera que no se puede definir la covarianza $K(h)$. Pero los incrementos ε_{ij} conservan, por su parte, varianzas finitas, y el estudio de $f(x)$ como un esquema intrínseco, es decir salvo una constante, sigue siendo posible gracias a la función intrínseca $\gamma(h)$.

Cuando $\gamma(\infty)$ existe y tiene un valor finito, es decir cuando la covarianza $K(h)$ se puede definir, se dice a menudo que el esquema intrínseco es de tipo transitivo²⁴. Se llamará

²⁴ Se tendrá cuidado de no confundir (a pesar que existen analogías entre ellos) los esquemas intrínsecos de tipo transitivo y las representaciones transitivas estudiadas en la primera parte.

entonces *alcance* de la transición a la distancia a partir de la cual $K(h)$ se anula o llega a ser despreciable, y $\gamma(h)$ igual o prácticamente igual, a su valor asintótico $\gamma(\infty)$, que es la varianza a priori $K(0)$. Más allá del alcance $f(x)$ y $f(x+h)$ son variables aleatorias sin correlación. Por otra parte, muy a menudo, se debe considerar que esta no-correlación es estricta, y no aproximada, es decir que $K(h) \equiv 0$ y que $\gamma(h) = K(0)$ para $|h| \geq b$. En realidad, el alcance b , no es un escalar, depende de la dirección α del vector h , y, en general, de la manera en la cual el alcance $b(\alpha)$ se modifica con la dirección α y pone en evidencia ciertos rasgos estructurales mayores de una regionalización. Por ejemplo, cuando se estudia la distribución de las leyes de un mineral en una formación geológica sedimentaria, se observa, a menudo, un variograma experimental de tipo transitivo. Esto significa, en general, que el área donde se generó el depósito estaba fragmentada en micro cuencas de sedimentación casi autónomas. El estudio del alcance $b(\alpha)$, en función de la dirección permite detectar la forma y las dimensiones medias de estas micro cuencas, sus direcciones de alargamiento, etc...

A menudo también, sin ser infinita, la varianza a priori $K(0)$ es muy grande y casi está desprovista de significación práctica. Esto sucede, por ejemplo, cuando el alcance es grande respecto de la escala a la cual se trabaja. En efecto, no se puede esperar de poner experimentalmente en evidencia $K(0)$, salvo si los datos disponibles están en una zona significativamente superior al alcance. Si la zona de trabajo es del mismo orden de magnitud, o más pequeña, que el mismo alcance, $K(0)$ queda inaccesible, pero las características locales de la regionalización están representadas de manera mucho más eficaz por la función intrínseca $\gamma(h)$.

Propiedades de $\gamma(h)$. - De la misma definición (VIII, 1, 6), $\gamma(h)$ es evidentemente una función par y no negativa:

$$(VIII, 2, 4) \quad \gamma(h) = \gamma(-h) \geq 0$$

Además, al hacer $h = 0$ en (VIII, 1, 6), se tiene siempre:

$$(VII, 2, 5) \quad \gamma(0) = 0$$

Esta última condición no implica obligatoriamente que $\gamma(h)$ tiende a 0 cuando $|h| \rightarrow 0$. Cuando se tiene:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \gamma(h) = C > 0$$

Se dice que hay *un efecto de pepita* en el origen. La constante positiva C se llama constante de pepita. Más que una verdadera discontinuidad en el origen, el efecto de pepita corresponde, lo más a menudo, a la existencia de una muy pequeña zona de transición respecto del punto $h = 0$, y dentro de la cual el crecimiento de $\gamma(h)$ es extremadamente rápido, sin ser realmente discontinuo. Experimentalmente, y en las aplicaciones prácticas, todo sucede como si hubiera una discontinuidad real. Fuera de $h = 0$, se debe suponer que siempre $\gamma(h)$ es continua.

Cuando $\gamma(\infty)$ existe, la relación (VII, 2, 3) nos muestra que:

$$\gamma(\infty) - \gamma(h)$$

Debe tener todas las propiedades de una función de covarianza, es decir, ser de tipo positivo. Pero, si $\gamma(h)$ no tiene límite finito cuando:

$$|h| \rightarrow \infty$$

Las condiciones impuestas a $\gamma(h)$ son menos estrictas. En efecto, se debe exigir solamente que toda combinación lineal de incrementos de la forma:

$$(VIII, 2, 6) \quad H = \sum_k \lambda_k [f(y_k) - f(x_k)]$$

tengan una varianza positiva para los puntos x_k , y_k y los coeficientes λ_k cualquiera. Al considerar (VIII, 1, 9), la varianza de la expresión H escrita anteriormente tiene por valor:

$$(VIII, 2, 7) \quad D^2(H) = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l [\gamma(y_l - x_k) + \gamma(x_l - y_k) - \gamma(x_l - x_k) - \gamma(y_l - y_k)]$$

Busquemos una condición para que $D^2(H)$ no sea nunca negativa. Tomemos, por ejemplo, como puntos y_k los trasladados de x_k en una misma traslación τ :

$$y_k - x_k = \tau$$

La varianza (VIII, 2, 7) toma, en este caso, la expresión siguiente:

$$(VIII, 2, 8) \quad D^2(H) = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l [\gamma(x_l - x_k + \tau) + \gamma(x_l - x_k - \tau) - 2\gamma(x_l - x_k)]$$

Al comparar con la definición de las funciones de tipo positivo (fórmula A, 9, 1), vemos que (VIII, 2, 8) no tomará nunca valores negativos si, y solamente si, la función:

$$(VIII, 2, 9) \quad \gamma(h + \tau) + \gamma(h - \tau) - 2\gamma(h)$$

Es de tipo positivo, relativamente a h , cualquiera que sea el vector τ . Mostraremos en el capítulo X, que esta condición, necesaria para que la varianza (VIII, 2, 7) no sea nunca negativa para los x_k y los y_k cualquiera, es también suficiente, y la expresaremos en una forma equivalente más simple. En particular, veremos que esta condición se verifica para un $\gamma(h)$ de la forma r^λ (con $r = |h|$):

$$\begin{cases} \gamma(h) = r^\lambda \\ \lambda < 2 \end{cases}$$

Siempre que λ sea inferior a 2, y para un $\gamma(h)$ de la forma $\log r$. Por otra parte, de una manera general, el crecimiento de $\gamma(h)$ cuando $|h| \rightarrow \infty$ debe ser *menos rápido que el crecimiento de h^2* .

Expresaremos el hecho que la función (VIII, 2, 9) sea de tipo positivo cualquiera que sea τ diciendo que $-\gamma(h)$ debe ser de *tipo positivo condicional*. Se observará que resulta, entre otras, la desigualdad:

$$(VIII, 2, 10) \quad \gamma(h + \tau) + \gamma(h - \tau) \leq 2[\gamma(h) + \gamma(\tau)]$$

Significación física de la función intrínseca $\gamma(h)$. - El comportamiento de $\gamma(h)$ en la vecindad del origen está, aquí también, en relación estrecha con las propiedades de regularidad y de continuidad de la regionalización $f(x)$, considerada como una variable aleatoria. Se puede ver, exactamente como en el capítulo precedente, que una función intrínseca $\gamma(h)$ continua en $h = 0$ caracteriza una función $f(x)$ continua en media cuadrática. Análogamente, un $\gamma(h)$ dos veces derivable en el origen, es decir que en el origen posee un comportamiento parabólico, caracteriza una función derivable una vez en media cuadrática.

De una manera más concreta, se puede ver que un función intrínseca proporciona un contenido preciso a la noción, usual en la industria minera, pero poco clara por si sola, de *zona de influencia de una muestra*. El crecimiento, más o menos rápido del variograma $\gamma(h)$ cuando $|h|$ aumenta, representa exactamente la manera más o menos rápida de como se deteriora la influencia de una muestra en zonas más y más alejadas de un yacimiento.

En las aplicaciones se buscará siempre reducirse al caso de una función aleatoria intrínseca *isótropa*, es decir, de la forma:

$$\begin{cases} \gamma(h) = \gamma(r) \\ r = |h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} \end{cases}$$

Pero las *anisotropías*, constatadas en los variogramas experimentales, presentarán un gran interés por si solas, porque ellas traducirán, en general, las características estructurales mayores del fenómeno estudiado. Se utilizarán en la práctica, ciertos modelos simples de anisotropía:

Anisotropía geométrica. - Se caracteriza por un $\gamma(h)$ de la forma $\gamma(Q)$, en que Q es una forma cuadrática:

$$Q = \sum a_i a_j h_i h_j$$

Respecto de las componentes del vector h . Basta con efectuar una transformación lineal sobre las coordenadas para reducirse al caso isótropo $Q = r^2$. En general, las direcciones principales de Q serán conocidas directamente, porque corresponderán a direcciones preferenciales del fenómeno mismo, de manera que la transformación lineal se reducirá a reemplazar (h_1, h_2, h_3) por $(\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \lambda_3 h_3)$ con constantes λ , o módulos de afinidad elegidos convencionalmente.

Anisotropías zonales. - Puede suceder que $\gamma(h)$ no dependa realmente de las n componentes del vector h , sino solamente de una o dos de entre ellas. Por ejemplo, en 3 dimensiones, se puede tener una función de la forma $\gamma(h_3)$ la cual solo depende de la

componente vertical h_3 de h . Con una función como esta, un incremento $f(x+h) - f(x)$ tiene una varianza nula si $h = (h_1, h_2, 0)$ es un vector horizontal. Dicho de otra forma, la variable regionalizada $f(x)$ es constante en un mismo plano horizontal, y el fenómeno tiene un aspecto *foliado*.

Análogamente, una *corrida* podrá representarse por un $\gamma(h)$ de la forma $\gamma(h_2, h_3)$, independiente de la componente h_1 . La variable $f(x)$ es entonces constante a lo largo de rectas paralelas al primer eje de coordenadas. En la práctica, naturalmente, $f(x)$ no es rigurosamente constante en planos o rectas paralelas, sino que manifiesta una tendencia a variar mucho menos a lo largo de esos planos o rectas preferenciales que en otras direcciones. Estamos conducidos a descomponer el $\gamma(h)$ en dos términos, uno isótropo y el otro zonal:

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_3)$$

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_2, h_3)$$

Lo que consiste en superponer dos regionalizaciones independientes, una isótropa, la otra representando una foliación o una corrida perfecta. En un muy gran número de problemas, y principalmente en el cálculo de las varianzas de estimación, estas dos componentes actúan separadamente y sus efectos pueden ser ajustados simplemente.

3. - Variables no puntuales y varianza de extensión.

Con el propósito de definir, en términos de esquema intrínseco, las variables regionalizadas con soporte no puntual, consideraremos, en primer lugar, dos grupos de puntos x_i y x_j , respectivamente en números N_i y N_j , y coeficientes de ponderación λ_i y λ_j que verifican:

$$(VIII, 3, 1) \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{j \in J} \lambda_j = 1$$

La notación cómoda $i \in I$ (i pertenece a I) indica que la suma debe ser realizada sobre el conjunto de índices I relacionados con los puntos x_i del primer grupo. Análogamente, $j \in J$ indica que la suma se extiende a todos los puntos x_j del segundo grupo. Definamos dos nuevas variables aleatorias Y y Z iguales a las medias, ponderadas por los λ_i y los λ_j de $f(x)$ sobre cada uno de estos dos grupos de puntos:

$$(VIII, 3, 2) \quad \begin{cases} Y = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \\ Z = \sum_{j \in J} \lambda_j f(x_j) \end{cases}$$

Para generalizar la noción de incremento, nos vamos a interesar, no en las variables Y y Z , sino más bien en su diferencia $Y - Z$. Esta diferencia se expresa mediante una combinación

lineal de incrementos $\varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i)$. En efecto, al considerar (VIII, 3, 11), tenemos, en primer lugar:

$$f(x_i) = f(x_j) + \varepsilon_{ji} = \sum_{j \in J} \lambda_j [f(x_j) + \varepsilon_{ji}] = Z + \sum_{j \in J} \lambda_j \varepsilon_{ji}$$

Multipliquemos por λ_i los dos miembros extremos, y sumemos en $i \in J$. Queda:

$$(VIII, 3, 3) \quad Y - Z = \sum_{i \in I, j \in J} \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij}$$

Que es una combinación lineal de los incrementos ε_{ij} en número finito, luego la variable $Y - Z$ está perfectamente definida. De la hipótesis usual (VIII; 1, 4), se deduce que su valor probable es nulo:

$$(VIII, 3, 4) \quad E(Y - Z) = 0$$

Para obtener la varianza $D^2(Y - Z)$, debemos elevar al cuadrado (VIII, 3, 3) y pasar a los valores probables. Se obtiene así, al utilizar notaciones ya introducidas en (VIII, 1, 7):

$$(VIII, 3, 5) \quad D^2(Y - Z) = 2 \sum_{i \in I, j \in J} \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} - \sum_{j \in J, s \in J} \lambda_i \lambda_s \gamma_{js} - \sum_{i \in I, u \in I} \lambda_i \lambda_u \gamma_{iu}$$

Esta varianza se calcula entonces, por sumas múltiples, con la ayuda de la función intrínseca $\gamma(h)$. Las sumas son simétricas respecto de Y y de Z , o respecto de los dos grupos de índices I y J . Se le llama varianza de extensión de Y a Z (o de Z a Y). Esta expresión representa, en efecto, la varianza del error $Y - Z$ que se comete cuando se extiende a los x_j la ley media ponderada de los x_i . En el caso particular en que se tiene:

$$\lambda_i = \frac{1}{N_i} \quad \lambda_j = \frac{1}{N_j}$$

Y y Z son simplemente las medias aritméticas de los valores de $f(x)$ para los dos grupos de puntos x_i y x_j , que tienen como números N_i y N_j respectivamente. Más generalmente, se puede, además de Y y Z , considerar dos otras variables aleatorias T y U definidas para dos otros grupos de puntos x_k y x_l y con coeficientes λ_k y λ_l :

$$(VIII, 3, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \sum_{k \in K} \lambda_k f(x_k) \\ U = \sum_{l \in L} \lambda_l f(x_l) \\ \sum_{k \in K} \lambda_k = \sum_{l \in L} \lambda_l = 1 \end{array} \right.$$

El valor probable del producto $(Y - Z)(T - U)$ será llamado covarianza de las extensiones de Z a Y y de U a T , o más brevemente, *covarianza de extensión*. Se encuentra, de la misma manera que anteriormente:

$$E[(Y - Z)(T - U)] = \sum_{i \in I, j \in J, k \in K, l \in L} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l E(ij, kl)$$

Y se deduce, con la ayuda de (VIII, 1, 9):

$$\begin{aligned} E[(Y - Z)(T - U)] &= \sum_{j \in J, k \in K} \lambda_j \lambda_k \gamma_{jk} + \sum_{i \in I, l \in L} \lambda_i \lambda_l \gamma_{il} \\ &- \sum_{j \in J, l \in L} \lambda_j \lambda_l \gamma_{jl} - \sum_{i \in I, k \in K} \lambda_i \lambda_k \gamma_{ik} \end{aligned} \quad \text{(VIII, 3, 7)}$$

El paso a las integrales estocásticas se efectúa sin dificultad. Supongamos, por ejemplo que se tiene un volumen V y una función de ponderación $p(x)$ la cual verifica:

$$\int_V p(x) dx = 1 \quad \text{(VIII, 3, 8)}$$

No estamos seguros que la integral estocástica:

$$Z = \int_V p(x) f(x) dx$$

Esté definida, porque no sabemos calcular su varianza. Sin embargo, el incremento:

$$Y - Z = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) - \int_V f(x) p(x) dx \quad \text{(VIII, 3, 9)}$$

está perfectamente definido, como integral estocástica (ver párrafo 3, capítulo VII) porque su varianza se obtiene al efectuar un paso al límite en (VIII, 3, 5), lo cual proporciona el resultado:

$$\left\{ \begin{aligned} D^2(Y - Z) &= 2 \sum_{i \in I} \int_V \lambda_i p(x) \gamma(x - x_i) dx \\ &- \int_V \int_V p(x) p(x') \gamma(x - x') dx dx' \\ &- \sum_{i \in I, u \in I} \lambda_i \lambda_u \gamma(x_i - x_u) \end{aligned} \right. \quad \text{(VIII, 3, 10)}$$

por ejemplo, tomemos $p(x) = k(x) / V$, siendo $k(x)$ la variable geométrica asociada a V . La variable Z es la media (estocástica) de $f(x)$ en V , la llamaremos a menudo, para abreviar, ley del volumen V . Análogamente, tomemos todos los λ_i iguales a $1 / N$, siendo

N el número de puntos x_i . Y es entonces la media aritmética de los N valores $f(x_i)$, y, para abreviar, diremos que Y es la media aritmética de estos N puntos. Se tiene, en este caso:

$$(VIII, 3, 11) \quad Y - Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \frac{1}{V} \int_V f(x) dx$$

Y la varianza de extensión de la ley media de los N puntos a la ley del volumen V está dada por la expresión:

$$(VIII, 3, 12) \quad D^2(Y - Z) = \frac{2}{NV} \sum_{i=1}^N \int_V \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j)$$

De la misma manera, la variable Y puede ser también ser una media estocástica. Tomemos, por ejemplo, las leyes medias de dos volúmenes V y V' :

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{V} \int_V f(x) dx \\ Z = \frac{1}{V'} \int_{V'} f(x) dx \end{cases}$$

La varianza de extensión del volumen V al volumen V' es igual a:

(VIII, 3, 13)

$$D^2(Y - Z) = \frac{2}{VV'} \int_V \int_{V'} \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 - \frac{1}{V'^2} \int_{V'} \int_{V'} \gamma(x'_1 - x'_2) dx'_1 dx'_2$$

De la misma manera, la fórmula (VIII, 3, 7) la cual proporciona una covarianza de estimación, se generaliza al caso en que una o varias de las medias ponderadas que allí figuran, se transforman en integrales estocásticas. No es útil escribir aquí todas las fórmulas correspondientes, que se obtienen sin ninguna dificultad al reemplazar las sumatorias discontinuas por integrales. Sin embargo, proporcionaremos el resultado en el caso en que las cuatro variables son integrales estocásticas:

Sean p_1, p_2, p_3, p_4 cuatro funciones de ponderación con suma unidad:

$$\int p_1 dx = \int p_2 dx = \int p_3 dx = \int p_4 dx = 1$$

Las cuatro variables aleatorias:

$$\begin{cases} Y = \int p_1(x)f(x)dx \\ Z = \int p_2(x)f(x)dx \\ T = \int p_3(x)f(x)dx \\ U = \int p_4(x)f(x)dx \end{cases}$$

Tienen como covarianza de extensión:

$$(VIII, 3, 14) \quad E[(Y-Z)(T-U)] = -\int \int [p_1(x) - p_2(x)][p_3(y) - p_4(y)]\gamma(x-y)dx dy$$

Esta fórmula única (VIII, 3, 14) contiene las anteriores como casos particulares.

Regularización de un esquema intrínseco. - Las varianzas de extensión que acabamos de definir constituyen la generalización exacta del variograma $2\gamma(h)$ al caso de variables no puntuales. El variograma mismo $2\gamma(h)$, por definición, es igual a $D^2[f(x+h) - f(x)]$, es decir precisamente a la varianza de extensión de dos variables puntuales $f(x)$ y $f(x+h)$. Es cómodo representar, con la ayuda de productos de convolución, la regularización de un esquema intrínseco $f(x)$ por una función de muestreo o de ponderación $p(x)$. Supondremos siempre que:

$$\int p(x)dx = 1$$

E introduciremos el covariograma transitivo $P(h)$ asociado a $p(x)$:

$$P(h) = p * \hat{p} = \int p(x)p(x+h)dx$$

El muestreo p efectuado en el punto x proporciona la función aleatoria regularizada $f_p(x)$, que es la integral estocástica:

$$(VIII, 3, 15) \quad f_p(x) = f * \hat{p} = \int f(x+y)p(y)dy$$

Del mismo modo que la variable $f(x)$ misma, la regularizada $f_p(x)$ es, en general, accesible por el intermediario de sus incrementos $f_p(x+h) - f_p(x)$, es decir, en tanto como esquema intrínseco. La varianza de este incremento se deduce de las fórmulas que proporcionamos anteriormente. Es, en efecto, la varianza de extensión relativa a las dos variables:

$$\begin{cases} Y = \int f(y)p(y-x)dy \\ Z = \int f(y)p(y-x-h)dy \end{cases}$$

Cuya expresión se obtiene inmediatamente:

$$D^2(Y - Z) = 2 \int \int \gamma(x - x') p(x) p(x' - h) dx dx' - 2 \int \int \gamma(x - x') p(x) p(x') dx dx'$$

Basta con poner $x = u + x'$ y efectuar primero la integración con respecto a x' para hacer aparecer la expresión del covariograma transitivo $P = p * \hat{p}$:

$$D^2(Y - Z) = 2 \int \gamma(u) P(u + h) du - 2 \int \gamma(u) P(u) du$$

Pero la función intrínseca $\gamma_P(h)$ asociada a la variable regularizada $f_p = f * \hat{p}$ considerada como definiendo un esquema intrínseco, es igual a la mitad de la varianza $D^2(Y - Z)$ así calculada: Tenemos entonces la regla siguiente:

$$(VIII, 3, 16) \quad \gamma_P(h) = \gamma * P - \int \gamma(u) P(u) du$$

Salvo una constante, la función intrínseca de la regularizada $f * \hat{p}$ se obtiene al regularizar la función intrínseca γ por el covariograma transitivo P asociado a la función de ponderación o de muestreo. La constante, igual al valor medio de $\gamma(x - x')$ ponderado por $p(x)p(x')$ es tal que se tiene $\gamma_P(0) = 0$.

En el caso particular en que se tiene:

$$p(x) = \frac{1}{v} k(x)$$

Siendo $k(x)$ la variable geométrica asociada a un volumen v , la regularizada $f * \hat{p}$ representa la ley de la muestra v tomada en el punto x . Salvo una constante, la cual representa el valor medio de $\gamma(h)$ en v , su función intrínseca $\gamma_P(h)$ se obtiene al tomar el valor medio de $\gamma(x - x')$ cuando las dos extremidades x y x' del argumento vectorial $x - x'$ describen, separadamente, dos volúmenes v iguales y trasladados uno de otro en la traslación h .

Naturalmente, la regularizada $f * \hat{p}$ debe ser efectivamente más regular que f misma, siempre que la función de ponderación sea también suficientemente regular. Por ejemplo, si p admite derivadas primeras, P admite derivadas segundas, y, por consiguiente, lo mismo ocurre para $\gamma_P(h)$, según (VIII, 3, 16), de manera que la regularizada $f * \hat{p}$ es derivable en media cuadrática, aún si $f(x)$ no lo es. Este mecanismo de regularización será estudiado en detalle más tarde, en el capítulo XII, a propósito de la subida intrínseca con potencia constante.

4. - Varianza de v en V .

Si v y V son dos volúmenes, tales que el primero está contenido en el segundo, y si Y y Z son sus medias estocásticas, la varianza de extensión de Y y Z , llamada también varianza de extensión de v en V , está perfectamente definida por la fórmula (VIII, 3, 13). Esta varianza depende, en particular, de la posición ocupada por v al interior de V , y no

representa entonces la varianza en el campo geométrico V de las variables no puntuales de soporte v . Nos damos cuenta que la varianza de v en V debería ser una suerte de media de todas las varianzas de extensión de v en V para todas las implantaciones, geoméricamente posibles, de v en el campo V .

Pero aparece que esta noción de varianza de v en V - que aparece, en primera instancia, natural y experimentalmente evidente - solo se puede definir, de manera unívoca, en el caso de una variable con soporte puntual.

Examinemos entonces, en primer lugar, el caso de un soporte puntual. Sea m la media estocástica de $f(x)$ en V :

$$m = \frac{1}{V} \int_V f(x) dx$$

Se puede definir la varianza de $f(x)$ en V como el valor probable de la integral estocástica:

$$(VIII, 4, 1) \quad S^2 = \frac{1}{V} \int_V [f(x) - m]^2 dx$$

En notación de incrementos $\varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i)$, se tiene:

$$f(x_i) - m = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dx_j$$

Y por consiguiente S^2 está dado por la integral múltiple de orden $3n$:

$$S^2 = \frac{1}{V^3} \int_V \int_V \int_V \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} dx_j dx_i dx_k$$

La varianza de $f(x)$ en V , que escribiremos $\sigma^2(0|V)$ se obtiene al tomar el valor probable de esta integral. Considerando (VIII, 1, 8), queda simplemente:

$$(VIII, 4, 2) \quad \sigma^2(0|V) = E(S^2) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx'$$

Así la varianza de la variable puntual es igual al valor medio en V de la función intrínseca $\gamma(h)$. Ella puede ser calculada con la ayuda del algoritmo de Cauchy (I, 2, 9).

También se puede definir esta varianza $\sigma^2(0|V)$ como el valor medio de la varianza de extensión $D^2[f(x) - m]$ cuando el punto x se tira al azar en V según una ley de probabilidad uniforme. Se tiene, en efecto, según (VIII, 3, 12):

$$D^2[f(x) - m] = \frac{2}{V} \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(y-y') dy dy'$$

Integrando respecto del punto x , se encuentra sin dificultad:

$$\frac{1}{V} \int_V D^2[f(x) - m] dx \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' = \sigma^2(0 | V)$$

De manera que las dos definiciones de $\sigma^2(0 | V)$ son bien equivalentes.

Pasemos ahora, a la variable Y con soporte no puntual v , o media estocástica de $f(x)$ en v :

$$Y = \frac{1}{v} \int_v f(x) dx$$

La definición (VIII, 4, 1) no tiene mucho sentido, debido a que, en una integración en x de la expresión $[Y - m]^2$ extendida al campo V , los puntos x vecinos a la frontera de V introducen, por intermedio de Y , valores de la variable $f(x)$ exteriores al campo V . Debido a que el soporte v no es puntual, se produce en las fronteras un efecto de arista, y, por una u otra, la media estocástica de $Y(x)$ en V no tiene ya razón de coincidir con m . Para un volumen v del orden de la mitad o tres cuartos de V , esta circunstancia le quita casi toda significación a la noción de varianza de v en V . Sin embargo hay dos casos en los cuales una definición, riguroso o aproximada, es posible.

El primer caso es aquel en el cual el volumen V está constituido por la reunión de N volúmenes v_i , todos iguales a un mismo volumen v y trasladados unos de otros (estos serán, por ejemplo, paralelepípedos). Si se designa por Z_i la media estocástica de $f(x)$ en el volumen v_i , y por m la de $f(x)$ en V , se tiene, esta vez, en todo rigor:

$$\frac{1}{N} \sum_i Z_i = m$$

La población finita de los Z_i tiene una varianza:

$$S^2(v | V) = \frac{1}{N} \sum_i (Z_i - m)^2$$

Que es, en realidad, una expresión estocástica. Por definición se llamará varianza de v_i en V al valor probable de esta expresión:

$$(VIII, 4, 3) \quad \sigma^2(v_i | V) = E[S^2(v | V)] = \frac{1}{N} D^2(Z_i - m)$$

Pero la varianza de extensión de un v_i particular en V se calcula por la fórmula general (VIII, 3, 13). Como los volúmenes v_i constituyen una partición de V , se tiene, para toda función $\Phi(x)$:

$$\frac{1}{Nv} \sum_i \int_{v_i} \Phi(x) dx = \frac{1}{V} \int_V \Phi(x) dx$$

Al considerar este algoritmo y (VIII, 3, 13), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_i D^2(Z_i - m) &= \frac{2}{V} \int_V dx \frac{1}{Nv} \sum_i \int_{v_i} \gamma(x - x_i) dx_i \\ &\quad - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma(x - x') dx dx' \\ &= \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma(x - x') dx dx' \end{aligned}$$

Así, en este primer caso particular en que, en que V está constituido por una pila de ladrillos todos iguales a v , se obtiene la varianza de v en V en la fórmula sintética siguiente:

$$(VIII, 4, 4) \quad \sigma^2(v|V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma(x - x') dx dx'$$

El segundo caso particular es cuando v es muy pequeño, en todas sus dimensiones, respecto de V . En este caso, las interferencias que se producen en las fronteras tienen un efecto despreciable. Esta circunstancia justifica por otra parte, la noción aparentemente intuitiva, pero de origen puramente experimental, de varianza de una muestra pequeña v en un campo geométrico grande V . La media estocástica de los v en V no difiere prácticamente de m . En la expresión de la varianza de extensión de V y de la media estocástica Z_i de un volumen v_i igual a v implantado en el punto x_i : se puede poner, en primera aproximación:

$$\frac{2}{Vv} \int_V \int_{v_i} \gamma(x - x') dx dx' \cong \frac{2}{V} \int_V \gamma(x - x_i) dx$$

Se define ahora la varianza de v en V como el valor medio de la varianza de extensión de v_i en V cuando x_i ocupa todas las posiciones posibles en V . Caemos de nuevo en la fórmula (VIII, 1, 4).

Así, en los dos casos en que la varianza se puede definir, la varianza $\sigma^2(v|V)$ está dada por la fórmula (VIII, 4, 4). Esta varianza verifica la *relación de aditividad*:

$$(VIII, 4, 5) \quad \sigma^2(v|V') = \sigma^2(v|V) + \sigma^2(V|V')$$

Que expresa que la varianza de v en V' es igual a la suma de las varianzas de v en V y de V en V' . Esta relación (VIII, 4, 5) solo tiene sentido cuando v y V están contenidos en V' y V' respectivamente, y si estos volúmenes verifican las dos hipótesis requeridas: partición estricta, o campo muy grande respecto del soporte. Pero esta relación puede ser

utilizada también para definir la varianza cuando estas hipótesis no se cumplen. Tomemos, en efecto, un volumen V' muy grande, de manera que $\sigma^2(v|V')$ y $\sigma^2(V|V')$ estén ambos definidos. Pondremos entonces, *por definición*:

$$(VIII, 4, 6) \quad \sigma^2(v|V) = \sigma^2(v|V') - \sigma^2(V|V')$$

Se verifica inmediatamente que esta definición (VIII, 4, 6) conduce siempre a la misma fórmula (VIII, 4, 4) que toma así un valor general. En particular, la elección del campo V' , que ha servido como intermediario, no influye sobre el resultado obtenido.

Naturalmente, no se puede esperar que la varianza $\sigma^2(v|V)$ sea estrictamente positiva; esto ocurre cuando los volúmenes v y V son geoméricamente compatibles. Se tiene, por otra parte:

$$\sigma^2(V|v) = -\sigma^2(v|V)$$

Las varianzas negativas que pueden aparecer si v y V no son geoméricamente compatibles, no tienen significación por sí mismas, y sirven simplemente como un artificio de cálculo.

Se definirá de la misma manera la covarianza en un campo V de las dos muestras v y v' distintas; ocupando una con respecto a la otra, una posición bien definida e implantados, en su conjunto, de manera cualquiera al interior del campo V . Según las mismas convenciones anteriores, (paso por el intermediario de un gran campo V' y de la fórmula de aditividad), se obtiene esta covarianza por la fórmula general:

$$(VIII, 4, 7) \quad \sigma(vv'|V) = \frac{1}{V^2} \int \int_V \gamma(x-x') dx dx' - \frac{1}{v v'} \int \int_{v v'} \gamma(x-x') dx dx'$$

Se puede, naturalmente también, caracterizar la correlación de los dos volúmenes v y v' en el campo V por el *coeficiente de correlación* habitual:

$$\rho(vv'|V) = \frac{\sigma(vv'|V)}{\sqrt{\sigma^2(v|V)\sigma^2(v'|V)}}$$

Pero es necesario notar bien que un tal coeficiente no tiene nada de intrínseco. Depende de la elección del campo V y varía de manera compleja en función de V .

En particular, si el $\gamma(h)$ no tiende hacia un valor finito $\gamma(\infty)$, sino que crece indefinidamente con $|h|$, las dos varianzas y la covarianza son, para V muy grande, infinitésimos grandes equivalentes, de manera que en el límite, se tiene siempre:

$$\rho(vv' | \infty) = +1$$

Esta observación permite comprender porqué los coeficientes de correlación prácticamente no se usan en teoría intrínseca. Es en realidad la función $\gamma(h)$ misma la que expresa de la mejor manera posible la correlación que reina entre $f(x)$ y $f(x+h)$, haciendo abstracción de cualquier influencia de un campo geométrico (es decir, de manera intrínseca).

EJEMPLOS:

Función intrínseca homogénea. - Supongamos que $\gamma(h)$ sea una función homogénea de orden β , es decir que verifica, para un escalar λ cualquiera, la ecuación:

$$\gamma(\lambda h) = |\lambda|^\beta \gamma(h)$$

Según lo que hemos visto en el párrafo 2, el exponente β es necesariamente inferior a 2. Calculemos la varianza $\sigma^2(v|V)$ en el caso particular en que el volumen v es geoméricamente homotético con V en una homotecia de módulo λ :

$$\frac{v}{V} = \lambda^n$$

En la segunda integral de la formula general (VIII, 4, 4) efectuemos el cambio de variables $x = \lambda y$, $x' = \lambda y'$, ($dx = \lambda^n dy$, $dx' = \lambda^n dy'$). Queda:

$$\sigma^2(v|V) = (1 - \lambda^\beta) \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

Designemos por $\sigma^2(0|V)$ la varianza en V de la variable puntual. Se tiene así:

$$(VIII, 4, 8) \quad \sigma^2(v|V) = \left(1 - \left(\frac{v}{V} \right)^{\frac{\beta}{n}} \right) \sigma^2(0|V)$$

Esta fórmula se aplica, en particular, a la función intrínseca isótropa r^β .

Función intrínseca de De Wijs. - Se dice que una función intrínseca es de De Wijs, si verifica la relación funcional:

$$(VIII, 4, 9) \quad \gamma(\lambda h) = \gamma(h) + 3\alpha \log |\lambda|$$

En que 3α es una constante, llamada coeficiente de dispersión absoluta.

El esquema de De Wijs isótropo, caracterizado por una función intrínseca de la forma $3\alpha \log r$, se usa a menudo, en la práctica²⁵, cuando v es homotético a V , el mismo cambio de variables anterior conduce, al considerar (VIII, 4, 9), a la notable fórmula siguiente, llamada fórmula de De Wijs:

$$(VIII, 4, 10) \quad \sigma^2(v|V) = \alpha \log \frac{V}{v}$$

²⁵ Nota del traductor: En la actualidad, con el gran uso de computadoras, este modelo no es de uso frecuente.

5. - Relación entre esquemas intrínsecos y representaciones transitivas.

No existe, obligatoriamente, una relación simple entre los esquemas intrínsecos, definidos, como lo hemos realizado, como funciones aleatorias con incrementos estacionarios, y las representaciones transitivas, estudiadas en la primera parte. El modo de representación en transitivo presenta, en efecto, un alto grado de generalidad. Permite describir cualquier variable regionalizada que evoluciona en un campo geométrico finito V .

En contra-parte, el covariograma transitivo $g(h)$ está ligado estrechamente a la geometría del campo V , y no existe ninguna manera simple de pasar de este campo V a otro campo V' . Por otra parte, es necesario ver bien, que esta ligazón entre el covariograma y su campo expresa a menudo una zonalidad real de la regionalización, por ejemplo una tendencia sistemática al empobrecimiento cuando se va desde un corazón rico hacia las fronteras del campo. En un caso como este, no es posible separar lo que es imputable a la geometría del campo y a la regionalización « en realidad ». Este tipo de fenómenos, fácilmente tomados en cuenta por la teoría transitiva, son profundamente extranjeros a los esquemas intrínsecos, porque los incrementos no pueden de ninguna manera ser considerados como estacionarios. Por el contrario, en el caso en que las fronteras del campo V no ejercen influencia particular sobre el aspecto de la regionalización, y donde todo sucede como si V estuviera cortado arbitrariamente en el seno de una regionalización homogénea, la cual podría continuar, sin cambiar de naturaleza, más allá de las fronteras, la dependencia del covariograma $g(h)$ con respecto a la geometría de V aparece como artificial y esconde una realidad más simple. En caso semejante, tendremos todo el interés de recurrir a la teoría intrínseca, es decir a interpretar la regionalización real como una realización de un esquema intrínseco, limitado arbitrariamente a las fronteras del campo V . La función intrínseca $\gamma(h)$ permite entonces expresar, independientemente de cualquier interferencia geométrica, las características de la regionalización « en realidad ». La relación entre los dos modos de representación intrínseca y transitiva debe, en este caso, expresarse con la ayuda de una fórmula que proporcione el valor probable $E[g(h)]$ del covariograma transitivo, en función de la ley de distribución intrínseca $\gamma(h)$.

Para establecer esta relación, consideremos un esquema intrínseco, caracterizado por una función $\gamma(h)$, y un volumen V definido por una variable geométrica $K = k * \hat{k}$. Si $f(x)$ es una realización del esquema, el producto $k(x)f(x)$ constituye una realización limitada al campo V , luego es susceptible de una representación transitiva: sea entonces $g(h)$ su covariograma transitivo:

$$(VIII, 5, 1) \quad g(h) = \int f(x)f(x+h)k(x)k(x+h)dx = (f k) * (\hat{f} \hat{k})$$

Relativamente a un esquema intrínseco, este $g(h)$ debe ser considerado como una integral estocástica (con la reserva que logremos darle un sentido). Análogamente, las medias $m(h)$ y $m(-h)$ de $f(x)$ en las intersecciones de V y de sus trasladados por las traslaciones $+h$ y $-h$, definidas según (V, 3, 22) por las relaciones:

$$(VIII, 5, 2) \quad \begin{cases} m(h) = \frac{1}{K(h)} \int k(x)f(x)k(x-h)dx = (f k) * \hat{k} \\ m(-h) = \frac{1}{K(h)} \int k(x)f(x)k(x+h)dx = (\hat{f} \hat{k}) * k \end{cases}$$

Son, igualmente, integrales estocásticas. Observamos inmediatamente que las diferencias:

$$[m(h) - m(-h)] \quad y \quad \left[m(0) - \frac{1}{2}(m(h) + m(-h)) \right]$$

Son integrales estocásticas de incrementos de la función $f(x)$. Tienen entonces una varianza finita y por consiguiente, poseen siempre un sentido preciso.

En ausencia de deriva lineal, es decir si $E[f(x+h) - f(x)] = 0$, estas dos diferencias tienen valores probables nulos:

$$(VIII, 5, 3) \quad \begin{cases} E[m(h) - m(-h)] = 0 \\ E\left[m(0) - \frac{1}{2}(m(h) + m(-h)) \right] = 0 \end{cases}$$

Si comparamos con (V, 3, 4) y con (V, 4, 8), vemos que estas relaciones expresan, en valor probable, la independencia de la variable transitiva $k(x)f(x)$ y su campo geométrico V , a la vez, en el sentido de la ausencia de correlación diferida y en el sentido de la independencia interna. En presencia de una deriva lineal, solo permanece la independencia interna. El hecho que estas diferentes independencias solo estén aseguradas en valor probable está ligado solamente a la naturaleza estocástica de la teoría intrínseca.

Designaremos por $S^2(h)$ y $S^2(-h)$ las varianzas « locales » de la variable puntual $f(x)$ en las intersecciones de V y de sus trasladados por $+h$ y $-h$, es decir:

$$(VIII, 5, 4) \quad \begin{cases} S^2(h) = \frac{1}{K(h)} \int k(x)k(x-h)[f(x) - m(h)]^2 dx \\ S^2(-h) = \frac{1}{K(h)} \int k(x)k(x+h)[f(x) - m(-h)]^2 dx \end{cases}$$

$S^2(h)$ y $S^2(-h)$ son integrales estocásticas, cuyo valor probable es igual a la varianza $\sigma^2(h)$ de la variable en la intersección de V y de su traslación por h , varianza definida en el párrafo anterior, y dada por una fórmula análoga a (VIII, 4, 2):

(VIII, 5, 5)

$$E[S^2(h)] = E[S^2(-h)] = \sigma^2(h) = \frac{1}{[K(h)]^2} \iint k(x)k(x+h)k(x')k(x'+h)\gamma(x-x')dx dx'$$

Análogamente, designaremos por $\gamma_V(h)$ al semi-variograma « local »:

$$(VIII, 5, 6) \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2K(h)} \int [f(x+h) - f(x)]^2 k(x)k(x+h)dx$$

el cual se podría construir experimentalmente si se conocieran todos los valores tomados por la variable regionalizada $f(x)$ en su campo V . Relativamente al esquema intrínseco, $\gamma_V(h)$ aparece como una variable aleatoria, cuyo valor probable es naturalmente igual a la «verdadera» función intrínseca $\gamma(h)$, es decir:

$$(VIII, 5, 7) \quad E[\gamma_V(h)] = \gamma(h)$$

Pero, considerando la expresión (VIII, 5, 1) del covariograma transitivo $g(h)$, se puede poner también (VIII, 5, 6) en la forma:

$$\gamma_V(h) = \frac{1}{2K(h)} \int k(x)k(x+h)[f^2(x) + f^2(x+h)]dx - \frac{g(h)}{K(h)}$$

Introduciendo las varianzas locales $S^2(h)$ y $S^2(-h)$ definidas en (VIII, 5, 4), se obtiene la relación siguiente, que es una relación entre variables aleatorias:

$$(VIII, 5, 8) \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2}[S^2(h) + S^2(-h)] + \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$$

El primer miembro tiene un valor probable igual a la función intrínseca $\gamma(h)$, según (VIII, 5, 7). Lo mismo sucede con el segundo miembro, de donde se obtiene, al considerar (VIII, 5, 5):

$$(VIII, 5, 9) \quad \gamma(h) = \sigma^2(h) + E \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$$

Esta relación entre $\gamma(h)$ y el valor probable de la expresión entre paréntesis, donde figura el covariograma transitivo $g(h)$, responde, en principio a la pregunta formulada en este párrafo. Sin embargo, en las aplicaciones, se prefiere utilizar la media general $m = m(0)$ de $f(x)$ en V , en vez de las medias parciales $m(h)$ y $m(-h)$, que es necesario calcular para cada valor de h . Mediante hipótesis suplementarias que no examinaremos aquí, pero que se pueden suponer válidas para las aplicaciones, se establece entre los valores probables de m^2 y de $m^2(h)$ la relación siguiente:

$$E[m^2(h) - m^2] = \sigma^2(0|V) - \sigma^2(h)$$

El segundo miembro es igual a la varianza en V de la intersección de V y de su traslación por h , esta varianza está definida en el sentido del párrafo anterior. Al considerar esta relación suplementaria, (VIII, 5, 9) se puede poner en la forma:

$$(VIII, 5, 10) \quad \gamma(h) = \sigma^2(0|V) + E \left[m^2 - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$$

Esta es la fórmula que se utilizará en la práctica, lo más a menudo, para pasar de transitivo a intrínseco, o recíprocamente.

CAPITULO NOVENO

TEORIA INTRINSECA PARA LAS CORREGIONALIZACIONES

SUMARIO

Este capítulo, corto y fácil, extiende a las corregionalizaciones los resultados del capítulo anterior.

El párrafo 1 define la matriz de codispersión intrínseca $\gamma_{ij}(h)$ y examina sus propiedades.

El párrafo 2 define, para las variables con soporte no puntual, la noción de covarianza de coextensión y la noción de covarianza en un campo V .

El párrafo 3 examina la independencia intrínseca, y sus relaciones con la independencia interna de las representaciones transitivas, y estudia rápidamente el caso en el cual existe una correlación intrínseca.

1. - Matriz de codispersión intrínseca.

La teoría intrínseca de las corregionalizaciones es una generalización natural del capítulo precedente al caso en el cual se tienen simultáneamente varios esquemas intrínsecos $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , y aparece al mismo tiempo como una transposición en términos estocásticos de la representación transitiva de las corregionalizaciones estudiadas en el capítulo V. La teoría estocástica es menos general que la representación transitiva, porque ésta postula el carácter intrínseco de la corregionalización, luego, la independencia de la variable con respecto a su campo geométrico. Pero, en revancha, la teoría intrínseca permite un estudio más fino y más profundo de las correlaciones de las diversas variables entre ellas, debido a que esta teoría ha tenido éxito en hacer abstracción de cualquier interferencia con la geometría del campo.

Definición. - Un esquema intrínseco con varias componentes $f_i(x)$ es un proceso estocástico con varias componentes y con incrementos estacionarios. Dicho de otra forma, al designar por:

$$(IX, 1, 1) \quad \varepsilon_i(x - x') = f_i(x) - f_i(x')$$

a un incremento de la componente f_i , las leyes de distribución:

$$F [\varepsilon_{i1}(x_1 - x_1'), \varepsilon_{i2}(x_2 - x_2') \dots ; x_1, x_1', x_2, x_2' \dots]$$

de un número cualquiera de incrementos tomados, para los índices i_1, i_2, \dots arbitrarios, sobre los puntos cualesquiera $x_1, x_1', x_2, x_2', \dots$ son invariantes para toda traslación de

conjunto de estos puntos, y no son modificados por el conocimiento de un valor numérico tomado por cada una de las componentes.

Los momentos de los incrementos se definen sin dificultad. Son ellos mismos estacionarios. Lo más a menudo, solo intervendrán los momentos de orden 1 y 2, de manera que los resultados obtenidos seguirán siendo válidos en el caso en que el esquema posee solamente el carácter estacionario de orden 2.

Los momentos de orden 1, $E[f_i(x+h) - f_i(x)]$ ponen en evidencia la existencia de un gradiente de deriva lineal D_i para cada componente f_i . Supondremos, exactamente como en el capítulo precedente, que estos diferentes gradientes son todos nulos, si no es así, hay que reemplazar f_i por $f_i(x) - xD_i$.

Momentos de orden 2. - Para introducir cómodamente los momentos de orden dos, consideremos una combinación lineal de funciones f_i con coeficientes λ_i arbitrarios:

$$(IX, 1, 2) \quad f(x; \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(x)$$

Según la definición misma de esquema intrínseco con varias componentes, cada una de estas combinaciones lineales engendra elle misma un esquema intrínseco con una sola componente, al cual se aplican los resultados del capítulo anterior. En particular, se le asocia una ley de dispersión intrínseca, definida con la notación (IX, 1, 1) de los incrementos, por:

$$\gamma(h; \lambda_i) = \frac{1}{2} D^2 \left[\sum_i \lambda_i \varepsilon_i(h) \right]$$

Es decir:

$$(IX, 1, 3) \quad \gamma(h, \lambda_i) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[\varepsilon_i(h) \varepsilon_j(h)]$$

Es natural poner:

$$(IX, 1, 4) \quad \gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E[\varepsilon_i(h) \varepsilon_j(h)] = \frac{1}{2} E\{[f_i(x+h) - f_i(x)][f_j(x+h) - f_j(x)]\}$$

En el caso $i = j$, el término $\gamma_{ii}(h) = \gamma_i(h)$ no es otra cosa que la función intrínseca de $f_i(x)$. El término $\gamma_{ij}(h)$ será, en el caso general, llamado *función de codispersión intrínseca de las variables f_i y f_j* , y el conjunto de los $\gamma_{ij}(h)$ constituye la *matriz de codispersión intrínseca*.

Propiedades de $\gamma_{ij}(h)$. - A cada propiedad de una función intrínseca $\gamma(h)$ le debe corresponder una propiedad de la función de codispersión $\gamma_{ij}(h)$, la cual puede ser puesta en evidencia al escribir que el $\gamma(h; \lambda_i)$ de la ecuación (IX, 1, 3) verifica, cualesquiera que sean los coeficientes λ_i , la propiedad del $\gamma(h)$.

Así, por ejemplo, todo $\gamma(h)$ debe ser positivo. Por consiguiente, para toda combinación lineal limitada a dos términos $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$, la forma cuadrática:

$$\lambda_i^2 \gamma_i(h) + 2\lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h) + \lambda_j^2 \gamma_j(h)$$

Debe ser positiva, de donde resulta la desigualdad de Schwarz:

$$(IX, 1, 5) \quad |\gamma_{ij}(h)| \leq \sqrt{\gamma_i(h)\gamma_j(h)}$$

Esta desigualdad permite definir un *coeficiente de codispersión*:

$$(IX, 1, 6) \quad R_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_i(h)\gamma_j(h)}}$$

Necesariamente comprendido entre -1 y $+1$, y el cual es igual al coeficiente de correlación de los incrementos:

$$f_i(x+h) - f_i(x) \quad \text{y} \quad f_j(x+h) - f_j(x)$$

Análogamente, a partir de la relación (VIII, 1, 9), se puede ver que la función de codispersión intrínseca $\gamma_{ij}(h)$ permite el cálculo de la covarianza de un incremento cualquiera de f_i y de un incremento cualquiera de f_j . Apliquemos, en efecto, (VIII, 1, 9) a la covarianza de los dos incrementos $f(x'; \lambda_i) - f(x; \lambda_i)$ y $f(y'; \lambda_j) - f(y; \lambda_j)$. Al considerar (IX, 1, 2) y (IX, 1, 3), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[\varepsilon_i(x'-x)\varepsilon_j(y'-y)] \\ &= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j [\gamma_{ij}(y'-x) + \gamma_{ij}(y-x') - \gamma_{ij}(y-x) - \gamma_{ij}(y'-x')] \end{aligned}$$

De donde, por identificación en λ_i :

$$\begin{aligned} & E\{[f_i(x') - f_i(x)][f_j(y') - f_j(y)]\} \\ &= \gamma_{ij}(y'-x) + \gamma_{ij}(y-x') - \gamma_{ij}(y-x) - \gamma_{ij}(y'-x') \end{aligned}$$

Así, la matriz de codispersión permite determinar todos los momentos de orden 2.

2. - Variables no puntuales y covarianza de coextensión.

El procedimiento que consiste en extender a $\gamma_{ij}(h)$ una propiedad de los $\gamma(h, \lambda_i)$ de la fórmula (IX, 1, 3) permite definir inmediatamente las covarianzas de coextensión. Sean dos funciones de ponderación $p_1(x)$ y $p_2(x)$, de suma unidad:

$$\int p_1(x)dx = \int p_2(x)dx = 1$$

Consideremos las variables aleatorias:

$$\begin{cases} Y_i = \int p_1(x) f_i(x) dx \\ Z_i = \int p_2(x) f_i(x) dx \\ Y = \sum_i \lambda_i Y_i \\ Z = \sum_i \lambda_i Z_i \end{cases}$$

La varianza de extensión de Y a Z se pone en la forma:

$$D^2(Y - Z) = - \iint [p_1(x) - p_2(x)][p_1(y) - p_2(y)] \gamma(x - y) dx dy$$

Basta con identificar los términos en $\lambda_i \lambda_j$ para obtener la covarianza de coextensión de $(Y_i - Z_i)$ y $(Y_j - Z_j)$:

$$(IX, 2, 1) \quad \begin{cases} E[(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)] \\ = - \iint [p_1(x) - p_2(x)][p_1(y) - p_2(y)] \gamma_{ij}(x - y) dx dy \end{cases}$$

En particular, tomemos para T_i y Z_i las medias estocásticas de f_i en los dos volúmenes V y V' :

$$\begin{cases} Y_i = \frac{1}{V} \int_V f_i(x) dx \\ Z_i = \frac{1}{V'} \int_{V'} f_i(x) dx \end{cases}$$

En este caso, la fórmula general (IX, 2, 1) toma la forma:

$$(IX, 2, 2) \quad \begin{cases} E[(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)] \\ = \frac{2}{VV'} \iint_{V, V'} \gamma_{ij}(x - y) dx dy - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma_{ij}(x - y) dx dy \\ - \frac{1}{V'^2} \iint_{V', V'} \gamma_{ij}(x - y) dx dy \end{cases}$$

La cual representa la covarianza de los errores $Y_i - Z_i$ y $Y_j - Z_j$ cometidos al extender al volumen V' las leyes medias del volumen V en f_i y en f_j . En el caso particular en que $i = j$, se encuentran, naturalmente, las varianzas de extensión habituales.

También, de nuevo, se definirá la covarianza en un campo V de las dos variables Y_i y Y_j de igual soporte no puntual v :

$$\begin{cases} Y_i = \frac{1}{v} \int_v f_i(x) dx \\ Y_j = \frac{1}{v} \int_v f_j(x) dx \end{cases}$$

Al aplicar los resultados del párrafo (VIII, 4) a la combinación lineal $\sum \lambda_i Y_i$ e identificando los términos en $\lambda_i \lambda_j$. De la misma manera que en el párrafo precedente, cuando el soporte no es puntual, esta definición es verdaderamente clara en el caso en que existe una partición de V por volúmenes v iguales y trasladados, unos de otros, o también si v es pequeño respecto de V .

Se obtiene, en los dos casos, la covarianza $\sigma_{ij}(v|V)$ en la forma siguiente, la cual generaliza (VIII, 4, 4):

$$(IX, 2, 3) \quad \sigma_{ij}(v|V) = \frac{1}{V^2} \int_v \int_v \gamma_{ij}(x-y) dx dy - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma_{ij}(x-y) dx dy$$

Se deduce inmediatamente la relación de aditividad:

$$(IX, 2, 4) \quad \sigma_{ij}(v|V) = \sigma_{ij}(v|V') + \sigma_{ij}(V'|V)$$

La cual permite adoptar, en todos los casos, la fórmula (IX, 2, 3) como definición convencional de la covarianza de las variables Y_i y Y_j de igual soporte v en un volumen V cualquiera.

3. - La independencia intrínseca.

Por definición, diremos que las dos variables puntuales $f_i(x)$ y $f_j(x)$ son *intrínsecamente independientes* si su función de codispersión intrínseca $\gamma_{ij}(h)$ es idénticamente nula:

$$(IX, 3, 1) \quad \gamma_{ij}(h) \equiv 0$$

Esta condición expresa simplemente que los incrementos:

$$[f_i(x+h) - f_i(x)] \quad \text{y} \quad [f_j(x+h) - f_j(x)]$$

tienen un coeficiente de correlación nulo cualquiera que sea h . Entonces resulta inmediatamente de (IX, 1, 7) que dos incrementos cualesquiera

$$[f_i(x) - f_i(x')] \quad \text{y} \quad [f_j(y) - f_j(y')]$$

Tienen también una correlación nula, cualesquiera que sean los cuatro puntos x, x', y, y' . Análogamente, toda covarianza de extensión del tipo (IX, 2, 1) o (IX, 2, 2), es igual a cero, y esto significa que todas las estimaciones de los valores medios de \hat{f}_i y de \hat{f}_j en volúmenes cualesquiera se deben hacer siempre de manera independiente una de otra. También la covarianza en un campo V introducida en (IX, 2, 4) es igualmente nula, de manera que las leyes en i y en j de una misma muestra v son siempre sin correlación, cualesquiera que sean las características de v y de V .

Relación con la independencia interna. - Supongamos que la condición (IX, 3, 1) de independencia intrínseca se verifica. Van a resultar, en representaciones transitivas, propiedades particulares para la correogionalización $k(x)f_i(x)$ limitada arbitrariamente a un campo V de variable geométrica $k(x)$. Apliquemos, en primer lugar, la relación (VIII, 5, 9) a la combinación lineal $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$. Se hace aparecer, a la izquierda, la función de codispersión $\gamma_{ij}(h)$ y, a la derecha, el covariograma transitivo $C_{ij}(h)$ definido en (V, 1, 5). Al identificar los términos $\lambda_i \lambda_j$, se obtiene así:

$$\gamma_{ij}(h) = \sigma_{ij}(h) + E \left[\frac{m_i(h)m_j(h) + m_i(-h)m_j(-h)}{2} - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)} \right]$$

Pero según (IX, 3, 1), $\gamma_{ij}(h)$ y la covarianza $\sigma_{ij}(h)$ de f_i y f_j en la intersección de V con su trasladado por h son ambos nulos. Queda así:

$$(IX, 3, 2) \quad E \left[\frac{C_{ij}(h)}{K(h)} - \frac{m_i(h)m_j(h) + m_i(-h)m_j(-h)}{2} \right] = 0$$

Se ve aparecer, expresada en valor probable, la condición simetrizada (V, 4, 6) para que no exista correlación diferida.

De la misma manera, apliquemos la relación (VIII, 5, 10) a la misma combinación lineal $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$. Por identificación de los términos en $\lambda_i \lambda_j$, se obtiene:

$$\gamma_{ij}(h) = \sigma_{ij}(0|V) + E \left[m_i m_j - \frac{C_{ij}}{K(h)} \right]$$

Y, como aquí γ_{ij} y $\sigma_{ij}(0|V)$ son nulas, queda:

$$(IX, 3, 2) \text{ bis} \quad E \left[\frac{C_{ij}(h)}{K(h)} - m_i m_j \right] = 0$$

Al comparar con (V, 2, 7) se ve que esta relación no es otra que la condición de independencia interna, expresada en valor probable.

Así, la independencia intrínseca implica la independencia interna, y, salvo una deriva lineal, la ausencia de correlación diferida, pero solamente en valor probable: El hecho que el

resultado e enuncie solamente en valor probable está naturalmente ligado a la naturaleza estocástica de la teoría intrínseca.

Correlaciones intrínsecas. - En general, $\gamma_{ij}(h)$ no es idénticamente nulo, y las variables f_i y f_j están ligadas por una dependencia intrínseca. La medida de su grado de dependencia está dada por la misma función $\gamma_{ij}(h)$, o si se quiere, por el coeficiente de codispersión $R_{ij}(h)$, definido en (IX, 1, 6), que es un coeficiente de correlación entre incrementos, y no entre las mismas variables. Nos podemos interesar, en particular, en el límite, si es que existe, de $R_{ij}(h)$ cuando h tiende a cero. El coeficiente $R_{ij}(h)$ presenta el carácter intrínseco, en el sentido de que no depende del campo geométrico V en el cual se estudia la correogionalización. Pero, contrariamente a la función $\gamma_{ij}(h)$ misma, $R_{ij}(h)$ no se generaliza de manera simple en el caso de variables con soporte no puntual.

De la definición (IX, 2, 3) de la covarianza $\sigma_{ij}(v|V)$ en el campo V de las variables i y j de soporte v , se puede deducir un coeficiente de correlación:

$$(IX, 3, 3) \quad \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}(v|V)}{\sqrt{\sigma_i^2(v|V)\sigma_j^2(v|V)}}$$

Pero este coeficiente no tiene el carácter intrínseco, porque depende, en general, de una manera compleja, de la elección del campo geométrico V . Según el comportamiento en el infinito de γ_i , γ_j y γ_{ij} , puede tender, cuando V llega a ser infinito, hacia un límite particular, pero en general, este límite depende de la manera en la cual se hace tender V hacia el infinito.

Sin embargo, hay un caso notable en el cual el coeficiente ρ_{ij} presenta el carácter intrínseco. Es el caso en el cual las tres funciones γ_i , γ_j y γ_{ij} son proporcionales a una misma función $\gamma(h)$, es decir:

$$(IX, 3, 4) \quad \begin{cases} \gamma_i(h) = \alpha_i \gamma(h) \\ \gamma_j(h) = \alpha_j \gamma(h) \\ \gamma_{ij}(h) = \alpha_{ij} \gamma(h) \end{cases}$$

En efecto, σ_{ij} , σ_i^2 y σ_j^2 se calculan aplicando un mismo operador lineal ζ a γ_i , γ_j y γ_{ij} , de manera que (IX, 3, 3) proporciona aquí:

$$\rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij} \zeta(\gamma)}{\sqrt{\alpha_i \zeta(\gamma) \alpha_j \zeta(\gamma)}} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}$$

Por otra parte, se verifica en este caso que ρ_{ij} es igual al coeficiente de codispersión $R_{ij}(h)$ de la ecuación (IX, 1, 6). Los dos son constantes e iguales a:

$$(IX, 3, 5) \quad \rho_{ij} = R_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}$$

Se habla, en este caso, de correlación intrínseca. Por otra parte, solo se puede esperar observar una correlación intrínseca entre variables de igual naturaleza, ligadas genéticamente una a otra. En general, variables de naturaleza diferente (como por ejemplo en la industria minera, la potencia y la ley de una formación) tienen funciones intrínsecas que no presentan el mismo comportamiento analítico en la vecindad del origen, de manera que las relaciones (IX, 3, 4) no se verifican luego las correlaciones no pueden ser intrínsecas.

CAPITULO DECIMO

DISTRIBUCIONES ALEATORIAS Y TEORIA INTRINSECA PARA LAS DISTRIBUCIONES

SUMARIO

Este capítulo, es un resumen de la teoría de las distribuciones aleatorias y una exposición de la teoría intrínseca para las distribuciones. Al igual que el capítulo III, no es necesario para la comprensión del resto de la obra. Sin embargo, el lector que no conoce la teoría de las distribuciones encontrará, en el Anexo A, una exposición sumaria de esta teoría, la cual le permitirá, si lo desea, de seguir la exposición presente.

El párrafo 1 define una distribución aleatoria T por las leyes $F[T(\varphi_i)]$ o por la funcional característica $C(\varphi) = E[\exp iT(\varphi)]$, se define la transformada de Fourier $\tau = FT$, examina los dos casos particulares de distribuciones estacionarias y con incrementos independientes, y define los momentos M_k como distribuciones de un espacio de nk dimensiones. El momento de orden 1 es la distribución M tal que $M(\varphi) = E[T(\varphi)]$.

El párrafo 2 estudia la covarianza $K(xy)$, distribución definida por:

$$K[\varphi_1(x) \varphi_2(y)] = E[T(\varphi_1)T(\varphi_2)]$$

*Para una distribución aleatoria estacionaria de orden 2, K se reduce a una distribución $K(x)$ del espacio de n dimensiones la cual actúa sobre los productos de convolución $\varphi_1 * \hat{\varphi}_2$: $K(x)$ es de tipo positivo. En el caso de incrementos sin correlación, se tiene: $K(xy) = \delta(y-x)K(x)$.*

El párrafo 2 recuerda el teorema clásico, mediante el cual las distribuciones estacionarias de orden 2 y a incrementos sin correlación se intercambian por transformación de Fourier. Resulta un primer procedimiento que permite construir numéricamente modelos de regionalización de covarianza $K(h)$ dada.

*El párrafo 4 muestra que la regularizada $\hat{\alpha} * T$ tiene por funcional característica $C(\alpha * \varphi)$ y por covarianza $K * \alpha * \hat{\alpha} = K * A$. Cuando T tiene incrementos independientes y densidad de varianza constante μ^2 , la regularizada tiene por covarianza $\mu^2 A$, de donde sale un segundo procedimiento de construcción de modelo numérico. En este caso, las leyes de distribución de probabilidades se pueden determinar completamente con la ayuda de la funcional característica misma, o por sus momentos.*

El párrafo 5 define la derivada $D^p T$ de una distribución aleatoria T por su funcional característica $C[(-1)^p D^p \varphi]$. Toda distribución aleatoria es indefinidamente derivable. El momento de orden k de $D^p T$ es la derivada de orden kp de M_k .

En el caso estacionario de orden 2, $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ tiene por covarianza $-\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}$.

El párrafo 6 define las distribuciones aleatorias intrínsecas como distribuciones estacionarias que actúan sobre las funciones de base φ de suma nula. Sus derivadas son estacionarias y actúan sobre todas las funciones de base. El momento de orden 1 pone en evidencia una deriva lineal. La covarianza K es solamente de tipo positivo condicional (el producto de FK por cualquier forma cuadrática definida positiva debe ser una medida positiva). Ejemplo de $\log(1/r)$ y r^λ para $\lambda < 2$. Las varianzas de extensión se expresan con la ayuda de una fórmula única que contiene, como caso particular, todas las fórmulas del capítulo VIII. Se examina, para terminar, el efecto de pepita.

1. - Definición de las distribuciones aleatorias.

Con el propósito de extender a las distribuciones la teoría de los esquemas intrínsecos, conviene en primer lugar, recordar la noción de distribución aleatoria – generalización natural de la noción de función aleatoria – . En todo rigor, para probabilizar un espacio de distribuciones τ' , definido como el conjunto de funcionales lineales continuas que actúan sobre las funciones de base de un espacio τ dado, conviene definir en τ' una σ -álgebra y una probabilidad, es decir una medida positiva cuya suma es la unidad, definida para esta σ -álgebra. Esta definición, la única rigurosa, conduce a especulaciones abstractas que no pueden encontrar lugar aquí. Nos contentaremos con la definición siguiente, no rigurosa, pero pragmática:

Definición. - Sea un espacio de distribución τ' definido sobre un espacio de funciones de base τ , diremos que una distribución T de τ' está definida como distribución aleatoria, si para todo conjunto de funciones de base φ_i en número arbitrario k , los números $T(\varphi_i)$ son variables aleatorias, cuya ley de distribución de probabilidades $F[T(\varphi_1), T(\varphi_2), \dots, T(\varphi_k)]$ es conocida.

Estas funciones de distribución de probabilidades F , cuyo conjunto define la distribución aleatoria T no son cualesquiera. Les imponemos las dos condiciones siguientes:

1. - Para todas las funciones de base $\varphi_1 \dots \varphi_k$, se tiene:

$$\begin{cases} F[T(\varphi_1), \dots, T(\varphi_{k-1}), \infty] = F[T(\varphi_1), \dots, T(\varphi_{k-1})] \\ F[T(\varphi_1), \dots, T(\varphi_{k-1}), -\infty] = 0 \end{cases}$$

2.- Si las funciones de base φ_n convergen hacia una función de base ψ , los $T(\varphi_n)$ convergen hacia $T(\psi)$ en media cuadrática.

De esta última condición resulta que cuando k sucesiones de funciones de base $\varphi_n^1 \dots \varphi_n^k$ convergen hacia k funciones de base $\psi^1 \dots \psi^k$, la ley de los $T(\varphi_n^i)$ converge hacia la ley de los $T(\psi^i)$, en el sentido de la convergencia en ley. Además, si los $T(\varphi_n^i)$ admiten momentos de orden 1 y 2, estos momentos convergen hacia los momentos correspondientes de los $T(\psi^i)$.

Funcional característica.- De una manera más sintética, se obtiene una definición equivalente a la anterior, al utilizar la funcional característica $C(\varphi)$ que, a toda función de base φ , le asocia la esperanza matemática de la exponencial $e^{i T(\varphi)}$:

$$(X, 1, 1) \quad C(\varphi) = E[e^{i T(\varphi)}]$$

Conocer $C(\varphi)$ es bien equivalente a conocer todas las leyes:

$$F[T(\varphi_1) \dots T(\varphi_k)]$$

En efecto, si todas las leyes F son conocidas, $C(\varphi)$ está bien determinada. Inversamente, si $C(\varphi)$ es conocida, ella permite encontrar todas las leyes F . En efecto, al tomar:

$$\varphi = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + \dots + u_k \varphi_k$$

Siendo $\varphi_1 \dots \varphi_k$ funciones de base cualesquiera, la función φ así definida pertenece a τ , y por consiguiente $C(\varphi)$ es conocida. Como se tiene:

$$(X, 1, 2) \quad C(\varphi) = E\{\exp[i u_1 T(\varphi_1) + \dots + i u_k T(\varphi_k)]\}$$

$C(\varphi)$ no es otra cosa que la función característica de la ley de distribución de probabilidades $F[T(\varphi_1) \dots T(\varphi_k)]$.

La condición de continuidad 2. - implica que la funcional característica $C(\varphi)$ es continua, es decir que $C(\varphi_i)$ converge hacia $C(\varphi)$ cuando φ_i converge hacia φ en el sentido de la convergencia utilizada en τ .

La funcional característica permite también definir de manera cómoda un conjunto de distribuciones aleatorias T_1, T_2, \dots, T_p no independientes. Se toma, en este caso:

$$(X, 1, 3) \quad C(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = E\{\exp i [T_1(\varphi_1) + \dots + T_p(\varphi_p)]\}$$

Transformada de Fourier. - A menudo, tomaremos como espacio τ' el espacio ζ' de las distribuciones temperadas, definidas sobre funciones de base indefinidamente derivables las cuales decrecen rápidamente en el infinito además de todas sus derivadas, es decir el espacio ζ . Sin embargo, a veces, nos limitaremos al espacio de las medidas con crecimiento lento, de manera de poder utilizar, entre las funciones de base, las funciones características (conjuntistas) de conjuntos borelianos ν acotados, es decir las funciones de muestreo que describen la toma de muestras ν . En todos los casos, sean distribuciones temperadas, sean medidas con crecimiento lento, la transformación de Fourier será posible. Sean φ una función de base de ζ , y $\psi = F\varphi$, su transformada de Fourier, que es también una función de ζ . La transformada:

$$\tau = F T$$

De una distribución T está definida por:

$$\tau(\psi) = T(\varphi)$$

Si T es una distribución aleatoria, su transformada de Fourier τ está igualmente definida, como una distribución aleatoria, por su funcional característica $\Gamma(\psi)$, la cual se deduce de la funcional característica $C(\varphi)$ de T por:

$$(X, 1, 4) \quad \begin{cases} \Gamma(\psi) = C(\varphi) \\ \psi = F(\varphi) \end{cases}$$

Distribución aleatoria estacionaria. - Se dice que una distribución aleatoria T es estacionaria si todas las leyes F quedan invariantes por una traslación que afecta simultáneamente a las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ (es decir cuando se reemplazan los $\varphi_j(x)$ por $\varphi_j(x-h)$, siendo h un vector cualquiera).

Se puede también considerar la traslación recíproca τ_{-h} que afecta a la distribución T :

$$\tau_{-h} * T[\varphi(x)] = T[\tau_h * \varphi] = T[\varphi(x-h)]$$

Y decir que los $\tau_{-h} * T(\varphi_j)$ tienen la misma ley de distribución de probabilidades que los $T(\varphi_j)$. La misma definición se escribe, con la ayuda de la funcional característica:

$$(X, 1, 5) \quad C(\tau_h * \varphi) = C(\varphi)$$

Distribución aleatoria con incrementos independientes. - Se dirá que una distribución aleatoria T tiene incrementos independientes si, para todo conjunto de funciones de base φ_i con soportes V_i disjuntos, es decir tal que:

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{para } i \neq j$$

Las variables $T(\varphi_i)$ son mutuamente independientes, lo que se escribe en las dos formas equivalentes siguientes:

$$(X, 1, 6) \quad \begin{cases} F[T(\varphi_1)T(\varphi_2)\dots T(\varphi_k)] = F[T(\varphi_1)]F[T(\varphi_2)]\dots F[T(\varphi_k)] \\ C(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k) = C(\varphi_1)C(\varphi_2)\dots C(\varphi_k) \end{cases}$$

Si T es una medida aleatoria, se pueden tomar como φ_i las funciones características (conjuntistas), o funciones de muestreo de conjuntos borelianos disjuntos V_i . Entonces, las cantidades de metal $Q_i = T(\varphi_i)$ aportadas por muestras disjuntas V_i son variables aleatorias independientes.

Los Momentos. - Supongamos que, para k funciones de base cualesquiera, el momento:

$$(X, 1, 7) \quad M_k(\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_k) = E[T(\varphi_1)T(\varphi_2) \dots T(\varphi_k)]$$

Existe siempre. Se dirá que la distribución aleatoria T admite un momento de orden k . El momento de orden k define una funcional la cual actúa sobre un conjunto de k funciones de base $\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_k$, funcional que por otra parte es lineal y continuo para $k \leq 2$, según la

condición de continuidad 2.- impuesta a las leyes F . En el espacio de kn dimensiones, producto topológico de k espacios de n dimensiones X_1, X_2, \dots, X_k , les corresponde una funcional lineal y continua, la cual actúa sobre las funciones de la forma:

$$\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \dots \varphi_k(x_k)$$

Aquí x_i designa un punto del espacio de n dimensiones X_i . Se demuestra que se puede entonces definir la acción de M_k sobre una función de base cualquiera $\varphi(x_1, x_2 \dots x_k)$ de este espacio de nk dimensiones, de manera que M_k constituye una distribución del espacio de nk dimensiones (por lo menos para $k \leq 2$).

El momento de orden 1, M_1 , que se escribirá simplemente M , es, en particular, una distribución del espacio de n dimensiones, y actúa sobre cualquier función de base φ según la fórmula:

$$(X, 1, 8) \quad M(\varphi) = E[T(\varphi)]$$

En todo lo que sigue supondremos:

$$(X, 1, 9) \quad M = 0$$

Es siempre posible, en efecto, reducirse a este caso al reemplazar la distribución aleatoria T por $T - M$.

2.- La distribución de covarianza.

El momento de orden 2, como lo hemos visto, define una distribución M_2 del espacio de $2n$ dimensiones, distribución que escribiremos K o bien $K(x, y)$, x e y representan dos puntos del espacio de n dimensiones. $K(xy)$ se llama *distribución de covarianza*. Esta distribución actúa sobre el producto $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ de dos funciones de base φ_1 y φ_2 según la fórmula:

$$(X, 2, 1) \quad K[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = E[T(\varphi_1)T(\varphi_2)]$$

Al considerar (X, 1, 9), se ve que se trata, efectivamente, de la covarianza de las variables aleatorias $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_2)$. En particular, al tomar $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, se obtiene la varianza de $T(\varphi)$ en la forma:

$$(X, 2, 2) \quad D^2T[(\varphi)] = K[\varphi(x)\varphi(y)]$$

Vamos a examinar más en detalle los casos particulares de distribuciones aleatorias estacionarias y con incrementos independientes.

Distribución aleatoria estacionaria de orden 2. - Si T es una distribución aleatoria estacionaria, su momento de orden 1, M_1 , es una simple constante, que supondremos igual a 0 conforme a (X, 1, 9). Su covarianza K debe ser invariante para toda traslación h , lo cual se escribe:

$$\tau_h(x)\tau_h(y) * K(x, y) = K(x, y)$$

O en una forma explícita:

$$(X, 2, 3) \quad K[\varphi_1(x+h)\varphi_2(y+h)] = K[\varphi_1(x)\varphi_2(y)]$$

Inversamente, una distribución aleatoria T cuyo momento M_1 es una constante y cuya covarianza verifica (X, 2, 3) se llamará *estacionaria de orden 2*. En general, no será estacionaria en sentido estricto, porque (X, 1, 5) no es una consecuencia de (X, 2, 3). En la mayoría de las aplicaciones, nos contentamos con el carácter estacionario de orden 2.

Si $K(x, y)$ es una función ordinaria, (X, 2, 3) se escribe:

$$\iint K(x, y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)dxdy = \iint K(x, y)\varphi_1(x+h)\varphi_2(y+h)dxdy$$

Y se deduce inmediatamente la relación:

$$K(x-h, y-h) = K(x, y)$$

Que muestra que $K(x, y)$ es de la forma $K(x-y)$. Dicho de otra manera, existe una función $K(h)$, del espacio de n dimensiones, tal que se tiene:

$$\iint K(x, y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)dxdy = \iint K(h)\varphi_1(x+h)\varphi_2(x)dxdh$$

Al integrar primero en x , se hace aparecer el producto de convolución:

$$\varphi_1 * \hat{\varphi}_2 = \int \varphi_1(x)\varphi_2(x-h)dx = \int \varphi_1(x+h)\varphi_2(x)dx$$

Así, en notación de distribución, se tiene:

$$K(x, y)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = K(h)[\varphi_1 * \hat{\varphi}_2] = K(h)[\hat{\varphi}_1 * \varphi_2]$$

La segunda igualdad se obtiene al cambiar φ_1 y φ_2 , y muestra que K es par:

$$K(h) = K(-h)$$

Si $K(x, y)$ es una distribución, la relación (X, 2, 3) muestra que $K(x, y)$ actúa de la misma manera sobre dos funciones de base φ_1 y φ_2 que sobre sus trasladados $\tau_{-h} * \varphi_1$ y $\tau_{-h} * \varphi_2$. Como se tiene:

$$\tau_{-h} * \varphi_1 * \hat{\tau}_{-h} * \hat{\varphi}_2 = \tau_{-h} * \tau_h * \varphi_1 * \hat{\varphi}_2 = \varphi_1 * \hat{\varphi}_2$$

Se ve que a $K(x, y)$ le corresponde una funcional $K(h)$ del espacio de n dimensiones, la cual actúa sobre las funciones de la forma $\varphi_1 * \varphi_2$, funcional que es, por otra parte, bilineal:

$$K\left[\sum \lambda_i \lambda_j \varphi_i * \varphi_j\right] = \sum \lambda_i \lambda_j K[\varphi_i * \hat{\varphi}_j]$$

Y continua, según la condición de continuidad impuesta a las leyes F . Así $K(h)$ es una distribución del espacio de n dimensiones, definida por:

$$(X, 2, 4) \quad K(h)[\varphi_1 * \hat{\varphi}_2] = K(xy)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)]$$

Esta distribución $K(h)$ será de nuevo llamada *covarianza* de la distribución T estacionaria de orden 2. $K(h)$ es obligatoriamente par y de *tipo positivo*, porque:

$$(X, 2, 5) \quad K[\varphi * \hat{\varphi}] = D^2[T(\varphi)] \geq 0$$

Según el teorema de Bochner (Anexo A, 9, 2), para que K sea una distribución de tipo positivo, es necesario y suficiente que su transformada de Fourier χ sea una medida positiva. Por otra parte se tiene, al designar por $\psi = F\varphi$ la transformada de φ :

$$D^2[T(\varphi)] = K[\varphi * \hat{\varphi}] = \chi[\psi \bar{\psi}] = \chi[|\psi|^2]$$

Si la medida χ es sumable, K es una función continua de tipo positivo, y la varianza $K(0)$ tiene un valor finito, igual a la suma de χ . Si χ no es sumable, la distribución K no puede ser una función continua.

Distribuciones aleatorias con incrementos sin correlación. - Si T es una distribución aleatoria con incrementos independientes, en el sentido de la relación (X, 1, 6), y si su momento de orden 1 es nulo, se tiene, para dos funciones de base φ_1 y φ_2 con soportes disjuntos:

$$(X, 2, 6) \quad K(xy) [\varphi_1(x) \varphi_2(y)] = E[T(\varphi_1) T(\varphi_2)] = 0$$

Inversamente, si (X, 2, 6) se verifica, se dirá que T es una distribución aleatoria con *incrementos* sin correlación. En general, no se podrá afirmar que los incrementos son independientes, porque (X, 1, 6) no es una consecuencia de (X, 2, 6). En la mayoría de las aplicaciones nos conformaremos con la ausencia de correlación entre los incrementos.

Examinemos como se presenta la distribución de covarianza $K(x, y)$ cuando (X, 2, 6) se verifica. Cuando los soportes de φ_1 y de φ_2 son disjuntos en el espacio de n dimensiones, el soporte del producto $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, en el espacio de $2n$ dimensiones de los (x, y) tiene una intersección nula con el hiperplano bisector $x = y$. Como los productos $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ y sus combinaciones lineales son densos en todas partes del espacio de las funciones de base $\varphi(x, y)$, se ve que $K[\varphi(x, y)]$ es nulo para toda función de base φ cuyo soporte no corta el hiperplano bisector $x = y$, y, por consiguiente, la distribución $K(x, y)$ tiene su soporte contenido en este hiperplano.

Existe entonces una distribución $K(x)$, del espacio de n dimensiones, tal que se tiene, para dos funciones de base φ_1 y φ_2 cualesquiera:

$$(X, 2, 7) \quad K(x, y) [\varphi_1(x) \varphi_2(y)] = K(x) [\varphi_1(x) \varphi_2(y)]$$

En el caso particular en el cual φ_1 y φ_2 tienen sus soportes disjuntos, se tiene: $\varphi_1(x)\varphi_2(y) \equiv 0$ y se encuentra bien, de nuevo (X, 2, 6). Se puede escribir también, simbólicamente, con la ayuda de la medida de Dirac, $\delta(y-x)$:

$$(X, 2, 8) \quad K(x, y) = \delta(y-x) K(x)$$

Esta distribución $K(x)$, que actúa sobre el producto $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ en el espacio de n dimensiones como $K(x, y)$ sobre $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ en el espacio de $2n$ dimensiones puede ser llamada *densidad de varianza*. Es una *medida positiva*. En efecto, la varianza de $T(\varphi)$, obligatoriamente positiva, está dada por:

$$(X, 2, 9) \quad D^2[T(\varphi)] = K(\varphi^2) > 0$$

De donde resulta que $K(x)$ es una distribución positiva, es decir, como se sabe, obligatoriamente una medida positiva. $K(x)$ actúa, en particular, sobre las funciones características (conjuntistas), o funciones de muestreo $p(x)$ de los conjuntos, o muestras, borelianas ν . La varianza de la cantidad de metal $Q = T(p)$ contenida en la muestra ν está dada, porque $p^2 = p$, por:

$$(X, 2, 10) \quad D^2(Q) = K(x) = \int_{\nu} dK(x)$$

Es igual a la suma en ν de la medida K , que juega bien así el papel de una densidad de varianza.

3. - Análisis armónico de una distribución estacionaria de orden 2.

Un teorema clásico demuestra que las distribuciones aleatorias estacionarias de orden 2 y con incrementos sin correlación se intercambian recíprocamente en la transformación de Fourier.

Una distribución aleatoria T temperada cualquiera tiene una transformada de Fourier τ definida por:

$$\begin{cases} T(\varphi) = \tau(\psi) \\ \psi = F(\varphi) \end{cases}$$

De manera que los $T(\varphi)$ y los $\tau(\psi)$ tienen misma ley de distribución de probabilidades. Sean $K(x, y)$ y $\chi(u, \nu)$ las distribuciones de covarianza de T y de τ , definidas en los espacios con $2n$ dimensiones de los (x, y) y de los (u, ν) respectivamente. Como los $T(\varphi)$ y los $\tau(\psi)$ tienen la misma ley de distribución de probabilidades, se tiene:

$$(X, 3, 1) \quad \begin{cases} C(u, v)[\psi_1(u)\psi_2(v)] = K(x, y)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] \\ \psi_1 = F\varphi_1 \\ \psi_2 = F\varphi_2 \end{cases}$$

Pero, en el espacio de $2n$ dimensiones, $\psi_1(u)\psi_2(v)$ es la transformada de Fourier de $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$. La ecuación (X, 3, 1) significa entonces, por definición, que χ es la transformada de Fourier de K (en el espacio de $2n$ dimensiones).

$$(X, 3, 2) \quad \chi(u, v) = FK(x, y)$$

Supongamos ahora que T sea estacionaria de orden 2. Existe entonces una distribución $K(x)$ en n dimensiones, la cual actúa sobre $\varphi_1 * \hat{\varphi}_2$ o $\hat{\varphi}_1 * \varphi_2$ como $K(x, y)$ sobre $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$:

$$(X, 3, 3) \quad K(x)[\varphi_1 * \hat{\varphi}_2] = K(x, y)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)]$$

Sea $\chi(u) = FK(x)$ la transformada de esta distribución $K(x)$. Por definición, $\psi_1(u)$ y $\psi_2(u)$ son las transformadas de $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$, y considerando la propiedad de los productos de convolución y de las transpuestas:

$$F\varphi_1 * \hat{\varphi}_2 = \psi_1(u)\psi_2(-u) = \psi_1\hat{\psi}_2$$

Se obtiene la igualdad:

$$(X, 3, 4) \quad \chi(u)[\psi_1\hat{\psi}_2] = K(x)[\varphi_1\hat{\varphi}_2]$$

Basta entonces con comparar (X, 3, 1), (X, 3, 3) y (X, 3, 4) para obtener:

$$(X, 3, 5) \quad \chi(u, v)[\psi_1(u)\psi_2(v)] = \chi(u)[\psi_1(u)\psi_2(-u)]$$

Así, la distribución de covarianza $\chi(u, v)$ de $2n$ dimensiones de la distribución aleatoria $\tau = FT$ se pone en la forma:

$$(X, 3, 6) \quad \chi(u, v) = \delta(u + v)\chi(u)$$

En que la distribución $\chi(u)$ es la transformada de Fourier de la covarianza $K(x)$ de la distribución T aleatoria estacionaria de orden 2. Basta con comparar con (X, 2, 8) para constatar que $\chi(u - v)$ es la covarianza de una distribución aleatoria con incrementos sin correlación. La distribución τ misma - debido a este cambio de v en $-v$ - no es, sin embargo, hablando en sentido estricto, con incrementos sin correlación. Para examinar sus propiedades, nos limitaremos al caso en que T y las funciones de base φ son reales. La transformada $\psi = F\varphi$ de una función φ real es de la forma:

$$(X, 3, 7) \quad \psi = \psi_S + i\psi_A$$

En que ψ_S es real y par y ψ_A es real e impar. Solo haremos actuar sobre $\tau = FT$ funciones de base de esta forma. La distribución τ misma será descompuesta en una parte par y una parte impar, es decir:

$$(X, 3, 8) \quad \begin{cases} \tau = \tau_S - i\tau_A \\ \tau_S = \frac{1}{2}(\tau + \hat{\tau}) \\ \tau_A = \frac{i}{2}(\tau - \hat{\tau}) \end{cases}$$

Se tiene inmediatamente:

$$(X, 3, 9) \quad \begin{cases} \tau_S(\psi) = \tau(\psi_S) = \tau_S(\psi_S) \\ \tau_A(\psi) = -\tau(\psi_A) = -i\tau_A(\psi_A) \end{cases}$$

Así, siendo T real, τ_S y τ_A dos distribuciones reales, una par, la otra impar, actuando sobre las funciones de base reales ψ_S y ψ_A pares e impares respectivamente. Relativamente a estas funciones de base, τ_S y τ_A son las dos con incrementos sin correlación. Se deduce, en efecto, de (X, 3, 9) y de (X, 3, 5), las secuencias de igualdades:

$$\begin{aligned} E[\tau_S(\psi_S)\tau_S(\omega_S)] &= E[\tau(\psi_S)\tau(\omega_S)] = \chi(u)[\psi_S(u)\omega_S(u)] = \chi(u)[\psi_S\omega_S] \\ E[\tau_A(\psi_A)\tau_A(\omega_A)] &= -E[\tau(\psi_A)\tau(\omega_A)] = -\chi(u)[\psi_A(u)\omega_A(-u)] = \chi(u)[\psi_A\omega_A] \end{aligned}$$

ψ_S, ω_S y ψ_A, ω_A son funciones de base reales, pares para los índices S e impares para los índices A . Basta con comparar con (X, 2, 7) para ver que τ_S y τ_A tienen efectivamente incrementos sin correlación y que tienen la misma densidad de varianza que $\chi(u)$. Además están desprovistas de correlación mutua. En efecto, se tiene, al utilizar las mismas relaciones, la secuencia de igualdades:

$$E[\tau_S(\psi)\tau_A(\omega)] = -E[\tau(\psi_S)\tau(\omega_A)] = -\chi(u)[\psi_S(u)\omega_A(-u)] = 0$$

El resultado final es nulo porque la distribución par $\chi(u)$, la cual actúa sobre el producto $\psi_S(u)\omega_A(-u)$, que es una función impar, da necesariamente 0. Resumamos los resultados obtenidos:

La transformada de Fourier τ de una distribución aleatoria real T estacionaria de orden 2, de covarianza $K(x)$ se pone en la forma:

$$\tau = \tau_S - i\tau_A$$

Siendo τ_S y τ_A dos distribuciones reales, una par y la otra impar, actuando respectivamente sobre funciones de base reales pares e impares. τ_S y τ_A son ambas con

incrementos sin correlación y están desprovistas de correlación mutua, admitiendo una misma densidad de varianza $\chi(u)$, transformada de Fourier de la covarianza $K(x)$ de T . Inversamente, se ve que es posible construir una regionalización, considerada como una realización de una distribución estacionaria de orden 2 de covarianza $K(x)$ dada de antemano, al construir (lo que es fácil porque solo intervienen sorteos al azar independientes) dos realizaciones de las distribuciones pares e impares τ_S y τ_A independientes y a incrementos sin correlación admitiendo como densidad de varianza χ la transformada de $K(x)$. Basta con tomar la imagen inversa para obtener una realización de T , es decir, en escritura simbólica:

$$(X, 3, 10) \quad T(x) = \int \cos 2\pi(ux)\tau_S(u)du + \int \sin 2\pi(ux)\tau_A(u)du$$

Esta escritura es siempre simbólica, y debe ser tomada en el sentido de las distribuciones, porque τ_S y τ_A no serán nunca funciones ordinarias (T , estacionaria, no puede ser sumable).

4. - Regularización de una distribución estacionaria con incrementos independientes.

Si T es una distribución aleatoria cualquiera, su regularizada $\hat{\alpha} * T$ por una función o una distribución (no aleatoria) con soporte acotado α actúa sobre una función de base φ según la relación:

$$\hat{\alpha} * T(\varphi) = \int \alpha(-x)T(y)\Phi(x+y)dx dy = T(\alpha * \varphi)$$

$\alpha * \varphi$ es bien una función de base, según las propiedades de la convolución. Se puede entonces definir $\hat{\alpha} * T$ como la distribución que actúa sobre φ de la misma manera que T sobre $\alpha * \varphi$. Siendo una distribución aleatoria, $\hat{\alpha} * T$ está definida por su funcional característica $C_{\alpha}(\varphi)$ que se deduce de la funcional característica $C(\varphi)$ por la relación:

$$(X, 4, 1) \quad C_{\alpha}(\varphi) = C(\alpha * \varphi)$$

Supongamos ahora que T sea estacionaria (o solamente estacionaria de orden 2) y admite una covarianza $K(x)$. Resulta de (X, 4, 1) que $\hat{\alpha} * T$ es también estacionaria, y admite una distribución K_{α} de covarianza tal que:

$$K_{\alpha}(\varphi_1 * \hat{\varphi}_2) = K(\alpha * \varphi_1 * \hat{\alpha} * \hat{\varphi}_2) = \alpha * \hat{\alpha} * K(\varphi_1 * \hat{\varphi}_2)$$

Introduzcamos el covariograma transitivo (función o distribución):

$$A = \alpha * \hat{\alpha}$$

Asociado a la regularizante α . Se obtiene:

$$(X, 4, 2) \quad K_{\alpha} = K * A$$

Así, las covarianzas se regularizan por los covariogramas transitivos de las regularizantes. Un caso particular ²⁶ importante es aquel en que T es a la vez estacionario y con incrementos independientes. Su covarianza $K(x)$, que es al mismo tiempo una densidad de varianza es entonces proporcional, como se ve fácilmente, a la medida de Dirac $\delta(x)$, con un coeficiente de proporcionalidad μ^2 obligatoriamente positivo:

$$(X, 4, 3) \quad K(x) = \mu^2 \delta(x)$$

Entonces, según (X, 4, 2), la regularizada $\hat{\alpha} * T$ es estacionaria y tiene por covarianza la distribución:

$$(X, 4, 4) \quad K_{\alpha} = \mu^2 A$$

Proporcional al covariograma transitivo de la regularizante. Inversamente, esta relación permite construir modelos de regionalización, que pueden ser considerados como realizaciones de una función o de una distribución aleatoria de covarianza $\mu^2 A$ impuesta de antemano. Si se sabe encontrar una solución α de la ecuación:

$$\alpha * \hat{\alpha} = A$$

(Lo cual es siempre posible con la ayuda de la transformación de Fourier, porque, se tiene, por ejemplo, $\alpha = \overline{F} \sqrt{FA}$), basta con regularizar por α una distribución con incrementos independientes y densidad de varianza constante μ^2 . En particular, si se toma una medida con incrementos independientes y una densidad de varianza unidad, las cantidades de metal contenidas en los volúmenes V de covariograma geométrico $K(h)$ constituyen una realización de una función aleatoria de covarianza $K(h)$ idéntica al covariograma geométrico de V . Al tomar las cantidades de metal contenidas en esferas de diámetro unidad, se obtiene como covarianza la función, definida en (II, 5, 4), que representa el volumen de la intersección de dos esferas de diámetro unidad cuyos centros están a la distancia r ²⁷:

$$K_n(r) = \frac{2^{-n} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} - r \frac{2^{1-n} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} F\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right]$$

Leyes de distribución de probabilidades. - La relación (X, 4, 1) permite determinar las leyes de distribución de probabilidades de las funciones aleatorias así obtenidas, y no solamente su covarianza. Esta posibilidad es a veces útil en las aplicaciones.

Limitémonos al caso en que T es una medida aleatoria estacionaria con incrementos independientes y con densidad de varianza constante μ^2 . La cantidad de metal:

²⁶ Este caso corresponde, en nuestra terminología, a un efecto de pepita al estado puro.

²⁷ Nota del Traductor: Lo que aquí se plantea es la *simulación no condicional* de una variable regionalizada. Si $n = 3$, se puede simular el modelo *esférico*.

$$q(v) = \int_v dT = T(k)$$

Contenida en un volumen v con variable geométrica $k(x)$ tiene, según (X, 2, 10), la varianza:

$$(X, 4, 5) \quad D^2(q) = \mu^2 \int k(x) dx = \mu^2 v$$

Es decir, una varianza proporcional a v . En lo que respecta a la función de distribución de probabilidades de la variable aleatoria $q(v)$, se puede ver, en primer lugar, que solo depende de la medida del volumen v , y no de su forma. Se puede, en efecto, con una aproximación tan buena como se desee, considerar v como la reunión de un número k muy grande de pequeños paralelepípedos adyacentes Δv_i todos iguales. Las cantidades de metal $q(\Delta v_i)$ son variables aleatorias independientes, las cuales tienen la misma ley de

probabilidad, cuya suma $\sum_{i=1}^k q(\Delta v_i)$ converge hacia $q(v)$ cuando k aumenta

indefinidamente (en el sentido de la convergencia de las leyes de probabilidad) según la condición de continuidad establecida en la definición de las medidas aleatorias. Como la ley de una suma $\sum q(\Delta v_i)$ solo depende del número de los Δv_i , y no de su disposición mutua, se ve, por paso al límite, que la ley de $q(v)$ solo depende de la medida de v y no de su forma.

En segundo lugar, esta ley es *indefinidamente divisible*, porque, si se divide v en volúmenes adjuntos Δv_i de igual medida v/k (pero con formas eventualmente diferentes), se tiene:

$$(X, 4, 6) \quad q(v) = \sum_{i=1}^k q(\Delta v_i)$$

Es decir que $q(v)$ se puede poner en la forma de una suma de un número cualquiera k de variables independientes de igual ley de distribución de probabilidades (porque los Δv_i tienen la misma medida). Si $\Phi(u)$ es la función característica de la ley de $q(v)[\Phi(u)]^{\frac{1}{k}}$ entonces también es - cualquiera que sea k - una función característica.

Cuando la varianza es finita, lo que es aquí el caso según (X, 4, 5), un teorema clásico permite precisar la naturaleza de $\Phi(u)$: se demuestra en efecto que para que $\Phi(u)$ sea la función característica de una ley indefinidamente divisible, con varianza finita, es necesario y suficiente, que su logaritmo se pueda poner en la forma:

$$(X, 4, 7) \quad \log \Phi(u) = ium + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iut} - 1 - iut}{t^2} dG(t)$$

Siendo G una medida sumable, cuya suma es igual a la varianza de la ley $\Phi(u)$:

$$(X, 4, 8) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dG(t)$$

Pero el mismo resultado se aplica a los $q(\Delta v_i)$ de la descomposición (X, 4, 6). Sea $\Phi_k(u)$ su función característica. Se tiene, precisamente porque la ley es indefinidamente divisible:

$$\log \Phi(u) = k \log \Phi_k(u) = \frac{v}{\Delta v_i} \log \Phi_k(u)$$

Por consiguiente los logaritmos de las funciones características de las cantidades de metal de dos volúmenes cualesquiera v y v' son proporcionales a los volúmenes v y v' : Tomemos en vez de G , una medida positiva sumable, de suma 1, que notaremos por H , (X, 4, 7) toma la forma:

$$(X, 4, 8) \text{ bis} \quad \log \Phi(u) = v \left[ium + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iut} - 1 - iut}{t^2} dH(t) \right]$$

Y, bajo esta forma, la ecuación (X, 4, 8) bis se aplica a la función característica $\Phi(u)$ de la cantidad de metal $q(v)$ relativa a un volumen v cualquiera. La ley elemental $\psi(u)$ relativa a un volumen unidad:

$$(X, 4, 9) \quad \log \psi(u) = ium + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iut} - 1 - iut}{t^2} dH(t)$$

permite obtener todas las leyes Φ en la forma:

$$(X, 4, 10) \quad \log \Phi(u) = v \log \psi(u)$$

En lugar de una simple cantidad de metal, introduzcamos ahora una función de ponderación (boreliana) p , y busquemos la ley de la variable aleatoria $T(p)$. Dividamos el soporte, que se supone finito, de p en volúmenes Δv_i muy pequeños, de función característica $k_i(x)$ y consideremos la función:

$$\varphi(x) = \sum_i k_i(x) p(x_i)$$

En que el punto x_i pertenece a Δv_i . Si se aumenta indefinidamente el número de los Δv_i , haciendo tender cada uno de ellos hacia 0, $\varphi(x)$ converge hacia $p(x)$ y, como T es una medida, $T(\varphi)$ converge hacia $T(p)$. Pero se tiene también:

$$T(\varphi) = \sum_i p(x_i) T(k_i)$$

Los $T(k_i)$ son variables aleatorias independientes, cuyas leyes están dadas por (X, 4, 10). Por consiguiente $T(\varphi)$ admite la función característica $\Phi(u)$ definida por:

$$(X, 4, 11) \quad \log \Phi(u) = \sum_i \Delta v_i \log \psi[up(x_i)]$$

Cuando se hace tender los Δv hacia 0, la ley de $T(\varphi)$ tiende hacia la ley de $T(p)$, según la condición de continuidad, y esta ley se obtiene al tomar el límite de (X, 4, 11), que es la integral:

$$(X, 4, 11) \text{ bis} \quad \log \Phi(u) = \int \log \psi[up(x)] dx$$

Al hacer $u = 1$, y reemplazando $p(x)$ por $\Phi(x)$, función de base cualquiera (boreliana, con soporte acotado), se obtiene la *funcional característica* $C(\varphi)$ de T .

$$(X, 4, 12) \quad \log C(\varphi) = \int \log \psi[\varphi(x)] dx$$

Finalmente, volviendo a (X, 4, 1), obtenemos, para la regularizada $\hat{\alpha} * T$, de la cual sabemos ya que admite la covarianza $\mu^2 A$, la funcional característica:

$$(X, 4, 12) \text{ bis} \quad \log C_\alpha(\varphi) = \int \log \psi[\alpha * \Phi] dx$$

De manera que la regularizada $\hat{\alpha} * T$ está perfectamente definida como función o distribución aleatoria.

Los momentos. - Rara vez es posible explicitar (X, 4, 12), aún si $\log \psi$ es una función simple. Pero es posible, en general, determinar los momentos, si ellos existen, a partir de los cumulantes, o semi-invariantes χ_n de la ley ψ :

$$(X, 4, 13) \quad \log \psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \frac{(iu)^n}{n!}$$

Si los cumulantes χ_n son conocidos, (X, 4, 12) se puede escribir:

$$(X, 4, 14) \quad \begin{cases} \log C(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \frac{i^n}{n!} \\ C_n(\varphi) = \chi_n \int (\alpha * \varphi)^n dx \end{cases}$$

Así, la ley de distribución de probabilidades simultánea de p muestreos $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_p$ se obtiene al reemplazar φ por $\sum_{j=1}^p u_j \varphi_j$ de donde:

$$\log C[\sum u_i \varphi_i] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} C_n \left(\sum_{j=1}^p u_j \varphi_j \right)$$

Esta relación permite el cálculo de los momentos sucesivos. Para tener, por ejemplo, la covarianza de los muestreos φ_i y φ_j , se debe tomar el término en $u_i u_j$ del cumulante de orden 2:

$$C_2 \left(\sum u_j \varphi_j \right) = \chi \int \sum_{j,l} u_j u_l (\alpha * \varphi_j)(\alpha * \varphi_l) dx$$

Aquí $\chi = \mu^2$, según (X, 4, 9) y se encuentra bien:

$$E[T(\alpha * \varphi_j)(\alpha * \varphi_l)] = \mu^2 \int (\alpha * \varphi_j)(\alpha * \varphi_l) dx = \mu^2 A(\varphi_j * \hat{\varphi}_l)$$

EJEMPLOS. - Tomemos, para regularizar la medida con incrementos independientes, que es la función característica (conjuntista) o variable geométrica de un volumen V , con covariograma $k * \hat{k} = K$, y tomemos dos muestreos puntuales $\varphi_1 = \delta(x)$ y $\varphi_2 = \delta(x - h)$ distantes de h . Estos dos muestreos tienen una función característica $\Phi(u, v)$ la cual se deduce de (X, 4, 12):

$$\log \Phi(u, v) = \int \log \psi[uk(x) + vk(x - h)] dx$$

Como $k(x)$ es una variable geométrica, se tiene $k(x) = k(x - h) = 1$ en un volumen de medida $K(h)$, o bien $k(x) = 1$, $k(x - h) = 0$ (o bien $k(x) = 0$ y $k(x - h) = 1$) en un volumen $K(0) - K(h)$. De donde el resultado:

$$(X, 4, 15) \quad \log \Phi(u, v) = K(h) \log \psi(u + v) + [K(0) - K(h)][\log \psi(u) + \log \psi(v)]$$

Sean X e Y las dos variables aleatorias correspondientes. Estas se ponen en la forma:

$$\begin{cases} X = X_1 + Z \\ Y = Y_1 + Z \end{cases}$$

Las tres variables aleatorias X_1 , Y_1 y Z son independientes y obedecen, las dos primeras a la ley $[K(0) - K(h)] \log \psi(u)$ y la última a la ley $K(h) \log \psi(u)$. Si Y es fijo, X es la suma de dos variables independientes: las cuales siguen siempre la ley $[K(0) - K(h)][\log \psi(u)$, y Z , la cual sigue la ley de Z cuando Y es fijo. Si las leyes de X_1 , Y_1 y Z admiten densidades de frecuencia $f_1(x_1)$, $f_1(y_1)$, y $f_2(z)$, la ley de Z con Y fijo tiene la densidad de frecuencia: $\frac{f_2(z)f_1(y-z)}{f(y)}$.

Por ejemplo, tomemos como ley elemental, una ley gamma:

$$\log \psi(u) = -\alpha \log \left[1 - i \frac{u}{\beta} \right]$$

Y pongamos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = [K(0) - k(h)]\alpha \\ \alpha_2 = K(h)\alpha \end{cases}$$

Se encuentra:

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x} \\ f_2(z) = \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_2-1} e^{-\beta z} \\ f(y) = f_1 * f_2 = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y} \end{cases}$$

Con Y fijo, X es la suma de una variable X_1 , la cual obedece la ley gamma $f_1(x)$, y de una variable Z independiente de la anterior la cual obedece a la ley:

$$\frac{f_2(z)f_1(y-z)}{f(y)} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left[1 - \frac{z}{y} \right]^{\alpha_1-1} \left[\frac{z}{y} \right]^{\alpha_2-1} \frac{1}{y}$$

En otras palabras, para $Y = y$ fijo, Z/y obedece a la ley beta con parámetros (α_1 y α_2). Se verificará que la curva de regresión $E[X | Y = y]$ es una recta. Por el contrario, la varianza ligada es una función creciente de y . Al introducir la media m , la varianza σ^2 y el coeficiente de correlación ρ de X con Y , se encuentra:

$$\begin{cases} E(X | y) = (1 - \rho)m + \rho y \\ D^2(X | y) = \sigma^2(1 - \rho) \left[1 + \frac{\rho y^2}{\sigma^2 + m^2} \right] \end{cases}$$

5. - Derivación de las distribuciones aleatorias.

Se sabe que una distribución T es indefinidamente derivable, y que sus derivadas sucesivas son también distribuciones. Una derivada de orden $p = p_1 + \dots + p_n$ será designada por el símbolo abreviado D^p .

$$D^p = \frac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}$$

En esta notación $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ representa, en realidad, un sistema de enteros (p_1, p_2, \dots, p_n) . La derivada $D^p T$ se define por la relación:

$$(X, 5, 1) \quad D^p T(\varphi) = (-1)^p T(D^p \varphi)$$

Siendo φ una función de base cualquiera. Se observará, además, que si T es una distribución temperada, también lo son todas sus derivadas (porque, si φ pertenece a ζ , también sucede lo mismo con todas sus derivadas).

Supongamos ahora que T sea una distribución aleatoria, definida por su funcional característica $C(\varphi)$. Es inmediato, a partir de (X, 5, 1), definir la derivada $D^p T$ de T como distribución aleatoria, por su funcional característica $C_p(\varphi)$, dada por:

$$(X, 5, 2) \quad C_p(\varphi) = C[(-1)^p D^p \varphi]$$

así, *las distribuciones aleatorias son indefinidamente derivables, y sus derivadas sucesivas son distribuciones aleatorias* (todas temperadas, en el caso de una distribución aleatoria temperada). Se puede, también, interpretar la derivación $D^p T$ como el producto de convolución de T por la derivada $D^p \delta$ de la medida de Dirac:

$$D^p T = D^p \delta * T$$

La derivación aparece como una regularización por la transpuesta α de $D^p \delta$, es decir:

$$\alpha = (-1)^p D^p \delta$$

Y (X, 5, 2) es un simple caso particular de (X, 4, 1).

Momentos de la derivada $D^p T$. - El momento de orden k de una distribución aleatoria T , cuando existe, es la distribución M_k del espacio de $k\eta$ dimensiones, definido, según (X, 1, 7), por la relación:

$$M_k[\varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)] = E[T(\varphi_1) \dots T(\varphi_k)]$$

En que los $\varphi_1 \varphi_2 \dots$ son funciones de base cualquiera, y $x_1 \dots x_k$ son puntos de k espacios distintos, con n dimensiones, en el producto topológico en los cuales M_k está definido. Designemos entonces por $M_k^{(p)}$ al momento de orden k de la distribución aleatoria derivada $D^p T$. De la definición (X, 5, 2) se tiene inmediatamente:

$$M_k^{(p)}[\varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)] = E[D^p T(\varphi_1) \dots D^p T(\varphi_k)] = (-1)^{kp} E[T(D^p(\varphi_1) \dots T(D^p \varphi_k))]$$

Por consiguiente se tiene:

$$M_k^{(p)}[\varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)] = (-1)^{kp} M_k[D^p \varphi_1(x_1) \dots D^p \varphi_k(x_k)]$$

Pero el producto $D^p \varphi_1(x_1) \dots D^p \varphi_k(x_k)$ es, en el espacio de kn dimensiones la derivada $D^p(x_1) D^p(x_2) \dots D^p(x_k)$ de orden kp de la función $\varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)$. Por consiguiente $M_k^{(p)}$ es, en este espacio, la derivada de orden kp de M_k :

$$(X, 5, 3) \quad M_k^{(p)} = D^p(x_1)D^p(x_2) \dots D^p(x_k) M_k$$

En particular, el momento de orden 1 de la derivada es igual a la derivada del momento de orden 1:

$$(X, 5, 4) \quad M_1^{(p)} = D^p M_1$$

Y la covarianza $K^{(p)}(x, y)$ de la derivada es la derivada de orden $2p$ de la covarianza $K(xy)$, obtenida al derivar p veces en x y p veces en y :

$$(X, 5, 5) \quad K^{(p)}(x, y) = D^p(x)D^p(y)K(x, y)$$

Caso estacionario de orden 2. - En el caso estacionario de orden 2, existe una distribución de covarianza $K(x)$ del espacio de n dimensiones, definida, como lo hemos visto, por:

$$(X, 5, 6) \quad K(x)[\varphi_1 * \hat{\varphi}_2] = K(x, y)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)]$$

La covarianza $K^{(p)}(x, y)$ de la derivada $D^p T$, según su definición (X, 5, 5) y considerando (X, 5, 6), actúa sobre la función $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ de la manera siguiente:

$$K^{(p)}(xy)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = K(x, y)[D^p \varphi_1(x)D^p \varphi_2(y)] = K(x)[D^p \varphi_1 * (D^p \varphi_2)^V]$$

Pero la transpuesta $(\widehat{D^p \varphi_2})$ de una derivada es igual, salvo el signo, a la derivada de la transpuesta:

$$(\widehat{D^p \varphi_2}) = (-1)^p D^p \hat{\varphi}_2$$

Queda así:

$$K^{(p)}(xy)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = (-1)^p K(x)[D^p \varphi_1 * D^p \hat{\varphi}_2] = (-1)^p (D^p)^2 K(x)[\varphi_1 * \hat{\varphi}_2]$$

De donde el resultado: *La derivada $D^p T$ de una distribución aleatoria estacionaria de orden 2, con covarianza $K(x)$ es también estacionaria de orden 2, y tiene como covarianza $K^{(p)}(x)$ la derivada de orden $2p$ de $K(x)$, salvo el signo, es decir:*

$$(X, 5, 6) \text{ bis} \quad K^{(p)}(x) = (-1)^p (D^p)^2 K(x)$$

Por ejemplo, una derivada primera en la dirección $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$:

$$(X, 5, 7) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial T}{\partial x_n}$$

Tiene por covarianza:

$$(X, 5, 8) \quad K_{\alpha}(x) = -\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} = -\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$$

Estos resultados generalizan exactamente los que se obtienen en la teoría de las funciones aleatorias. Pero, para las funciones aleatorias, la condición necesaria y suficiente para que la derivación (X, 5, 7) sea posible (en el sentido de la derivación en media cuadrática), es que la derivada $\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}$ exista en el sentido usual, y sea una función. La covarianza K_{α} de la derivada está entonces dada por (X, 5, 8). Al contrario, las distribuciones aleatorias, son siempre derivables, y además indefinidamente derivables, de manera que (X, 5, 7) tiene siempre un sentido: Correlativamente, la derivación de $K(x)$ realizada en (X, 5, 8) está, naturalmente, tomada en el sentido de las distribuciones, y $K_{\alpha}(x)$ es también una distribución.

6. - La teoría intrínseca para las distribuciones.

En el párrafo 1, hemos definido las distribuciones aleatorias T sobre un espacio (τ) de funciones de base φ . Pero puede suceder que las leyes $F[T(\varphi_i)]$, o la funcional característica $C(\varphi)$, y particularmente sus momentos de orden 1 y 2, no están definidos para todas las funciones φ de τ , sino más bien para las funciones que pertenecen a un sub-espacio de τ . Nos interesamos exclusivamente al sub-espacio τ° de las funciones φ de τ de suma nula, es decir que verifican:

$$(X, 6, 1) \quad \int \varphi(x) dx = 0$$

Las distribuciones así definidas sobre τ° no corresponden, de manera unívoca, con distribuciones de τ' . A cada distribución definida en τ° le corresponde una clase de funciones de τ' , las cuales se deducen unas de otras por la adición de una constante arbitraria. En efecto, en la transformación de Fourier, las funciones de base de ζ° , es decir las funciones de ζ que verifican (X, 6, 1) son funciones φ de ζ° , es decir funciones de ζ que verifican:

$$\psi(0) = 0$$

Entonces la transformada $\tau = FT$, definida en ζ° , se prolonga sobre ζ arbitrariamente por una medida de Dirac $A\delta(x)$, siendo A una constante arbitraria. Recíprocamente, T definida en ζ° no se puede prolongar sobre ζ (y sobre τ) salvo una constante.

Diremos que una distribución aleatoria obedece a un esquema intrínseco si está definida sobre un espacio τ° y si es estacionaria (o estacionaria de orden 2). Dicho de otra manera, para toda función de base φ de suma nula, la funcional característica $C(\varphi)$ está definida, y verifica:

$$(X, 6, 2) \quad C[\varphi(x+h)] = C[\varphi(x)]$$

Se dirá que estas distribuciones aleatorias intrínsecas tienen *incrementos estacionarios*. Toda función φ que verifica (X, 6, 1), puede, en efecto, ponerse en la forma de una diferencia:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

de dos funciones cualesquiera de τ que admiten la misma suma:

$$\int \varphi_1(x) dx = \int \varphi_2(x) dx$$

La cantidad de metal $T(\varphi) = T(\varphi_1) - T(\varphi_2)$ puede entonces ser considerada como un *incremento*. Si una regularizada $\hat{\alpha} * T = T_\alpha(x)$ es una función continua, esta puede actuar sobre la medida de Dirac $\varphi = \delta(x - a) - \delta(x - b)$ y se tiene:

$$T_\alpha(\varphi) = T_\alpha(a) - T_\alpha(b)$$

Y se trata bien, en este caso particular, del incremento de la función $T_\alpha(x)$ entre los puntos b y a . Solo la diferencia de los valores en b y a está así definida. Los valores puntuales de $T_\alpha(x)$ solo son conocidos salvo una constante, así como T misma.

Naturalmente, la razón mayor de esta restricción a funciones de base de suma nula, o espacio τ° de los incrementos, es para permitir el estudio de fenómenos cuyas varianzas a priori serían infinitas, pero cuyos incrementos conservan varianzas finitas. En el caso de una función aleatoria, hemos visto que esta circunstancia se presenta efectivamente cuando el $\gamma(h)$ es indefinidamente creciente para $|h| \rightarrow \infty$.

Derivadas de una función aleatoria intrínseca. - Una distribución aleatoria intrínseca está definida en τ salvo una constante arbitraria, pero sus derivadas sucesivas, y notablemente sus primeras derivadas están definidas sin ambigüedad para toda función de base φ , de suma cualquiera, luego son distribuciones de τ' . En efecto, una primera derivada DT , por definición, actúa sobre una función de base φ cualquiera según la fórmula:

$$(X, 6, 3) \quad DT(\varphi) = -T(D\varphi)$$

Pero la derivada $D\varphi$ de una función de base tiene siempre una suma nula, como se ve al integrar por partes:

$$\int D\varphi dx = 0$$

De manera que $D\varphi$ es una función de τ° . Así, para una función de base φ cualquiera, la distribución aleatoria estacionaria DT está definida por su funcional característica $C'(\varphi)$:

$$(X, 6, 4) \quad C'(\varphi) = C(-D\varphi)$$

Esta observación va a facilitar el estudio de los momentos de T .

Momentos de orden 1. - El momento M de orden 1 se define exactamente como en el primer párrafo. Es una distribución del espacio de n dimensiones tal que:

$$M(\varphi) = E[T(\varphi)]$$

Para toda función de base φ de suma nula. De (X, 6, 2), se deduce evidentemente:

$$(X, 6, 5) \quad M[\varphi(x+h)] = M[\varphi(x)]$$

Pero no se puede concluir que M es una constante, porque esta relación solo es verdadera para las funciones φ de suma nula. Al contrario, una primera derivada DT , cuyo momento de orden 1 es DM , está definida para todas las funciones φ . El carácter estacionario de DT implica que DM es una constante, de manera que el momento de orden 1, en el cual todas las primeras derivadas son constantes, es obligatoriamente una forma lineal, por otra parte, definida salvo una constante.

$$(X, 6, 6) \quad M(x) = (ax) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

Inversamente, si M es de la forma (X, 6, 6), se verifica inmediatamente que la condición (X, 6, 5) se satisface para cualquier función φ de suma nula:

$$\int M(x)\varphi(x+h)dx = \int M(x-h)\varphi(x)dx = \int M(x)\varphi(x)dx - (ah)\int \varphi(x)dx$$

Así, el momento de orden 1 es un gradiente constante y caracteriza una *deriva lineal*. Al reemplazar, cuando proceda, T por $T - M(x)$, supondremos en adelante que este último momento es idénticamente nulo:

$$(X, 6, 7) \quad M = 0$$

Por otra parte, resulta, que $E[T(\varphi)]$ es nula solamente para las funciones φ de suma nula. Para una función de base cualquiera, esta esperanza matemática solo puede ser determinada salvo una expresión, de la forma $\lambda \int \varphi(x)dx$ en que λ es una constante arbitraria.

Momentos de orden 2. - La covarianza se define exactamente como en el primer párrafo. En virtud del carácter estacionario, la covarianza es una distribución $K(x)$ del espacio de n dimensiones, la cual actúa sobre los productos de convolución $\varphi_1 * \hat{\varphi}_2$ de funciones de base φ_1 y φ_2 de suma nula según la fórmula:

$$(X, 6, 8) \quad K[\varphi_1 * \hat{\varphi}_2] = E[T(\varphi_1)T(\varphi_2)]$$

En particular, la varianza de la variable aleatoria $T(\varphi)$ es igual a:

$$(X, 6, 9) \quad D^2[T(\varphi)] = K[\varphi * \hat{\varphi}] \geq 0$$

Esta expresión debe ser obligatoriamente positiva, para toda función φ de suma nula, pero no para una función de base φ cualquiera. La distribución K no es, por consiguiente, necesariamente de tipo positivo. Diremos que K debe ser de tipo positivo condicional, entendiendo por esto que la desigualdad (X, 6, 9) debe ser verificada solamente por las funciones φ de suma nula.

Busquemos una condición necesaria y suficiente para que $K(x)$ sea de tipo positivo condicional. Sabemos que la primera derivada $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$, definida sobre las funciones de base de suma cualquiera, es también estacionaria de orden 2, y tiene como covarianza la distribución K_α definida en (X, 5, 8), es decir:

$$(X, 6, 10) \quad K_\alpha(x) = -\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}$$

Como $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ actúa sobre todas las funciones de base, $K_\alpha(x)$ debe ser necesariamente de tipo positivo, y el teorema de Bochner nos muestra que es necesario y suficiente para esto que su transformada de Fourier FK_α sea una medida positiva. Si FK designa la transformada de la covarianza $K(x)$ de T , se deduce de (X, 6, 10) y de la fórmula (a, 8, 8) del anexo A:

$$(X, 6, 11) \quad FK_\alpha = 4\pi^2(\alpha u)^2 FK = 4\pi^2(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n)^2 FK$$

Así, para que K sea de tipo positivo condicional, es necesario que el producto de su transformada de Fourier por el cuadrado de una forma lineal (αu) cualquiera, sea una medida positiva.

Más generalmente, como toda forma cuadrática $Q(u)$ definida positiva es una suma de cuadrados de formas lineales, el necesario que el producto de FK por toda forma cuadrática definida positiva sea una medida positiva. Esta condición necesaria es también suficiente. En efecto, pongamos:

$$\begin{cases} \chi = FK \\ \psi = F\varphi \end{cases}$$

La condición (X, 6, 9) es equivalente a la siguiente:

$$(X, 6, 12) \quad \chi[|\psi|^2] \geq 0$$

Si φ es de suma nula, ψ es nula en el origen:

$$\psi(0) = 0$$

Y el cuadrado $|\psi|^2$, función de base indefinidamente derivable, admite, en la vecindad del origen, un desarrollo comenzando por términos de segundo grado. Tomemos una forma cuadrática definida positiva, por ejemplo:

$$\rho^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

La función $\frac{1}{\rho^2} |\psi(u)|^2$ es boreliana y positiva. Por consiguiente, $\rho^2 \chi$, que es, por hipótesis, una medida positiva, actúa sobre esta función, y se tiene bien:

$$\rho^2 \chi \left[\frac{|\psi|^2}{\rho^2} \right] = \chi[|\psi|^2] \geq 0$$

De manera que (X, 6, 12) se verifica para toda función de base ψ nula en el origen, y por consiguiente también (X, 6, 9) para toda función de base φ de suma nula. De donde el resultado buscado:

« La condición necesaria y suficiente para que una distribución K sea de tipo positivo condicional es que el producto de su transformada de Fourier χ por una forma cuadrática definida positiva cualquiera sea una medida positiva »

EJEMPLO. - La distribución r^λ tiene, por transformada de Fourier, en el espacio de n dimensiones:

$$F_n r^\lambda = \pi^{-\lambda - \frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda - n}$$

Ahora, para que el producto de $\rho^{-\lambda - n}$ por una forma cuadrática definida positiva sea una medida positiva, es necesario y suficiente que se tenga:

$$2 - \lambda - n > -n$$

Es decir:

$$(X, 6, 13) \quad \lambda < 2$$

Así, si A es una constante la cual tiene el signo de $\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$, la distribución $A r^\lambda$ es de

tipo positivo condicional, siempre que λ sea inferior a 2, y puede jugar el papel de covarianza de un esquema intrínseco. En particular, para $0 < \lambda < 2$, la función $-r^\lambda$ es de tipo positivo condicional.

También, la función $\log(1/r)$ tiene por transformada de Fourier:

$$F_n \log \frac{1}{r} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi^{-\frac{n}{2}}}{2} \frac{1}{\rho^n} + B\delta$$

Como el producto de la medida de Dirac por una forma cuadrática definida positiva Q es idénticamente nulo, $\log (1/r)$ es siempre de tipo positivo condicional.

Función de dispersión intrínseca. - Cuando $K(x)$ es una función (de tipo positivo condicional), $K(x)$ actúa sobre las medidas de Dirac. Tomemos

$$\varphi(x) = \delta(x - y - h) - \delta(x - y)$$

El incremento $T(\varphi) = T(y + h) - T(y)$ tiene por varianza:

$$K[\varphi * \hat{\varphi}] = K[2\delta(x) - \delta(x - h) - \delta(x + h)] = 2K(0) - 2K(h)$$

De donde la relación entre covarianza y función de dispersión intrínseca:

$$(X, 6, 14) \quad \gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Por otra parte, $K(h)$ está determinado salvo una constante, y es siempre permitido tomar $K(0) = 0$. Se encuentra de nuevo el resultado del párrafo (VIII, 2): Una función intrínseca $\gamma(h)$ debe ser tal que $-\gamma(h)$ sea de tipo positivo condicional. Para que así sea, es necesario y suficiente que todas las derivadas segundas $\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}$ tomadas, en el sentido de las distribuciones, en una dirección α cualquiera sean de tipo positivo, o aún, que el producto de $F\gamma$ por una forma cuadrática definida positiva cualquiera, sea una medida positiva. En particular, $\log r$ y r^λ para $\lambda < 2$ verifican las condiciones requeridas para ser funciones intrínsecas.

Varianzas de extensión. - Sean dos funciones de base φ_1 y φ_2 de suma unidad:

$$\int \varphi_1(x) dx = \int \varphi_2(x) dx = 1$$

La diferencia $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ es una función de base de suma nula. Por definición, llamaremos varianza de extensión de $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_2)$ la varianza de $T(\varphi)$:

$$D^2[T(\varphi)] = D^2[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)]$$

Según (X, 6, 9), esta varianza de extensión está dada por la fórmula general:

$$(X, 6, 15) \quad \left\{ \begin{aligned} D^2[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)] &= K[(\varphi_1 - \varphi_2) * (\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2)] \\ &= K[\varphi_1 * \hat{\varphi}_1 + \varphi_2 * \hat{\varphi}_2 - 2\varphi_1 * \hat{\varphi}_2] \end{aligned} \right.$$

Análogamente, sean cuatro funciones de base $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ de suma unidad, se llamará covarianza de extensión de $T(\varphi_1) - T(\varphi_2)$ y $T(\varphi_3) - T(\varphi_4)$ a la covarianza:

$$(X, 6, 16) \quad \begin{aligned} E\{[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)][T(\varphi_3) - T(\varphi_4)]\} &= K[(\varphi_1 - \varphi_2) * (\hat{\varphi}_3 - \hat{\varphi}_4)] \\ &= K[\varphi_1 * \hat{\varphi}_3 + \varphi_2 * \hat{\varphi}_4 - \varphi_1 * \hat{\varphi}_4 - \varphi_2 * \hat{\varphi}_3] \end{aligned}$$

Al considerar la relación (X, 6, 14) entre la covarianza K y la función intrínseca $\gamma(h)$ el lector verificará sin dificultad que las fórmulas (VIII, 3) corresponden a casos particulares de (X, 6, 15) y (X, 6, 16). Por ejemplo, tomemos:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta(x - x_i) \\ \varphi_2(x) = \frac{1}{V} k(x) \end{cases}$$

En que $k(x)$ es la variable geométrica asociada a un volumen V . Se supone que $K(x) = -\gamma(x)$ es una función, la cual por consiguiente actúa sobre las medidas de Dirac y sobre $k(x)$, (X, 6, 15) proporciona inmediatamente:

$$\begin{aligned} D^2[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)] &= \frac{2}{pV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' \\ &\quad - \frac{1}{p^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Se reconoce sin dificultad la fórmula (VIII, 3, 12). De nuevo, tomando:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta(x - x_j) \\ \varphi_2 = \delta(x - x_i) \\ \varphi_3 = \delta(x - x_i) \\ \varphi_4 = \delta(x - x_k) \end{cases}$$

La fórmula (X, 6, 16) proporciona, en notación de incrementos:

$$E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}) = \gamma(x_i - x_j) + \gamma(x_j - x_k) - \gamma(x_i - x_k) - \gamma(x_j - x_l)$$

Que no es otra cosa que la fórmula de base (VIII, 1, 9)

Efecto de Pepita. - Por definición, diremos que hay efecto de pepita cuando la distribución de covarianza es de la forma:

$$(X, 6, 17) \quad K(x) = C\delta(x) - \gamma(x)$$

$-\gamma(x)$ es una función continua de tipo positivo condicional, es decir una función intrínseca, $\delta(x)$ representa la medida de Dirac, y C es una constante llamada constante de pepita. Toda regularizada $T^*\hat{\alpha}$ por una función de ponderación α con covariograma $A = \alpha * \hat{\alpha}$ admite el semi-covariograma:

$$(X, 6, 18) \quad \gamma_\alpha(h) = -CA(h) + \gamma * A - B$$

B es una constante tal que $\gamma_\alpha(0) = 0$. Así el efecto de pepita se caracteriza por la aparición de una componente $CA(h)$ proporcional al covariograma de la regularizante. En particular, la función de muestreo $\alpha = k(x) / V$, en que $k(x)$ es la variable geométrica de V , y $A = k * \hat{k}$ su covariograma, proporciona el término suplementario $-\frac{C}{V^2}A(h)$. Así, la varianza de una muestra V en un campo V' con covariograma A' está aumentada, debido al efecto de pepita, con un término adicional σ_p^2 llamado *varianza de pepita*, dada por:

$$\sigma_p^2 = -\frac{C}{V'^2} \int A'(h)\delta(h)dh + \frac{C}{V^2} \int A(h)\delta(h)dh = C \left(\frac{A(0)}{V^2} - \frac{A'(0)}{V'^2} \right)$$

Es decir:

$$(X, 6, 19) \quad \sigma_p^2 = \frac{C}{V} - \frac{C}{V'}$$

Esta varianza suplementaria, inversamente proporcional a los volúmenes, traduce la presencia de una componente aleatoria pura: esta es, en efecto, la significación del término $C\delta(x)$ de (X, 6, 17), que es la covarianza de una medida aleatoria con incrementos independientes y densidad de varianza constante C . En presencia de efecto de pepita, la variable regionalizada posee, localmente, un comportamiento aleatorio. Si este efecto es muy marcado (si C es grande), se puede tener, experimentalmente, la impresión que las muestras de tallas pequeñas v sean independientes unas de otras. Naturalmente, para muestras más grandes, el efecto de pepita se amortigua rápidamente, de acuerdo a (X, 6, 18) o (X, 6, 19), y las corre regionalizaciones regionales, escondidas por el efecto de pepita intenso de las muestras pequeñas, se manifiestan de nuevo.

CAPITULO UNDECIMO

LA SUBIDA INTRINSECA BAJO POTENCIA CONSTANTE

SUMARIO

Con al excepción del primer párrafo, este capítulo es de lectura ingrata. Pero no es necesario seguir el detalle de todos los cálculos. Los resultados obtenidos son dados como referencia en vista de las aplicaciones prácticas. No obstante, se notará que de un punto de vista teórico, la subida bajo potencia constante l posee, en las distancias cortas ($r < l$) las mismas características regularizantes que la subida transitiva:

$\left[\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)r^\lambda \right]$ da aquí $\frac{\sqrt{\pi}}{l}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)r^{1+\lambda}$ y los términos complementarios] Se ve bien

que las fórmulas son más complicadas. Se encuentra, en particular, las secuencias donde alternan r^{2p-1} y $r^{2p}\log r$. Al contrario, en las grandes distancias ($r > l$) el efecto regularizador de la subida no se hace sentir, y r^λ proporciona un término cuya parte principal es en r^λ .

El párrafo 1 define las subidas bajo potencia constante, de orden 1 y 2, y proporciona los algoritmos correspondientes, principalmente los de la subida en un esquema isótropo.

El párrafo 2 entrega los desarrollos explícitos, a las largas y a las cortas distancias, de la subida de orden 1 sobre r^λ , primero en el caso general, luego en los tres casos particulares más usuales: λ entero par o impar y términos en $r^{2p}\log r$.

El párrafo 3 proporciona las fórmulas del rectángulo: $\chi_\lambda(b; a)$ es el valor medio de r^λ entre un rectángulo (a, b) y su lado a . $F_\lambda(ab)$ es el valor medio de r^λ en el rectángulo mismo. Los desarrollos se establecen para λ cualquiera, y para los tres casos particulares habituales.

El párrafo 4 da las fórmulas del paralelepípedo: $F_\lambda(a, b, c)$, por ejemplo, es el valor medio de r^λ en el paralelepípedo (a, b, c) . Se obtienen series dobles, ordenadas según las potencias crecientes de a ($a \geq b \geq c$).

1. - Definición y algoritmos de la subida bajo potencia constante.

En representación transitiva, la subida aparece como un caso límite de la regularización de una variable regionalizada por la función de muestreo $p(x) = k(x)$ correspondiente a la toma de la muestra v , cuando el soporte v se reduce a una recta indefinida. En teoría intrínseca, la subida ya no se puede hacer a lo largo de una recta indefinida, porque, debido a que es estacionaria, la regionalización se mantiene homogénea, en todo el espacio y $f(x)$ no puede ser sumable. Al contrario, nada nos impide efectuar la subida a lo largo de un segmento de recta de largo finito. Llamaremos *potencia* a la longitud de este segmento, y estamos interesados en la *subida bajo potencia finita*. Si nos imaginamos una formación geológica horizontal mineralizada, la cual posee, en un punto una potencia, o espesor, dado,

la subida efectuada en este punto y bajo esta potencia constituye una transposición abstracta de la técnica muy corriente que consiste en perforar un sondaje vertical en ese punto.

Existen tres maneras posibles de concebir la subida bajo potencia finita, según que la potencia se supone estocástica, variable pero determinística y finalmente constante. Sin duda, la subida estocástica, sería, desde el punto de vista teórico, la más importante, pero conduce a grandes dificultades matemáticas, cuando se considera $f(x)$ y la potencia de la subida como variables aleatorias no independientes. Una subida bajo potencia variable, pero determinística, de su lado, no permite conservar el carácter estacionario o intrínseco de la función aleatoria. Nos limitaremos entonces a la subida bajo potencia constante, la cual, como aproximación localmente válida de una potencia que no varía muy rápidamente, basta, en general, para las aplicaciones prácticas.

Sea, en el espacio de n dimensiones, un esquema intrínseco $f_n(x)$ el cual admite la función de dispersión $\gamma_n(h)$, y sea un vector $l\alpha$, de longitud o potencia l y con cosenos directores $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, a lo largo del cual deseamos efectuar la subida. A todo punto x de un plano de referencia Π (no paralelo a α), le haremos corresponder la expresión (estocástica):

$$(XI, 1, 1) \quad f_{n-1}(x) = \frac{1}{l} \int_0^l f_n(x + \lambda\alpha) d\lambda$$

Respecto de los puntos x del plano Π , $f_{n-1}(x)$ es una función aleatoria de $n - 1$ dimensiones. Representa la ley media (estocástica) de los vectores paralelos a $l\alpha$ que tienen su origen en el plano Π . Se verificará fácilmente que los incrementos:

$$f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)$$

Entre dos puntos x e y de Π poseen el carácter estacionario, de manera que $f_{n-1}(x)$ es también un *esquema intrínseco con $n - 1$ dimensiones*. Si se supone, como se hace siempre, que los incrementos de f_n tienen un valor probable idénticamente nulo, es evidentemente lo mismo para los incrementos de f_{n-1} . Queda por determinar la función de dispersión intrínseca $\gamma_{n-1}(h)$ de $f_{n-1}(x)$. Según la definición (VIII, 1, 6) se debe tener:

$$(XI, 1, 2) \quad \gamma_{n-1}(h) = \frac{1}{2} D^2 [f_{n-1}(x+h) - f_{n-1}(x)]$$

Dicho de otra manera, $\gamma_{n-1}(h)$ es igual a la mitad de la varianza de extensión de las dos variables aleatorias $f_{n-1}(x+h)$ y $f_{n-1}(x)$ definidas en (XI, 1, 1), y puede ser calculada, a partir de $\gamma_n(h)$, con la ayuda de la fórmula general (VIII, 3, 13) que proporciona aquí:

$$\gamma_{n-1}(h) = \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l \gamma_n(h + (t'-t)\alpha) dt dt' - \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l \gamma_n[(t-t')\alpha] dt dt'$$

La primera integral representa el valor medio de $\gamma_n(x-x')$ cuando las dos extremidades x y x' del argumento $x-x'$ describen, separadamente, dos vectores $l\alpha$ iguales y trasladados uno del otro por la traslación h . La segunda integral representa el mismo valor

medio para $h = 0$, es decir, cuando estos dos vectores coinciden. Al utilizar el algoritmo de Cauchy (I, 2, 9), el $\gamma_{n-1}(h)$ se pone en la forma:

$$(XI, 1, 3) \quad \gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-t) \gamma_n(h+t\alpha) dt - \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-t) \gamma_n(t\alpha) dt$$

En el caso general, el plano Π no es perpendicular a la dirección α , y se dice que la subida es *oblicua*. Cuando Π es perpendicular a α , se dice que la subida es *recta*. Si la subida es recta, y si, además la función intrínseca es isótropa, es decir si se puede poner en la forma de una función $\gamma_n(r)$ de la única variable $r = |h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$, la fórmula (XI, 1, 3) toma la expresión siguiente, llamada *algoritmo de la subida recta isótropa*:

$$(XI, 1, 4) \quad \gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-x) \gamma_n(\sqrt{r^2 + x^2}) dx - \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-x) \gamma_n(x) dx$$

Es esta la expresión que será lo más a menudo utilizada en las aplicaciones. La función γ_{n-1} así determinada permite calcular todas las varianzas y covarianzas de extensión que interesan respecto de la variable $f_{n-1}(x)$ regionalizada en el plano Π .

Subida de orden 2. - Es posible de reiterar la operación, al realizar una nueva subida de potencia l' a lo largo de un vector $\alpha'l'$ el cual pertenece al plano Π (del espacio de $n-1$ dimensiones en el cual está definida f_{n-1}). Se obtiene así, un nuevo esquema intrínseco f_{n-2} , de $n-2$ dimensiones, cuya función de dispersión intrínseca γ_{n-2} se obtiene al aplicar el algoritmo (XI, 1, 3) a γ_{n-1} , o también al aplicar directamente a $\gamma_n(h)$ el algoritmo de la subida doble, cuya expresión, simétrica en $l\alpha$ y $l'\alpha'$ está dada por:

$$(XI, 1, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n-2}(h) = \frac{4}{l^2 l'^2} \int_0^l \int_0^{l'} (l-t)(l'-t') \gamma_n(h+t\alpha+t'\alpha') dt dt' \\ - \frac{4}{l^2 l'^2} \int_0^l \int_0^{l'} (l-t)(l'-t') \gamma_n(t\alpha+t'\alpha') dt dt' \end{array} \right.$$

Este algoritmo hace intervenir el valor medio de $\gamma_n(x-x')$ cuando las dos extremidades x y x' del argumento vectorial $(x-x')$ describen, separadamente, dos paralelogramos construidos sobre los vectores $l\alpha$ y $l'\alpha'$ iguales y trasladados uno de otro en la traslación h .

Si γ_n es isótropo, y si las dos subidas son rectas (es decir si los tres vectores h , α y α' son perpendiculares), que es el caso más común en las aplicaciones, (XI, 1, 5) se pone en la forma siguiente, llamada algoritmo de la subida recta isótropa de orden 2:

$$(XI, 1, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n-2}(r) = \frac{4}{l^2 l'^2} \int_0^l \int_0^{l'} (l-x)(l'-x') \gamma_n(\sqrt{r^2 + x^2 + x'^2}) dx dx' \\ - \frac{4}{l^2 l'^2} \int_0^l \int_0^{l'} (l-x)(l'-x') \gamma_n(\sqrt{x^2 + x'^2}) dx dx' \end{array} \right.$$

La subida intrínseca, sobre todo en el caso isótropo, aparece como menos simple que la subida transitiva. Los parámetros se multiplican (l , para la subida de orden 1, l y l' para la subida de orden 2), contrariamente a lo que pasaba en transitivo, y los cálculos son menos simples. Pero es necesario ver bien que una fórmula como (XI, 1, 6) describe la evolución, a lo largo de una recta (de un plano con $n - 2$ dimensiones) de las leyes medias aportadas por las secciones rectas de un prisma cuya base es el rectángulo ll' .

2.- Subida recta bajo potencia constante de r^λ .

En vista de las aplicaciones prácticas, vamos a tratar explícitamente el caso de la subida recta de orden 1 bajo potencia constante del semi-variograma isótropo $\gamma_n(r) = r^\lambda$. Los resultados se expresan con la ayuda de las funciones hipergeométricas, ya encontradas en el capítulo II, y a las cuales está consagrado el Anexo E.

En lo que sigue, pondremos:

$$(XI, 2, 1) \quad \gamma_\lambda(r) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-x)(x^2 + r^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx$$

Esta función γ_λ que representa el valor medio de $|h|^\lambda$ cuando las dos extremidades del vector h recorren, separadamente, los dos lados de largo l de un rectángulo lr , difiere del variograma buscado $\gamma_{n-1}(r)$ por una simple constante, que se determina fácilmente, según (XI, 1, 4), al escribir:

$$(XI, 2, 2) \quad \gamma_{n-1}(r) = \gamma_\lambda(r) - \gamma_\lambda(0)$$

Para calcular γ_λ , se pondrá, en primer lugar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\lambda = I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \\ I_1(\lambda) = \frac{2}{l} \int_0^l (x^2 + r^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx \\ I_2(\lambda) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (x^2 + r^2)^{\frac{\lambda}{2}} x dx \end{array} \right.$$

Al hacer el cambio de variable $x = \sqrt{u}$, la segunda integral se calcula exactamente y da:

$$I_2(\lambda) = \frac{2}{l^2(\lambda+2)} \left[(l^2 + r^2)^{1+\frac{\lambda}{2}} - r^{\lambda+2} \right]$$

En notación de funciones hipergeométricas, se tiene también:

$$(XI, 2, 3) \quad \begin{cases} I_2(\lambda) = r^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 2, -\frac{l^2}{r^2}\right) \\ = \frac{2}{\lambda+2} l^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, -1-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right) \end{cases}$$

Estas expresiones se desarrollan explícitamente por medio de la fórmula (E, 1, 1).

La primera se puede utilizar en las grandes distancias ($l < r$), y la segunda en las cortas distancias ($l > r$).

Para calcular $I_l(\lambda)$, se hará el cambio de variables $x = l\sqrt{v}$, lo que proporciona:

$$I_1(\lambda) = r^\lambda \int_0^1 \left[1 + v \frac{l^2}{r^2} \right]^{\frac{\lambda}{2}} v^{-\frac{1}{2}} dv$$

Al comparar con la representación integral (E, 1, 4) de la hipergeométrica, queda:

$$(XI, 2, 4) \quad I_1(\lambda) = 2r^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{l^2}{r^2}\right)$$

Esta fórmula entrega un desarrollo utilizable a grandes distancias ($r > l$). Para obtener un desarrollo en r^2/l^2 válido en las distancias cortas ($r < l$), debemos transformar (XI, 2, 4) con la ayuda de la fórmula de cambio (E, 3, 1), del Anexo E. Queda así:

$$(XI, 2, 5) \quad I_1(\lambda) = \frac{2}{\lambda+1} l^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) l}$$

Al considerar (XI, 2, 3) y (XI, 2, 4), se obtiene el desarrollo de $\gamma_\lambda(r)$ para $r \geq l$ en la forma siguiente:

$$(XI, 2, 6) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_\lambda(r) &= r^\lambda \left[2F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{l^2}{r^2}\right) - F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 2, -\frac{l^2}{r^2}\right) \right] \\ &+ r^\lambda \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda}{2} - k + 1\right)}{(2k+1)(k+1)!} \left(\frac{l}{r}\right)^{2k} \right] \end{aligned} \right.$$

Se notará que para l/r muy pequeño, la parte principal de $\gamma_\lambda(r)$ es r^λ . Así, la *subida no altera el comportamiento de una función intrínseca a las grandes distancias*.

Al contrario, en las cortas distancias ($r \leq l$), considerando (XI, 2, 3) y (XI, 2, 5), se obtiene la expresión más compleja siguiente:

$$(XI, 2, 7) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_\lambda(r) &= \frac{2}{\lambda+1} l^\lambda F\left[-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right] + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) l} \\ &- \frac{2}{\lambda+2} l^\lambda F\left[-\frac{\lambda}{2}, -1-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right] + \frac{2}{\lambda+2} \frac{r^{\lambda+2}}{l^2} \end{aligned} \right.$$

En forma explícita, este desarrollo se escribe:

$$(XI, 2, 8) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_\lambda(r) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) l} + \frac{2}{\lambda+2} \frac{r^{\lambda+2}}{l^2} \\ &+ l^\lambda \left[\frac{2}{(1+\lambda)(2+\lambda)} + \frac{1}{\lambda-1} \frac{r^2}{l^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda}{2} - k + 2\right)}{(\lambda+1-2k)k!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2k} \right] \end{aligned} \right.$$

Este desarrollo hace aparecer - como en transitivo - una parte regular, que es una serie entera par en r/l , con un factor l^λ que se introduce por razones de homogeneidad dimensional, y una parte irregular. Contrariamente a lo que se producía en el caso de la subida transitiva, esta parte irregular no solo comprende un término, sino dos, uno en $r^{1+\lambda}/l$, y el otro en $r^{2+\lambda}/l^2$. Sin embargo, cuando r/l es muy pequeño, la parte principal de γ_λ está constituida por este término en $r^{1+\lambda}/l$, y una simple inspección de su coeficiente muestra que, salvo el factor l/l , que se introduce por razones de homogeneidad dimensional, la regla de la subida, para esta parte principal, es la misma que en transitivo:

$$\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)r^\lambda \rightarrow \sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)r^{\lambda+1}$$

Así, en las distancias cortas, la subida intrínseca tiene el mismo efecto regularizador que la subida transitiva.

En las aplicaciones prácticas, se tendrán casos con exponentes λ enteros, pares o impares, y también a términos logarítmicos de la forma $r^{2p} \log r$. Siendo $2p$ un entero par. Esperamos encontrar la secuencia logarítmica de la subida transitiva, y en efecto, la encontraremos, a pesar de la gran complejidad de las fórmulas. Examinemos, sucesivamente, estos tres casos particulares.

Caso de un entero $\lambda = 2p$. - Este caso es particularmente simple, $\gamma_\lambda(r)$ se reduce a un polinomio par homogéneo, de grado $2p$ en r y l . En efecto, el desarrollo (XI, 2, 6) se detiene en el término de orden $k = p$. Se tiene así:

$$(XI, 2, 9) \quad \begin{cases} \gamma_2(r) = r^2 + \frac{1}{6}l^2 \\ \gamma_4(r) = r^4 + \frac{1}{3}r^2l^2 + \frac{1}{15}l^4 \\ \gamma_6(r) = r^6 + \frac{1}{2}r^4l^2 + \frac{1}{5}r^2l^4 + \frac{1}{28}l^6 \end{cases}$$

Caso de un entero impar $\lambda = 2p - 1$. - En este caso el desarrollo (XI, 2, 6), que es infinito, solo es utilizable cuando $r \geq l$. En las cortas distancias, $r \leq l$, el desarrollo (XI, 12, 8) presenta singularidades, y debe ser estudiado por el método habitual de paso al límite (se pone $\lambda = 2p - 1 + \varepsilon$, y se busca el límite de los diferentes términos cuando ε tiende a 0). Se espera ver aparecer un término en $r^{2p} \log r$. En efecto, en (XI, 2, 8), solo dos términos presentan singularidades para $\lambda = 2p - 1$: por una parte el término aislado $r^{1+\lambda}$, y por la otra el término de orden $k = p$ de la serie entera par. Escribamos estos dos términos:

$$\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{l} + l^\lambda \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-p+2\right)}{(\lambda+1-2p)p!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2p}$$

El lector verificará fácilmente que, cuando λ tiende a $2p - 1$, la suma de los dos términos admite el límite siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{r^{2p}}{l} \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} p!} \left[\log \frac{l^2}{r^2} - 2 - \frac{\Gamma'\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right] \\ &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{r^{2p}}{l} \left[\log \frac{l^2}{r^2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right] \end{aligned}$$

Se deduce la expresión de $\gamma_{2p-1}(r)$:

$$(XI, 2, 10) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{2p-1}(r) &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{r^{2p}}{l} \left[\log \frac{l^2}{r^2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right] \\ &+ \frac{2}{2p+1} \frac{r^{2p+1}}{l^2} + l^{2p+1} \left[\frac{1}{p(2p+1)} + \frac{1}{2p-2} \frac{r^2}{l^2} \right] \\ &+ \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq p}}^{\infty} \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\dots\left(p-k+\frac{3}{2}\right)}{2(p-k)k!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2k} \end{aligned} \right.$$

Y, en el caso particular cuando $\lambda = l$:

$$(XI, 2, 11) \quad \gamma_1(r) = l \left[\frac{1}{3} + \frac{r^2}{l^2} \left(\log \frac{l}{r} + \log 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \frac{r^3}{l^3} - \frac{1}{8} \frac{r^4}{l^4} + \frac{1}{96} \frac{r^6}{l^6} + \dots \right]$$

En el caso particular $\lambda = l$, se puede, por otra parte, mediante cálculos directos, obtener la expresión exacta:

$$(XI, 2, 12) \quad \gamma_1(r) = \frac{1}{3} \sqrt{l^2 + r^2} + \frac{2}{3} \frac{r^2}{l^2} \left[r - \sqrt{l^2 + r^2} \right] + \frac{r^2}{l} \log \frac{l + \sqrt{l^2 + r^2}}{r}$$

Términos logarítmicos en $r^{2p} \log r$. - De una manera general, se obtendrá la subida del término $r^{\lambda} \log r$ al derivar en λ los desarrollos anteriores. En las aplicaciones se encontrarán sobre todo términos en $r^{2p} \log r$, cuando $2p$ es un entero par. En la forma de (XI, 2, 8) aparecen simplificaciones notables, debido a que $\Gamma(-\lambda/2)$ toma un valor infinito. El término singular principal en $r^{l+\lambda}$:

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) l} = \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{sen} \lambda \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{1+\lambda}{2} \pi} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda\right) l}$$

Da, en efecto, al hacer $\lambda = 2p$ y luego derivar en λ :

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} \frac{r^{1+2p}}{l} = \pi \frac{2^{2p} (p!)^2 r^{2p+1}}{(2p+1)! l}$$

Se reconoce, salvo el factor l/l , la expresión de la subida transitiva sobre $r^{2p} \log r$. Como ejemplo, y para ser útil en las aplicaciones, vamos a dar la expresión explícita de la subida sobre $\log r$ y $r^{2p} \log r$ ($p=0$ y $p=1$). Para $\log r$, los desarrollos para distancias largas ($r > l$) y a distancias cortas ($r < l$) son los siguientes:

$$(XI, 2, 13) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{d}{d\lambda} \gamma_\lambda(r) \right]_{\lambda=0} &= \log r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(2k+1)} \left(\frac{l}{r} \right)^{2k} \\ &= \log l - \frac{3}{2} + \pi \frac{r}{l} + \frac{r^2}{l^2} \left[\log \frac{r}{l} - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(2k-1)} \left(\frac{r}{l} \right)^{2k} \end{aligned} \right.$$

Por otra parte, se puede obtener, por cálculos directos, la expresión entera siguiente:

$$(XI, 2, 14) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{d}{d\lambda} \gamma_\lambda(r) \right]_{\lambda=0} &= \log l - \frac{3}{2} - \log \operatorname{sen} \theta \\ &+ \frac{2\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{\log \cos \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} \quad \left(\theta = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{l}{r} \right) \end{aligned} \right.$$

Análogamente, los desarrollos a larga distancia ($r > l$) y a corta ($r < l$) distancia, de la subida efectuada sobre el término $r^2 \log r$ tienen las expresiones siguientes:

$$(XI, 2, 15) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{d}{d\lambda} \gamma_\lambda(r) \right]_{\lambda=2} &= r^2 \log r + \frac{1}{6} l^2 \log r \\ &+ r^2 \left[\frac{1}{12} \frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)(k-1)(2k+1)} \frac{l^{2k}}{r^{2k}} \right] \\ &= \frac{2}{3} \pi \frac{r^3}{l} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{l^2} \log r + l^2 \log l \left[\frac{1}{6} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{r^4}{l^4} \right] \\ &+ \left[-\frac{7}{72} - \frac{r^2}{l^2} - \frac{7}{8} \frac{r^4}{l^4} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(2k-3)} \frac{r^{2k}}{l^{2k}} \right] \end{aligned} \right.$$

3. - Las fórmulas del rectángulo para r^2 .

En las aplicaciones prácticas y principalmente, como veremos en el capítulo XII, en el cálculo de las varianzas de estimación, tratamos, por subidas sucesivas, de reducirnos al caso de un esquema intrínseco de una dimensión. Además del semi-variograma $\gamma(h)$ de una sola dimensión, se utiliza constantemente las dos funciones auxiliares $\chi(h)$ y $F(h)$ definidas por:

$$(XI, 3, 1) \quad \begin{cases} \chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx \\ F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^l x \chi(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx \end{cases}$$

La función $\chi(h)$ representa el valor medio de $\gamma(x)$, cuando x representa la distancia entre un punto dentro de un segmento de largo h y una de sus extremidades fijas. La función $F(h)$ representa el valor medio de $\gamma(x)$ cuando x es la distancia entre dos puntos que describen independientemente el segmento de longitud h . $F(h)$ permite el cálculo de la varianza de un segmento l en un campo de longitud L , según la fórmula (VIII, 4, 4):

$$\sigma^2(l | L) = F(L) - F(l)$$

Análogamente $\chi(h)$ permite el cálculo de la covarianza $\sigma(0, l | L)$ en un campo L de un segmento l y una de sus extremidades, conforme a (VIII, 4, 7):

$$\sigma(0, l | L) = F(L) - \chi(l)$$

Así, de nuevo, la varianza de extensión de una muestra de largo l pequeño en un segmento L implantada en su centro, se pone en la forma:

$$\sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{L}{2}\right) - F(L) - F(l)$$

Las funciones auxiliares $\chi(h)$ y $F(h)$, obtenidas al aplicar (X, 3, 1) a las expresiones de $\gamma_\lambda(r)$ obtenidas en el párrafo precedente, están dadas por las fórmulas del rectángulo (para r^2), las cuales vamos a establecer explícitamente, en virtud de su importancia para las aplicaciones.

Notaciones y método. - Como $\gamma_\lambda(h)$ representa el valor medio de r^2 entre los dos lados l distantes de h de un rectángulo lh , $\chi(h)$ y $F(h)$ van a tener, también, significaciones geométricas precisas: $\chi(h)$ va a ser el valor medio de r^2 entre el rectángulo lh y uno de sus lados l , y $F(h)$ el valor medio de r^2 en el mismo rectángulo, cuando r representa la distancia entre dos puntos que recorren independientemente el rectángulo.

Para mayor claridad, reemplazaremos l y h por a y b , y supondremos siempre que:

$$(XI, 3, 2) \quad b \leq a$$

Designaremos por $F_\lambda(a, b)$ el valor medio de r^λ en el rectángulo (a, b) , por $\chi_\lambda(a; b)$ el valor medio de r^λ entre el rectángulo y su lado mayor a , e igualmente por $\chi_\lambda(a; b)$ este valor medio tomado entre el rectángulo y su lado menor b .

$F_\lambda(a, b)$ es una expresión simétrica en a y b . Se tiene, en efecto:

$$(XI, 3, 3) \quad F_\lambda(a, b) = \frac{4}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b (a-x)(b-y)(x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx dy$$

Se demuestra fácilmente que $F_\lambda(a, b)$ se expresa con la ayuda de las funciones hipergeométricas:

$$(XI, 3, 4) \quad \left\{ \begin{aligned} F_\lambda(a, b) &= \frac{4a^2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F\left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{b^2}{a^2}\right] \\ &+ \frac{4b^2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F\left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a^2}{b^2}\right] \\ &- \frac{4}{a^2 b^2} \frac{(a^2 + b^2)^{2+\frac{\lambda}{2}} - a^{\lambda+1} - b^{\lambda+1}}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)} \end{aligned} \right.$$

Por el contrario, $\chi_\lambda(b; a)$ y $\chi_\lambda(a; b)$ no son simétricas en a y b . De (XI, 3, 1) resulta que estas dos funciones se deducen de $F_\lambda(a, b)$ por derivaciones en b y en a respectivamente, es decir:

$$(XI, 3, 5) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_\lambda(b; a) &= \frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial b} b^2 F_\lambda(a, b) \\ \chi_\lambda(a; b) &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} a^2 F_\lambda(a, b) \end{aligned} \right.$$

Análogamente, de nuevo, designemos por $\gamma_\lambda(b; a)$ al valor medio de r^λ entre los dos grandes lados de longitud a del rectángulo, distantes de b , y por $\gamma_\lambda(a; b)$ el mismo valor medio entre los lados pequeños de longitud b , distantes de a . Se tiene:

$$(XI, 3, 6) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_\lambda(b; a) &= \frac{\partial}{\partial b} b \chi_\lambda(b; a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial b^2} b^2 F_\lambda(a, b) \\ \gamma_\lambda(a; b) &= \frac{\partial}{\partial a} a \chi_\lambda(a; b) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} a^2 F_\lambda(a, b) \end{aligned} \right.$$

Se podrían obtener los desarrollos explícitos, a partir de (XI, 3, 4) y transformando la segunda hipergeométrica por la fórmula de cambio (E, 3, 1). Es más simple proceder por integraciones y derivaciones término a término. Se partirá de $\gamma_\lambda(b; a)$ cuyo desarrollo está

dado por (XI, 2, 8), con $r = b$, y $l = a$. Por integraciones sucesivas término a término en b (lo que es legítimo porque $b < a$), se deduce $\chi_\lambda(b; a)$, luego $F_\lambda(a, b)$. Finalmente, por derivaciones sucesivas término a término en a de $F_\lambda(a, b)$, se obtiene $\chi_\lambda(a; b)$ y $\gamma_\lambda(a; b)$: Esta última función $\gamma_\lambda(a; b)$ debe coincidir con (XI, 2, 6), al poner $r = a$ y $l = b$. Esta circunstancia es general y muestra que, en las fórmulas del rectángulo, *los desarrollos a largas distancias pueden siempre deducirse de los desarrollos a corta distancia, por integraciones y derivaciones sucesivas*, mientras que el paso inverso no es posible, en general.

Desarrollos explícitos para λ cualquiera. - $\gamma_\lambda(b; a)$ es una expresión homogénea de grado λ en a y b . El término general, de la forma $b^\mu a^{\lambda+\mu}$, proporciona, por integración en b , los términos:

$$\frac{1}{\lambda+1} b^\mu a^{\lambda+\mu}$$

Y:

$$\frac{2}{(\mu+1)(\mu+2)} b^\mu a^{\lambda+\mu}$$

Para $\chi_\lambda(b; a)$ y $F_\lambda(a, b)$ respectivamente.

Por derivación, según (XI, 3, 5) Y (XI, 3, 6), se obtienen los términos:

$$\frac{\lambda+2-\mu}{(\mu+1)(\mu+2)} b^\mu a^{\lambda-\mu}$$

Y:

$$\frac{(\lambda+2-\mu)(\lambda+1-\mu)}{(\mu+1)(\mu+2)} b^\mu a^{\lambda-\mu}$$

Para $\chi_\lambda(a; b)$ y $\gamma_\lambda(a; b)$. Dejaremos al lector, el cuidado de verificar que (XI, 2, 6) se deduce efectivamente de (XI, 2, 8). Los términos irregulares en $b^{l+\lambda} / a$ y $b^{2+\lambda} / a^2$ desaparecen puramente y simplemente, y esta circunstancia señala bien que no es posible, de manera inversa, deducir (XI, 2, 8) del desarrollo a largas distancias (XI, 2, 6).

Siempre, con $b \leq a$, los desarrollos de F_λ y de las funciones χ_λ son los siguientes:

$$(XI, 3, 7) \left\{ \begin{aligned} F_{\lambda}(a, b) &= \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)(\lambda+3)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{b^{1+\lambda}}{a} + \frac{4}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)} \frac{b^{2+\lambda}}{a^2} \\ &+ a^{\lambda} \left[\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{6(\lambda-1)} \frac{b^2}{a^2} \right. \\ &\left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)(k+1)!} \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(XI, 3, 8) \left\{ \begin{aligned} \chi_{\lambda}(b; a) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{b^{1+\lambda}}{a} + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} \frac{b^{2+\lambda}}{a^2} \\ &+ a^{\lambda} \left[\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{3(\lambda-1)} \frac{b^2}{a^2} \right. \\ &\left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)k!} \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(XI, 3, 9) \left\{ \begin{aligned} \chi_{\lambda}(a; b) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)(\lambda+3)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{b^{1+\lambda}}{a} \\ &+ a^{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\lambda}{2}-k+1\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)(k+1)!} \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right] \end{aligned} \right.$$

En las aplicaciones, λ será lo más a menudo un entero par o impar, y se deberá tratar términos logarítmicos en $r^{2p} \log r$. Examinemos estos casos particulares.

Caso de un entero par $\lambda = 2p$. - Los desarrollos anteriores siguen siendo utilizables, y se simplifican considerablemente. Por una parte $\Gamma(-\lambda/2)$ es infinito y el término irregular en $b^{1+\lambda}/a$ desaparece, por otra parte, la serie entera se reduce a un polinomio par de grado $2p$ en b/a . No es necesario escribir aquí las expresiones explícitas.

Caso de un entero impar $\lambda = 2p - 1$. - En este caso, se deben efectuar las mismas integraciones y derivaciones sucesivas sobre $\gamma_{2p-1}(b; a)$, cuyo desarrollo se deduce de (XI, 2, 10) al poner:

$$r = b \text{ y } l = a$$

Un término de la forma $b^\mu a^{\lambda-\mu} \log(b/a)$ aporta las contribuciones siguientes a:

$$\chi(b; a), F(a, b) \text{ y } \chi(a; b)$$

Respectivamente:

$$(XI, 3, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^{\lambda-\mu} b^\mu}{\mu+1} \log \frac{b}{a} - \frac{a^{\lambda-\mu} b^\mu}{(\mu+1)^2} \\ \frac{2}{(\mu+1)(\mu+2)} a^{\lambda-\mu} b^\mu \log \frac{b}{a} - \frac{2(2\mu+3)}{(\mu+1)^2 (\mu+2)^2} a^{\lambda-\mu} b^\mu \\ \frac{2+\lambda-\mu}{(\mu+1)(\mu+2)} a^{\lambda-\mu} b^\mu \log \frac{b}{a} - \left[\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{(2+\lambda-\mu)(2\mu+3)}{(\mu+1)^2 (\mu+2)^2} \right] a^{\lambda-\mu} b^\mu \end{array} \right.$$

Al aplicar estos resultados a (XI, 2, 10), se obtiene:

$$(XI, 3, 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_{2p-1}(b; a) = \frac{(2p)!}{2^{2p} (2p+1)(p!)^2} \\ \left[2 \log \frac{a}{b} + \frac{2}{2p+1} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right] \frac{b^{2p}}{a} \\ F_{2p-1}(a, b) = \frac{2^{1-2p} (2p)!}{(2p+1)(2p+2)(p!)^2} \frac{b^{2p}}{a} \\ \left[2 \log \frac{a}{b} + \frac{1}{p+1} + \frac{2}{2p+1} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right] + \dots \\ \chi_{2p-1}(a; b) = \frac{2^{-2p} (2p)!}{(2p+1)(2p+2)(p!)^2} \frac{b^{2p}}{a} \\ \left[2 \log \frac{a}{b} + \frac{2}{2p+1} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - 2 \log 2 \right] + \dots \end{array} \right.$$

En las fórmulas (XI, 3, 1), solo se ha escrito explícitamente el término irregular, que reemplaza, a la vez el término en $b^{l+\lambda}/a$ y el término $a^\lambda b^{2p}/a^{2p}$ de los desarrollos (XI, 3, 7), (XI, 3, 8) y (XI, 3, 9): Los otros son idénticos a los términos correspondientes de estos desarrollos, escritos con $\lambda = 2p - 1$.

Términos logarítmicos en $r^{2p} \log r$. - El caso de los términos en $r^{2p} \log r$ se trata, a partir de los desarrollos (XI, 2, 13) y (XI, 2, 14), por el mismo método de integraciones y derivaciones sucesivas. Daremos solamente la expresión explícita de la función F en el caso en que $p = 0$ y $p = 1$: Las funciones χ se deducen fácilmente por aplicación de (XI, 3, 5):

$$(XI, 3, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} F_{\lambda}(a, b) \right]_{\lambda=0} = \log a - \frac{3}{2} + \frac{\pi b}{3a} + \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \left[\log \frac{b}{a} - \frac{25}{12} \right] \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} b^{2k}}{k(k-1)(k+1)(2k-1)(2k+1) a^{2k}} \\ \left[\frac{d}{d\lambda} F_{\lambda}(a, b) \right]_{\lambda=2} = \frac{\pi b^3}{15a} + \frac{1}{3} \frac{b^4}{a^2} \log \frac{b}{a} - \frac{11}{900} \frac{b^4}{a^2} \\ \quad + \frac{1}{6} a^2 \log a + \frac{1}{6} b^2 \log a \\ \quad + a^2 \left[-\frac{7}{12} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} - \frac{7}{120} \frac{b^4}{a^4} \right. \\ \quad \left. \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{k(k+1)(k-1)(k-2)(2k-3)(2k+1) a^{2k}} \right] \end{array} \right.$$

4. - Las fórmulas del paralelepípedo para r^{λ} .

Una segunda subida, efectuada sobre los desarrollos obtenidos, conduce a las fórmulas del paralelepípedo. Sean $a \geq b \geq c$ las tres aristas del paralelepípedo. Designemos por $F_{\lambda}(a, b, c)$ al valor medio de r^{λ} en el paralelepípedo, por $\gamma_{\lambda}(a; bc)$ al valor medio de r^{λ} entre 2 caras bc distantes de a , por $\chi_{\lambda}(a; bc)$ al valor medio de r^{λ} entre el paralelepípedo y una cara bc . El desarrollo de $\gamma_{\lambda}(r; a)$, puesto en la forma:

$$\gamma_{\lambda}(r; a) = \sum_{\mu} A_{\mu} a^{\lambda-\mu} b^{\mu}$$

Proporciona, al efectuar una subida término a término bajo la potencia b , e integrando en seguida en c :

$$(XI, 4, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\lambda}(c; ab) = \sum_{\mu} A_{\mu} a^{\lambda-\mu} \gamma_{\mu}(c; b) \\ \chi_{\lambda}(c; ab) = \sum_{\mu} A_{\mu} a^{\lambda-\mu} \chi_{\mu}(c; b) \\ F_{\lambda}(a, b, c) = \sum_{\mu} A_{\mu} a^{\lambda-\mu} F_{\mu}(b, c) \end{array} \right.$$

Al derivar en b , se obtienen las fórmulas de las secciones intermedias:

$$(XI, 4, 2) \quad \begin{cases} \chi_\lambda(b; ac) = \frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial b} b^2 F_\lambda(a, b, c) = \sum_{\mu} A_{\mu} a^{\lambda-\mu} \chi_{\mu}(b; c) \\ \gamma_\lambda(b; ac) = \frac{\partial}{\partial b} b \chi_\lambda(b; ac) = \sum_{\mu} A_{\mu} a^{\lambda-\mu} \gamma_{\mu}(b; c) \end{cases}$$

Análogamente, al derivar en a , se obtienen las fórmulas de las secciones pequeñas:

$$(XI, 4, 3) \quad \begin{cases} \chi_\lambda(a; bc) = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} a^2 F_\lambda(a, b, c) = \frac{1}{2} \sum (\lambda + 2 - \mu) A_{\mu} a^{\lambda-\mu} F_{\mu}(b, c) \\ \gamma_\lambda(a; bc) = \frac{\partial}{\partial a} a \chi_\lambda(a; bc) = \frac{1}{2} \sum (\lambda + 2 - \mu)(\lambda + 1 - \mu) A_{\mu} a^{\lambda-\mu} F_{\mu}(b, c) \end{cases}$$

Estas fórmulas se explicitan en la forma de series dobles. No es útil escribir aquí las expresiones generales. Es mejor, en cada caso particular, calcular numéricamente los primeros términos, deteniendo los desarrollos de γ_{μ} , χ_{μ} o F_{μ} en los términos que se quiera, para obtener la aproximación deseada.

CAPITULO DUODECIMO

LA ESTIMACION Y EL KRIGEADO

SUMARIO

Este capítulo, largo y a veces difícil, sobre todo en el párrafo 3, es fundamental para las aplicaciones prácticas. En el plano teórico, se establecen las reglas de correspondencia término a término entre los desarrollos limitados de $\gamma(h)$ y de la varianza de estimación, menos simples que en transitivo, pero teniendo la misma significación.

Párrafo 1. - Este párrafo, de fácil lectura, formula el problema general de la estimación, el cual comprende dos partes: Por una parte la elección de la ponderación a efectuar sobre los valores experimentales disponibles para obtener el mejor estimador: Es el kriging. Por otra parte, el cálculo de la varianza de estimación, que debe conducirse de manera bien diferente según la naturaleza de la red de muestreos: Regular con implantación preferencial, regular con implantación flotante, aleatorio estratificado o aleatorio puro.

Párrafo 2. - Propiedades generales de las mallas regulares con implantación preferencial. Después de establecer la fórmula teórica de la varianza de estimación, se desarrollan dos principios simples de aproximación: Composición de términos de tajada y de sección, el cual permite reducir todos los cálculos a problemas de una sola dimensión, y composición de varianzas de extensión elementales: Este principio, menos general, solo se puede aplicar en una dimensión y solamente en ciertos casos.

Párrafo 3. - Este párrafo, consagrado al cálculo explícito de las varianzas de estimación con una sola dimensión (caso al cual es posible reducirse siempre), es largo y difícil. Se desarrolla, en primer lugar, con la ayuda de la fórmula de Mac Laurin el principio de correspondencia término a término entre los desarrollos limitados de $\gamma(h)$ y de la varianza de estimación.

Si $\gamma(h) = \sum c_\lambda h^\lambda$, $\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum R_\lambda c_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2} \sum R'_\lambda c_\lambda a^\lambda$. Pero este principio solo se aplica en el caso en que el desarrollo $\sum c_\lambda h^\lambda$ es válido hasta $h = a$, siendo a la malla. Cuando no es así, se aplica el principio de composición de varianzas de extensión [reglas prácticas (XII, 3, 12) y (XII, 3, 13)].

Enseguida se pasa a establecer la forma explícita de la regla de correspondencia, es decir al cálculo de R_λ y R'_λ . Los cálculos son bastante largos, pero no es necesario seguirlos en detalle. El resultado esencial (XII, 3, 21) se particulariza a los casos $\lambda = 2k$, $2k - 1$ y a los términos en $h^{2k} \log h$. Las fórmulas se establecen en el caso de un dispositivo centrado (muestras implantadas en el centro de su segmento de influencia). El caso de un dispositivo cerrado (estimación del segmento comprendido entre una primera y una última muestra) se examina rápidamente: Las fórmulas son prácticamente las mismas.

Párrafo 4. - Estudio de mallas regulares con implantación flotante: La red regular está aquí implantada, en su conjunto, de manera cualquiera con respecto al campo V . Este, en general, no es conocido a priori, y el error cometido en su estimación se repercute, en

parte, sobre la estimación de la ley media (efecto de borde). Las fórmulas se obtienen fácilmente al pasar a las representaciones transitivas. Enseguida se comparan las mallas regulares con implantación preferencial e implantación flotante.

Párrafo 5. - Mallas aleatorias y aleatorias estratificadas. En el caso aleatorio puro, σ_N^2 se obtiene al dividir por N la varianza de las muestras en V . En el caso aleatorio estratificado, y si el campo V es conocido a priori, se divide por N la varianza – más pequeña – de las muestras en sus zonas de influencia v . Si V no es conocido a priori, aparece un efecto de borde, que se pone en evidencia al pasar a transitivo. Finalmente, se comparan las mallas regulares y aleatorias estratificadas, las primeras son siempre mejores que las segundas cuando estas son mallas adaptadas.

Párrafo 6. - Este párrafo está consagrado al kriging, es decir a la determinación de la ponderación mediante la cual, la varianza de estimación es mínima. La ecuación general (XII, 7, 6) se obtiene por los métodos del cálculo de variaciones. Se establece un teorema de superposición importante para las aplicaciones: Todo kriging puede obtenerse por superposición de krigings puntuales. Enseguida se analiza el caso particular del kriging continuo a lo largo de curvas (trabajos mineros), y el kriging discontinuo por un número finito de muestras puntuales. El interés práctico del kriging está sobre todo ligado al hecho que permite evitar un error sistemático en la estimación de una zona favorable seleccionada. Algunas particularidades (efecto de pantalla, simetría) permiten reducir de manera considerable los cálculos.

1. - El problema de la estimación.

En un gran número de aplicaciones, es necesario proceder a la estimación de un valor medio, ponderado o no, de una variable regionalizada en un campo V , a partir de los resultados de un muestreo fragmentario. Por ejemplo interesa la cantidad:

$$(XII, 1, 1) \quad Z = \frac{1}{V} \int_V p(x) f(x) dx$$

En que $f(x)$ es una variable regionalizada, y $p(x)$ una función de ponderación, de suma unidad, nula fuera del campo V .

$$(XII, 1, 2) \quad \int_V p(x) dx = 1$$

Esta cantidad Z será llamada, para abreviar el lenguaje, ley media [ponderada por $p(x)$] del campo V , o más brevemente, *ley ponderada de V* . Para proceder a la estimación de Z , se dispone, por ejemplo, de los valores numéricos tomados por la variable regionalizada en un conjunto V' , finito o no, discontinuo o continuo, de puntos x . En el caso en que solo se dispone de los valores numéricos de la variable no puntual $\hat{\alpha} * f$, regularizada de f por una función de ponderación o de muestreo α , por ejemplo, si los datos disponibles son las leyes de muestras no puntuales de volumen v , debemos reducirnos al caso de muestras puntuales, al regularizar el semi-variograma $\gamma(h)$, como fue indicado en el párrafo (VIII,

3). Con la ayuda de este muestreo fragmentario, y de una segunda función de ponderación $\lambda(x)$ - de suma unidad -, y nula al exterior de V' , Se forma un *estimador*:

$$(XII, 1, 3) \quad Y = \int_{V'} \lambda(x) f(x) dx$$

Cuyo valor numérico, conocido experimentalmente, constituye una estimación del valor numérico, desconocido Z . El problema de la estimación comprende dos partes bien distintas: La elección del estimador Y mismo, es decir, la elección de la función de ponderación $\lambda(x)$, y la precisión de esta estimación.

En la teoría de los esquemas intrínsecos, las cantidades Z e Y se interpretan como integrales estocásticas, es decir como variables aleatorias. Con la reserva que la función de ponderación haya sido elegida con suma unidad:

$$(XII, 1, 4) \quad \int_{V'} \lambda(x) dx = 1$$

Se sabe que el error $Y - Z$ cometido al extender a V la ley de Y del muestreo V' , puede caracterizarse por una varianza de extensión $D^2(Y - Z)$, calculable por las fórmulas generales del capítulo VIII. Esta varianza de extensión, que llamaremos también *varianza de estimación*, responde entonces al segundo problema propuesto, el cual concierne la precisión de la estimación. Pero, naturalmente, el valor numérico de $D^2(Y - Z)$ depende de la elección que se ha hecho de la función de ponderación $\lambda(x)$, sometida a la condición (XII, 1, 4). Es natural entonces, elegir, entre todas las funciones $\lambda(x)$ posibles de suma unidad y nulas fuera de V' , aquella que conduce al valor más pequeño de $D^2(Y - Z)$. Así, el primer problema que es la elección del estimador Y debe ser resuelto por los métodos llamados de *krigeado*²⁸, que consisten en determinar la función $\lambda(x)$ que realiza el mínimo de la varianza de estimación. Estos métodos serán presentados en el párrafo XII, 6. En muchos casos, el recurso al krigado no se impone, y nos podemos contentar con una función $\lambda(x)$ simple, elegida a priori. Con el costo de una pérdida de precisión, a menudo despreciable, se evitan así cálculos largos y tediosos. Por ejemplo, supongamos que se tenga:

$$p(x) = \frac{1}{V} k(x)$$

Siendo $k(x)$ la variable geométrica asociada al campo V . En este caso la cantidad Z a estimar es la ley media ordinaria (no ponderada) de V . Si se dispone de una red de muestreos puntuales suficientemente numerosos, implantados, según una malla regular en toda la extensión de V , en los puntos $x_1, x_2 \dots x_n$, es totalmente legítimo, en general, tomar el estimador:

²⁸ Esta terminología, de origen geoestadístico, hace alusión a los trabajos de D. G. Krige en los yacimientos de oro de Africa del Sur.

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Que es una simple media aritmética. En esta caso, la varianza de estimación se debe calcular, según (VIII, 3, 12), por la fórmula:

$$(XII, 1, 5) \quad D^2(Y - Z) = \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(x - x') dx dx'$$

Naturalmente, si N es grande, el cálculo directo de la expresión (XII, 1, 5) sería bastante tedioso, y estamos conducidos a buscar fórmulas de aproximación. Este será el objetivo de los párrafos 2 a 5. Pero, para desarrollar tales fórmulas, estamos obligados a distinguir varios casos, según la naturaleza, regular o no, y el carácter, preferencial o no, de la implantación de la red de muestreos en el campo geométrico V . En las aplicaciones prácticas, se puede, en general, reducirse a uno u otro de los tres casos siguientes:

Mallas irregulares con implantación preferencial²⁹. - Muy a menudo, el campo geométrico V en el cual estamos interesados se elige en el seno de una regionalización más vasta que la que se ve con los resultados de los muestreos mismos. Habiendo retenido, entre todos los muestreos posibles, un número N de entre ellos, considerados como favorables, se define el campo V como la reunión de las zonas de influencia de las muestras seleccionadas. Por construcción, cada muestra de la red ocupa en su zona de influencia, una posición preferencial. Por ejemplo, a dos dimensiones y para una malla rectangular, el campo V está constituido por paneles rectangulares centrados en las muestras retenidas (dispositivo centrado), o admitiendo estos muestreos como vértices (dispositivo cerrado): las muestras ocupan, relativamente a estos paneles, una posición, la cual es centrada o periférica, pero siempre preferencial, y hay una sintonía perfecta entre la geometría de la red y la del campo.

Mallas regulares con implantación flotante³⁰. - A menudo, también el campo V pre-existe en la naturaleza y no es elegido por el hombre. Es en particular el caso en que interesa la totalidad de una regionalización, y ya no una porción seleccionada al interior de un campo más vasto. En este caso, el campo V no es, en general, conocido a priori, y la red de muestreos con malla regular tendrá pocas chances de ocupar la misma posición preferencial que en el caso anterior. Entre las muestras periféricas, unas caerán muy cerca de las fronteras del campo y otras muy lejos. Se podrá, en general, admitir que todo sucede como si la red regular fuera implantada, en su conjunto, de una manera aleatoria, o aún, como en transitivo, como si uno cualquiera de los muestreos, tomado como origen de la red, estuviera implantado al azar en el paralelepípedo de la malla.

²⁹ En geoestadística se dice también esquema de reconocimiento con campo flotante e implantación fija.

³⁰ Terminología geoestadística equivalente: Esquema de reconocimiento con campo fijo e implantación flotante.

Mallas aleatorias y aleatorias estratificadas. - A pesar de que, en general, no sea una práctica muy recomendable, se tiene, a veces, que los muestreos están implantados un poco no importa donde, y no se pueden reducir a una red regular. En ciertos casos todo sucede como si cada muestra fuera implantada al azar en V , de manera independiente de las otras, y se dice que la malla es *aleatoria pura*. Más a menudo, sin tener una malla regular, existe el esfuerzo de mantener en V una « densidad » de muestreo aproximadamente constante. En este caso todo sucede como si V estuviera dividido en zonas de influencia iguales entre ellas, y como si una muestra estuviera implantada al azar en cada una de las zonas de influencia, de manera independiente de las otras. En este caso se dice que la malla es *aleatoria estratificada*.

De estos tres tipos de malla, el primero, que es el más importante para las aplicaciones, es también el más difícil de tratar. Le consagraremos los párrafos 2 y 3, y los dos otros tipos serán examinados enseguida en los párrafos 4 y 5. El último párrafo será consagrado a los métodos generales del krigeado.

2. - Las mallas regulares con implantación flotante.

Se dice que una malla regular es con implantación preferencial cuando el campo geométrico V está constituido por la reunión de N poliedros v_i adjuntos, todos iguales y trasladados unos de otros, llamados zonas de influencia, y cuando los puntos de muestreo x_j están implantados en el centro de las zonas de influencia (*dispositivo centrado*) o en los vértices de los poliedros v_i (*dispositivo cerrado*). Se supone que los muestreos son puntuales (porque siempre nos podemos reducir a este caso al reemplazar $f(x)$ por una regularizada), y, para estimar la ley media de V :

$$Z = \frac{1}{V} \int_V f(x) dx$$

Se forma la media aritmética de las leyes de las N muestras puntuales disponibles:

$$Y = \frac{1}{N} \sum_i f(x_i)$$

La varianza de estimación, la cual designaremos por σ_N^2 está dada por la fórmula general (XII, 1, 5)

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 = D^2(Y - Z) &= \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx \\ \text{(XII, 2, 1)} & - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' \end{aligned}$$

Es necesario ver bien que, en el segundo miembro, la serie doble $\frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j)$ aparece

como una expresión aproximada del término mixto $\frac{1}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx$ el cual es también

una expresión aproximada de la integral doble. Así, la varianza de estimación aparece como una diferencia segunda de cantidades muy vecinas unas de otras, particularmente difícil de calcular numéricamente, aún cuando el número N de las muestras sea poco importante. La fórmula (IV, 1, 2) que proporciona la varianza de estimación en representaciones transitivas es análoga a (XII, 2, 1), pero más simple, porque solo comporta una diferencia de dos cantidades muy vecinas. Naturalmente, esta analogía no es fortuita, sino que traduce un parentesco muy profundo, y la mayor complejidad de la varianza de estimación intrínseca es imputable al carácter preferencial de la implantación, lo cual no tiene equivalente en la estimación transitiva. Para elaborar fórmulas de aproximación, tenemos la elección entre dos principios muy diferentes, uno corresponde a una simple transposición de los resultados obtenidos en el capítulo IV, mientras que el segundo no tiene y no puede tener equivalente en transitivo.

Composición de términos de tajada y términos de sección.- En la red de puntos de muestreo x_i , es fácil distinguir planos y rectas de mayor densidad. Razonemos, por ejemplo, en el espacio de 3 dimensiones. Al atribuir la ley media de las muestras de las líneas de mayor densidad, la de las líneas, a los planos de mayor densidad, y finalmente la media de los planos al campo V entero, se cometen tres errores de extensión sucesivos, que deben, naturalmente ser sumados. Si estos tres errores tienen covarianzas nulas, la varianza de estimación resultante será simplemente la suma de las tres varianzas de extensión correspondientes a estos tres errores:

$$(XII, 2, 2) \quad \sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_3}^2$$

La tres varianzas $\sigma_{N_1}^2, \sigma_{N_2}^2$ y $\sigma_{N_3}^2$ de extensión de los puntos a las líneas, de las líneas a los planos, y de los planos al campo total, tienen, respectivamente los nombres de *término de línea*, *término de sección* y *término de tajada*.

Naturalmente, el principio de composición expresado en (XII, 2, 2) solo tiene valor en la medida que los tres errores de extensión son efectivamente independientes, o, al menos, pueden ser observados como tales en primera aproximación. La intuición sugiere bien que así debe ser, por lo menos para las funciones intrínsecas que no tengan un comportamiento demasiado regular en el origen. Estamos faltos de medios para demostrarlo mediante cálculos, como lo pudimos hacer, con la ayuda de desarrollos limitados, en el caso de las representaciones transitivas. Pero la analogía profunda de las varianzas de estimación transitiva e intrínseca, tal como aparece en las fórmulas generales (IV, 1, 12) y (XII, 2, 1) aporta un argumento suplementario, y admitiremos que el principio de aproximación (XII, 2, 2) es utilizable para las funciones intrínsecas usuales.

El interés mayor del principio de composición de términos de línea, tajada y de secciones es que, evidentemente, permite reducir el cálculo de cualquier varianza de estimación a una serie de problemas que comportan una sola dimensión. Basta entonces, con saber calcular las varianzas de una sola dimensión para deducir todas las otras por composición. Antes de

pasar las reglas explícitas de cálculo, es necesario sin embargo, examinar un segundo principio de aproximación, muy diferente, pero igualmente útil en las aplicaciones.

Composición de varianzas de extensión elementales. – En el caso de un dispositivo centrado, la fórmula general (XII, 2, 1) se puede poner de otra manera. En efecto, designemos por Z_i la ley media de la zona de influencia v_i en cuyo centro x_i ha sido efectuado el muestreo puntual de la ley $f(x_i)$. La varianza de estimación σ_E^2 de $f(x_i)$ y Z_i :

$$(XII, 2, 3) \quad \sigma_E^2 = D^2[Z_i - f(x_i)] = \frac{2}{v_i} \int \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{v_i^2} \iint \gamma(x - x') dx dx'$$

Se llamará *varianza de extensión elemental* de la muestra x_i en su zona de influencia. El error total, cometido en la estimación de Z , es igual a la media aritmética de los errores ε_i cometidos en la estimación de cada una de las zonas de influencia v_i , porque todas ellas tienen el mismo volumen:

$$Z - Y = \frac{1}{N} \sum_i [Z_i - f(x_i)] = \frac{1}{N} \sum_i \varepsilon_i$$

Al tomar la varianza de los dos miembros, se obtiene la forma siguiente, equivalente a (XII, 2, 4):

$$(XII, 2, 4) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$$

Los términos $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ son covarianzas de extensión, y pueden ser calculados por las fórmulas generales del capítulo VIII. Si, en (XII, 2, 4), la suma de todas estas covarianzas de extensión puede ser considerada como despreciable, quedará la fórmula muy simple:

$$(XII, 2, 5) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2$$

Que expresa un principio de composición de las varianzas de extensión elementales, y supone, naturalmente, que se tiene el derecho de considerar como independientes los errores cometidos al extender a dos zonas de influencia distintas, las leyes de las muestras tomadas en sus centros.

Los dos principios de aproximación (XII, 2, 2) y (XII, 2, 5) son manifiestamente incompatibles. Es necesario elegir entre ellos. En efecto, en el caso general, la suma de las covarianzas de extensión que figura en (XII, 2, 4) no es despreciable. Nos damos cuenta - y se puede verificar por el cálculo - al imaginar, en el espacio de 2 dimensiones, una malla rectangular muy grande. Si x_i y x_j son dos puntos de muestreo vecinos en una misma línea de mayor densidad, son demasiado próximos uno del otro, respecto de la longitud de sus zonas de influencia, para ser extendidos a ellas independientemente uno del otro. Fuera

de estos casos particulares (función intrínseca isótropa y malla cúbica o cuadrada, o más generalmente función intrínseca que presenta una anisotropía geométrica y malla adaptada, es decir presentando la misma anisotropía que la función intrínseca), la fórmula (XII, 2, 5) no será ciertamente utilizable.

Así, estamos conducidos a *subordinar el principio de composición de varianzas de extensión elementales al principio de composición de términos de tajada y de sección*. Se aplicará, en primer lugar la fórmula (XII, 2, 2), y es solamente en el cálculo de las varianzas de una sola dimensión tales como σ_N^2 , que se podrá esperar utilizar (XII, 2, 5): aún con una sola dimensión, como vamos a ver, la composición de varianzas de extensión está lejos de ser siempre justificada.

3. - Cálculo de varianzas de estimación.

Según lo que precede, basta con calcular las varianzas de estimación en un espacio *con una sola dimensión*. Sean entonces, en el espacio de una dimensión, $\gamma(h)$, $\chi(h)$ y $F(h)$ la función intrínseca y las dos funciones auxiliares ya introducidas en (XI, 3, 1):

$$(XII, 3, 1) \quad \begin{cases} \chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(u) du \\ F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h u \chi(u) du = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-u) \gamma(u) du \end{cases}$$

Designemos por a la malla, y por N el número de puntos de muestreo los que se supone están implantados *en el centro* de su zona de influencia, en los puntos de abscisa:

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)a$$

El campo geométrico está, en este caso, constituido por la recta $(0, L)$, con:

$$L = Na$$

Se tiene aquí:

$$\begin{cases} \int_0^L \gamma(x - x_i) dx = x_i \chi(x_i) + (L - x_i) \chi(L - x_i) \\ \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h \gamma(x - x') dx dx' = F(h) \end{cases}$$

De manera que la fórmula general (XII, 2, 1) toma la forma siguiente:

$$(XII, 3, 2) \quad \sigma_N^2 = \frac{4}{NL} \sum_i x_i \chi(x_i) - F(L) - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j)$$

Para ordenar esta expresión, se puede observar que se tiene:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) = \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} (N-k) \gamma(ka)$$

Y utilizar, para $F(L)$, las dos expresiones equivalentes escritas en (XII, 3, 1). Se obtiene así:

$$(XII, 3, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^2 = \frac{4}{NL} \sum_{i=1}^N x_i \chi(x_i) - \frac{4}{L^2} \int_0^L x \chi(x) dx \\ \quad + \frac{2}{L^2} \int_0^L (L-x) \gamma(x) dx - \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} (N-k) \gamma(ka) \end{array} \right.$$

Así la varianza de estimación es igual a la suma de dos restos de tipo Euler Mac Laurin, iguales a los errores cometidos en el cálculo numérico aproximado de dos integrales simples. Por otra parte, es más cómodo, separar los términos en $1/N$ o en $1/L$ y los términos en $1/N^2$ o $1/L^2$, lo cual proporciona la descomposición siguiente:

$$(XII, 3, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^2 = T_1 + T_2 \\ T_1 = \frac{2}{L} \int_0^L \gamma(x) dx \\ \quad - \frac{2a}{L} \left[\gamma(a) + \gamma(2a) + \dots + \gamma[(N-1)a] + \frac{1}{2} \gamma(Na) \right] \\ T_2 = \frac{4a}{L^2} \sum_{i=1}^N x_i \chi(x_i) - \frac{4}{L^2} \int_0^L x \chi(x) dx - \frac{2}{L^2} \int_0^L x \gamma(x) dx \\ \quad + \frac{2a}{L^2} \left[a\gamma(a) + 2a\gamma(2a) + \dots + (N-1)a\gamma[(N-1)a] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} Na\gamma(Na) \right] \end{array} \right.$$

Los dos términos T_1 y T_2 se tratan de la misma manera y verifican las mismas propiedades. Para evitar complicaciones de escritura, examinaremos en detalle el más simple de los dos, que es T_1 . El método, exactamente como en el capítulo IV, va a consistir en transformar la expresión de T_1 , diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de una misma integral, con la ayuda de la fórmula de Euler-Mac Laurin (IV, 2, 1). Naturalmente, como $\gamma(h)$ presenta en general singularidades en el origen, esta fórmula no es utilizable en todo el intervalo $(0, L)$, sino solamente en un intervalo (a, L) . Como, por otra parte, $\gamma(0)$ es nulo, escribiremos:

$$T_1 = \frac{2}{L} \int_0^a \gamma(x) dx - \frac{a}{L} \gamma(a) + \frac{2}{L} \left[\int_0^L \gamma(x) dx - \frac{a}{2} \gamma(a) - a\gamma(2a) - \dots - a\gamma[(N-1)a] - \frac{a}{2} \gamma(Na) \right]$$

Supondremos que $\gamma(x)$ posee las condiciones de continuidad y de derivabilidad requeridas en el intervalo (a, L) para transformar, con la ayuda de la fórmula de Euler-Mac Laurin, el término que figura en el paréntesis. Se obtiene así:

$$(XII, 3, 5) \quad T_1 = \frac{2}{L} \int_0^a \gamma(x) dx - \frac{a}{L} \gamma(a) + \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{B_{2p} a^{2p}}{(2p)!} [\gamma^{(2p-1)}(L) - \gamma^{(2p-1)}(a)]$$

En general, (XX, 3, 5) deberá ser considerado como un desarrollo limitado en vez de una serie entera. Los términos que allí figuran son de dos especies diferentes. Los primeros, que comprenden la integral $\int_0^a \gamma(x) dx$ y las derivadas impares $\gamma^{(2p-1)}(a)$ tomadas en el punto a ,

solo hacen intervenir los valores tomados por la función intrínseca en el intervalo $(0, a)$. Son el equivalente exacto del término de extensión $T_0(a)$ de la fórmula (IV, 2, 5)... Los otros, por el contrario, solo hacen intervenir los valores tomados por las derivadas impares $\gamma^{(2p-1)}(L)$ en $L = Na$, y corresponden al término de Zitterbewegung $T_Z(a)$ de (IV, 2, 5). Los despreciaremos siempre, como en el caso transitivo, pero ahora con más razones, porque los $\gamma(h)$ usuales, funciones crecientes de h , tienen, lo más a menudo, un crecimiento que se aminora para las grandes distancias de h , de manera que las derivadas en $L = Na$ son despreciables respecto de las derivadas en a , siempre que N no sea muy pequeño.

Si la función intrínseca $\gamma(h)$ admite un desarrollo limitado de la forma:

$$(XII, 3, 6) \quad \gamma(h) = \sum C_\lambda |h|^\lambda$$

Utilizable hasta $h = a$, cada una de las componentes en h^λ aporta al término T_1 (se excluye el Zitterbewegung) su contribución $T_1(h^\lambda)$, que es de la forma:

$$(XII, 3, 7) \quad T_1(h^\lambda) = \frac{1}{N} R_\lambda a^\lambda$$

En que R_λ es un coeficiente independiente de N y de a , como se ve fácilmente al reemplazar $\gamma(h)$ por h^λ en (XII, 3, 5).

De la misma manera, se vería que cada una de las componentes en h^λ aporta al término T_2 de (XII, 3, 4), excluyendo, aquí también, el Zitterbewegung, una contribución:

$$(XII, 3, 8) \quad T_2(h^\lambda) = \frac{1}{N^2} R'_\lambda a^\lambda$$

En que R'_λ es un coeficiente independiente de N y de a .

Así, cuando el desarrollo (XII, 3, 6) es utilizable justo hasta $h = a$, se puede obtener un desarrollo limitado de la varianza de estimación válido en la vecindad de $a = 0$, al aplicar término a término el principio de correspondencia siguiente:

$$(XII, 3, 9) \quad \sigma_N^2 = \sum_{\lambda} C_{\lambda} [T_1(h^{\lambda}) + T_2(h^{\lambda})] = \frac{1}{N} \sum C_{\lambda} R_{\lambda} a^{\lambda} + \frac{1}{N^2} \sum C_{\lambda} R'_{\lambda} a^{\lambda}$$

Procederemos, en un instante, al cálculo efectivo de los coeficientes R_{λ} y R'_{λ} que figuran en la regla de correspondencia (XII, 3, 9). Pero es necesario, antes, examinar que pasa si el desarrollo (XII, 3, 6) solo es utilizable hasta $h = a$. Esta circunstancia se produce frecuentemente cuando a no es muy pequeño. Hemos encontrado un ejemplo en el capítulo XI. La función intrínseca $\gamma_{\lambda}(r)$, que se deduce de r^{λ} por subida de orden 1, admite uno u otro de los desarrollos diferentes (XI, 2, 6) y (XI, 2, 8) según que la distancia r es mayor o menor a la potencia l de la subida:

Para una malla a mayor que la potencia 1, el desarrollo (XI, 2, 8) no es utilizable hasta $h = a$, y por consiguiente la regla de correspondencia no puede ser aplicada en la forma (XII, 3, 9).

En este caso, la solución consiste en utilizar el principio de aproximación (XII, 2, 5), es decir *el principio de composición de varianzas de extensión elementales*. Como la función intrínseca ha cambiado de aspecto en el intervalo $(0, a)$, esperamos bien que las covarianzas de extensión $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ sean despreciables, es decir a que cada muestra se extiende de manera independiente de las otras a su zona de influencia de longitud a . De hecho, al utilizar las funciones auxiliares (XII, 3, 1) y poniendo:

$$u = |i - j|a$$

La fórmula general permite calcular $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$. Se encuentra:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = -\gamma(u) + \frac{2}{a} \left[\left(u + \frac{a}{2} \right) \chi \left(u + \frac{a}{2} \right) - \left(u - \frac{a}{2} \right) \chi \left(u - \frac{a}{2} \right) \right] \\ - \frac{1}{2a^2} [(u+a)^2 F(u+a) - 2u^2 F(u) - (u-a)^2 F(u-a)]$$

Se ven aparecer las diferencias primera y segunda de las funciones $u\chi(u)$ y $u^2 F(u)$ tomadas en torno de $u = |i - j|a$, valor superior o igual a a . Lo más a menudo, $\gamma(h)$ admite un desarrollo limitado o también un desarrollo en serie respecto de $h = u$ (es una consecuencia del hecho muy general que las singularidades analíticas de un $\gamma(h)$ están localizadas en la vecindad del origen). En estas condiciones, $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ admite también un desarrollo limitado, o en serie entera, cuya expresión se obtiene sin dificultad:

$$(XII, 3, 10) \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+2)!} \left[2 - \frac{k+1}{2^{2k-2}} \right] \gamma^{(2k)}(u)$$

Se verifica que el término en a^2 , correspondiente a $k = 1$, tiene un coeficiente nulo, de manera que el desarrollo (XII, 3, 10) comienza por el término $\frac{1}{576}a^4\gamma^{(4)}(u)$, que es de cuarto orden en a . Por otra parte, u es mayor o igual a a , y en $h = a$ el semi-variograma, que ya ha sido cambiado, por hipótesis, de aspecto analítico, ha entrado, en general, en la zona de crecimiento lento, de manera que las derivadas de orden cuatro son también muy pequeñas. Por otra parte, no se puede deducir que $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ es siempre despreciable. En particular, para un $\gamma(h)$ muy regular en la vecindad del origen, admitiendo, por ejemplo un comportamiento en h^4 o h^5 respecto de $h = 0$, podría ocurrir muy bien que las covarianzas $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ sean del mismo orden de magnitud que la varianza de extensión elemental σ_E^2 . En la mayoría de las aplicaciones, sin embargo, $\gamma(h)$ no posee una regularidad tan elevada en el origen, y los $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ pueden efectivamente ser despreciados.

Regla práctica. - En resumen, obtenemos la regla práctica siguiente para el cálculo de varianzas de estimación con una sola dimensión:

Si la función intrínseca $\gamma(h)$ admite un desarrollo limitado de la forma:

$$(XII, 3, 11) \quad \gamma(h) = \sum C_\lambda h^\lambda$$

válido hasta las distancias h iguales a la malla a , se obtiene un desarrollo limitado en a de la varianza de estimación al aplicar el principio de correspondencia término a término:

$$(XII, 3, 12) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum C_\lambda R_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2} \sum C_\lambda R'_\lambda a^\lambda$$

Si, por el contrario, el desarrollo (XII, 3, 11) no es utilizable hasta $h = a$, se aplicará el principio de composición de varianzas de extensión elementales:

$$(XII, 3, 13) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2 = \frac{1}{N} \left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) \right]$$

Falta por calcular los valores numéricos de los coeficientes R_λ y R'_λ de la regla de correspondencia (XII, 3, 2).

Forma explícita de la regla de correspondencia. - Para establecer la regla de correspondencia, utilizaremos, como lo habíamos hecho en el caso transitivo, un $\gamma(h)$ particular, el cual presenta un término en h^λ , y procederemos por identificación. Tomemos por ejemplo:

$$(XII, 3, 14) \quad \gamma(x) = \int_1^\infty (1 - e^{-ux}) \frac{u^{\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} du = -x^\lambda + \Phi(x)$$

Se puede verificar, con la ayuda de la fórmula (D, 13) del Anexo D, que $\Phi(x)$ es una serie entera en x , de manera que la función $\gamma(x)$ definida en (XII, 3, 14) contiene el término $-x^\lambda$ como el único término con exponente no entero en su desarrollo respecto del origen (el caso en el cual λ es un entero, se tratará sin dificultad por paso al límite).

Como este $\gamma(x)$ se obtiene por superposición de funciones de la forma $(1 - e^{-ux})$, examinaremos en primer lugar el caso particular, muy simple, donde se tiene:

$$(XII, 3, 15) \quad \gamma(x) = 1 - e^{-ux}$$

El cálculo de los coeficientes T_1 y T_2 de las relaciones (XII, 3, 4) no ofrece dificultades particulares para el $\gamma(x)$ exponencial (XII, 3, 5). Se encuentra para T_1 :

$$T_1 = \frac{1 - e^{-uL}}{N} \left[\frac{2}{1 - e^{-ua}} - 1 - \frac{2}{ua} \right]$$

La presencia del Zitterbewegung se manifiesta por los términos en e^{-uL} , efectivamente, muy pequeños, por poco que $uL = uNa$ sea grande. Lo despreciaremos. Después de la exclusión del Zitterbewegung, T_1 toma la expresión siguiente:

$$(XII, 3, 16) \quad T_1 = \frac{1}{N} \left[\frac{2}{1 - e^{-ua}} - 1 - \frac{2}{ua} \right] = \frac{1}{N} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kua} - \frac{2}{a} \int_0^{\infty} e^{-ux} dx \right]$$

La expresión de T_1 recuerda estrechamente la de una varianza de estimación transitiva. Designemos, en efecto, por ξ_a el operador lineal que, a todo covariograma transitivo $g(h)$ le asocia la varianza de estimación transitiva $\sigma^2(a)$ según la fórmula (IV, 2, 2):

$$(XII, 3, 17) \quad \xi_a(g) = ag(0) + 2a \sum_{k=1}^{\infty} g(ka) - 2 \int_0^{\infty} g(h) dh$$

Al comparar con (XII, 3, 16), se obtiene, sin dificultad:

$$(XII, 3, 18) \quad T_1 = \frac{1}{aN} \xi_a(e^{-ux})$$

La fórmula (XII, 3, 18) resuelve el problema en el caso del semi-variograma exponencial $1 - e^{-ux}$. Para una función intrínseca de la forma general (XII, 3, 14), se deben multiplicar las expresiones de T_1 y de T_2 por la función de ponderación $u^{-\lambda-1} / \Gamma(-\lambda)$, e integrar en u de 1 al infinito. Pero esta integración, que interesa la variable u , y al símbolo ξ_a , el cual solo actúa sobre la variable a , pueden ser invertidos. Poniendo entonces:

$$g_\lambda(x) = \int_1^{\infty} \frac{u^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} e^{-ux} du = \gamma(0) - \gamma(x)$$

Obtenemos T_1 en la forma:

$$(XII, 3, 19) \quad T_1 = \frac{1}{aN} \xi_a(g_\lambda)$$

Según (XII, 3, 14), g_λ posee, en su desarrollo respecto del origen, un término x^λ , solo de su especie, y una serie entera en x . A este término único le corresponde, según la regla (IV, 2, 8), el término $T_\lambda a^{1+\lambda}$ en $\xi_a(g_\lambda)$, siendo el coeficiente T_λ determinado por (IV, 2, 9):

$$T_\lambda = -2 \operatorname{sen} \frac{\lambda\pi}{2} \frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda}$$

Por consiguiente, al término $-x^\lambda$ de $\gamma(x)$ de (XII, 3, 14) le corresponde el término siguiente, en el desarrollo de la varianza de estimación intrínseca:

$$T_1(-x^\lambda) = \frac{1}{N} T_\lambda a^\lambda$$

Se observa enseguida que, según (XII, 3, 4), T_2 se deduce de $2x\chi(x) - x\gamma(x)$ de la misma manera que T_1 de $\gamma(x)$. Al término x^λ de $\gamma(x)$ le corresponde el término $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} x^{1+\lambda}$ en $2x\chi(x) - x\gamma(x)$. De donde:

$$T_2(-x^\lambda) = \frac{1}{N^2} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} T_{\lambda+1} a^\lambda$$

Al cambiar los signos, y al reemplazar T_λ por su valor, obtenemos la forma explícita de la fórmula de correspondencia intrínseca (XII, 3, 9):

$$(XII, 3, 20) \quad \begin{cases} T_1(h^\lambda) = \frac{2}{N} \operatorname{sen} \frac{\lambda\pi}{2} \frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda} a^\lambda \\ T_2(h^\lambda) = \frac{2}{N^2} \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)(2+\lambda)} \cos \frac{\lambda\pi}{2} B_{2+\lambda} a^\lambda \end{cases}$$

Así, en teoría intrínseca, la varianza de estimación comporta un término principal en $1/N$ que se calcula exactamente como en transitivo, y un término en $1/N^2$ que no tiene equivalente en transitivo: La aparición de este término suplementario en $1/N^2$ no debe ser asociada al fenómeno observado. En el capítulo XI, para la subida de r^λ : al lado del

término $\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{l} r^{1+\lambda}$, equivalente exacto de la subida transitiva, aparece un

término suplementario, de orden superior en $\frac{r^{2+\lambda}}{l^2}$. En un caso como en el otro, este

término suplementario está ligado al carácter finito de las operaciones intrínsecas (subida bajo potencia finita, suma sobre un número finito N de muestras). Para N o l muy grande, este término se hace despreciable, y caemos, asintóticamente, sobre las fórmulas transitivas.

En las aplicaciones, λ será a menudo un entero, par o impar, y nos interesaremos también en los términos en $x^{2k} \log x$.

Caso en que $\lambda = 2k$, entero par. - Si λ es un entero par, T_1 es idénticamente nulo, como en transitivo, pero T_2 es diferente de cero:

$$(XII, 3, 21) \quad \begin{cases} T_1(x^{2k}) = 0 \\ T_2(x^{2k}) = \frac{1}{N^2} \frac{(-1)^{k+1} (2k-1)}{(2k+1)(k+1)} B_{2+2k} a^{2k} \end{cases}$$

Así, una función intrínseca $\gamma(h)$ muy regular en el origen, es decir que solo contiene términos pares en x^{2k} , no conduce, como en transitivo, a una varianza de estimación idénticamente nula, sino más bien a una varianza en $\frac{a_{2k}}{N^2}$.

Caso $\lambda = 2k - 1$, entero impar. - En este caso, se observa la circunstancia inversa: T_2 es idénticamente nulo, pero no T_1 :

$$(XII, 3, 22) \quad \begin{cases} T_1(x^{2k-1}) = \frac{1}{N} \frac{(-1)^{k+1} B_{2k}}{k} a^{2k} \\ T_2(x^{2k-1}) = 0 \end{cases}$$

Caso de un término logarítmico $x^{2k} \log x$. - Este caso se trata sin dificultad, al derivar (XII, 3, 20) con respecto a λ y haciendo $\lambda = 2k$. Solo el término T_1 admite una expresión simple:

$$(XII, 3, 23) \quad T_1(x^{2k} \log x) = \frac{(-1)^k}{N} \frac{\pi}{1+2k} B_{1+2k} a^{2k}$$

OBSERVACION. - En las aplicaciones, se despreciará, lo más a menudo, el término T_2 . En efecto, si N es grande, T_2 , que es en $1/N^2$, es pequeño al lado de T_1 . Naturalmente, si N es pequeño, esta aproximación podría no ser legítima. Sin embargo, hay que ver bien que las fórmulas como (XII, 3, 20) son también aproximadas, porque no consideran el Zitterbewegung, y que éste no es, en realidad, despreciable, salvo cuando N no es muy pequeño. En el caso particular en que $N = l$, es decir cuando hay *una sola muestra* implantada en el centro de un segmento de longitud a , la varianza de estimación coincide con la varianza de extensión elemental σ_E^2 , definida por:

$$\sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a)$$

En este caso particular, el principio de correspondencia toma la forma siguiente:

$$(XII, 3, 24) \quad T(x^\lambda) = \left[\frac{2^{1-\lambda}}{\lambda+1} - \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \right] a^\lambda$$

Muy diferente de (XII, 3, 20). El caso difícil es aquel en que N , sin ser igual a 1, es, sin embargo, muy pequeño para que el Zitterbewegung sea despreciable ($N = 3$ o 4 por ejemplo). En este caso se pueden hacer los cálculos directos sobre la fórmula general (XII, 3, 2), es decir, más simplemente, contentarse, en primera aproximación con el principio de composición de varianzas de extensión, es decir (XII, 3, 13), siempre que λ no sea muy elevado.

Caso del dispositivo cerrado .- Las fórmulas anteriores se aplican a un dispositivo centrado, en el cual, el campo a estimar es la suma de los N segmentos de influencia de longitud a , en el centro de cada uno de ellos se ha implantado una muestra. En la práctica se encuentra un dispositivo diferente, llamado *dispositivo cerrado* en el cual el campo a estimar es el segmento L comprendido entre la primera y la última muestra tomada. Sean a la malla y $N + 1$ el número de muestras implantadas en los puntos de abscisa:

$$x_i = ia \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

En este caso, como las muestras x_0 y x_N comandan una media zona de influencia, se toma como estimador Y la expresión:

$$Y = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2} f(x_N) \right]$$

La varianza de estimación, que designaremos también por σ_N^2 a pesar que en realidad hay $N + 1$ muestras, está dada por la fórmula general siguiente, análoga a (XII, 3, 2):

$$(XII, 3, 25) \quad \sigma_N^2 = \frac{4}{N^2} \left[\sum_{k=1}^{N-1} k\chi(ka) + \frac{1}{2} N\chi(Na) \right] - \frac{1}{N^2} \left[2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k)\gamma(ka) + \frac{1}{2} \gamma(Na) \right] - F(Na)$$

Se puede, a partir de esta fórmula, desarrollar los mismos principios de aproximación que en el caso del dispositivo centrado. En particular, se obtiene la regla de correspondencia en la forma siguiente:

$$(XII, 3, 26) \quad \begin{cases} T_1(x^\lambda) = \frac{2}{N} \operatorname{sen} \frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda} a^\lambda \\ T_2(x^\lambda) = -\frac{2}{N^2} \cos \frac{\lambda\pi}{2} \frac{\lambda+3}{(\lambda+1)(\lambda+2)} B_{2+\lambda} a^\lambda \end{cases}$$

El término en $1/N$ es idéntico al que se tiene para el dispositivo centrado. Como el término en $1/N^2$ es habitualmente despreciado, se obtiene la regla práctica siguiente:

La *varianza de estimación de un dispositivo cerrado con $N+1$ muestras se calcula como la del dispositivo cerrado con N muestras admitiendo la misma malla s y el mismo campo $L = Na$.*

Esta regla puede ser aplicada, en la práctica, aún si N es pequeño (pero superior a 1), y aún si el desarrollo limitado de $\gamma(h)$ solo es utilizable hasta $h = a$: En este último caso se tendrá:

$$(XII, 3, 27) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2 = \frac{1}{N} \left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) \right]$$

Siendo σ_E^2 la varianza de extensión elemental del dispositivo centrado de igual malla.

Prácticamente, el único caso de excepción, es aquel en que se tiene $N = 1$, es decir el caso en que se desea estimar un segmento de longitud a con la ayuda de dos muestras implantadas en sus dos extremidades. En este caso, la fórmula general (XII, 3, 25) toma la forma muy simple:

$$(XII, 3, 28) \quad \sigma_E^2 = \sigma_F^2 = 2\chi(a) - \frac{1}{2}\gamma(a) - F(a)$$

La expresión (XII, 3, 28) puede ser llamada varianza de extensión elemental del dispositivo cerrado, designada aquí por σ_F^2 , y se tendrá cuidado de no confundirla con la del dispositivo centrado, designada antes por σ_E^2 . Cuando se aplica el principio de composición de varianzas de extensión a un dispositivo cerrado, es siempre la varianza σ_E^2 del dispositivo centrado, y no la del dispositivo cerrado, la que debe ser dividida por N (número de muestras menos 1), conforme a (XII, 3, 27).

4. - Malla regular con implantación flotante.

Supongamos que, en un campo finito V al interior del cual reina un esquema intrínseco $f(x)$ (se supondrá que la variable $f(x)$ será, convencionalmente, nula al exterior de V), se ha implantado, de una manera cualquiera, una red regular de muestreos, es decir, sin tomar en cuenta la geometría del campo. Como se ha supuesto que $f(x)$ es nula al exterior de V , se puede suponer que la red es infinita, y admitir que una de las muestras, elegida como origen de la red, ha sido implantada en un punto u elegido al azar en el paralelepípedo de base la malla. Los otros muestreos han sido efectuados en los puntos:

$$x_k = u + ka = (u_1 + k_1 a_1, u_2 + k_2 a_2, \dots, u_n + k_n a_n), \quad a = (a_1 \dots a_n)$$

Que representan la malla, y $k = (k_1 \dots k_n)$ es un sistema de enteros cualesquiera. Se ve que el sistema así esquematizado no difiere del que se utilizó en el capítulo IV para la teoría de la estimación transitiva. Esta observación permite resolver fácilmente el problema intrínseco correspondiente.

Designemos por $K(h)$ al covariograma geométrico afectado al campo V . En representación transitiva, el covariograma $g(h)$ de la variable regionalizada $f(x)$ limitada al campo V , puede deducirse (en valor probable) de la función intrínseca $\gamma(h)$, con la ayuda de la relación (VIII, 5, 10):

$$(XII, 4, 1) \quad g(h) = [m^2 + \sigma^2(0|V)] K(h) - K(h) \gamma(h)$$

El error cometido en la estimación de la cantidad de metal:

$$Q = \int_V f(x) dx$$

Está caracterizado por una varianza de estimación transitiva, que designaremos por σ_Q^2 , y que se calcula al aplicar a $g(h)$ el operador ξ_a definido en (XII, 3, 7):

$$(XII, 4, 2) \quad \sigma_Q^2 = [m^2 + \sigma^2(0|V)] \xi_a(K) - \xi_a(K\gamma)$$

Se ha visto, en el capítulo IV, cómo debería conducirse el cálculo de esta varianza. Se observará además, en (XII, 4, 2), que $\xi_a(K)$ no es otra cosa que la varianza de estimación transitiva del volumen del campo V , estimada a partir de la misma red de muestreos. Esta varianza $\xi_a(K)$ se llama también *varianza geométrica* σ_V^2 :

$$(XII, 4, 3) \quad \sigma_V^2 = \xi_a(K)$$

Al llevar en (XII, 4, 2), se obtiene, entre la varianza geométrica y la de la cantidad de metal, la relación:

$$(XII, 4, 4) \quad \sigma_Q^2 = [m^2 + \sigma^2(0|V)] \sigma_V^2 - \xi_a(K\gamma)$$

En lo respecta la ley media $m = Q / V$, se estima con un error relativo de varianza σ_m^2 / m^2 . Pero la variable regionalizada $f(x)$ debe ser considerada como independiente de su campo en el sentido de la independencia interna (V, 3, 1), porque precisamente esta independencia interna es una condición necesaria para que la descripción de $f(x)$ por un esquema intrínseco sea posible. Por consiguiente, según (V, 2, 6), se tiene:

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}$$

Esta relación expresa, lo sabemos, que el volumen y la ley media son estimadas independientemente una de otra. Reemplazando σ_Q^2 por su expresión (XII, 4, 4), teniendo en cuenta la relación evidente $Q = mV$, y designando por $\sigma^2 = \sigma^2(\theta|V)$ la varianza de $f(x)$ en V , se obtiene finalmente:

$$(XII, 4, 5) \quad \frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \frac{\sigma_V^2}{V^2} - \xi_a \left(\frac{K\gamma}{Q^2} \right)$$

Si el campo V es conocido en forma exacta, el término $\frac{\sigma^2}{m^2} \frac{\sigma_V^2}{V^2}$, que representa la repercusión del error geométrico sobre la estimación de la ley, debe ser anulado, y queda entonces, simplemente:

$$(XII, 4, 6) \quad \frac{\sigma_m^2}{m^2} = -\xi_a \left(\frac{K\gamma}{Q^2} \right)$$

La varianza de estimación intrínseca se calcula como una varianza de estimación transitiva con el covariograma $-\frac{K\gamma}{V^2}$. Sin embargo, en general, V no es conocido a priori, y se

debe agregar el término geométrico suplementario $\frac{\sigma^2}{m^2} \frac{\sigma_V^2}{V^2}$ de la fórmula (XII, 4, 5).

No se debe olvidar que estas fórmulas (XII, 4, 5) y (XII, 4, 6) son solo válidas en el caso en que $f(x)$ es independiente de su campo, en el sentido de la independencia interna, es decir prácticamente en ausencia de deriva zonada: Por otra parte es en este caso solamente que la teoría intrínseca puede ser utilizada. Si la variable no es independiente de su campo, se debe recurrir a la representación transitiva de las correogionalizaciones presentada en el capítulo V.

Comparación entre las implantaciones flotante y preferencial. - Supongamos que K y γ sean los dos isótopos, y que - para la malla utilizada - γ admite un desarrollo limitado el cual contiene un término principal en r^2 . El covariograma geométrico de V , de su lado, puede ponerse en la forma:

$$K(r) = V - Sr + \dots$$

Conforma a la fórmula (VI, 1, 5), y este desarrollo limitado conserva su valor justo hasta $r = |a|$, siempre que el contorno de V no posea irregularidades importantes (microprotuberancias) de dimensiones pequeñas respecto de la malla.

Se tiene entonces:

$$-\frac{K\gamma}{V^2} = -\frac{\gamma}{V} + \frac{S}{V^2} r\gamma + \dots = -\frac{r^\lambda}{V} + \frac{S}{V^2} r^{\lambda+1} + \dots$$

La parte principal de $-K\gamma/V^2$ es $-r\lambda/V$. Se deduce fácilmente que la varianza σ_m^2 de (XII, 4, 6) tiene la misma parte principal que la varianza de estimación calculada, para la misma malla, en la hipótesis de una implantación preferencial. Por consiguiente, estas dos varianzas difieren, en lo esencial, únicamente por la causa del término geométrico $\frac{\sigma^2}{m^2} \frac{\sigma_V^2}{V^2}$.

Este término traduce un *efecto de borde*, y certifica que el error cometido en la estimación del volumen V se repercute sobre la ley media, aún en la hipótesis, admitida aquí, en la cual la variable regionalizada es independiente de su campo.

5. - Mallas aleatorias y aleatorias estratificadas.

La malla aleatoria pura corresponde al caso en que las N muestras están implantadas al azar, de manera independiente las unas de las otras, en el campo V a estimar, según una ley de probabilidad uniformemente repartida en V . La varianza de estimación asociada al estimador:

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

En que los x_i son los puntos de muestreo tirados al azar, es igual al valor probable, relativo a esta tirada al azar, de la varianza $D^2(Y - Z)$ de la fórmula general (XII, 2, 1). En la tirada al azar del punto x_i , $\gamma(x - x_i)$ tiene por valor probable $\frac{1}{V} \int_V \gamma(x - x_i) dx$, de manera que se obtiene inmediatamente:

$$E \left[\frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx \right] = \frac{2}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

En lo que respecta a $\gamma(x_i - x_j)$, se tiene:

$$\begin{cases} E[\gamma(x_i - x_j)] = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' & \text{para } i \neq j \\ E[\gamma(x_i - x_i)] = 0 \end{cases}$$

De donde se obtiene, fácilmente:

$$\sigma_N^2 = E[D^2(Y - Z)] = \left[2 - \frac{N(N-1)}{N^2} - 1 \right] \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

Y finalmente:

$$(XII, 5, 1) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx' = \frac{1}{N} \sigma^2(0|V)$$

La varianza de estimación de una malla aleatoria se obtiene al dividir por el número N de muestras, la varianza en V de la variable puntual.

Este resultado está bien conforme a lo que se podría prever, porque los $f(x_i)$ - respecto del sorteo al azar de los x_i - son variables aleatorias independientes de varianza $\sigma^2(0|V)$.

En el caso de una *malla aleatoria estratificada* el campo V a estimar se divide en zonas de influencia v_i iguales entre ellas y trasladadas unas de otras, y, en cada v_i se implanta al azar una muestra en el punto x_i . Sin embargo, se deben distinguir dos casos diferentes según que V es o no conocido a priori.

Si V es *conocido* a priori, se puede, en general, admitir que coincide con la reunión de todas las zonas de influencia v_i , de manera que ninguno de los v_i desborda las fronteras de V . La varianza de estimación, en este caso, se obtiene al tomar el valor probable de la fórmula general (XII, 2, 1) relativamente a la implantación aleatoria de cada x_i en su zona de influencia v_i . Pero se tiene:

$$E \left[\frac{1}{N} \sum_i \gamma(x-x_i) \right] = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{v_i} \int_{v_i} \gamma(x-x_i) dx_i = \frac{1}{V} \int_V \gamma(x-x') dx'$$

De manera que el primer término de (XII, 2, 1) proporciona, en valor probable:

$$E \left[\frac{2}{NV} \sum_i \int_{v_i} \gamma(x-x_i) dx \right] = \frac{2}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx'$$

En lo que respecta al segundo término, la suma doble debe, en realidad, ser extendida a todos los índices tales que $i \neq j$, porque $\gamma(x_i-x_i) = 0$. En valor probable, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{ij} \gamma(x_i-x_j) \right] &= \frac{1}{V^2} \sum_{i \neq j} \int_{v_i} \int_{v_j} \gamma(x_i-x_j) dx_i dx_j \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_{ij} \int_{v_i} \int_{v_j} \gamma(x_i-x_j) dx_i dx_j - \frac{1}{V^2} \sum_i \int_{v_i} \int_{v_i} \gamma(x_i-x_i') dx dx_i' \end{aligned}$$

La expresión obtenida se simplifica fácilmente: La suma doble en ij de las integrales tomadas en v_i y v_j proporciona, en efecto, una integral en V .

Designando por v el volumen geométrico de las zonas de influencia v_i , todas iguales entre sí, la expresión precedente queda:

$$\frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(x-x') dx dx' - \frac{1}{Nv^2} \iint_v \gamma(x-x') dx dx'$$

Al llevar estos resultados obtenidos para los valores probables de estos dos primeros términos, se tiene:

$$(XII, 5, 2) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{Nv^2} \iint_v \gamma(x-x') dx dx' = \frac{1}{N} \sigma^2(0|V)$$

La varianza de estimación de una malla aleatoria estratificada se obtiene entonces, en el caso en el cual el campo es conocido a priori, al dividir por el número N de muestras la varianza $\sigma^2(0|v)$ de cada uno de ellos en su zona de influencia igual a v .

Este resultado debe ser comparado con (XII, 5, 1). Aparece que *la malla aleatoria estratificada proporciona siempre una varianza de estimación más pequeña que la malla aleatoria pura*, la diferencia es:

$$\frac{1}{N} [\sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v)] = \frac{1}{N} \sigma^2(v|V)$$

Es decir igual a la varianza en V de la zona de influencia v , dividida por el número N de zonas de influencia.

Caso en el cual el campo V no es conocido a priori. - Sucede a menudo que los límites de la regionalización no son conocidos exactamente en el momento en el cual se implanta la red aleatoria estratificada. La cuadrícula de las zonas de influencia v_i se dibuja a priori, y todo sucede como si fuera implantada, en su conjunto, de manera aleatoria respecto de V . Nos reducimos así a un problema de estimación transitiva. Se tomará, como en el párrafo precedente, el covariograma transitivo $g(h)$, o más bien, su valor probable:

$$g(h) = [m^2 + \sigma^2(0|V)] K(h) - K(h) \gamma(h)$$

Siendo $K(h)$ el covariograma geométrico del campo V , y se aplicará la fórmula (IV, 4, 5) la cual entrega la varianza de estimación transitiva de la cantidad de metal Q . Para abreviar, se escribirá σ^2 en vez de $\sigma^2(0|V)$ para designar la varianza de la variable regionalizada en su campo V . Se obtiene así:

$$\begin{aligned} \sigma_Q^2 = vV(m^2 + \sigma^2) - \frac{1}{v} \iint_v (m^2 + \sigma^2) K(x-x') dx dy \\ + \frac{1}{v} \iint_v K(x-x') \gamma(x-x') dx dx' \end{aligned}$$

Análogamente, para la varianza de estimación geométrica del volumen V mismo, se obtiene, al aplicar la misma fórmula (IV, 4, 5):

$$\sigma_v^2 = vV - \frac{1}{v} \int_v \int_v K(x-x') dx dx'$$

Finalmente, exactamente como en el párrafo 4, se debe admitir la independencia interna de la variable y su campo, porque es esta, precisamente la condición para que el formalismo intrínseco sea aplicable. Por consiguiente, se tiene todavía:

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_v^2}{V^2}$$

Al reemplazar σ_Q^2 y σ_v^2 por su expresión anterior, obtenemos finalmente la varianza de estimación de la ley m en la forma siguiente:

$$(XII, 5, 3) \quad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2 \sigma_v^2}{V^2} + \frac{1}{Nv^2} \int_v \int_v \frac{K(x-x')}{V} \gamma(x-x') dx dx'$$

Luego, la varianza de estimación de una malla aleatoria estratificada, en el caso en que el campo V no es conocido a priori, es la suma de dos términos.

El primero, igual a $\frac{\sigma^2 \sigma_v^2}{V^2}$ representa un efecto de borde. El segundo se calcula como si se tratara de una varianza con campo conocido, al aplicar (XII, 5, 2) a la función intrínseca $\frac{K(h)}{V} \gamma(h)$.

Comparación de mallas regulares y aleatorias estratificadas. - Se debe comparar sea la malla regular con implantación preferencial con la malla aleatoria estratificada con campo conocido a priori, sea la malla regular con implantación flotante con la malla aleatoria estratificada con campo cualquiera. Los resultados son idénticos a los que habíamos obtenido en el párrafo (IV, 4) en el caso transitivo.

Una malla regular o aleatoria estratificada, será llamada *adaptada* si realiza el mínimo de la varianza de estimación que le corresponde, para un volumen dado de la zona de influencia v , es decir, para un número dado de muestreos. En el caso isótropo, la malla adaptada se construye sobre un polígono regular o un cuadrado, con una ventaja ligera para el hexágono, en la medida en que el hexágono se acerca más al círculo que el cuadrado. Para un $\gamma(h)$ cualquiera presentando una anisotropía cualquiera, no es evidente que las mallas adaptadas estén construidas sobre los mismos poliedros que en el caso de una red regular o aleatoria estratificada. Sin embargo, se podrá, en general, considerar que es así, por lo menos en primera aproximación, porque todo depende, en realidad, de la naturaleza de la anisotropía de la función intrínseca en la vecindad del origen, y esta es a menudo asimilable a una simple anisotropía geométrica. En el caso en que la anisotropía es geométrica, es decir si $\gamma(h)$ se puede reducir a una forma isótropa $\gamma(r)$ por una simple transformación lineal, es claro que la malla adaptada está construida sobre el mismo poliedro v que se reduce, por la misma transformación al poliedro regular de la malla adaptada isótropa. En

esta caso, naturalmente, la malla adaptada es la misma para las redes regulares y aleatorias estratificadas.

Como regla general, *la malla regular adaptada es siempre superior a la malla adaptada de la red aleatoria estratificada*. La excepción corresponde al caso de una función intrínseca aberrante, la cual comporta, por ejemplo, una componente periódica de amplitud anormalmente elevada, con una componente periódica que coincide con una de las de la red de muestreos. Al contrario, de dos mallas no adaptadas construidas sobre un mismo poliedro, una regular y la otra aleatoria estratificada, no se puede, en general, prever la que proporcionará el mejor resultado sin calcular numéricamente las varianzas de estimación correspondientes.

6. - El krigado.

Vamos ahora, a formular el problema de la estimación desde un punto de vista más general. Siendo dado un campo V y una función de ponderación $p(x)$, nula fuera de V y de suma unidad (por ejemplo, $p(x) = k(x) / V$, en que $k(x)$ es la variable geométrica asociada a V), nos proponemos estimar la integral:

$$(XII, 6, 1) \quad Z = \int_V p(x) f(x) dx$$

A partir de los valores numéricos, que se supone conocidos, tomados por la variable regionalizada en un conjunto de puntos V' . Si V' es un volumen continuo, se buscará una función de ponderación $\lambda(x)$, o, si V' es un conjunto discontinuo de N muestreos puntuales, de coeficientes de ponderación λ_i de suma unidad:

$$(XII, 6, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{V'} \lambda(x) dx = 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \end{array} \right.$$

Y se formará el estimador:

$$(XII, 6, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \int_{V'} \lambda(x) f(x) dx \\ Y = \sum_i \lambda_i f(x_i) \end{array} \right.$$

La función $\lambda(x)$ o los coeficientes de ponderación λ_i serán elegidos de manera de hacer mínima la varianza de estimación $D^2(Y - Z)$, con la condición (XII, 6, 2), la cual garantiza la existencia de esta varianza. Razonemos, por ejemplo, en el caso continuo. Se tiene, según (VIII, 3, 14):

$$(XII, 6, 4) \quad D^2(Y - Z) = - \int (\lambda - p) * (\hat{\lambda} - \hat{p}) \gamma dx$$

Según el procedimiento habitual del cálculo de variaciones, se expresará que $\lambda(x)$ realiza el mínimo de (XII, 6, 4), considerando la condición de ligazón (XII, 6, 2)³¹, escribiendo que la variación:

$$(XII, 6, 5) \quad \delta \left[D^2(Z - Y) + 2\mu \int_{V'} \lambda(x) dx \right] = 0$$

es nula para toda variación $\delta\lambda(x)$ de la función $\lambda(x)$. El coeficiente 2μ o multiplicador de Lagrange, debe ser determinado por la condición (XII, 6, 2). Como $\gamma(x)$ es una función par, la variación (XII, 6, 5) se escribe:

$$\begin{aligned} & -\int [\delta\lambda * (\hat{\lambda} - \hat{p}) + \delta\hat{\lambda} * (\lambda - p)] \gamma dx + 2\mu \int \delta\lambda(x) dx \\ & = -2 \int \delta\lambda * (\hat{\lambda} - \hat{p}) \gamma dx + 2\mu \int \delta\lambda(x) dx \\ & = -2 \iint \delta\lambda(x) [\lambda(x+h) - p(x+h)] \gamma(h) dx dh + 2\mu \int \delta\lambda(x) dx \end{aligned}$$

Para que esta expresión sea nula cualquiera que sea la variación $\delta\lambda(x)$, es necesario y suficiente que se tenga, para *todo punto* x de V' :

$$\int [\lambda(x+h) - p(x+h)] \gamma(h) dh = \mu$$

O también, en notación de convoluciones [$\gamma(h)$ es una función par]:

$$(XII, 6, 6) \quad \lambda * \gamma = \gamma * p + \mu$$

Se expresa, en general, este resultado diciendo que todo punto x de V' debe tener la misma covarianza, salvo una constante, con Y y con Z . La constante μ se determina por la condición suplementaria (XII, 6, 2).

Considerando la ecuación (XII, 6, 6) verificada por todo x de V' , la varianza mínima de estimación o varianza de krigeado está dada por:

$$\sigma_k^2 = -\int (\lambda - p) [(\lambda - p) * \gamma] dx = -\mu + \int p [(\lambda - p) * \gamma] dx$$

Es decir:

$$(XII, 6, 7) \quad \sigma_k^2 = \int \gamma(\lambda * \hat{p}) dx - \mu - \int \gamma(p * \hat{p}) dx$$

³¹ Nota del Traductor: También llamada condición de “universalidad”

Teorema de superposición de figuras de krigeadas. - A partir de los mismos datos, es decir de los valores numéricos tomados por la variable $f(x)$ en el dominio V' , se puede, naturalmente, krigear las leyes medias Z_i de diferentes volúmenes V_i ponderados por diferentes funciones $p_i(x)$ de suma unidad:

$$Z_i = \int_{V_i} p_i(x) f(x) dx$$

Sean $\lambda_i(x)$ las soluciones correspondientes de la ecuación (XII, 6, 6). Para krigear la variable Z , media de las Z_i ponderadas por coeficientes α_i de suma unidad:

$$Z = \sum \alpha_i Z_i = \int \sum \alpha_i p_i(x) f(x) dx$$

Basta con tomar para $\lambda(x)$ la media ponderada de las $\lambda_i(x)$ por los mismos α_i :

$$\lambda(x) = \sum \alpha_i \lambda_i(x)$$

En efecto, los $\lambda_i(x)$, por hipótesis, verifican las relaciones:

$$\begin{cases} \lambda_i * \gamma = p_i * \gamma + \mu_i \\ \int \lambda_i(x) dx = 1 \end{cases}$$

Para todo punto x del dominio V' . Basta con multiplicar por α_i y con sumar en i para obtener:

$$\begin{cases} \lambda * \gamma = \gamma * \sum \alpha_i p_i + \sum \alpha_i \mu_i \\ \int \lambda(x) dx = 1 \end{cases}$$

Relaciones que son igualmente verificadas para todo punto x de V' .

Luego, con la reserva de utilizar siempre el mismo dominio V' para formar el estimador Y , las figuras de krigeadas se superponen linealmente.

En particular, toda figura puede obtenerse por superposición de krigeadas puntuales. Tomemos por variable Z a estimar el valor $f(y)$ tomado por la función $f(x)$ en el punto y . La ecuación (XII, 6, 6) se reduce, en este caso a:

$$(XII, 6, 8) \quad \int_{V'} \lambda(x) \gamma(x' - x) dx = \gamma(x' - y) + \mu$$

Y debe ser verificada por todo punto x' perteneciente a V' . Si se conoce la solución $\lambda(x; y)$ de esta ecuación, la cual depende evidentemente del punto krigeadas y , se deduce inmediatamente la solución general de (XII, 6, 6), que es:

$$(XII, 6, 9) \quad \lambda(x) = \int_V p(y) \lambda(x, y) dy$$

Este método de superposición de krigeados puntuales es muy útil en las aplicaciones. En el caso en que el volumen V' es cualquiera, es difícil resolver una ecuación integral tal como (XII, 6, 8). Sin embargo, en las aplicaciones, y, notablemente, en la industria minera, el dominio V' donde se conocen los valores numéricos de $f(x)$ está constituido sea de un número N finito de puntos discontinuos de muestreo, sea de una red continua asimilable a curvas (trabajos mineros por ejemplo). Examinemos estos dos casos.

Krigeado continuo a lo largo de curvas. - Si V' está constituido por una, o varias curvas C , se puede tomar como parámetro descriptivo la abscisa curvilínea s de un punto x de C . Las ecuaciones del krigeado puntual para un punto y se escriben entonces:

$$(XII, 6, 10) \quad \begin{cases} \int_C \lambda(s) \gamma[x(s') - x(s)] ds = \gamma[x(s') - y] + \mu \\ \int_C \lambda(s) ds = 1 \end{cases}$$

Para una curva C y una función γ cualesquiera, no se sabe, en general, resolver este sistema de ecuaciones integrales. Se puede ver que, en el caso particular, muy interesante en el cual $\gamma(h)$ es de la forma $\log r$ (esquema de De Wijs isótropo) en el espacio de dos dimensiones: Si la curva C es una curva cerrada, la teoría de los potenciales armónicos permite resolver explícitamente el sistema (XII, 6, 10). Se demuestra, en este caso, un teorema de efecto de pantalla, análogo al teorema bien conocido de la pantalla eléctrica, que establece la ausencia de correlación entre el interior y el exterior de la curva C , es decir, el carácter markoviano de este esquema intrínseco del espacio de dos dimensiones.

Krigeado discontinuo. - Cuando el dominio V' se reduce a un conjunto de N puntos de muestreo discontinuos, la ecuación integral (XII, 6, 8) del krigeado puntual se reemplaza por un sistema de ecuaciones lineales, mucho más fácil de resolver:

$$(XII, 6, 11) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(x_j - x_i) = \gamma(x_j - y) + \mu \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Interés práctico del krigeado. - En muchos casos, el mejoramiento aportado por el método del krigeado, con respecto a una simple media aritmética, se traduce por una disminución relativamente modesta de la varianza de estimación, lo cual no justifica por sí solo el recurso a cálculos a menudo largos y tediosos que necesita la resolución de un sistema como (XII, 6, 11), y, con mayor razón, la resolución de una ecuación integral tal como (XII, 6, 10). El interés mayor del krigeado, en muchas aplicaciones, no estará basado en esta disminución casi despreciable de la varianza de estimación, sino más bien en el hecho de

que permitirá evitar un error sistemático en la estimación de una zona seleccionada con la ayuda de los resultados del muestreo mismo. En la industria minera, por ejemplo, estamos conducidos, a menudo, a seleccionar, en el seno de una mineralización homogénea, una zona, o panel, más rico que el resto de la formación y considerado como explotable. Naturalmente, esta selección de paneles explotables está fundada sobre los resultados del muestreo. Pero, si nos limitamos, para estimar la ley media de un panel seleccionado, a solamente los muestreos tomados en el interior de este panel, resulta, inevitablemente, *un error sistemático por exceso, es decir particularmente peligroso*. Del hecho mismo que se selecciona un panel rico, la aureola de las muestras exteriores es, en general, con ley más débil que las muestras interiores, y sin embargo su influencia sobre el panel a estimar no es despreciable, porque el krigeado le atribuye un peso no nulo. No considerar este hecho introduce bien una causa de sobre estimación sistemática, que el krigeado permite eliminar. En teoría, un panel cualquiera debería ser krigeado por la totalidad de las muestras disponibles. Prácticamente, nos damos cuenta, en general, que basta con tomar en cuenta una o dos aureolas de muestras exteriores, que detienen, de alguna manera, la casi totalidad de la influencia de las muestras más lejanas. Este *efecto de pantalla* juega un papel muy importante en la aplicación práctica del krigeado, como también la consideración de sistemas geométricos que permiten reagrupar en un número pequeño de « aureolas » los grupos de muestras que ocupan posiciones equivalentes respecto del panel a estimar. Se llega así a reducir de dos a tres veces el número de coeficientes λ_i y las ecuaciones del sistema lineal (XII, 6, 11).

CAPITULO XIII

ESTIMACION Y FLUCTUACIONES DE LOS MOMENTOS INTRINSECOS

SUMARIO

Este capítulo, bastante especializado y de lectura relativamente difícil, está consagrado a los problemas de fluctuación y de estimación de la deriva lineal, del semi-variograma, y de la varianza. Para cada parámetro, se distingue un valor experimental, calculado a partir de los resultados de una red finita de muestras, un valor local, calculado a partir de los valores tomados por $f(x)$ en un campo V , y finalmente un valor teórico, o valor probable a priori de los precedentes. Se llama fluctuación la diferencia entre el valor local y el valor teórico. Para una deriva lineal o una varianza local, la amplitud de estas fluctuaciones es enorme. En lo que respecta al semi-variograma local, solo los primeros puntos son bien representativos de la función intrínseca teórica. Para distancias crecientes, la amplitud de las fluctuaciones rápidamente llega a ser desmesurada. En las aplicaciones, los tests que permiten comparar una regionalización a un modelo teórico, deberán sobre todo considerar los primeros puntos del semi-variograma. Por el contrario, la estimación de un valor local por un valor experimental puede hacerse, en general, en condiciones aceptables.

El párrafo 1 define la terminología resumida antes, y pone las fórmulas generales de los momentos de orden 4, principalmente la covarianza cuadrática, y las explicita en el caso gaussiano (único caso, prácticamente, en el cual los cálculos pueden ser conducidos hasta el final).

El párrafo 2 está consagrado a la deriva lineal. Las fluctuaciones son muy importantes. La fórmula general de la varianza de fluctuación es explicitada, en una forma simple, en el caso de una sola dimensión. Enseguida se examina la estimación de la deriva local.

El párrafo 3 trata el semi-variograma: fluctuaciones enormes, salvo para $|h|$ pequeño, bien puestas en evidencia en el caso $\gamma(h) = |h|^\lambda$ y para una dimensión. Al contrario, la estimación, conduce a varianzas más moderadas.

El párrafo 4 está consagrado a la varianza local (en un campo V). Aquí también, las fluctuaciones son enormes y son explicitadas en una dimensión para $\gamma(h) = |h|^\lambda$. El problema de la estimación comprende dos partes: Determinación del sesgo, diferencia sistemática entre varianzas locales y experimentales, cuya naturaleza es la de una varianza de estimación, y cálculo de la dispersión, o varianza de estimación que conduce a una fórmula general, difícil de explicitar, pero de estructura análoga a la de las varianzas de estimación usuales.

1. - Terminología, y momentos de orden 4.

El estudio de las fluctuaciones de los momentos intrínsecos de orden 1 (deriva lineal) y de orden 2 (semi-variograma o varianza) presenta una gran importancia práctica, debido a que este estudio permite formular tests capaces de controlar el valor de la hipótesis intrínseca. Para todo momento intrínseco distinguiremos *un valor experimental*, calculado en general a partir de los valores numéricos $f(x_i)$ tomados por la variable regionalizada en un número finito de puntos de muestreo x_i , un *valor local*³², definido para un dominio, o campo geométrico V , por una integral estocástica extendida a V , y finalmente un *valor teórico*, que no es otro que el valor probable de las dos variables aleatorias precedentes. Del punto de vista estocástico, valores experimentales y locales son variables aleatorias de igual naturaleza, y se distinguen por su carácter finito o no de su dominio de definición. Pero desde el punto de vista físico, solo los valores locales constituyen una realidad objetiva, independiente de cualquier interpretación, y son a veces llamados, por esta razón, *valores locales verdaderos*. Después de haber admitido la hipótesis intrínseca, el valor local pierde su carácter primero y se subordina a su valor probable a priori, o valor teórico. La diferencia entre valor local y teórico constituye una *fluctuación*, y es el examen de la amplitud de estas fluctuaciones lo que debe permitir juzgar si una regionalización experimental dada puede, o no, ser representada de forma satisfactoria por un modelo estocástico determinado. Es necesario ver bien que la fluctuación no está, de ninguna manera, ligada al carácter fragmentario del muestreo. Esta fluctuación existe, y tiene una varianza diferente de cero, aún si se conociera experimentalmente los valores tomados por $f(x)$ en todos los puntos x del campo V , en número infinito. Al contrario, la diferencia entre un valor experimental, calculado sobre un número finito de puntos de muestreo, y el valor local verdadero correspondiente, debe ser considerada como un *error de estimación*, y su amplitud está ligada al número de puntos de muestreo, o más exactamente, a la geometría relativa de la red de muestreo y del campo V en el cual es estimado el valor local verdadero.

Así, para todo momento intrínseco, se presentan dos problemas bien distintos: el de la fluctuación del valor local verdadero (relativamente a su valor probable en un esquema teórico) y el de la estimación del valor local verdadero (a partir del valor experimental deducido de una red finita de muestreos).

Momentos de orden 4. - La fluctuación, o la estimación de un momento intrínseco de orden k será caracterizada por una varianza, en la cual, el cálculo hará necesariamente intervenir los momentos de orden $2k$. Para $k = 1$, es decir para la deriva lineal (párrafo VIII, 1), esta varianza se expresa con la ayuda de la función intrínseca $\gamma(h)$ misma. Por el contrario, para $k = 2$, es decir para la estimación o la fluctuación de una varianza o un semi-variograma local, es necesario hacer uso de los momentos de orden 4. En particular, se debe suponer que estos momentos existen y poseen el carácter estacionario, hipótesis un poco más fuerte que en los capítulos precedentes, o bien el carácter estacionario de orden 2 bastan lo más a menudo.

Por otra parte, haremos frecuentemente una hipótesis mucho más fuerte al suponer que los incrementos de la variable regionalizada son variables aleatorias gaussianas: Esta hipótesis

³² Nota del Traductor: El valor local se llama también, en la actualidad, “valor regional”.

no es obligatoria, pero nos permitirá efectuar los cálculos hasta el fin y encontrar órdenes de magnitud. Se sabe que si X_1, X_2, X_3, X_4 son variables simultáneamente normales, con valores probables iguales a 0, y que admiten momentos de orden 2:

$$\sigma_{ij} = E(X_i X_j)$$

El momento general de orden 4 tiene por expresión:

$$(XIII, 1, 1) \quad E(X_1 X_2 X_3 X_4) = \sigma_{12} \sigma_{34} + \sigma_{13} \sigma_{24} + \sigma_{14} \sigma_{23}$$

Tomemos como variables X incrementos cualesquiera de una función aleatoria intrínseca $f(x)$:

$$\begin{cases} X_1 = f(x_{i_2}) - f(x_{i_1}) = \varepsilon_i \\ X_2 = f(x_{j_2}) - f(x_{j_1}) = \varepsilon_j \\ X_3 = f(x_{k_2}) - f(x_{k_1}) = \varepsilon_k \\ X_4 = f(x_{l_2}) - f(x_{l_1}) = \varepsilon_l \end{cases}$$

Si los incrementos son gaussianos y con valor probable nulo, se deduce de (XIII, 1, 1):

$$(XIII, 1, 2) \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) E(\varepsilon_k \varepsilon_l) + E(\varepsilon_i \varepsilon_k) E(\varepsilon_j \varepsilon_l) + E(\varepsilon_i \varepsilon_l) E(\varepsilon_j \varepsilon_k)$$

Según la fórmula general (VIII, 1, 9), se tiene:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(i_1 i_2, j_1 j_2) &= \gamma(x_{i_1} - x_{j_2}) + \gamma(x_{i_2} - x_{j_1}) \\ &\quad - \gamma(x_{i_1} - x_{j_1}) - \gamma(x_{i_2} - x_{j_2}) \end{aligned}$$

Para abreviar las notaciones, introduciremos índices griegos $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, susceptibles de tomar los valores 1 o 2, y pongamos:

$$\gamma(i_\alpha, j_\beta) = \gamma(x_{i_\alpha} - x_{j_\beta})$$

La covarianza $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ se pone en la forma de una suma de cuatro términos:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sum_{\alpha\beta} (-1)^{\alpha+\beta-1} \gamma(i_\alpha i_\beta)$$

Y se tienen, naturalmente, relaciones análogas para $E(\varepsilon_i \varepsilon_k)$, $E(\varepsilon_j \varepsilon_l)$, etc... Con este sistema de notaciones, (XIII, 1, 2) se pone en la forma de una suma de 16 términos:

$$(XIII, 1, 3) \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l) = \sum_{\alpha \beta \lambda \mu} (-1)^{\alpha + \beta + \lambda + \mu} [\gamma(i_\alpha j_\beta) \gamma(k_\lambda l_\mu) + \gamma(i_\alpha k_\lambda) \gamma(j_\beta l_\mu) + \gamma(i_\alpha l_\mu) \gamma(j_\beta k_\lambda)]$$

La función que figura entre paréntesis en (VIII, 1, 3):

$$(XIII, 1, 4) \quad \Gamma(x_{i\alpha}, x_{j\beta}, x_{k\lambda}, x_{l\mu}) = \gamma(i_\alpha j_\beta) \gamma(k_\lambda l_\mu) + \gamma(i_\alpha k_\lambda) \gamma(j_\beta l_\mu) + \gamma(i_\alpha l_\mu) \gamma(j_\beta k_\lambda)$$

Es simétrica con respecto a los cuatro puntos $x_{i\alpha}$, $x_{j\beta}$, $x_{k\lambda}$ y $x_{l\mu}$, e invariante para toda traslación de conjunto efectuada sobre estos 4 puntos (es decir invariante cuando se reemplaza $x_{i\alpha}$, $x_{j\beta}$ por $x_{i\alpha} + h$, $x_{j\beta} + h \dots$).

Si ahora, los incrementos no son gaussianos, se puede mostrar ³³ que existe también una función $\Gamma(x_{i\alpha}, x_{j\beta}, x_{k\lambda}, x_{l\mu})$, simétrica e invariante para toda traslación, y tal que se tiene:

$$(XIII, 1, 5) \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l) = \sum_{\alpha \beta \lambda \mu} (-1)^{\alpha + \beta + \lambda + \mu} \Gamma(x_{i\alpha}, x_{j\beta}, x_{k\lambda}, x_{l\mu})$$

Entonces solo la forma particular (XIII, 1, 4) de la función Γ está ligada al carácter gaussiano de los incrementos, y la relación (XIII, 1, 5) se verifica para leyes de distribución de probabilidades cualquiera, solamente con la reserva que los momentos de orden 4 están definidos.

La covarianza cuadrática. - Como caso particular de la fórmula general (XIII, 1, 5), podemos calcular la covarianza de $[f(x+h) - f(x)]^2$ y $[f(y+h) - f(y)]^2$, en que x e y son dos puntos y h un vector cualquiera. Se obtiene una función $G(x-y; h)$ de los dos argumentos $x-y$ y h , llamada covarianza cuadrática:

$$(XIII, 1, 6) \quad \begin{cases} G(x-y; h) = E\{[f(x+h) - f(x)]^2 [f(y+h) - f(y)]^2\} - 4\overline{\gamma(h)}^2 \\ = \sum_{\alpha \beta \lambda \mu} (-1)^{\alpha + \beta + \lambda + \mu} \Gamma(x + \alpha h, x + \beta h, y + \lambda h, y + \mu h) - 4\overline{\gamma(h)}^2 \end{cases}$$

La suma se extiende a los 16 términos obtenidos al dar a α , β , λ y μ los valores 0 o 1. En el caso gaussiano, la covarianza cuadrática se relaciona directamente con la función intrínseca $\gamma(h)$. Esto resulta de (XIII, 1, 2), que da aquí:

$$\begin{aligned} E\{[f(x+h) - f(x)]^2 [f(y+h) - f(y)]^2\} &= \overline{E(\varepsilon_i^2)}^2 + 2\overline{E(\varepsilon_i \varepsilon_k)}^2 \\ &= 4\overline{\gamma(h)}^2 + 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2 \end{aligned}$$

³³ La demostración directa de (XIII, 1, 5) sería un poco tediosa. Es mejor considerar $f(x)$ como una distribución aleatoria intrínseca, y aplicar los resultados de (X, 6): El momento de orden 4 es una distribución $M_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ del espacio de $4n$ dimensiones, simétrica e invariante por traslación, el cual actúa sobre las funciones de base de suma nula. En efecto, M_4 es aquí una función, la cual actúa sobre las medidas de Dirac. Tomando como funciones de base $\varphi_1(x_1) = \delta(x_1 - x_{12}) - \delta(x_1 - x_{11})$, $\varphi_2(x_2) = \delta(x_2 - x_{22}) - \delta(x_2 - x_{21})$, etc., se obtiene directamente (XIII, 1, 5).

Obtenemos la expresión notable de la covarianza cuadrática del caso gaussiano:

$$(XII, 1, 7) \quad G(x-y; h) = 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2$$

Examinaremos sucesivamente los problemas de estimación y de fluctuación propuestos por los momentos de orden 1 y 2, sin abordar el problema más general de la estadística matemática que es la estimación simultánea de los momentos de los dos primeros órdenes. Al examinar la deriva lineal, supondremos que la función intrínseca $\gamma(h)$ es conocida a priori, e, inversamente, estudiaremos los momentos de orden 2 suponiendo que la deriva es idénticamente nula. Las fórmulas obtenidas permanecerán válidas en primera aproximación (en el primer orden) en el caso en que $\gamma(h)$ y la deriva deben ser estimados simultáneamente, y esta aproximación será a menudo suficiente para las aplicaciones.

2. - Estimación y fluctuación de la deriva lineal.

Hemos visto, en el párrafo (VIII, 1) que los momentos de orden 1 de los incrementos de un esquema intrínseco $f(x)$ ponían en evidencia una deriva lineal de gradiente constante $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_n)$, según la fórmula:

$$(XIII, 2, 1) \quad E[f(x+h) - f(x)] = h\Delta = h_1\Delta_1 + h_2\Delta_2 + \dots + h_n\Delta_n$$

Por otra parte, a partir de valores, que se suponen conocidos, tomados por una variable regionalizada $f(x)$ en su campo geométrico V , se define *el valor local* verdadero $\Delta_V(h)$, de la deriva para cada argumento vectorial h , por la integral:

$$(XIII, 2, 2) \quad \Delta_V(h) = \frac{1}{K(h)} \int_{V'} [f(x+h) - f(x)] dx$$

Conforme a nuestras notaciones habituales, $K(h)$ es el covariograma transitivo asociado al campo V , y representa la medida del volumen $V' = V \cap \tau_{-h} V$ de la intersección del campo V con su trasladado en la traslación $-h$: es solamente para los puntos x pertenecientes a esta intersección que se dispone a la vez de los valores numéricos de $f(x+h)$ y $f(x)$.

Finalmente, si solo se dispone de un número finito de puntos de muestreo x_i , implantados según una malla regular, se estimará la deriva con la ayuda del valor experimental:

$$(XIII, 2, 3) \quad \Delta_c(h) = \frac{1}{N'} \sum_i [f(x_i+h) - f(x_i)]$$

La expresión (XIII, 2, 3) solo será accesible para valores discontinuos del argumento vectorial h , porque este argumento debe tener como componentes múltiplos enteros de la malla. El número N' representa el número de pares de puntos (x_i+h, x_i) disponibles para un mismo vector h : es, evidentemente, una función de h .

Las derivas locales o experimentales definidas en (XIII, 2, 2) y (XIII, 2, 3) no corresponden, en general, a un gradiente constante Δ_V o Δ_c . A diferencia de la deriva teórica $h\Delta$ estas no son formas lineales, sino funciones cualesquiera Δ_V o Δ_c las cuales, desde el punto de vista estocástico, deben ser consideradas como funciones aleatorias de h , por otra parte, no estacionarias. No abordaremos el problema general de las fluctuaciones o de la estimación simultánea de estas funciones para varios valores del argumento h , y nos limitaremos al caso en que se considera un solo valor de h , para el cual Δ_V o Δ_c son entonces variables aleatorias ordinarias.

Fluctuación de la deriva lineal local. - Para un argumento h arbitrario, pero fijo, la variable aleatoria (XIII, 2, 2) tiene un valor probable igual al valor teórico $h\Delta$:

$$E[\Delta_V(h)] = h\Delta$$

Y una varianza $D^2[\Delta_V(h)]$ que no es otra que la varianza de extensión de las leyes medias de las dos intersecciones de V con sus trasladados por h y $-h$. La fórmula general (VIII, 3, 13) proporciona inmediatamente ³⁴:

$$(XIII, 2, 4) \quad D^2[\Delta_V(h)] = \frac{1}{K(h)^2} \int \int_{V'V''} [\gamma(x-x'+h) + \gamma(x-x'-h) - 2\gamma(x-x')] dx dx'$$

La amplitud de la fluctuación de la deriva local, respecto de su valor teórico, está caracterizada así por su varianza (XIII, 2, 4), que es naturalmente una función de h . Al reemplazar las integrales por sumas discontinuas, se definiría la misma varianza de fluctuación de $\Delta_c(h)$ respecto del mismo valor teórico, poco diferente de la anterior si el número N' de los muestreos no sea muy pequeño: En un problema de fluctuación, este número N' solo juega un papel subordinado. Para N' infinito, (XIII, 2, 2) y (XIII, 2, 3) coinciden, y la varianza $D^2[\Delta_V(h)]$ no se anula de ninguna manera.

EJEMPLO. _ Para tener una idea del orden de magnitud de la varianza de fluctuación, consideremos un espacio de *una sola dimensión*, y supongamos que el campo V sea un segmento de largo L . Al utilizar la función intrínseca auxiliar $F(h)$ ya introducida en (XIII, 3, 1), se obtiene, sin demasiada dificultad a partir de la fórmula (XIII, 2, 4) la expresión siguiente:

(XIII,2,5)

$$D^2[\Delta_V(h)] = \frac{1}{(L-h)^2} \left[\frac{1}{2} L^2 F(L) + \frac{1}{2} (L-2h)^2 F(L-2h) - (L-h)^2 F(L-h) - h^2 F(h) \right]$$

Si h es suficientemente pequeño (y en particular, inferior a $L/2$), se tendrán las aproximaciones siguientes:

³⁴ Nota del traductor: Se ha corregido esta fórmula, la cual tenía un error probablemente de tipeo.

$$(XIII, 2, 6) \quad D^2[\Delta_V(h)] \# \frac{h^2}{(L-h)^2} [\gamma(L-h) - F(h)] \# \frac{h^2}{L^2} [\gamma(L) - F(h)]$$

La parte principal de esta varianza es proporcional a h^2 . Por consiguiente, en primera aproximación, la varianza de fluctuación del gradiente $\Delta_V(h)/h$ de la deriva:

$$\frac{1}{h^2} D^2[\Delta_V(h)] \# \frac{1}{L^2} \gamma(L)$$

es constante e igual a $\gamma(L)/L^2$. La amplitud de estas fluctuaciones puede ser considerable. En efecto, el incremento relativo:

$$\frac{f(x+L) - f(x)}{L}$$

de $f(x)$ entre dos puntos distintos de L tiene, por definición, una varianza igual a $2\gamma(L)/L^2$, es decir solamente el doble de la parte principal de la varianza de fluctuación. Entre estos dos casos extremos donde se dispone, sea de dos valores numéricos $f(x+L)$ y $f(x)$ solamente, sea de la infinidad de valores numéricos tomados por la variable $f(x)$ sobre la totalidad del segmento L , la varianza de fluctuación del gradiente solo se reduce de dos a uno. En las aplicaciones, se tendrá cuidado concluir precipitadamente la existencia de una deriva real. Bien a menudo, las derivas observadas, por importantes que sean, no son de ningún modo significativas, al considerar los valores elevados de las varianzas de fluctuación.

Estimación de la deriva local. - Lo más a menudo, no se conocerá la deriva local verdadera (XIII; 2, 2), sino solamente su estimación (XIII, 2, 3) o deriva experimental, obtenida a partir de una red finita de muestras puntuales. Los valores locales y experimentales pueden diferir en forma bastante notable uno del otro, pero de manera menos catastrófica que la diferencia entre uno u otro de su valor probable o teórico. El cálculo de la varianza de estimación de la deriva local es un simple caso particular del problema general tratado en el capítulo XII. Tomemos, en efecto, la función aleatoria:

$$f(x+h) - f(x)$$

La cual admite, con h fijo, el semi-variograma:

$$(XIII, 2, 7) \quad \begin{aligned} \gamma_{\Delta}(x-y) &= \frac{1}{2} D^2[f(x+h) - f(x) - f(y+h) + f(y)] \\ &= 2\gamma(h) + 2\gamma(x-y) - \gamma(x-y-h) - \gamma(x-y+h) \end{aligned}$$

La varianza de estimación de la deriva local $D^2[\Delta_V(h) - \Delta_c(h)]$ se obtiene al aplicar a $\gamma_{\Delta}(x-y)$, y para la red de N' puntos de muestreo utilizados efectivamente en el cálculo de $\Delta_c(h)$, las fórmulas generales del capítulo XII. En efecto, se puede obtener rápidamente un orden de magnitud aproximado. El vector h es, en efecto, obligatoriamente un múltiplo entero de

la malla, y, mientras $(x-y)$ quede en el interior del paralelepípedo de base de la malla, los únicos términos irregulares de γ_A son los de su componente $2\gamma(x-y)$, igual al doble de la función intrínseca $\gamma(h)$, y basta, por consiguiente, aplicar las fórmulas generales a $2\gamma(h)$. Si σ_N^2 es la varianza de estimación sobre la ley media de V , para la red completa de los N muestreos disponibles, se tendrá muy a menudo, en primera aproximación:

$$(XIII, 2, 8) \quad D^2[\Delta_V(h) - \Delta_c(h)] \approx 2 \frac{N}{N'} \sigma_N^2$$

Así, la varianza de estimación de la deriva local es del orden de magnitud el doble de la varianza de estimación de la ley media. Esta varianza es, en particular, siempre notablemente más débil que la varianza de fluctuación (XII, 2, 4) o (XIII, 2, 6). Dicho de otra forma, *se podrá a menudo proceder, en condiciones aceptables, a la estimación de la deriva local, pero será mucho más desusado afirmar que la deriva local, puesta así en evidencia es significativamente diferente de cero*: mutatis mutandis, la misma circunstancia se observa, como vamos a ver, en el caso de los momentos de orden dos.

3. - Estimación y fluctuación del variograma local.

Con las mismas notaciones que en el párrafo anterior, llamaremos semi-variograma local a la integral:

$$(XIII, 3, 1) \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2K(h)} \int_{V'} [f(x+h) - f(x)]^2 dx$$

Si se conocieran todos los valores numéricos tomados por la variable regionalizada en su campo V , este semi-variograma local $\gamma_V(h)$ podría ser construido punto por punto. A pesar que posee, en realidad, una total significación objetiva, $\gamma_V(h)$ se interpreta, en la óptica estocástica, como una variable aleatoria, cuyo valor probable no es otro que el $\gamma(h)$ teórico. De la misma manera, si solo se dispone de una red finita de muestras puntuales con malla regular, se construirá, experimentalmente, para vectores h múltiplos de la malla de base, el semi-variograma experimental:

$$(XIII, 3, 2) \quad \gamma_c(h) = \frac{1}{2N'} \sum_i [f(x_i+h) - f(x_i)]^2$$

En que N' representa el número de pares (x_i+h, x_i) efectivamente disponibles. Desde el punto de vista estocástico, $\gamma_c(h)$ es igualmente interpretado como una variable aleatoria de valor probable igual al valor teórico $\gamma(h)$.

Fluctuaciones del semi-variograma local. - Caracterizaremos las fluctuaciones de $\gamma_V(h)$ respecto de $\gamma(h)$ por la varianza de fluctuación:

$$D^2[\gamma_V(h) - \gamma(h)] = E[\gamma_V(h)^2] - \overline{\gamma(h)^2}$$

Que se expresa fácilmente con la ayuda de la covarianza cuadrática $G(x - y; h)$ introducida en (XIII, 1, 6). El vector h es fijo, en efecto, la función aleatoria:

$$\frac{1}{2}[f(x+h) - f(x)]^2 - \gamma(h)^2$$

admite como covarianza la función $G(x - y; h) / 4$. Por consiguiente, según la fórmula general (VII, 3, 10), la integral estocástica (XIII, 3, 1) admite la varianza a priori:

$$(XIII, 3, 3) \quad D^2[\gamma_V(h)] = \frac{1}{4K(h)^2} \iint_{V'V'} G(x - y; h) dx dy$$

Que es la varianza de fluctuación del semi-variograma local. En el caso gaussiano, considerando la expresión (XIII, 1, 7) de la covarianza cuadrática, la varianza de fluctuación toma la forma:

$$(XIII, 3, 4) \quad D^2[\gamma_V(h)] = \frac{1}{2K(h)^2} \iint_{V'V'} [\gamma(x - y + h) + \gamma(x - y - h) - 2\gamma(x - y)]^2 dx dy$$

EJEMPLO:

Fluctuaciones del semi-variograma h^λ en una dimensión. - La fórmula general de la varianza de fluctuación conduce a cálculos bastante difíciles, aún en el caso gaussiano y en la forma (XIII, 3, 4). Con el propósito de despejar órdenes de magnitud, aplicaremos la fórmula (XIII, 3, 4) del caso gaussiano al semi-variograma $\gamma(h) = h^\lambda$ en un espacio de una dimensión, y suponiendo que el campo geométrico es un segmento de longitud L . Para abreviar las notaciones, pondremos:

$$l = L - h$$

La fórmula (XIII, 3, 4) se particulariza aquí de la manera siguiente:

$$(XIII, 3, 5) \quad D^2[\gamma_V(h)] = \frac{1}{l^2} \int_0^l (l - x)[(x + h)^\lambda + |x - h|^\lambda - 2x^\lambda]^2 dx$$

El cálculo explícito de la integral del segundo miembro introduce diversas funciones hipergeométricas. Daremos solamente los primeros términos del desarrollo de (XIII, 3, 5). Para $h \leq l$, es decir $h \leq L / 2$, se obtienen dos términos irregulares, uno en $h^{l+2\lambda}$ y el otro en $h^{2+2\lambda}$, y una parte regular que es el producto por $l^{2\lambda}$ de una serie entera par en h / l . La parte irregular se obtiene fácilmente, al identificar la derivada segunda de $l^2 D^2[\gamma_V(h)]$ con el desarrollo de $[(l + h)^\lambda + (l - h)^\lambda - 2l^\lambda]^2$ escrito para $h < l$. Los términos

irregulares deben ser puestos en evidencia por un cálculo directo, que no reproduciremos. Se encuentra:

$$(XIII, 3, 6) \quad \left\{ \begin{aligned} D^2[\gamma_V(h)] &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)} \left[1 - \frac{1}{\cos \lambda\pi} \right] (1-2^{1-2\lambda}) \frac{h^{1+2\lambda}}{l} \\ &+ \left[2^{-2\lambda} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)} - \frac{2}{1+2\lambda} \right] \frac{h^{2+2\lambda}}{l^2} + \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{2(3-2\lambda)} \frac{h^4}{l^4} l^{2\lambda} \\ &+ \frac{\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-3)}{12(2\lambda-5)} \frac{h^6}{l^6} l^{2\lambda} + \dots \end{aligned} \right.$$

Cuando $h \geq l$, es decir $h \geq L/2$, el desarrollo en l/h se obtiene directamente, al desarrollar bajo el símbolo suma en x/h y al integrar en x . Se obtiene fácilmente la expresión siguiente:

$$(XIII, 3, 7) \quad \left\{ \begin{aligned} D^2[\gamma_V(h)] &= 2h^{2\lambda} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{2\lambda}^{2k} + (-1)^k C_{\lambda}^k}{(2k+1)(2k+2)} \frac{l^{2k}}{h^{2k}} \right] \\ &+ \frac{4l^{2\lambda}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)} - 8h^{\lambda} l^{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{\lambda}^{2k}}{(\lambda+2k+1)(\lambda+2k+2)} \frac{l^{2k}}{h^{2k}} \right] \end{aligned} \right.$$

Para h muy pequeño, la parte principal de la varianza de fluctuación es en $\frac{h^{1+2\lambda}}{l}$ (o en

$\frac{h^4}{l^2} l^{2+\lambda}$ si λ es superior a $\frac{3}{2}$). La varianza relativa $\frac{1}{h^{2\lambda}} D^2[\gamma_V(h)]$ es entonces

proporcional a $\frac{h}{l}$, y, en particular, se anula con h en $h = 0$: Luego, los primeros puntos

del variograma local tienen una varianza de fluctuación poco elevada, y pueden dar una imagen correcta de la función intrínseca teórica $\gamma(h)$. Pero para h creciente, esta seguridad se deteriora muy rápido, y la varianza de fluctuación alcanza rápidamente valores importantes. *Fuera de la vecindad inmediata del origen, existe una relación muy lejana entre el semi-variograma local y la función intrínseca $\gamma(h)$.* Para el valor extremo $h = L$ (es decir $l = L - h = 0$), el desarrollo (XIII, 3, 7) se reduce a $2h^{2\lambda}$: De una manera general, por otra parte, se tiene:

$$D^2[\gamma_V(h)] = 2\overline{\gamma(L)}^2$$

Porque, en esta caso extremo el variograma local se reduce a $\frac{1}{2}[f(l) - f(0)]$, la única pareja de puntos disponible, que está constituida de las dos extremidades del segmento L .

CASOS PARTICULARES. - Cuando λ es un semi-entero, el desarrollo ((XIII, 3, 6) debe ser tratado por el método habitual de paso al límite. Para $\lambda = 1$ (semi-variograma lineal), los dos desarrollos se reducen a:

$$(XIII, 3, 8) \quad \begin{cases} D^2[\gamma_V(h)] = \frac{4}{3} \frac{h^3}{l} - \frac{1}{3} \frac{h^4}{l^2} \\ D^2[\gamma_V(h)] = 2h^2 + \frac{1}{3} l^2 - \frac{4}{3} hl \end{cases}$$

Para h muy pequeño, la varianza relativa de fluctuación es $\frac{4}{3} \frac{h}{l}$, de manera que todos los primeros puntos del variograma local son representativos. Pero, al crecer h , la amplitud de las fluctuaciones llega a ser rápidamente prohibitiva. Para $h = l = L/2$, por ejemplo, es decir a media marcha, la varianza es l^2 , y la varianza relativa es igual a la unidad: existe solamente una relación lejana entre el variograma local y su valor teórico $\gamma(h)$.

Como segundo caso particular, examinemos el semi-variograma de De Wijs $\gamma(h) = \log h$. El desarrollo de la varianza de fluctuación se obtiene al dividir los resultados precedentes por λ^2 y haciendo tender λ hacia cero. Para $h \leq l$, se obtiene así:

$$(XIII, 3, 9) \quad D^2[\gamma_V(h)] = \pi^2 \frac{h}{l} - \frac{\pi^2}{6} \frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{6} \frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{20} \frac{h^6}{l^6} + \dots$$

La estimación del semi-variograma local. - La varianza de estimación $D^2[\gamma_V(h) - \gamma_c(h)]$ del variograma local (XIII, 3, 1) por el semi-variograma experimental (XII, 3, 2) se obtiene al aplicar las fórmulas generales del capítulo II a la red de los N' puntos efectivamente utilizados y a la función intrínseca de la variable $\frac{1}{2}[f(x+h) - f(x)]^2$ que es:

$$\frac{1}{2} D^2 \left[\frac{[f(x+h) - f(x)]^2 - [f(y+h) - f(y)]^2}{4} \right] = \frac{1}{4} G(0; h) - \frac{1}{4} G(x-y; h)$$

En el caso gaussiano, considerando (XIII, 1, 7), esta función intrínseca se reduce a:

$$(XIII, 3, 10) \quad 2\overline{\gamma(h)^2} - \frac{1}{2} [\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2$$

Como h es un múltiplo de los vectores de la malla de base, la expresión entre paréntesis tiene por parte principal, cuando el vector $x-y$ es interior a la malla elemental:

$$2[\gamma(h) - \gamma(x-y)]$$

Por consiguiente, la función intrínseca misma tiene como parte principal:

$$4\gamma(h)\gamma(x-y) - 2\overline{\gamma(x-y)}^2$$

Los términos irregulares preponderantes son, evidentemente, los de $\gamma(x-y)$, porque el cuadrado de $\gamma(x-y)$ solo introduce términos irregulares de orden superior. Así, en primera aproximación, se podrá calcular la varianza de estimación del semi-variograma local con la ayuda de la función intrínseca $4\gamma(h)\gamma(x-y)$. Si N y σ_N^2 son el número total de muestreos y la varianza de estimación de la ley media de V , se tendrá a menudo, en primera aproximación:

$$(XIII, 3, 11) \quad D^2[\gamma_V(h) - \gamma_c(h)] \approx 4\gamma(h) \frac{N}{N'} \sigma_N^2$$

Así, contrariamente a la varianza de fluctuación, la varianza de estimación del semi-variograma local toma valores moderados, y la estimación puede hacerse en buenas condiciones, siempre que el número N' de los puntos utilizados no sea demasiado débil.

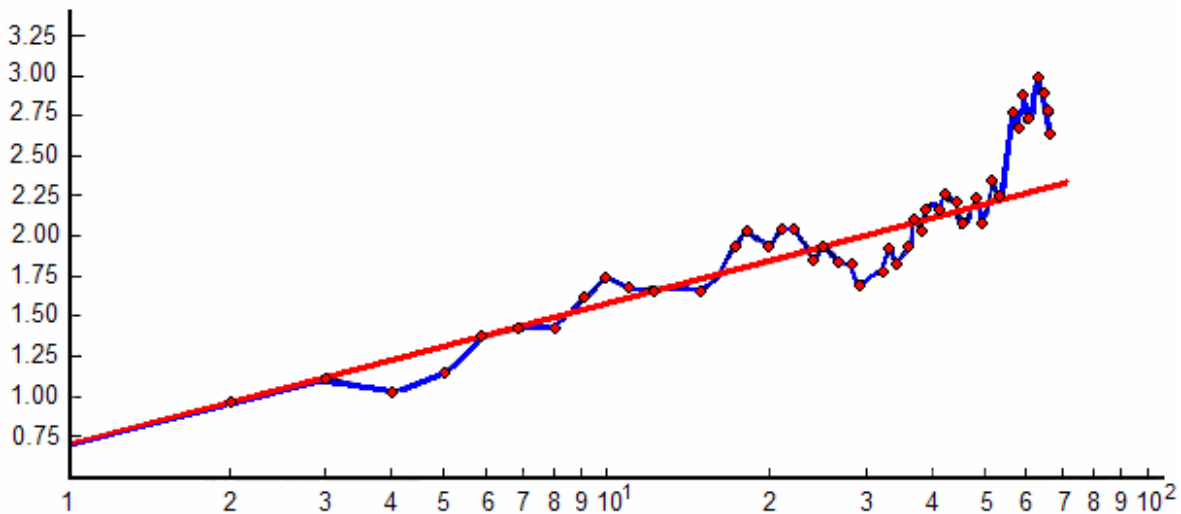


Figura 2. - Variograma experimental en un yacimiento de uranio. Los datos utilizados son las leyes en U de trozos de testigos sucesivos, de largo 50cm., a lo largo de un mismo sondaje vertical. Se ha trabajado, en realidad, no sobre las leyes sino más bien sobre sus logaritmos. En *ordenadas* los valores experimentales de $2\gamma(d)$. El variograma fluctúa, de manera notable respecto de la recta teórica la cual representa el esquema de De Wijs.

La conclusión general es la siguiente: *la estimación de un semi-variograma local se puede hacer en condiciones satisfactorias. Pero el semi-variograma local mismo es solamente representativo de la función intrínseca $\gamma(h)$ en la vecindad del origen. A distancias crecientes, las fluctuaciones se amplifican desmesuradamente.* En la figura 2, se puede ver

un ejemplo de este fenómeno, la cual representa el variograma de las leyes en uranio, construido a lo largo de un sondaje vertical potente, implantado en un yacimiento uranífero.

4. - Estimación y fluctuación de la varianza local.

En este párrafo, utilizaremos de manera sistemática las notaciones de incrementos ya introducidas en el capítulo VIII: Pondremos, por ejemplo:

$$(XIII, 4, 1) \quad \begin{cases} \varepsilon(x-y) = f(y) - f(x) \\ \varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i) \end{cases}$$

En un campo geométrico V , la varianza local S_V^2 de la variable puntual $f(x)$ ha sido definida en (VIII, 4, 1) como la integral estocástica:

$$S_V^2 = \frac{1}{V} \int_V [f(x) - m]^2 dx$$

En que m es la ley media (estocástica) de $f(x)$ en V , y habíamos demostrado que S_V^2 se expresaba, en notaciones de incrementos, por la integral de orden $3n$:

$$(XIII, 4, 2) \quad S_V^2 = \frac{1}{V^3} \iiint_V \varepsilon(y-x)\varepsilon(y-x') dy dx dx'$$

De la misma manera, en presencia de una red finita de N muestreos puntuales, la varianza experimental está dada por:

$$(XIII; 4, 3) \quad S_c^2 = \frac{1}{N^3} \sum_{ijk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik}$$

Si se interpretan como variables aleatorias, S_V^2 y S_c^2 tienen, en la teoría intrínseca, valores probables a priori, que llamaremos aquí sus valores teóricos σ_V^2 y σ_c^2 , y cuyas expresiones fueron establecidas en el párrafo VIII - 4:

$$(XIII, 4, 4) \quad \begin{cases} \sigma_V^2 = E(S_V^2) = \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(x-x') dx dx' \\ \sigma_c^2 = E(S_c^2) = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) \end{cases}$$

Fluctuación de la varianza local. - Las fluctuaciones de la variable aleatoria S_V^2 definida en (XIII, 4, 2) están caracterizadas por su varianza a priori:

$$D^2(S_V^2) = E(S_V^4) - \overline{E(S_V^2)^2} = E(S_V^4) - \sigma_V^4$$

En notación de incrementos, el cuadrado S_V^4 de la varianza local puede escribirse:

$$(XIII, 4, 5) \quad S_V^4 = \frac{1}{V^6} \int \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{pl} dx_i dx_j dx_k dx_m dx_p dx_l$$

Es una integral estocástica múltiple de orden $6n$. Para obtener su valor probable, debemos, en primer lugar, calcular el momento de orden $4E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{pl})$, luego integrar el resultado obtenido. En el caso general, se debe aplicar la fórmula (XII, 1, 5). En adelante, sin embargo, nos limitaremos al *caso gaussiano*, el cual conduce a resultados más simples, y por consiguiente, aplicaremos (XIII, 1, 3). Para simplificar los cálculos, observamos que (XIII, 1, 1) nos da, en primer lugar:

$$E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{pl}) = E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki})E(\varepsilon_{ml} \varepsilon_{pl}) + E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ml})E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{pl}) + E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{pl})E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml})$$

Cuando se efectúa la integración (XII, 4, 5), el primero de los tres términos da, según (XIII, 4, 2), el cuadrado de $E(S_V^2)$, es decir σ_V^4 , por consiguiente, la varianza de fluctuación $D^2(S_V^2)$ se obtiene integrando los dos últimos términos: estos términos, por otra parte, dan el mismo resultado, por razón de simetría, de manera que basta con calcular uno de ellos, y de escribir:

$$D^2(S_V^2) = \frac{2}{V^6} \int E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ml})E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{pl}) dx_i dx_j dx_k dx_l dx_m dx_p$$

Apliquemos la fórmula general (VIII, 1, 9), que nos da:

$$E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ml})E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{pl}) = [\gamma_{jl} + \gamma_{im} - \gamma_{jm} - \gamma_{il}][\gamma_{kl} + \gamma_{ip} - \gamma_{kp} - \gamma_{il}]$$

En el desarrollo del producto de los dos paréntesis del segundo miembro, aparecen tres tipos de términos: los términos cuadrados de la forma $(\gamma_{ij})^2$, términos en los cuales un índice está repetido, de la forma $\gamma_{ij}\gamma_{ik}$, y finalmente términos con 4 índices distintos del tipo $\gamma_{ij}\gamma_{kl}$. En la integración, los términos de una misma especie conducen al mismo valor numérico. Se producen simplificaciones: Queda un solo término de primera y uno solo de tercera especie, los dos con el signo $+$, y dos de segunda especie, con el signo $-$. Se obtiene entonces la expresión de la varianza de fluctuación en la forma:

$$\left\{ \begin{aligned} D^2(S_V^2) &= \frac{2}{V^4} \int \gamma_{ik}\gamma_{kl} dx_i dx_j dx_k dx_l + \frac{2}{V^2} \int \overline{\gamma_{ij}^2} dx_i dx_j \\ &\quad - \frac{4}{V^3} \int \gamma_{ij}\gamma_{ik} dx_i dx_j dx_k \end{aligned} \right.$$

En lo que respecta a la integral de orden $4n$, al considerar (XIII, 4, 4), se tiene la simplificación inmediata:

$$\frac{1}{V^4} \int \gamma_{ik} \gamma_{kl} dx_i dx_j dx_k dx_l = \left[\frac{1}{V^2} \int \gamma_{ij} dx_i dx_j \right]^2 = \sigma_V^4$$

De donde, finalmente, la varianza de fluctuación, que se escribe de manera más explícita:

$$(XIII, 4, 6) \quad D^2(S_V^2) = 2\sigma_V^4 + \frac{2}{V^2} \int \gamma(x-y)^2 dx dy - \frac{4}{V^3} \int \gamma(y-x)\gamma(y-x') dx dx' dy$$

Considerando los cálculos prácticos, se observará que la integral de orden $3n$ puede simplificarse con la ayuda del algoritmo siguiente:

$$(XIII, 4, 7) \quad \int \gamma(y-x)\gamma(y-x') dx dy dx' = \int dy \left[\int \gamma(y-x) dx \right]^2$$

En el caso de una varianza experimental S_c^2 , la varianza de fluctuación de $D^2(S_c^2)$ de S_c^2 , con respecto a su valor teórico, se obtiene inmediatamente al reemplazar integrales por sumatorias:

$$(XIII, 4, 8) \quad D^2(S_c^2) = 2\sigma_c^4 + \frac{2}{N^2} \sum_{ij} \overline{\gamma(x_i - x_j)^2} - \frac{4}{N^3} \sum_{ijk} \gamma(x_i - x_j)\gamma(x_i - x_k)$$

Hay que tener cuidado de no confundir esta varianza de fluctuación con la varianza de estimación $D^2(S_V^2 - S_c^2)$ de la varianza local por la varianza experimental.

EJEMPLO:

Función intrínseca h^λ y una dimensión. - Para aclarar la significación del resultado teórico (XIII, 4, 6), y poner en evidencia la magnitud considerable de la fluctuación de una varianza local, vamos a efectuar los cálculos para la función intrínseca $\gamma(h) = h^\lambda$, un espacio de una dimensión y un campo geométrico constituido por un segmento de longitud L . En una dimensión, y considerando (XIII, 4, 7), la fórmula general (XIII, 4, 6) puede explicitarse con la ayuda de las funciones auxiliares $\chi(h)$ y $F(h)$ definidas en (XII, 3, 1). Se encuentra fácilmente:

$$(XIII, 4, 9) \quad \begin{cases} D^2(S_V^2) = \overline{2F(L)^2} + \frac{4}{L^2} \int_0^L (L-x) \overline{\gamma(x)^2} dx \\ - \frac{8}{L^3} \int_0^L x^2 \overline{\chi(x)^2} dx - \frac{8}{L^3} \int_0^L x(L-x) \chi(x) \chi(L-x) dx \end{cases}$$

Con la función intrínseca h^λ , se tiene:

$$\begin{cases} \chi(x) = \frac{1}{\lambda+1} x^\lambda \\ F(x) = \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} x^\lambda \end{cases}$$

Y (XIII, 4, 9) se pone fácilmente en la forma:

$$D^2(S_V^2) = L^{2\lambda} \left[\frac{8}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2} + \frac{4}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)} - \frac{8}{(2\lambda+3)(\lambda+1)^2} - \frac{2^{-2\lambda} \sqrt{\pi}}{\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}\right)} \right]$$

Se observará que la varianza relativa $\frac{1}{F(L)^2} D^2(S_V^2)$ de la fluctuación es constante e independiente de L . Solo depende de λ :

$$(XIII, 4, 10) \quad \frac{1}{\sigma_V^4} D^2(S_V^2) = 2 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)^2}{2(2\lambda+1)} - \frac{2(\lambda+2)^2}{2\lambda+3} - \frac{\sqrt{\pi}(\lambda+2)}{2^{2+2\lambda}} \frac{\Gamma(\lambda+3)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}\right)}$$

Por ejemplo, para $\lambda = 1$, se obtiene una varianza relativa de fluctuación igual a $\frac{4}{5}$. De una manera general, se ve que las fluctuaciones de la varianza local tienen siempre una amplitud considerable, y por consiguiente, la varianza local tiene, lo más a menudo, una relación lejana con su valor teórico.

Estimación de la varianza local: el sesgo. - Cuando se estima la varianza local S_V^2 definida en (XIII, 4, 2) con la ayuda de la varianza experimental S_c^2 , definida en (XIII, 4, 3), y calculada a partir de una red regular de muestreos puntuales en número finito N , se introduce necesariamente un error sistemático o sesgo. En efecto - esto es visible en las

relaciones (XIII, 4, 4) - las variables aleatorias S_V^2 y S_c^2 no tienen el mismo valor probable a priori. Llamaremos *sesgo*, y lo designaremos por σ_B^2 , la diferencia:

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= E(S_V^2) - E(S_c^2) = \sigma_V^2 - \sigma_c^2 \\ \text{(XIII, 4, 11)} \quad &= \frac{1}{V^2} \int_{V^2} \gamma(x-x') dx dx' - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Este sesgo se presenta como la diferencia entre el valor exacto y aproximado de una misma integral la cual contiene la función intrínseca $\gamma(h)$. Su expresión nos recuerda la de una varianza de estimación. Si se supone que los puntos de muestreo x_i, x_j, \dots están implantados al azar en el campo V , $\gamma(x_i - x_j)$ debe ser reemplazado por su valor probable relativo a este sorteo al azar, que es σ_V^2 para $i \neq j$. Así, en el caso de una malla aleatoria pura, se tiene:

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N} \sigma_V^2$$

Esta expresión del sesgo coincide a la vez con la que proporciona la teoría clásica de la estimación de varianzas y con la de la varianza de estimación asociada a una malla aleatoria pura por la fórmula (XII, 5, 1). En el caso de una malla aleatoria estratificada, se puede ver fácilmente que el sesgo es igual a:

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(0|v)$$

Es decir aquí, de nuevo, según (XII, 5, 2), a la varianza de estimación correspondiente.

Examinemos ahora el caso de una malla regular. En lo que respecta al sesgo σ_B^2 , se puede ver en (XIII, 4, 11) que es estrictamente indiferente suponer la implantación de la malla regular preferencial o flotante, debido a que no aparece ningún término mixto expresando una covarianza entre V y la red. Pongámonos en el caso en que V es la reunión de N zonas de influencia, iguales entre ellas, de las N muestras, y sea $K(h)$ el covariograma geométrico asociado a V . El algoritmo de Cauchy (I, 2, 9) da:

$$\frac{1}{V^2} \int_{V^2} \gamma(x-x') dx dx' = \frac{1}{V^2} \int K(h) \gamma(h) dh$$

Por otra parte, los vectores $x_i - x_j$ sobre los cuales se hace la suma doble de (XIII, 4, 11) son múltiplos enteros de $ka = (k_1 a_1, \dots, k_n a_n)$ de los vectores de base de la malla. Pero el número de parejas $x_i x_j$ para las cuales el vector $x_i - x_j$ es igual a un vector dado ka es igual a $K(ka) / v$, siendo v el volumen de la malla elemental y $K(ka)$ la intersección de V y de su trasladado por ka . Se tiene entonces:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) = \frac{v}{V^2} \sum_k K(ka) \gamma(ka)$$

Entonces el sesgo (XIII, 4, 11) se pone en la forma:

$$(XIII, 4, 12) \quad \sigma_B^2 = \frac{1}{V^2} \int K(h)\gamma(h)dh - \frac{v}{V^2} \sum_k K(ka)\gamma(ka)$$

Se reconoce la expresión de la varianza de estimación transitiva asociada a la malla a y al covariograma $-K(h)\gamma(h)$. Basta entonces con comparar con la relación (XII, 4, 6) para enunciar el resultado siguiente:

El sesgo σ_B^2 asociado a la estimación de la varianza local por una malla regular, es idéntico a la varianza de estimación de la ley media calculada para una malla regular, tomada con una implantación flotante y un campo V conocido a priori.

En muchas aplicaciones prácticas el sesgo puede ser considerado como despreciable.

Estimación de la varianza local: La dispersión. - Caracterizaremos la desviación entre la varianza local verdadera S_V^2 y la varianza experimental S_c^2 , calculada en una red finita de muestreos por la varianza de estimación:

$$(XIII, 4, 13) \quad D^2[S_V^2 - S_c^2] = D^2(S_V^2) + D^2(S_c^2) - 2E(S_V^2 S_c^2) + 2\sigma_V^2 \sigma_c^2$$

Las varianzas a priori (o varianzas de fluctuación) $D^2(S_V^2)$ y $D^2(S_c^2)$ fueron ya calculadas en (XIII, 4, 6) y (XIII, 4, 8). Falta por evaluar $E(S_V^2 S_c^2)$. Si nos referimos a las definiciones (XIII, 4, 2) y (XIII, 4, 3) de las varianzas locales y experimentales, obtenemos en primer lugar:

$$S_V^2 S_c^2 = \frac{1}{N^3 V^3} \sum_{ijk} \int_{V^3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon(y-x) \varepsilon(y-x') dx dx' dy$$

Pasemos a los valores probables, siempre con la limitación de estar en el caso gaussiano. Se tiene, según (XIII, 1, 1):

$$E[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon(y-x) \varepsilon(y-x')] = E(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik}) E[\varepsilon(y-x) \varepsilon(y-x')] \\ + E[\varepsilon_{ij} \varepsilon(y-x)] E[\varepsilon_{ik} \varepsilon(y-x')] + E[\varepsilon_{ij} \varepsilon(y-x')] E[\varepsilon_{ik} \varepsilon(y-x)]$$

Por sumatoria en ijk e integración en x, x' e y , el primero de estos tres términos proporciona $E(S_c^2)E(S_V^2) = \sigma_c^2 \sigma_V^2$, mientras que los otros dos, por razones de simetría, conducen a un mismo valor. Basta con calcular uno de ellos, por ejemplo:

$$E[\varepsilon_{ij} \varepsilon(y-x)] E[\varepsilon_{ik} \varepsilon(y-x')] = [\gamma(x_i - y) + \gamma(x_j - x) - \gamma(x_i - x) - \gamma(x_j - y)] \\ \times [\gamma(x_i - y) + \gamma(x_k - x') - \gamma(x_i - x') - \gamma(x_k - y)]$$

Al desarrollar el producto entre paréntesis del segundo miembro, aparecen cuatro tipos de términos: términos en $\gamma(x_i - y)\gamma(x_j - y)$, en $\gamma(x_i - y)\gamma(x_i - x)$, en $\gamma(x_i - y)\gamma(x_j - x)$ y términos cuadrados de la forma $\overline{\gamma(y - x_i)^2}$. Los términos de igual especie, después de la suma y de la integración, conducen a un mismo valor. Aparecen simplificaciones, y, finalmente, cada uno de estos cuatro valores subsiste una sola vez con el signo - para los dos primeros y con el signo + para los dos últimos. Se obtiene así la covarianza entre S_V^2 y S_c^2 en la forma:

$$(XIII, 4, 14) \quad \left\{ \begin{aligned} E(S_V^2 S_c^2) - \sigma_V^2 \sigma_c^2 &= -\frac{2}{VN^2} \sum_{ij} \int_V \gamma(x - x_i) \gamma(x - x_j) dx \\ &\quad - \frac{2}{NV^2} \sum_i \int_{V^2} \gamma(x - x_i) \gamma(x' - x_i) dx dx' \\ &\quad + \frac{2}{N^2 V^2} \sum_{ij} \int_{V^2} \gamma(x - x_i) \gamma(x' - x_j) dx dx' \\ &\quad + \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \overline{\gamma(x - x_i)^2} dx \end{aligned} \right.$$

Se observará además la simplificación siguiente:

$$\frac{1}{N^2 V^2} \sum_{ij} \int_{V^2} \gamma(x - x_i) \gamma(x' - x_j) dx dx' = \left[\frac{1}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx \right]^2$$

La expresión entre paréntesis está estrechamente ligada a la varianza de estimación σ_N^2 de la ley media de V por la red de los N muestreos x_i . En efecto, la fórmula general (XII, 2, 1) puede escribirse:

$$\sigma_N^2 = \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx - \sigma_c^2 - \sigma_V^2$$

De donde se obtiene inmediatamente:

$$(XIII, 4, 15) \quad \frac{4}{N^2 V^2} \left[\sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx \right]^2 = \left[\sigma_N^2 + \sigma_c^2 + \sigma_V^2 \right]^2$$

Considerando esta simplificación, llevemos (XIII, 4, 14) a (XIII, 4, 13) y reemplacemos también $D^2(S_V^2)$ y $D^2(S_c^2)$ por sus expresiones (XII, 4, 6) y (XIII, 4, 8), y la diferencia $\sigma_V^2 - \sigma_c^2$ por σ_B^2 , que es el sesgo (XIII, 4, 11). Se obtiene así la dispersión de la varianza experimental relativa a la varianza local en la forma siguiente:

$$(XIII, 4, 16) \left\{ \begin{aligned} D^2(S_V^2 - S_c^2) &= \sigma_B^2 - 2\sigma_N^2(\sigma_V^2 + \sigma_c^2) - \sigma_N^4 \\ &+ \frac{2}{V^2} \int_{V^2} \gamma(x-x')^2 dx dx' + \frac{2}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j)^2 - \frac{4}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x-x_i)^2 dx \\ &- \frac{4}{V^3} \int_{V^3} \gamma(y-x)\gamma(y-x') dx dx' dy \\ &+ \frac{4}{NV^2} \sum_i \int_{V^2} \gamma(x_i-x)\gamma(x_i-x') dx dx' \\ &+ \frac{4}{N^2V} \sum_{ij} \int_V \gamma(x-x_i)\gamma(x-x_j) dx - \frac{4}{N^3} \sum_{ijk} \gamma(x_i-x_j)\gamma(x_i-x_k) \end{aligned} \right.$$

No insistiremos más acerca del cálculo de la varianza $D^2(S_V^2 - S_c^2)$, que es bastante difícil de efectuar explícitamente. Pero la estructura de la fórmula (XIII, 4, 6), donde alternan expresiones exactas y aproximadas de las mismas integrales, muestra que $D^2(S_V^2 - S_c^2)$ es bien de la misma naturaleza que las varianzas de estimación encontradas en el capítulo XII: La estimación de una varianza local por una varianza experimental es entonces, en general posible. Sin embargo, la varianza de estimación $D^2(S_V^2 - S_c^2)$ toma, a menudo, valores notablemente superiores a los que proporciona la estadística matemática usual en el caso en que los $f(x_i)$ son N variables aleatorias independientes de igual valor probable y de igual varianza σ_V^2 .

ANEXO A

RESUMEN SOBRE LAS DISTRIBUCIONES

SUMARIO

Esta exposición resumida de la teoría de las distribuciones sigue muy estrechamente, pero sin ningún rigor, y suprimiendo, lo más a menudo, las demostraciones, las obras de L. Schwartz ³⁵, con algunas referencias a I. M. GUELFAND ³⁶. Está destinado a los lectores, naturalistas o técnicos, que no conocen esta teoría, y desearan comprender los capítulos III y X de esta obra.

Como ha sido dicho, estos dos capítulos son independientes del resto del libro, y pueden ser omitidos, además del Anexo A, por los lectores que no quieren conocer las Distribuciones.

Sin embargo insistimos, más allá del marco modesto de esta obra, sobre el interés que presenta esta teoría para un naturalista o un técnico. Los fenómenos de la naturaleza, en efecto, a pesar de que existen independientemente del hombre, solo son conocidos a partir de resultados de la experiencia, o de operaciones tecnológicas. De la misma manera, una distribución no es nunca conocida « en si », sino más bien por su acción sobre ciertas funciones de base φ , que representan muy bien estas experiencias o estas operaciones tecnológicas. Por consiguiente, a menudo resulta cómodo, y sobre todo instructivo, representar un fenómeno natural como una distribución más que en la forma de una función ordinaria.

Después de definir las medidas (A, 1), las distribuciones (A, 2) y las operaciones elementales, sigue la derivación (A, 3) y el paso al límite (A, 4), se estudian algunos ejemplos útiles (A, 5), y la integración de orden no entero (A, 7). Se pone acento sobre la convolución (A, 6), las transformaciones de Fourier- Hankel (A, 8), y las distribuciones de tipo positivo (A, 9).

Por falta de espacio, no hemos podido abordar los problemas relativos a las ecuaciones de convolución (ecuaciones integro-diferenciales y a derivadas parciales) para los cuales el aporte de las distribuciones es fundamental pero que no son abordados en esta obra.

³⁵ L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, París, Hermann, 1951 y *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. París, Hermann 1961.

³⁶ I. M. GUELFAND y G. E. CHILOV, *Les distributions, traduction al francés*, París, Dunod, 1962.

1. - Medidas.

A veces, por una simplificación abusiva, se describen ciertos fenómenos por funciones de punto. Por ejemplo, en un medio gaseoso, la noción de densidad de la materia $\mu(x)$ en un punto x (de coordenadas x_1, x_2, x_3) pierde toda significación precisa cuando se desciende a la escala de las partículas elementales. Al contrario, la integral:

$$(A, 1, 1) \quad Q = \int_V \mu(x) dx$$

La cual representa la cantidad de materia contenida en un volumen V cualquiera siempre tiene un sentido, porque cada volumen V contiene efectivamente una cantidad definida de materia. Más generalmente, si una masa puntual localizada en el punto x ejerce un cierto efecto físico (por ejemplo un potencial) caracterizado por una función $\varphi(x)$, el efecto ejercido por la cantidad de materia contenida en V , simbolizado por la integral:

$$(A, 1, 2) \quad \int_V \mu(x)\varphi(x) dx$$

Es una realidad, de manera que la integral (1, 2) debe tener un sentido, aún si la función $\mu(x)$ no se pueda definir como función de punto. En efecto, es claro que, si somos capaces de determinar el valor numérico de (1, 2) para todas las funciones $\varphi(x)$ que nos interesan, el hecho que $\mu(x)$ no se pueda definir como función, no tiene mucha importancia. En realidad, el procedimiento mismo que nos permite atribuir un sentido a (1, 1) o (1, 2) define un ente matemático nuevo, el cual generaliza la noción de función de punto, y que tiene el nombre de *medida*.

Precisemos esta definición. En primer lugar, las funciones φ no pueden ser cualesquiera. Nos limitaremos, en primer lugar, al conjunto (o espacio) (C) de las funciones φ que poseen las dos propiedades siguientes:

- son continuas
- toman valores diferentes de cero en un dominio acotado (cualquiera)

Diremos que hemos definido un *funcional* L sobre el espacio (C) de las funciones φ , si a toda función φ perteneciente a (C) somos capaces de hacerle corresponder un número, que escribiremos $L(\varphi)$. Cuando $L(\varphi)$ es real, para toda función real φ de (C) , la funcional L se dice real.

La funcional L se dice *lineal* si, para todas las funciones φ_1, φ_2 de (C) y para todo número complejo λ se tiene:

$$(A, 1, 3) \quad \begin{cases} L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) \\ L(\lambda\varphi) = \lambda L(\varphi) \end{cases}$$

Finalmente, se dirá que es continua, si, para toda sucesión de funciones φ_i , continuas y nulas fuera de un dominio acotado, que convergen uniformemente hacia una función φ de (C) , los $L(\varphi_i)$ convergen a $L(\varphi)$.

Una medida μ es, por definición, una *funcional lineal continua sobre el espacio* (C) . En lugar de $\mu(\varphi)$, se escribe a menudo Integral de Stieltjes):

$$\int \varphi d\mu$$

Se demuestra que las medidas no solamente actúan sobre el espacio (C) sino también sobre el conjunto más vasto de funciones llamadas borelianas³⁷ nulas fuera de un conjunto acotado. El volumen V , que interviene en la expresión (1,1), puede ser definido a partir de una función $k(x)$, llamada característica³⁸, igual a +1 cuando el punto x pertenece a V , y a = en el caso contrario. Una tal función $k(x)$ es boreliana, no solamente para los volúmenes geométricos usuales, sino también para los conjuntos de puntos mucho más generales (conjuntos borelianos). La «integral» (1, 1) debe ser reemplazada por la escritura más rigurosa siguiente:

$$Q = \mu(k) = \int k(x)d\mu$$

Y, de la misma manera, (1, 2) queda reemplazado por la expresión:

$$\mu(k\varphi) = \int k(x)\varphi(x)d\mu$$

Que tiene un sentido preciso para toda función φ continua, o aún boreliana.

Esta noción de medida es una generalización natural de la noción de función, en el sentido que a toda función $f(x)$, con tal que sea sumable sobre todo conjunto acotado, se la hace corresponder una medida f bien definida por:

$$(A, 1, 4) \quad f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx$$

Se observará sin embargo, que a dos funciones iguales casi en todas partes corresponde una sola y misma medida, de manera que el conocimiento de la funcional (1, 4) define una función salvo en un conjunto de medida nula.

Soporte. - Se llama soporte de una función continua φ al conjunto cerrado más pequeño que contiene todos los puntos donde $\varphi(x)$ es diferente de 0: La función φ es idénticamente nula en el complemento de su soporte.

Análogamente, se llama soporte³⁹ de una medida μ al conjunto cerrado más pequeño tal que $\mu(\varphi)$ sea nulo para toda función φ cuyo soporte está contenido en su complemento: Dicho de otra forma: $\mu(\varphi)$ es nulo cuando los soportes de μ y de φ no se cortan.

³⁷ «Se llama tribu boreliana al conjunto más pequeño de funciones el cual contiene todas las funciones continuas, y si contiene una sucesión convergente de funciones, contiene también su límite » (L. SCHWARTZ)

³⁸ Se trata de la terminología de teoría de conjuntos. En esta obra, designaremos también la función $k(x)$ como la variable regionalizada geométrica asociada al volumen (o al conjunto) V .

³⁹ En la presente obra, se reserva el término soporte a las funciones φ (funciones de muestreo). Para las medidas y las distribuciones, se habla más bien de campo (campo geométrico de una regionalización)

El espacio (C) es el conjunto de las funciones continuas con soporte acotado. Si una medida tiene soporte acotado, esta actúa no solamente sobre las funciones φ de (C) sino sobre todas las funciones continuas (con soporte cualquiera), en particular sobre la función φ constante e igual a 1 en todo el espacio. En este caso, la integración $\int d\mu$ extendida a todo el espacio existe entonces, y se dice que la medida μ es *sumable*.

Medida de Dirac. - Se llama medida de Dirac δ la medida definida por:

$$(A, 1, 15) \quad \delta(\varphi) = \varphi(0)$$

El soporte de esta medida se reduce a un solo punto, que es el origen 0 de coordenadas. ES una medida sumable, de suma igual a la unidad. En la óptica intuitiva de la ecuación (1, 1), δ corresponde a una masa puntual localizada en 0 . La « densidad » es nula en todas partes, salvo en el origen, donde es infinita. La cantidad de materia $\int_V \delta(x) dx$ es igual a 1

o a 0 según que V contenga o no al origen de coordenadas. A menudo se escribe (1, 5) en forma simbólica, como si δ fuera una función:

$$\int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

Análogamente, se designa por δ_y la medida definida por:

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y)$$

Corresponde a una masa unitaria puntual localizada en el punto y , y se escribe simbólicamente $\delta(x-y)$ en lugar de δ_y , luego:

$$\int \delta(x-y)\varphi(x)dx = \varphi(y)$$

Medidas positivas. - Se dice que una medida μ es positiva si $\mu(\varphi)$ es positivo o nulo para toda función φ no negativa. Toda medida real es igual a la diferencia de dos medidas positivas. Las funciones de distribución del cálculo de probabilidades son en realidad medidas positivas sumables, de suma unidad.

2. - Distribuciones.

2.-1. - Generalidades. - Hemos definido las medidas como funcionales continuas sobre el espacio (C) de las funciones continuas con soporte acotado. Se designa por (C') al espacio de las medidas, y se dice que (C') es el dual de (C) . La misma definición puede ser aplicada a los espacios de funciones diferentes de (C) . Así, si se impone a las funciones de base φ condiciones más severas que ser continuas y a soporte acotado, por ejemplo condiciones de derivabilidad, se ve que se pueden introducir entes matemáticos nuevos que generalizan las medidas, de la misma manera que las medidas generalizan las funciones localmente sumables. Estos entes son las distribuciones.

Es necesario ver bien que una distribución T no tiene existencia en si, sino que solamente para un conjunto definido (o espacio) de funciones de base φ . Se dice, en lenguaje matemático, que T está definido sobre este espacio de funciones φ . Una funcional T no es otra cosa que un procedimiento (cualquiera que sea) que permite asociar un valor numérico $T(\varphi)$ a toda función de base φ . Por otra parte, de la misma manera, una función usual f no es otra cosa que un procedimiento que permite asociar un valor numérico $f(x)$ a todo punto x del espacio usual. Si se interpreta φ como un punto del espacio de las funciones de base, la funcional $T(\varphi)$ aparece como la exacta generalización de la función $f(x)$.

El conjunto (o espacio) de las distribuciones T definidas sobre un espacio de funciones de base φ se llama *el dual* del espacio de las funciones de base.

Es necesario ver bien que mientras más el espacio de las funciones de base es comprensivo, más el espacio dual de las distribuciones es restringido. Existirán relativamente pocos funcionales capaces de actuar sobre funciones casi cualesquiera. Por ejemplo, solo las medidas actuarán sobre las funciones continuas (o más generalmente borelianas). En la medida en que se imponen condiciones más severas a las funciones de base φ (por ejemplo, de ser derivables una vez, dos veces... o indefinidamente derivables) se ven surgir, en el horizonte las distribuciones, entes nuevos, más y más generales.

La relación de inclusión es la siguiente: Si un espacio τ_1 de funciones es un sub-espacio de τ , el espacio τ' de las distribuciones definidas en τ es un sub-espacio del espacio de las distribuciones τ'_1 definidas en τ_1 : Dicho de otra manera, si toda función de τ_1 es parte de τ , toda distribución de τ' es parte de τ'_1 .

Así, toda función indefinidamente derivable (espacio D) es una función continua (espacio C). Resulta que toda medida (espacio C') es una distribución del espacio (D') que vamos a definir, mientras que, en general, una distribución T cualquiera de (D') no será una medida: $T(\varphi)$ no existirá para una función continua cualquiera, sino solamente para una función φ indefinidamente derivable (de D).

De una manera general, siendo dado un espacio (τ) de funciones, se define el espacio de las distribuciones (τ'), dual de (τ) como el espacio de las *funcionales lineales continuas* sobre (τ). Dicho de otra manera, T es una distribución de (τ') si:

- 1.- A toda función φ de τ se la hace corresponder un número $T(\varphi)$.
- 2.- Se tienen las relaciones de linealidad:

$$(A, 2, 1) \quad \begin{cases} T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \\ T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi) \end{cases}$$

- 3.- Si una sucesión de funciones φ_i de (τ) converge hacia una función φ de (τ) los $T(\varphi_i)$ convergen hacia $T(\varphi)$.

Esta definición no tomará un sentido preciso, a menos que se defina exactamente lo que se entiende por sucesión de funciones φ_i que convergen hacia una función φ , es decir si se dota al espacio (τ) una convergencia.

Notación simbólica. – Se escribe a menudo, de manera puramente simbólica pero expresiva:

$$\int T(x)\varphi(x)dx \quad \text{en lugar de } T(\varphi)$$

2.- 2. - Los espacios (D) y (D') . - Se dice que una función φ pertenece al espacio (D) si es *indefinidamente derivable* y *con soporte acotado*. Las funciones habituales no responden en general, con esta definición: Se exige, en efecto que φ sea idénticamente nula fuera de su soporte acotado, y al mismo tiempo que admita derivadas de todos los órdenes en cualquier punto de su soporte, comprendiendo además la frontera de su soporte. Como ejemplo simple de función de (D) citemos la función $s(x)$, definida por L. SCWARTZ de la manera siguiente:

$$(A, 2, 2) \quad \begin{cases} s(x) = 0 & \text{para } r \geq 1 \\ s(x) = \exp\left[-\frac{1}{1-r^2}\right] & \text{para } r < 1 \\ (r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}) \end{cases}$$

A partir de esta función $s(x)$, es posible construir funciones de (D) tan poco diferentes como se quiera, de toda función $f(x)$ continua y con soporte acotado. El procedimiento consiste en regularizar f por la función $s\left(\frac{x}{a}\right)$, siendo a una constante arbitrariamente pequeña. Poniendo:

$$C = \int s\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^n \int s(x) dx$$

El producto de convolución:

$$(A, 2, 3) \quad \varphi(x) = \frac{1}{C} \int f(x-\xi) s\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi$$

Define una función φ de (D) la cual se « aproxima » a f mucho mejor cuando a es pequeño.

Para definir el espacio (D') de las distribuciones, debemos dotar a (D) de una convergencia. Diremos que una sucesión φ_i de funciones de (D) converge hacia una función φ de (D) si:

1. - Los soportes de las φ_i están todos contenidos en un mismo dominio acotado.
2. - Las φ_i y sus derivadas convergen uniformemente hacia φ y sus derivadas.

Esta convergencia es severa, porque no se interesa solamente en las funciones φ_i sino también en sus derivadas.

Las funcionales lineales continuas sobre (D) en el sentido de esta convergencia constituyen el espacio de las distribuciones (D') . C' es el espacio de distribuciones más

general posible. Cuando se habla de distribuciones, sin precisar, se trata de distribuciones de (D') .

El soporte de una distribución se define exactamente como el soporte de una medida. Un sub espacio de (D') el cual se usa a menudo es el espacio (ξ') de las distribuciones con soporte acotado. Se demuestra que (ξ') es el dual del espacio (ξ) de las funciones indefinidamente derivables con soporte cualquiera (acotado o no): Las distribuciones con soporte acotado son funcionales lineales continuas sobre (ξ) .

2.- 3. Adición y multiplicación de las distribuciones. - La adición de dos distribuciones T_1 y T_2 y la multiplicación por un escalar λ se definen sin dificultad por las relaciones:

$$(A, 2, 4) \quad \begin{cases} (T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi) \\ (\lambda T)(\varphi) = \lambda[T(\varphi)] \end{cases}$$

Que hacen de (D') un espacio vectorial.

La multiplicación de dos distribuciones no es posible en el caso general, pero una distribución T puede ser multiplicada por una función $f(x)$ la cual debe verificar condiciones suficientes de regularidad. La distribución fT , simbólicamente, actuaría sobre una función de base φ de la manera siguiente:

$$fT(\varphi) = \int f(x)T(x)\varphi(x)dx$$

Esta escritura simbólica tiene sentido si el producto $f(x)\varphi(x)$ pertenece al mismo espacio que la función de base φ . Por ejemplo, si T pertenece a (D') , es necesario que $f(x)\varphi(x)$ pertenezca a (D) cualquiera que sea la función φ de (D) : esto ocurre si f es indefinidamente derivable (con soporte cualquiera), es decir si pertenece a (ξ) . Cuando esta condición se verifica, el producto fT está definido por la relación:

$$(A, 2, 5) \quad (fT)(\varphi) = T(f\varphi)$$

2.4. - Traslada y transpuesta de una distribución. La trasladada $\tau_h f$ por un vector h de una función ordinaria $f(x)$ es la función $f(x-h)$:

$$\tau_h f = f(x-h):$$

Si f es localmente sumable, luego define una distribución f , y su trasladada $f(x-h)$ define también una distribución:

$$\tau_h f(\varphi) = \int f(x-h)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+h)dx$$

Al cambiar x en $x+h$, se ve que $f(x-h)$ actúa sobre φ como $f(x)$ sobre $\varphi(x+h)$. Esta definición se puede transportar a las distribuciones: La trasladada $\tau_h T$ es la distribución que actúa sobre $\varphi(x)$ como T sobre $\varphi(x+h)$ o sea:

$$(A, 2, 6) \quad \tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi)$$

En notación simbólica se escribirá:

$$\tau_h T = T(x - h)$$

Análogamente, la *transpuesta* \hat{f} de una función $f(x)$ es la función $f(-x)$. Como distribución actúa sobre $\varphi(x)$ como $f(x)$ sobre $\varphi(-x)$, porque se tiene:

$$\int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx$$

La transpuesta \hat{T} de una distribución cualquiera se definirá entonces por:

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$$

Y se escribirá, simbólicamente:

$$(A, 2, 7) \quad \hat{T}(x) = T(-x)$$

2.5. - Pseudo funciones, y regularización de las integrales divergentes. - Entre las funciones $f(x)$ usuales, solo las *funciones localmente sumables* (sumables sobre todo conjunto acotado) pueden ser identificables a las distribuciones:

$$f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx$$

Sin embargo, funciones tan usuales como $1/x$, no son sumables en la vecindad de ciertos puntos singulares ($x = 0$, para $1/x$), la integral:

$$(A, 2, 8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

Es divergente en el espacio de una dimensión. Sin embargo las expresiones:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \end{aligned}$$

Tienen un sentido para toda función φ de (D) : ellas definen, para estas funciones φ , una funcional lineal y continua, entonces una distribución particular, llamada v.p.($1/x$) (valor principal) o P.f.($1/x$) (pseudo-función). Esta pseudo-función - que es una distribución - no puede, en absoluto, ser identificada a la función $(1/x)$. Pero, al actuar sobre una función $\varphi(x)$ tal que:

$$\varphi(0) = 0$$

Para la cual la integral (2, 8) tiene un sentido, ella proporciona el mismo valor numérico que esta integral, de manera que se tiene, en este caso:

$$\text{v.p.} \frac{1}{x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Se puede decir, si se desea, que esta pseudo-función $f(x)$ coincide con la función $1/x$ fuera del origen.

Más generalmente, si una función $f(x)$ presenta en el origen una singularidad tal que $x^m f(x)$ sea localmente sumable para un entero m conveniente, sin que $f(x)$ mismo lo sea, la integral:

$$\int_{-\infty}^{-1} f \varphi dx + \int_{-1}^1 f(x) \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) \right] dx + \int_1^{\infty} f \varphi dx$$

Es convergente para toda función φ de (D) . Ella define un funcional lineal y continuo, luego una distribución, que es la pseudo-función $f(x)$: Esta pseudo-función - que es una distribución - la cual solo coincide con $f(x)$ fuera del origen.

Existe otro procedimiento para definir pseudo-funciones, y de regularización de las integrales divergentes, fundado sobre el método de prolongación analítica. Por ejemplo, con n dimensiones, la función r^λ , con:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Define una distribución siempre que la parte real de λ sea superior a $-n$:

$$\text{Re}(\lambda) > -n$$

Porque la integral:

$$r^\lambda(\varphi) = \int r^\lambda \varphi(x) dx$$

Es convergente. Si se considera la expresión $r^\lambda(\varphi)$ como una función de la variable compleja λ , entonces es una función analítica, y puede, con este título, ser prolongada en el plano complejo. Se muestra que esta prolongación analítica existe para todos los valores de λ , salvo para los valores enteros negativos $-n, -n-2, -n-4, \dots$, que son los polos. Esta prolongación analítica define una funcional lineal, y se demuestra que es continua, es decir una distribución (pseudo-función) r^λ .

Estas pseudo-funciones son muy importantes en las aplicaciones, porque permiten a menudo evitar discusiones delicadas de convergencia.

3. - Derivaciones de las distribuciones.

3.1. - Definición. - En un espacio de una sola dimensión, si una función continua $f(x)$ tiene una derivada continua $f'(x)$, esta derivada puede ser definida, como distribución, por la fórmula:

$$f'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Haciendo una integración por partes, y teniendo en cuenta el hecho que $\varphi(x)$, que pertenece a (D) , se anula en el infinito, se obtiene:

$$f'(\varphi) = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

Como $\varphi'(x)$ pertenece también a (D) , se ve que la derivada f' puede ser definida como la distribución que actúa sobre φ , salvo el signo, de la misma manera que f actúa sobre φ' .

$$f'(\varphi) = -f(\varphi')$$

Bajo esta forma, la definición de derivada se generaliza a una distribución cualquiera. Por definición, la derivada de una distribución T es la funcional T' tal que se tiene:

$$(A, 3, 1) \quad T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

Esta funcional es lineal. Es también continua, porque si una secuencia φ_i de funciones de base tiende hacia una función de base φ , las derivadas φ_i' tienden a φ' (debido a la definición misma de la convergencia en D) y como T es continua, (por definición de las distribuciones) $T(\varphi_i')$ tiende hacia $T(\varphi')$. La funcional T' es entonces también continua: Es entonces una distribución.

Así, toda distribución T es indefinidamente derivable, y sus derivadas sucesivas son distribuciones.

La definición (3, 1) se generaliza sin dificultad al espacio de n dimensiones, y a las derivadas parciales de orden cualquiera $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$:

$$(A, 3, 2) \quad \frac{\partial^m T}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(\varphi) = (-1)^m T \left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right)$$

Por ejemplo, el laplaciano:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

De una distribución T es la distribución ΔT definida por:

$$(A, 3, 3) \quad \Delta T(\varphi) = T(\Delta\varphi)$$

Cuando el producto $\alpha(x)T$ de una distribución T por una función $\alpha(x)$, el cual es obligatoriamente derivable en el sentido usual, está definido (párrafo 2, 3), se aplica la regla habitual de derivación de productos:

$$(A, 3, 4) \quad \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T$$

3.2. - Derivadas de las medidas de Dirac. - Como toda distribución, la medida de Dirac δ es indefinidamente derivable, y sus derivadas sucesivas son distribuciones. En el caso de una sola dimensión, la derivada $\delta^m(x)$ es la distribución definida por:

$$(A, 3, 5) \quad \delta^m(\varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

Es decir, en escritura simbólica:

$$(A, 3, 6) \quad \int \frac{\partial^m \delta(x-a)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \varphi(x) dx = (-1)^m \frac{\partial^m \varphi(a)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$$

Estas distribuciones son de uso corriente en Mecánica Cuántica, en el cálculo llamado simbólico de los eléctricos, etc... Su soporte se reduce a un punto. Se demuestra, recíprocamente, que *toda distribución con soporte puntual es una combinación lineal de la medida de Dirac y de sus derivadas sucesivas.*

3. 3.- Derivadas de las funciones localmente sumables. - Considerada como distribución, *toda función localmente sumable es indefinidamente derivable en el sentido de las distribuciones, aún si no admite derivadas en el sentido usual.* Pero, es necesario ver bien que sus derivadas usuales, si es que existen, no coinciden necesariamente con sus derivadas en el sentido de las distribuciones.

Consideremos, por ejemplo, la función de Heaviside $Y(x)$, en el espacio de una dimensión, definida por:

$$(A, 3, 7) \quad \begin{cases} Y(x) = 0 & \text{para } x < 0 \\ Y(x) = 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

La derivada, en el sentido usual $Y'(x)$ es nula en todas partes, salvo en el origen, donde no está definida. En el sentido de las distribuciones, se encuentra:

$$Y'(\varphi) = -Y(\varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

De manera que, en el sentido de las distribuciones, la derivada Y' es la medida de Dirac:

(A, 3, 8)

$$Y' = \delta$$

Análogamente, siempre en una dimensión, sea una función $f(x)$ derivable y continua, como también sus derivadas, hasta un cierto orden, en cualquier punto, salvo en el origen $x = 0$, pero tal que estas derivadas admitan en $x = 0$, un límite a la derecha y a la izquierda $f^{(m)}(+0)$ y $f^{(m)}(-0)$. Al designar por S_m al salto de la derivada de orden m :

$$S_m = \{f^{(m)}(+0)\} - \{f^{(m)}(-0)\}$$

y escribiendo $\{f^{(m)}(x)\}$ para las derivadas sucesivas en el sentido usual (que son funciones continuas, salvo en $x = 0$), las derivadas $f^{(m)}$ en el sentido de las distribuciones están dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} f' = \{f'(x)\} + S_0 \delta \\ \dots\dots\dots \\ f^{(m)} = \{f^{(m)}\} + S_0 \delta^{(m-1)} + S_1 \delta^{(m-2)} + \dots + S_{m-1} \delta \end{array} \right.$$

En el espacio de n dimensiones, se tienen resultados análogos, que permiten, entre otras propiedades, encontrar la fórmula de Green.

Mencionemos solamente aquí que el laplaciano de la función $1/r^{n-2}$ (o $\log r$ si $n = 2$), nulo en el sentido usual, salvo en el origen donde no está definido, está dado, en el sentido de las distribuciones por:

$$(A, 3, 9) \quad \Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta$$

Y, para $n = 2$ (caso del plano):

$$(A, 3, 10) \quad \Delta \log r = 2\pi \delta$$

Por ejemplo, para $n = 3$, se tiene $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta$. Estas relaciones son útiles en la teoría de los potenciales armónicos.

4. - Paso al límite.

Por definición, se dice que una sucesión de distribuciones T_i converge hacia una distribución T si, para toda función de base φ de (D) , los números $T_i(\varphi)$ convergen (en el sentido usual) hacia el número $T(\varphi)$. Análogamente, se dirá que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} T_i$ de

distribuciones converge y tiene por suma la distribución T si las sumas parciales $\sum_{i=1}^m T_i$

convergen hacia T , en el sentido que acabamos de definir, cuando m tiende al infinito.

Se demuestra entonces el resultado siguiente: Si una sucesión de distribuciones T_i es tal que, para toda función φ de (D) , la secuencia numérica $T_i(\varphi)$ tiene un límite en el sentido usual, la sucesión T_i converge hacia una distribución T .

Análogamente, si para toda función φ , la serie $\sum_i T_i(\varphi)$ es convergente, la serie $\sum_i T_i$

converge hacia una distribución T (es claro que el límite de la sucesión o de la serie de los $T_i(\varphi)$ define una funcional lineal sobre (D) . Se demuestra, lo que es mucho menos evidente, que esta funcional es continua).

Se establece igualmente la continuidad de la derivación: Si una sucesión (o una serie) de distribuciones T_i converge hacia una distribución T , la sucesión (o la serie) derivada T_i' converge hacia la derivada T' de T (en efecto, para una sucesión T_i por ejemplo, $T_i'(\varphi) = -T_i(\varphi')$ converge hacia:

$$-T(\varphi') = T'(\varphi)$$

Esto resulta de la definición de la derivación, y del hecho que si φ pertenece a (D) es lo mismo para φ' .

Luego, *siempre se tiene el derecho de derivar término a término una serie convergente.*

Y la serie obtenida es siempre convergente: La teoría de las distribuciones le proporciona un sentido a grandes categorías de series, las cuales divergen, en el sentido del análisis ordinario. Por ejemplo, para que la serie trigonométrica:

$$(A, 4, 1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$$

Sea convergente, basta con que los coeficientes a_k sean mayorados, en módulo, por una expresión de la forma Ak^m (A constante, m entero). En efecto, las series:

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_k}{k^{m+2}} e^{ikx} \quad y \quad \sum_1^{\infty} (-1)^{m+2} \frac{a_{-k}}{k^{m+2}} e^{-ikx}$$

Convergen uniformemente, de manera que su suma es una función continua. Al derivar $m + 2$ veces, término a término, se obtienen series convergentes de distribuciones, cuya suma solo difiere de (4, 1) por una constante.

Por ejemplo, se demuestra la relación:

$$(A, 4, 2) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k)$$

Una tal serie representa masas unitarias localizadas en todos los puntos de abscisas enteras. Apliquemos esta relación a una función de base φ cuya transformada de Fourier ψ está dada por:

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

5.2. - Distribuciones x_+^λ $|x|^\lambda$ etc.- Por definición, llamaremos x_+^λ la distribución:

$$(A, 5, 4) \quad x_+^\lambda = \Gamma(\lambda + 1) Y_{\lambda+1}$$

Que coincide con la formación monomio ordinario para $\text{Re}(\lambda) > 0$. Su transpuesta será designada por x_-^λ :

$$(A, 5, 5) \quad x_-^\lambda = \Gamma(\lambda + 1) \hat{Y}_{\lambda+1} = \Gamma(\lambda + 1) Y_{\lambda+1}(-x)$$

Estas distribuciones están definidas para todos los valores de λ , salvo los enteros negativos ($\Gamma(-m)$ es infinito). En $\lambda = -m$, la función de λ definida por $x_+^\lambda(\varphi)$ presenta un polo en $1/(\lambda + m)$, con residuo $\varphi^{(m-1)}(0)/(m-1)!$, mientras que x_-^λ posee el mismo polo en $\lambda = -m$, pero con el residuo: $(-1)^{m-1} \varphi^{(m-1)}(0)/(m-1)!$.

Se introducen así las dos distribuciones, simétrica y antisimétrica:

$$(A, 5, 6) \quad \begin{cases} |x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda \\ |x|^\lambda \text{ Sgn } x = x_+^\lambda - x_-^\lambda \end{cases}$$

(La sigla *Sgn* x se lee: signo de x). $|x|^\lambda$ solo tiene polos para $\lambda = -1, -3, \text{etc.}$, porque para un entero par los residuos de x_+^λ y de x_-^λ son opuestos. Análogamente, $|x|^\lambda \text{ Sgn } x$ solo tiene polos para λ entero par negativo. Se deduce la definición de la distribución x^{-n} (n entero cualquiera):

$$(A, 5, 7) \quad \begin{cases} x^{-2m} = |x|^{-2m} \\ x^{-2m-1} = |x|^{-2m-1} \text{ Sgn } x \end{cases}$$

La función $\log |x|$, que es localmente sumable, define una distribución cuyas derivadas sucesivas permiten encontrar de nuevo la distribución x^{-n} introducida en (5, 7):

$$(A, 5, 8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \log |x| = x^{-1} \\ \frac{d^n}{dx^n} \log |x| = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n} \end{cases}$$

5.3. - Distribución r^λ . - En el espacio de n dimensiones, el Laplaciano (en el sentido usual) de la función r^λ está dado por:

$$(A, 5, 9) \quad \Delta r^\lambda = \lambda(\lambda + n - 2) r^{\lambda-2}$$

Esta relación permanece en el sentido de las distribuciones, con la condición de reemplazar, en el caso adecuado (es decir cuando $Re(\lambda) \leq -n$) la función r^λ por la distribución pseudo-función que la generaliza. La aplicación reiterada de (5.9) permite obtener todas estas pseudo-funciones a partir de las funciones r^λ para las cuales $Re(\lambda) > -n$, salvo siempre, para los valores enteros $\lambda = -n, -n-2, -n-4, \dots$

La distribución f_λ que se deduce de r^λ por:

$$(A, 5, 10) \quad f_\lambda = \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} r^\lambda$$

Verifica la ecuación:

$$(A, 5, 11) \quad \Delta f_\lambda = \lambda f_{\lambda-2}$$

Y está definida igualmente para $\lambda = -n, -n-2, \dots$. Para estos valores, se encuentran de nuevo las medidas de Dirac y sus Laplacianos. De (3, 9), se obtiene directamente:

$$(A, 5, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{-n} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta \\ f_{-n-2k} = (-1)^k \frac{2^{\frac{n-k}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \Delta^{(k)} \delta \end{array} \right.$$

6. - Convolución.

6.1 - Convolución para las funciones. - El producto de convolución $f * g$ de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ está definido por:

$$(A, 6, 1) \quad f * g = \int f(x-\xi)g(\xi)d\xi = \int f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

El cual solo tiene sentido si f y g verifican condiciones convenientes de sumabilidad. Si f y g son localmente sumables, el producto de convolución siempre tiene un sentido si una de las dos funciones tiene un soporte acotado, o aún, en el espacio de una sola dimensión,

cuando f y g son idénticamente nulas para $x < 0$: En este último caso, la convolución se escribe:

$$(A, 6, 2) \quad f * g = \int_0^x f(x-\xi)g(\xi)d\xi = \int_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

El producto de convolución es conmutativo ($f * g = g * f$) y asociativo.

Si se considera f y g como distribuciones, se ve que $f * g$ actúa sobre una función de base φ según la fórmula:

$$(A, 6, 3) \quad \begin{cases} f * g(\varphi) = \int f(x-\xi)g(\xi)\varphi(x)d\xi dx \\ = \int f(\eta)g(\xi)\varphi(\xi+\eta)d\xi dx \end{cases}$$

Dicho de otra manera, $f * g$ actúa sobre $\varphi(x)$ como $f(x)g(y)$, considerado como una función del espacio de $2n$ dimensiones, lo hace sobre $\varphi(x+y)$.

6. 2. - Producto tensorial de dos distribuciones. - La noción de función $f(x)g(y)$ considerada como una función del espacio de $2n$ dimensiones (espacio de los puntos definidos por las $2n$ coordenadas $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n$) actuando sobre las funciones de base de la forma $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ según la fórmula:

$$S \times T(\varphi_1\varphi_2) = [S(\varphi_1)][T(\varphi_2)]$$

Por ejemplo, si se escribe $1(x_1)$ la función de la variable x_1 idéntica a la unidad, una distribución, o una función, independiente de x_1 se pone en la forma:

$$1(x_1) \times T(x_2 \dots x_n)$$

Esta distribución actúa sobre $\varphi(x_1x_2 \dots x_n)$ como T sobre la función de $n-1$ variables $x_2 \dots x_n$ definida por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1x_2 \dots x_n) dx_1$$

En lo que respecta a las derivaciones, se tiene la regla evidente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} S(x) \times T(y) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} S(x) \right] \times \left[\frac{\partial}{\partial y_j} T(y) \right]$$

Y, para las medidas de Dirac:

$$(A, 6, 4) \quad \delta(x_1) \times \delta(x_2) \dots \times \delta(x_n) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

6.3. - Convolución de distribuciones. - El producto de convolución de dos distribuciones S y T del espacio de n dimensiones es la distribución $S * T$ que actúa sobre $\varphi(x)$ de la misma manera que el producto tensorial $S \times T$ lo hace sobre $\varphi(x + y)$ en el espacio de $2n$ dimensiones:

$$(A, 6, 5) \quad S * T(\varphi) = S \times T[\varphi(x + y)] = \int S(x)T(y)\varphi(x + y)dx dy$$

Sin embargo, en general, $\varphi(x + y)$ no pertenece al mismo espacio de funciones que $\varphi(x)$. Por ejemplo, si φ tiene soporte acotado en el espacio de n dimensiones, el soporte de $\varphi(x + y)$ en el espacio de $2n$ dimensiones no es acotado. El producto de convolución no existe siempre. Pero existe al menos en cada uno de los casos siguientes:

- Una de las dos distribuciones tiene soporte acotado (perteneciente a ξ')
- Las dos distribuciones tienen su soporte en el cuadrante:

$$x_1 \geq 0 \dots x_n \geq 0$$

Se define análogamente, el producto de convolución de un número cualquiera de distribuciones: Por ejemplo, $R * S * T$ actúa sobre φ como $R \times S \times T$ sobre $\varphi(x + y + z)$. Este producto tiene un sentido, notablemente, en el caso en que todas las distribuciones, salvo una a lo más, tienen su soporte acotado, o también si todas tienen sus soportes en el cuadrante positivo.

El producto de convolución (cuando existe en el sentido de la definición anterior) es *asociativo* y *conmutativo*:

$$(A, 6, 6) \quad \begin{cases} S * T = T * S \\ R * (S * T) = (R * S) * T = R * S * T \end{cases}$$

La medida de Dirac δ , o una cualquiera de sus derivadas $D\delta$, tienen un soporte puntual. La convolución $\delta * T$ o $D\delta * T$ existe entonces para toda distribución T . Se tiene:

$$(A, 6, 7) \quad \begin{cases} \delta * T = T \\ D\delta * T = DT \end{cases}$$

La convolución por δ es el *operador unitario*. La convolución por $D\delta$ es el operador de derivación D . De (6, 6) resulta que para derivar $S * T$, basta con derivar S o bien T :

$$(A, 6, 8) \quad D(S * T) = D\delta * S * T = DS * T = S * DT$$

Análogamente, la convolución por $\delta h = \delta(x - h)$, medida de Dirac en el punto h , no es otra cosa que la *traslación* por el vector h :

$$(A, 6, 9) \quad \delta h * T = \tau_h T = T(x - h)$$

Finalmente, el producto de convolución de una distribución cualquiera T por una función α indefinidamente derivable es una función indefinidamente derivable, llamada *regularizada* de T por α . Se obtiene esta función al hacer actuar T sobre $\alpha(x - \xi)$, conforme a la notación simbólica:

$$(A, 6, 10) \quad (T * \alpha)(x) = \int T(\xi)\alpha(x - \xi)d\xi$$

En lo que respecta a la *continuidad de la convolución*, citemos el resultado siguiente: Si una sucesión de distribuciones T_i converge hacia T , $T_i * S$ converge hacia $T * S$ al menos en cada uno de los tres casos siguientes:

- Los T_i tienen su soporte contenido en un mismo conjunto acotado.
- S tiene un soporte acotado.
- Los T_i y S están acotados por un mismo lado (por ejemplo, todos tienen sus soportes en el cuadrante positivo).

Si en vez de una sucesión T_i , se tiene una distribución T_λ la cual depende de un parámetro λ continuo tal que la derivada $\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}$ existe, se tiene, al menos, en las tres mismas circunstancias:

$$(A, 6, 11) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}(T_\lambda * S) = \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda} * S$$

EJEMPLO. - En el espacio de tres dimensiones, el potencial newtoniano engendrado en el punto (x_1, x_2, x_3) por una densidad de masa $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ está dado por:

$$(A, 6, 12) \quad U(x_1, x_2, x_3) = -\iiint \frac{\mu[\xi_1, \xi_2, \xi_3]d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}}$$

Lo que se escribe más cómodamente en la forma:

$$U = -\mu * \frac{1}{r}$$

Tomemos el Laplaciano:

$$\Delta U = \Delta \delta * U = -\Delta \delta * \mu * \frac{1}{r} = -\mu * \Delta \frac{1}{r}$$

Considerando (3, 9), se obtiene la relación de Poisson:

$$(A, 6, 13) \quad \Delta U = 4\pi\mu$$

Inversamente, si se busca una solución de (6, 13), basta con hacer la convolución por l/r de los dos miembros de esta ecuación para encontrar de nuevo (6, 12). La solución general se deduce por adición de una función f armónica cualquiera ($\Delta f = 0$).

7. - Integración y derivación de orden cualquiera.

7.1.- Convoluciones de las distribuciones Y_λ . - Busquemos, en primer lugar, el producto de convolución $Y_\lambda * Y_\mu$ cuando λ y μ tienen sus partes reales positivas. En la forma (6, 2), se tiene:

$$Y_\lambda * Y_\mu = \int_0^x \frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} d\xi$$

Poniendo $\xi = xt$, y utilizando la fórmula (B, 10) del Anexo B, queda:

$$Y_\lambda * Y_\mu = \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\mu-1} dt = \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}$$

De donde el resultado:

$$(A, 7, 1) \quad Y_\lambda * Y_\mu = Y_{\lambda+\mu}$$

Que se extiende a valores cualesquiera de λ y μ para las distribuciones Y_λ , debido a la unicidad de las prolongaciones analíticas.

7.2 - La integración de orden λ . - La integral de Cauchy:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi = \int_0^x \int_0^{\xi_{n-1}} \dots \int_0^{\xi_1} g(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1}$$

Proporciona la primitiva de orden n de una función $g(x)$, definida para $x \geq 0$, en la forma de una integral simple, que no es otra cosa que el producto de convolución $g * Y_n$. De (7, 1) se deduce que dos integraciones sucesivas de orden λ y μ son equivalentes a una sola integración de orden $\lambda + \mu$:

$$Y_\lambda * Y_\mu * T = Y_{\lambda+\mu} * T$$

Cuando λ es un entero negativo $-m$, (5, 3) y (6, 7) muestran que se tiene:

$$Y_{-m} * T = \delta^{(m)} * T = \frac{d^m T}{dx^m}$$

La integración de orden $-m$ no es otra cosa que la derivación de orden m . Se define la derivación de orden cualquiera por la fórmula:

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu} T = Y_{-\mu} * T$$

Es la operación inversa de la integración.

8. - Transformaciones de Fourier y de Hankel.

8.1. - Transformaciones de Fourier para las funciones. - La transformada de Fourier Ff de una función $f(x)$ de la variable ordinaria x (1 sola dimensión) está dada por:

$$(A, 8, 1) \quad Ff = g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

La transformación conjugada (o inversa) \overline{F} proporciona la *fórmula de reciprocidad*:

$$(A, 8, 2) \quad \overline{F}f = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{2i\pi ux} du$$

La derivada f' de f tiene por transformada $2i\pi u g(u)$. Más generalmente, se tiene:

$$(A, 8, 3) \quad \begin{cases} Ff^{(m)} = (2i\pi u)^m g(u) \\ F[x^m f(x)] = \frac{1}{(-2i\pi)^m} g^{(m)}(u) \end{cases}$$

Si se reemplaza x por λx (λ es un número real no nulo), se tiene:

$$(A, 8, 4) \quad F[f(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|} g\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

Designando por \hat{f} la transpuesta de una función f , por \overline{f} la función compleja conjugada, y por $\tilde{f} = \overline{f(-x)}$ la conjugada transpuesta (o hermítica conjugada), se tiene:

$$(A, 8, 5) \quad \begin{cases} \hat{g} = \overline{F}f = F\hat{f} \\ \overline{g} = \overline{F}\overline{f} = F\overline{\tilde{f}} \\ \tilde{g} = \overline{F}\tilde{f} = F\overline{f} \end{cases}$$

Citemos también la fórmula de Plancherel-Parseval:

$$(A, 8, 6) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|^2 du \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\overline{g_2(u)}du \end{cases}$$

Y la fórmula sumatoria de Poisson [ver A(4, 3)].

En el espacio de n dimensiones, se tienen resultados similares. Escribiendo x en lugar de (x_1, \dots, x_n) , u en lugar de (u_1, \dots, u_n) , designando por dx y du los elementos de volúmenes, y por ux el producto escalar:

$$ux = u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n$$

Se tiene:

$$(A, 8, 7) \quad \begin{cases} g(u) = Ff = \int f(x)e^{-2i\pi ux} dx \\ f(x) = \overline{F}g = \int g(u)e^{2i\pi ux} du \end{cases}$$

La fórmula (8, 3) se generaliza a las derivadas parciales. Con:

$$m = m_1 + \dots + m_n$$

Se tiene, por ejemplo:

$$(A, 8, 8) \quad F \left[\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right] = (2i\pi)^m u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n} g(u)$$

La fórmula (8, 4) queda:

$$(A, 8, 9) \quad F[f(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|^n} g\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

Las fórmulas (8, 5), (8,6) y la fórmula sumatoria (4, 3) se aplican también. Un caso particular interesante es el de las funciones isótropas. Pongamos:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ \rho = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \end{cases}$$

Una función isótropa es de la forma $f(r)$. Su transformada de Fourier $g(\rho)$ es igualmente isótropa. Las integrales múltiples (8, 7) se reducen a integrales simples:

$$(A, 8, 10) \quad \begin{cases} F_n[f(r)] = g(\rho) = 2\pi\rho^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\rho r) f(r) dr \\ F_n[g(\rho)] = f(r) = 2\pi r^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\rho r) g(\rho) d\rho \end{cases}$$

$J_{\frac{n}{2}-1}$ designa la función de Bessel de orden $\frac{n}{2}-1$ (Anexo C). Se escribe F_n para recordar

que se trata de la transformación de Fourier en el espacio de n dimensiones. Si $f(r)$ y $g(\rho)$ se consideran como funciones de una sola variable (r o ρ), F_n representa la transformación de Hankel de orden n , y se generaliza para valores no enteros de n .

- La propiedad más importante de la transformación de Fourier es que *transforma un producto de convolución en un producto ordinario*:

$$(A, 8, 11) \quad F[(f_1 * f_2)] = F[f_1]F[f_2] = g_1g_2$$

Lo cual se ve sin dificultad al aplicar (8, 1) a (6, 1), y este resultado es verdadero también en el espacio de n dimensiones.

Naturalmente, estas diversas fórmulas no pueden ser aplicadas a cualquier función $f(x)$.

Si $f(x)$ es sumable, $g(u)$ existe, es una función continua de u , y tiende hacia 0 en el infinito. Pero $g(u)$ no es necesariamente sumable, y la fórmula recíproca (8, 2) no se aplica en general.

Si f es una función con variación acotada, g existe, es continuo (salvo en $u = 0$) y tiende también hacia 0 en el infinito.

Si f es una función de cuadrado sumable, es posible dar un sentido a $g = Ff$, el cual es también de cuadrado sumable, y la fórmula de Plancherel (8, 6) se aplica.

En lo que respecta a (8, 3), se muestra que si f es m veces derivable, y sumable como también sus m derivadas, $u^m g(u)$ es acotado. Análogamente, si $x^m f(x)$ es sumable, $g(u)$ es m veces derivable y $g^{(m)}$ es acotado.

Dicho de otra forma, *la transformación de Fourier cambia, entre sí, las propiedades de derivabilidad y de regularidad al infinito*.

Existe una categoría o espacio (ζ) de funciones, a la vez muy regulares en el infinito e indefinidamente derivables, definida como sigue: Una función φ pertenece a (ζ) si es indefinidamente derivable y decrece, en el infinito, más rápido que cualquier potencia de $1/r$, como también cada una de sus derivadas.

Más breve, (ζ) , *es el espacio de las funciones indefinidamente derivables con decrecimiento rápido como también todas sus derivadas*. Por ejemplo, $\exp(-r^2)$ pertenece a (ζ) .

Se demuestra que si una función f pertenece a (ζ) , su transformada de Fourier g existe siempre y pertenece igualmente a (ζ) y que todas las fórmulas dadas aquí son aplicables a f y a g .

8. 2. - Transformadas de Fourier de las distribuciones. - No es posible definir la transformada de Fourier de cualquier distribución, sino solamente para las *distribuciones llamadas temperadas*. El espacio de estas distribuciones particulares es el dual (ζ') de (ζ) :

Dicho de otra manera, *las distribuciones temperadas son funcionales lineales y continuas definidas sobre el espacio de las funciones indefinidamente derivables con decrecimiento rápido así como todas sus derivadas. (esta continuidad se extiende en el sentido de la convergencia de (ζ) , sobre la cual no insistiremos).*

Una función sumable, o acotada, o, más generalmente con crecimiento lento [tal que $f(x) \leq A|x|^k$ cuando $|x| \rightarrow \infty$] es una distribución temperada. Una distribución de (ζ) (con soporte acotado) es temperada porque (ζ) es un sub-espacio de (ξ) .

Para que una distribución T sea temperada, es necesario y suficiente que sea la derivada (de orden cualquiera) de una función con crecimiento lento. Luego, todas las derivadas sucesivas de una distribución temperada son también temperadas. En particular, $Y_\lambda, x_+^\lambda, r^\lambda$ etc... son temperadas. Al contrario, e^x no es temperada, porque no es la derivada de ninguna función con crecimiento lento.

Se define la transformada de Fourier FT o \overline{FT} de una distribución temperada T como la funcional que actúa sobre una función φ de (ζ) de la misma manera que T sobre $F\varphi$ o $\overline{F}\varphi$.

$$(A, 8, 12) \quad \begin{cases} FT(\varphi) = T(F\varphi) \\ \overline{FT}(\varphi) = T(\overline{F}\varphi) \end{cases}$$

Como φ pertenece a (ζ) , pasa lo mismo con $F\varphi$, de manera que T actúa efectivamente sobre $F\varphi$. La funcional FT así definida es lineal, y se demuestra que es continua para la convergencia de (ζ) . Luego, *las transformadas de Fourier de las distribuciones temperadas son también distribuciones temperadas.*

- La fórmula de reciprocidad se establece inmediatamente. De la definición (8, 12) se deriva:

$$\overline{F}FT(\varphi) = FT(\overline{F}\varphi) = T(F\overline{F}\varphi)$$

Como $F\overline{F}\varphi = \varphi$, según (8, 7), para las funciones φ de (ζ) , se tiene bien:

$$(A, 8, 13) \quad \overline{F}FT = F\overline{FT} = T$$

Una distribución T con *soporte acotado* (perteneciente a (ζ')) actúa sobre la exponencial $e^{-2\pi i u x}$, que es indefinidamente derivable (perteneciente a (ξ)) de manera que $T(e^{-2\pi i u x})$ está definido. Es una función de u , $V(u)$. Simbólicamente se tiene:

$$(A, 8, 14) \quad V(u) = T(e^{-2\pi i u x}) = \int T(x)e^{-2\pi i u x} dx$$

Se demuestra que esta función $V(u)$ es indefinidamente derivable en u , y puede además ser prolongada, para valores complejos $(u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n)$ de u , en una función holomorfa entera, y que es idéntica a la transformada FT definida en (8, 12). (Este teorema admite un recíproco más preciso).

Por consiguiente, la transformada de Fourier de una distribución con soporte acotado T es una función $V(u)$ prolongable en una función holomorfa entera para los valores complejos de u . Se puede calcular $V(u)$ al aplicar T a $e^{-2i\pi ux}$.

Luego, la transformada de la medida de Dirac $\delta(x)$ se obtiene aplicando δ a $e^{-2i\pi ux}$, lo que proporciona:

$$(A, 8, 15) \quad F\delta = 1$$

Y, más generalmente:

$$(A, 8, 16) \quad F \frac{\partial^m \delta}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} = (2\pi i)^m u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n}$$

Análogamente:

$$(A, 8, 17) \quad F\delta(x-h) = e^{-2i\pi hu}$$

Estas fórmulas tienen por recíprocas:

$$(A, 8, 18) \quad \begin{cases} F_1 = \delta \\ F[x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}] = \frac{1}{(-2\pi i)^m} \delta^{m_1}(x_1) \times \dots \times \delta^{m_n}(x_n) \end{cases}$$

El producto de convolución $S * T$ de dos distribuciones temperadas S y T tiene un sentido, en particular, si una de ellas, por ejemplo T , tiene un soporte acotado. En este caso, la transformada de $S * T$ es el producto:

$$(A, 8, 19) \quad F(S * T) = (FS)(FT)$$

de la distribución FS por FT , que es una funcional indefinidamente derivable, y este producto tiene bien un sentido, según el párrafo 2, 3.

Por ejemplo, la derivada $T' = \delta' * T$ de una distribución con una variable $T(x)$ tiene por transformada:

$$FT' = (F\delta')(FT) = 2\pi i x T(x)$$

De manera que las relaciones (8, 3) y (8, 8) se aplican a las distribuciones temperadas. Citemos, para terminar, las transformadas de Fourier de algunas funciones⁴⁰ y distribuciones usuales. La exponencial de Gauss $e^{-\lambda r^2}$ proporciona, en el espacio de n dimensiones:

⁴⁰ Se encontrarán tablas más completas de transformadas de Fourier en GUELFAND y CHILOV (ya citados).

$$(A, 8, 20) \quad F_n e^{-\lambda r^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{\lambda}}$$

Al aplicar la fórmula sumatoria de Poisson (4, 3) con $n = I$, se obtiene la fórmula de transformación de las funciones theta:

$$(A, 8, 21) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda k^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda} k^2}$$

Para la distribución r^λ , en el espacio de n dimensiones, y para λ diferente de $2k$ y de $-n - 2k$ (k entero positivo), se tiene:

$$(A, 8, 22) \quad F_n r^\lambda = \pi^{-\lambda - \frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda - n}$$

Para $\lambda = 2k$ o $n - 2k$, se tiene, respectivamente:

$$(A, 8, 23) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_n r^{2k} = \frac{(-1)^k}{4\pi^2} \Delta^{(k)} \delta \\ F_n r^{-n-2k} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+2k}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2k\right)} \frac{(-1)^k}{k!} \\ \left[2 \log \frac{1}{\pi \rho} + \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} + \frac{\Gamma'\left(k + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right)} \right] \rho^{2k} \end{array} \right.$$

En particular, para $\lambda = -n$ queda (con $C = -\Gamma'(I)/\Gamma(I)$, ver Anexo B):

Análogamente, la función $(1-r^2)_+^\lambda$ (o la pseudo-función correspondiente) definida por:

$$\begin{cases} (1-r^2)^\lambda = (1-r^2)^\lambda & \text{para } r^2 < 1 \\ (1-r^2)^\lambda = 0 & \text{para } r^2 > 1 \end{cases}$$

Tiene por transformada de Bessel de primera especie:

$$(A, 8, 29) \quad F_n(1-r^2)_+^\lambda = \pi^{-1} \Gamma(1+\lambda) \rho^{-\lambda-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}+\lambda}(2\pi\rho)$$

Las fórmulas (8, 27) y (8, 29) admiten los recíprocos siguientes:

$$(A, 8, 30) \quad \begin{cases} F_n r^{-\mu} J_\mu(r) = \frac{2^{n-\mu}}{\Gamma\left(1+\mu-\frac{n}{2}\right)} (1-4\pi^2\rho^2)^{\mu-\frac{n}{2}} \\ F_n r^{-\mu} K_\mu(r) = 2^{n-1-\mu} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(-\mu+\frac{n}{2}\right) (1+4\pi^2\rho^2)^{\mu-\frac{n}{2}} \end{cases}$$

9. - Funciones y distribuciones de tipo positivo.

9. 1. - Funciones de tipo positivo. - Sea una función continua $f(x)$ del punto x en el espacio de n dimensiones. Se dice que $f(x)$ es de tipo positivo (o definida positiva) si, cualesquiera que sean los puntos $x_1 \dots x_k$ y los números complejos $\lambda_1 \dots \lambda_k$ (k entero cualquiera), se tiene:

$$(A, 9, 1) \quad \sum_{ij} f(x_i - x_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j \geq 0$$

Se demuestra que cuando $f(x)$ es de tipo positivo, se tiene también:

$$(A, 9, 2) \quad \int f(x - \xi) \varphi(x) \overline{\varphi(\xi)} dx d\xi \geq 0$$

Para toda función φ de (D) y recíprocamente, de manera que (9, 1) y (9, 2) son definiciones equivalentes.

Una función de tipo positivo verifica las propiedades siguientes:

- Posee la simetría hermítica (coincide con su conjugada transpuesta):

$$(A, 9, 3) \quad f(x) = \overline{f(-x)}$$

- Está acotada por su valor en el origen $f(0)$, necesariamente real, según (9, 3), y positiva:

$$(A, 9, 4) \quad f(0) \geq 0 \quad \text{y} \quad |f(x)| \leq 0$$

Las funciones de tipo positivo juegan un papel fundamental en cálculo de probabilidades: Las funciones características de las leyes de distribución y las funciones de covarianza (de auto correlación) de los procesos estocásticos son, en efecto, de tipo positivo. El teorema esencial, en este tema, es el siguiente:

TEOREMA DE BOCHNER. - *La condición necesaria y suficiente para que una función continua sea de tipo positivo es que sea la transformada de Fourier de una medida positiva sumable μ .*

La suma de esta medida $\int d\mu$ es igual a $f(0)$. Si entonces $f(0) = 1$, esta medida positiva μ define una ley de probabilidad.

9.2. - Distribución de tipo positivo. - En la definición (9, 2), cambiemos ξ por $-\xi$, y designemos por $\tilde{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi(-\xi)}$ la conjugada transpuesta de φ . Queda:

$$\int f(x + \xi)\varphi(x)\tilde{\varphi}(\xi)dx d\xi = \int f(x)dx \int \varphi(x - \xi)\tilde{\varphi}(\xi)d\xi \geq 0$$

Al considerar f como una funcional, se ve que (9, 2) se escribe:

$$f(\varphi * \tilde{\varphi}) \geq 0$$

Esta definición se generaliza inmediatamente para el caso de una distribución T cualquiera: Se dirá que T es de tipo positivo si, para toda función φ de (D) , se tiene:

$$(A, 9, 5) \quad T(\varphi * \tilde{\varphi}) \geq 0$$

La bi-regularizada $T * \psi * \tilde{\psi}$ de T por una función ψ de (D) es una función continua de tipo positivo. (En efecto, es una función continua, según el párrafo (6, 2), y verifica (9, 2), porque $T * \psi * \tilde{\psi}$ actúa sobre $\varphi * \tilde{\varphi}$ como T sobre $\varphi * \tilde{\varphi} * \psi * \tilde{\psi}$, y que T verifica (9, 5)).

Se demuestra que las distribuciones de tipo positivo tienen la simetría hermítica:

$$(A, 9, 6) \quad T = \tilde{T}$$

Y que son necesariamente *temperadas*, de manera que admiten siempre transformadas de Fourier. El resultado más importante es el siguiente:

TEOREMA DE BOCHNER. - *La condición necesaria y suficiente para que una distribución T sea de tipo positivo es que sea la transformada de Fourier de una medida positiva con crecimiento lento (temperada) μ .*

Si esta medida μ es sumable, entonces la distribución T es una función de tipo positivo, la cual verifica $T(0) = \int d\mu$. Si μ no es sumable, la distribución T no puede ser una función continua.

Cuando el producto de convolución $S * \tilde{S}$ de una distribución por su conjugada transpuesta tiene un sentido (por ejemplo, si S tiene soporte acotado), la distribución $S * \tilde{S}$ es de tipo positivo. En efecto, la acción de $S * \tilde{S}$ sobre $\varphi * \tilde{\varphi}$ se obtiene al hacer $x = 0$ en la función:

$$S * \tilde{S} * \varphi * \tilde{\varphi} = (S * \varphi) * (\tilde{S} * \tilde{\varphi})$$

De donde:

$$S * \tilde{S}(\varphi * \tilde{\varphi}) = \int |S * \varphi|^2 dx \geq 0$$

Ejemplo. - La función r^λ , para $\lambda > -n$, es una función positiva en el espacio de n dimensiones, luego es una medida positiva, por otra parte con crecimiento lento. El teorema de Bochner, y (8, 22) muestran que la distribución (pseudo-función):

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{-\lambda-n}$$

es de tipo positivo para $\lambda > -n$.

Al contrario, si $\lambda \leq -n$, r^λ no es una medida. Su transformada de Fourier, que es la función $r^{-\lambda-n} / \Gamma(-\lambda/2)$ no es de tipo positivo (por otra parte no es acotada). Luego r^μ , para μ positivo no es de tipo positivo.

Supongamos $2k \leq \mu < 2(k+1)$. La transformada de r^μ es:

$$\frac{r^{-\mu-n}}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)}$$

Si nos limitamos a las funciones de base ψ de (ζ) , las cuales se anulan en el origen así como todas sus derivadas hasta el orden $2k$ comprendido (espacio (ζ_{2k}) de funciones), la distribución $r^{-\mu-n}$ actúa sobre las funciones de la misma manera que la función $r^{-\mu-n}$, las integrales son convergentes para toda función de (ζ_{2k}) . Luego, se tiene:

$$\frac{r^{-\mu-n}}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)} (\psi \bar{\psi}) \geq 0$$

Para toda función ψ de (ζ_{2k}) . Por transformación de Fourier, el espacio (ζ_{2k}) de las funciones nulas en el origen como también sus derivadas hasta el orden $2k$ llega a ser el espacio (ζ^{2k}) de las funciones de (ζ) que tienen todos sus momentos nulos hasta el orden $2k$. Por ejemplo (ζ_0) , espacio de funciones ψ de (ζ) tales que $\psi(0) = 0$, llega a ser (ζ^0) el espacio de funciones φ tales que $\int \varphi dx = 0$.

Si $\varphi = F\psi$, la distribución $r^\mu = F \frac{r^{-\mu-n}}{\Gamma(-\mu-n)}$ actúa sobre $\varphi * \tilde{\varphi}$ como $\frac{r^{-\mu-n}}{\Gamma(-\mu-n)}$ sobre $F\varphi * \tilde{\varphi} = (F\varphi)(F\tilde{\varphi}) = \psi\bar{\psi}$. Por consiguiente, si φ pertenece a (ζ^{2k}) , se tiene:

$$(A, 9, 7) \quad r^\mu(\varphi * \tilde{\varphi}) \geq 0$$

Para $\mu < 2(k+1)$, r^μ puede ser considerado como una distribución de tipo positivo sobre (ζ^{2k}) (se dice también: *condicionalmente de tipo positivo*). Para $k=0$, en particular, (9, 7) se verifica por:

$$(A, 9, 8) \quad \mu < 2$$

Luego, r^μ , para μ inferior a 2, actúa como una distribución de tipo positivo sobre las funciones φ de (ζ) de suma nula $\int \varphi dx = 0$.

Derivadas de una distribución de tipo positivo. - La derivada en una dirección α , definida por el vector unitario $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ es:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial T}{\partial x_n}$$

Si T es una distribución de tipo positivo, su derivada segunda, cambiada de signo, $-\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}$, en una dirección α es también de tipo positivo. Se tiene, en efecto:

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}(\varphi * \tilde{\varphi}) = -T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} * \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \right) = T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} * \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \right) \right] \geq 0$$

(La derivada de la transpuesta conjugada $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}$ es igual a la transpuesta conjugada de la derivada $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)$ cambiada de signo).

En particular, si g es una función continua de tipo positivo derivable dos veces en el sentido usual, $-\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$ es también una función continua de tipo positivo. Para que sea así, basta con que las derivadas segundas existan en $x=0$. En efecto, en el espacio de una

dimensión, $-g''$, distribución de tipo positivo, es una función continua de tipo positivo si la medida $x^2\mu$ es sumable, siendo μ la transformada de Fourier de g . Por otra parte, se ve fácilmente que $-g''(0)$ solo puede existir si $\int x^2 d\mu$ existe, y se tiene entonces:

$$g''(0) = \int x^2 d\mu$$

En el espacio de n dimensiones, se tiene una demostración análoga. Se ve que las irregularidades de una función de tipo positivo están, de alguna manera, localizadas en $x = 0$. Si g admite en el origen derivadas hasta el orden $2k$, entonces es $2k$ derivable en todas partes.

ANEXO B

LA FUNCION EULERIANA $\Gamma(x)$

SUMARIO

Simple enumeración de las propiedades clásicas de la función $\Gamma(x)$ utilizadas en esta obra.

La función $\Gamma(x)$ está definida por la integral:

$$(B, 1) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du$$

Al hacer una integración por partes se obtiene:

$$(B, 2) \quad \Gamma(1 + x) = x \Gamma(x)$$

Para $x = n$ entero positivo, se tiene:

$$(B, 3) \quad \Gamma(n + 1) = n!$$

Para x negativo o nulo, la integral (B, 1) diverge. Pero $\Gamma(x)$, función analítica, puede ser prolongada. Este prolongamiento define $\Gamma(x)$ para x negativo no entero. Se pueden calcular los valores numéricos por aplicación repetida de (B, 2), o también por la fórmula de los complementos:

$$(B, 4) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$$

Para $x = -n$, entero negativo o nulo, $\Gamma(x)$ presenta un polo con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Para $x = 1/2$, (B, 4) proporciona:

$$(B, 5) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Otra fórmula útil es la siguiente:

$$(B, 6) \quad \Gamma(2x) = \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}$$

La derivada logarítmica $\Gamma'(x) / \Gamma(x)$ interviene en muchos problemas. Verifica la relación de recurrencia obtenida al derivar (B, 2): (n entero)

$$(B, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} \\ \frac{\Gamma'(n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \dots + \frac{1}{n+x} \end{array} \right.$$

Se tiene numéricamente:

$$(B, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C = -0.577216\dots \\ \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = -C - 2 \log 2 = -1.96352\dots \end{array} \right.$$

La función euleriana Beta $B(x, y)$ está definida por:

$$(B, 9) \quad B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \operatorname{sen}^{2y-1} \theta d\theta$$

Se tiene:

$$(B, 10) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ANEXO C

LAS FUNCIONES DE BESSEL**SUMARIO**

El Anexo C es un simple recordatorio, sin demostraciones, de las propiedades clásicas de las funciones de Bessel a las cuales se recurre en esta obra. El primer párrafo trata la función de primera especie J_λ , y el segundo la función modificada de segunda especie K_λ .

1. - Función de Bessel de primera especie.

La función J_λ , o función de Bessel de primera especie con índice λ , está definida por el desarrollo:

$$(C, 1, 1) \quad J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Esta función verifica la ecuación diferencial:

$$(C, 1, 2) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

Y las relaciones de recurrencia:

$$(C, 1, 3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}[x^2 J_\lambda(x)] = x^\lambda J_{\lambda-1}(x) \\ \frac{d}{dx}[x^{-\lambda} J_\lambda(x)] = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x) \end{cases}$$

Para λ semi-entero, J_λ se expresa con la ayuda de funciones trigonométricas. Por ejemplo:

$$(C, 1, 4) \quad \begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{cos} x \end{cases}$$

Para λ cualquiera, J_λ se comporta, en el infinito, como una línea trigonométrica de x multiplicada por $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Se observará también, sobre (C, 1, 1) que la función $x^{-\lambda}J_\lambda(x)$ es una serie entera par de x , es decir solo contiene términos en x^{2k} .

$J_\lambda(x)$ admite diversas representaciones integrales. Las más importantes están ligadas al hecho que J_λ es la transformada de Hankel de $(1-\rho^2)^\mu$. Estas son las fórmulas (A, 8,29) y (A, 8, 30) del Anexo A.

La ecuación de Bessel (C, 1, 2) admite una segunda solución, que es la función de Bessel de segunda especie N_λ :

$$(C, 1, 5) \quad N_\lambda = \frac{1}{\text{sen } \lambda\pi} [\cos \lambda\pi J_\lambda - J_{-\lambda}]$$

Cuando λ tiende hacia un entero, la expresión correspondiente de N_λ se obtiene al efectuar, en el desarrollo de (C, 1, 5), un paso al límite, el cual hace aparecer términos logarítmicos:

2. - Función de Bessel modificada de segunda especie.

Las funciones de Bessel modificadas son las soluciones de la ecuación obtenida al cambiar x en ix en (C, 1, 2). La función modificada de primera especie I_λ , se obtiene al cambiar x en ix , salvo un factor, en (C, 1, 1):

$$(C, 2, 1) \quad I_\lambda(x) = \exp\left(-i\lambda\frac{\pi}{2}\right) J_\lambda(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

I_λ se comporta en el infinito como $\frac{1}{\sqrt{x}}e^x$.

La ecuación modificada admite una segunda solución, que es la función modificada de segunda especie K_λ definida por:

$$(C, 2, 2) \quad K_\lambda(x) = \frac{\pi}{2\text{sen } \lambda\pi} [I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)] = K_{-\lambda}(x)$$

Aquí, de nuevo, el paso al límite cuando λ tiende hacia un entero n , hace aparecer términos logarítmicos en el desarrollo de (C, 2, 2).

En el caso en que λ no es un entero, el desarrollo de la función $x^\lambda K_{-\lambda}(x)$ se escribe explícitamente:

$$(C, 2, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^\lambda K_{-\lambda}(x) = \frac{2^{\lambda-1} \pi}{\text{sen } \lambda \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(-\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ -x^{2\lambda} \frac{2^{-\lambda-1} \pi}{\text{sen } \lambda \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{array} \right.$$

Este desarrollo tiene una parte regular (serie entera par en x^{2k}) y una parte irregular en $x^{2\lambda+2k}$.

Cuando λ tiende hacia un número entero, se obtiene, por paso al límite, los desarrollos siguientes: Para $n = 0$:

$$(C, 2, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0(x) = -\left[C + \log \frac{x}{2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{array} \right.$$

Y, para un entero n cualquiera:

$$(C, 2, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^n K_{-n}(x) = (-1)^{n+1} \left(\log \frac{x}{2} + C \right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)} \\ + 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ + (-1)^n 2^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ + (-1)^n 2^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \dots + \frac{1}{k} + 1 \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{n+k} \right) \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)} \end{array} \right.$$

Se constata, aquí de nuevo, la presencia de una parte regular (serie par en x^{2k}), y de una parte irregular cuyo término general es en $x^{2(n+k)} \log x$. En estas fórmulas, $C = 0.577216\dots$ es la constante de Euler.

En el caso particular en que λ es un semi-entero, se tiene:

$$(C, 2, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} K_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \\ x^{n+\frac{1}{2}} K_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sum_{p=0}^n \frac{x^{n-p}}{2^p} \frac{(n+p)!}{p!(n+p)!} \end{array} \right.$$

Para los índices μ semi-enteros, $x^\mu K_\mu$ se reduce al producto de la exponencial e^{-x} por un polinomio, y, para $\mu = 1/2$, a la exponencial misma.

De una manera general, $K_\lambda(x)$ se comporta, en el infinito, como $\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}$.

Se tiene el desarrollo asintótico siguiente:

$$(C, 2, 7) \quad K_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{4\lambda^2 - 1}{1!8x} + \frac{(4\lambda^2 - 1)(4\lambda^2 - 3)}{2!(8x)^2} + \dots \right]$$

K_λ admite representaciones integrales. Las más importantes están ligadas a la transformación de Hankel de $(1 + \rho^2)^\mu$. Están dadas por la fórmula (A, 8, 27) del Anexo A. Se tienen también las representaciones de Sonine Schläfli, que se pueden escribir:

$$(C, 2, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh \lambda t dt \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)} u^{\lambda-1} du \end{array} \right.$$

Mencionemos también la representación notable de la función de orden cero:

$$(C, 2, 9) \quad K_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2 - 1}} du \quad 41$$

Y las relaciones de recurrencia:

$$(C, 2, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{\lambda-1}(x) + K_{\lambda+1}(x) = -2K'_\lambda(x) \\ K_{\lambda-1}(x) - K_{\lambda+1}(x) = -\frac{2\lambda}{x} K_\lambda(x) \end{array} \right.$$

Que permiten el cálculo de todas las funciones de índice entero a partir de K_0 y K_1 . Al hacer $\lambda = 0$, se obtiene, en particular:

$$(C, 2, 11) \quad K'_0(x) = -K_1(x)$$

⁴¹ Nota del Traductor: Se corrigió un error en esta fórmula.

ANEXO D

FUNCIONES DE LAGUERRE

SUMARIO

Definición de las funciones de Laguerre de primera y segunda especie, y estudio del paso al límite para las funciones de segunda especie.

La función de Laguerre $F(\alpha, \gamma, x)$, llamada también función hipergeométrica confluyente, está definida por la serie entera:

$$(D, 1) \quad F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

Corresponde a la solución regular en $x = 0$ de la ecuación diferencial:

$$(D, 2) \quad xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$$

Y admite la representación integral:

$$(D, 3) \quad F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{tx} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt$$

Al cambiar t en $1-t$, se obtiene la fórmula de transformación:

$$(D, 4) \quad F(\alpha, \gamma, -x) = e^{-x} F(\gamma - \alpha, \gamma, x)$$

La función $F(\alpha, \gamma, -x)$, la cual nos interesa de preferencia, es la solución regular en el origen de la ecuación diferencial:

$$(D, 5) \quad xy'' + (\gamma + x)y' + \alpha y = 0$$

La solución general de (D, 5) es de la forma:

$$(D, 6) \quad y = AF(\alpha, \gamma, -x) + Bx^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, -x)$$

Por otra parte, (para $\gamma > \alpha$), la función:

$$(D, 7) \quad L(\alpha, \gamma, x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_1^{\infty} e^{-ux} u^{\alpha-1} (u-1)^{\gamma-\alpha-1} du$$

Es también solución de (D, 5), luego de la forma general (D, 6). Para verlo, se deriva (D,7) bajo el signo integral, se lleva a (D, 5) y se identifica el argumento de la integral con:

$$-\frac{d}{du}[e^{-ux}u^\alpha(u-1)^\gamma]$$

Por identificación de los coeficientes A y B en (D, 6), se pone (D, 7) en la forma:

$$(D, 8) \quad L(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} F(\alpha, \gamma, -x) + x^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, -x)$$

Bajo esta forma, se verifica fácilmente la fórmula de transformación:

$$(D, 9) \quad L(\alpha, \gamma, x) = x^{1-\gamma} L(1-\gamma+\alpha, 2-\gamma, x)$$

De donde una segunda representación integral:

$$(D,10) \quad L(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^\infty e^{-ux} u^{\alpha-\gamma} (u-1)^{-\alpha} du$$

Para $\alpha = 1$, por aplicación de (B, 1), se encuentra:

$$(D, 11) \quad L(1, \gamma, x) = x^{1-\gamma} e^{-x}$$

Y, para $\gamma - \alpha = 1$, (D,7) se reduce a la función integro-exponencial:

$$(D, 12) \quad L(\alpha, \alpha+1, x) = \int_1^\infty e^{-uv} u^{\alpha-1} du$$

La aplicación de (D, 8) proporciona la integro-exponencial en la forma:

$$(D, 13) \quad L(\alpha, \alpha+1, x) = -\frac{1}{\alpha} F(\alpha, \alpha+1, -x) + \Gamma(\alpha)x^{-\alpha}$$

Paso al límite. - Cuando γ es un entero, la función $L(\alpha, \gamma, x)$, en la forma (D, 8), no está ya definida. Se obtiene su desarrollo por un paso al límite. La fórmula (D, 9) permite limitarse al caso en que $1-\gamma$ es un entero p positivo. Pongamos:

$$1 - \gamma = p + \varepsilon$$

En el desarrollo explícito de (D, 8), los p primeros términos de $F(\alpha, \gamma, -x)$ pueden ser separados del resto, y el término de orden $n+p$ de $F(\alpha, \gamma, -x)$ se puede acercar al término de orden n de:

$$F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, -x)$$

Se obtiene así:

$$\left\{ \begin{aligned} L(\alpha, \gamma, x) &= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \left[1 + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n+p)} \frac{(-1)^{n+p}}{\Gamma(n+p+1)} x^{n+p} \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma+n)} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)} x^{n+1-\gamma} \right] \end{aligned} \right.$$

La primera serie, tiende, cuando γ tiende hacia $1-p$, hacia:

$$\frac{(p-1)!}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\alpha\dots(\alpha+n-1)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{(p-n-1)!}{n!} x^n$$

Para estudiar la segunda serie, se simplifica el término general por la fórmula (B, 4) de los complementos, y se reemplaza γ por $1-p-\varepsilon$:

$$(-1)^{n+1} \frac{\text{sen } \alpha\pi}{\text{sen } \varepsilon\pi} \frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{\Gamma(1+n+\varepsilon)} \frac{x^{n+p}}{\Gamma(n+p+1)} + (-1)^n \frac{\text{sen } \pi(\alpha+\varepsilon)}{\text{sen } \varepsilon\pi} \frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{\Gamma(n+p+1+\varepsilon)} \frac{x^{n+p-\varepsilon}}{\Gamma(1+n)}$$

Cuando ε tiende a 0, el paso al límite se hace sin dificultad. Se obtiene fácilmente:

$$(D, 14) \left\{ \begin{aligned} L(\alpha, 1-p, x) &= \frac{(p-1)!}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\dots(\alpha+n-1)(p-n-1)!}{n!} x^n \\ &+ \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{n!(n+p)!} \\ &\times \left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(1+p+n)}{\Gamma(1+p+n)} - \frac{\Gamma'(\alpha+n+p)}{\Gamma(\alpha+n+p)} + \frac{\pi \cos \pi\alpha}{\text{sen } \pi\alpha} \right] x^{n+p} \\ &- \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{n!(n+p)!} (-1)^n x^{n+p} \log x \end{aligned} \right.$$

Si α es un entero mayor que $-p$, el desarrollo se simplifica, y, notablemente, la parte irregular en $x^{n+p} \log x$ desaparece. Por el contrario, si α es un entero negativo inferior o igual a $-p$, el desarrollo (D, 14) ya no es utilizable. ES el caso, por ejemplo, de la integral exponencial ($\alpha = -p$, $\gamma = 1-p$). Para $\alpha = -p-k$, es necesario buscar el límite de los k primeros términos de las dos últimas series. Nos limitaremos a $k = 1$ (integral exponencial). Poniendo $\alpha = -p + \varepsilon$, y utilizando la fórmula de los complementos y su derivada, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \pi \alpha \Gamma(\alpha + p) &= (-1)^p \operatorname{sen} \varepsilon \pi \Gamma(\varepsilon) = (-1)^p \frac{\pi}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \\
&\rightarrow (-1)^p \pi \operatorname{sen} \pi \alpha \Gamma(\alpha + p) \left[\pi \frac{\cos \pi \alpha}{\operatorname{sen} \pi \alpha} - \frac{\Gamma'(\alpha + p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right] \\
&= (-1)^p \operatorname{sen} \pi \varepsilon \Gamma(\varepsilon) \left[\frac{\pi \cos \varepsilon \pi}{\varepsilon \pi} - \frac{\Gamma'(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \right] \\
&= \frac{(-1)^{p+1} \operatorname{sen} \pi \varepsilon \Gamma'(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \rightarrow (-1)^{p+1} \pi \Gamma'(1)
\end{aligned}$$

Queda así:

$$\text{(D, 15)} \quad \left\{ \begin{aligned} L(-p, 1-p, x) &= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k x^k}{p-k} \frac{1}{k!} \\ &+ \frac{(-1)}{p!} \left[\frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)} - \log x \right] x^p \\ &+ \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k-p} \frac{1}{k!} \end{aligned} \right.$$

Este desarrollo puede también ser obtenido, directamente, a partir de (D, 13).

ANEXO E

LAS FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS**SUMARIO**

Definición de las funciones hipergeométricas, y enunciado de las propiedades utilizadas en la obra. Se insiste sobre todo sobre las fórmulas de cambio de x en $1-x$, y de $-x$ en $-1/x$, estudiando los pasos al límite en los casos singulares.

1. - Definición y propiedades.

La función hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ está definida por el desarrollo:

$$(E, 1, 1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \right.$$

Esta función constituye la función regular en una vecindad del origen de la ecuación diferencial de Gauss:

$$(E, 1, 2) \quad x(1-x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

Cuya solución general (salvo valores singulares de los parámetros) es de la forma:

$$(E, 1, 3) \quad y = AF(\alpha, \beta, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma, x)$$

La función $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ es simétrica en α y β . Para $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > \beta$, y $x < 1$, admite la representación integral siguiente:

$$(E, 1, 4) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha} du \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)x^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^x v^{\beta-1}(1-v)^{-\alpha}(x-v)^{\gamma-\beta-1} dv \end{aligned} \right.$$

De la segunda representación integral, se deduce una expresión de la segunda solución de la ecuación de Gauss:

(E,1, 5)

$$x^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma, x) = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\alpha-1} (x-v)^{-\beta} dv$$

De la primera relación (E, 1, 4) se tiene, al poner $t = \frac{x(1-u)}{1-ux}$, la fórmula de transformación:

$$(E, 1, 6) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

2. - Cambio de x en $1-x$.

Se verifica fácilmente que $F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x)$ verifica la ecuación diferencial:

$$x(1-x)y'' + [I + \alpha + \beta - \gamma - (I + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

Y se puede poner en la forma (E, 1, 3), después de reemplazar γ por $I + \alpha + \beta - \gamma$.

Por identificación de las constantes A y B se obtiene la primera fórmula de cambio de x en $1-x$:

$$(E, 2, 1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, x) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\gamma-\alpha-\beta} F(\alpha-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\beta, x) \end{aligned} \right.$$

Cuando $\gamma - \alpha - \beta = k$ es un entero positivo, se debe efectuar el paso al límite sobre (E, 2, 1) por el mismo método que en el Anexo D. (Si $\gamma - \alpha - \beta = k$ es un entero negativo, nos reducimos, mediante la fórmula (E, 1, 6) al caso de un entero positivo). Se obtiene el resultado siguiente:

$$(E, 2, 2) \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + k, 1 - x) &= \frac{\Gamma(k + \alpha + \beta)(k - 1)!}{\Gamma(\beta + k)\Gamma(\alpha + k)} \\ &\times \left[1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha \dots (\alpha + n - 1) \beta \dots (\beta + n - 1)}{(\alpha + \beta + k) \dots (\alpha + \beta + k + n - 1)} \frac{x^n}{n!} \right] \\ &+ \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta + k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + k)\Gamma(\beta + n + k)}{n!(n + k)!} \\ &\times \left[\frac{\Gamma'(1 + n)}{\Gamma(1 + n)} + \frac{\Gamma'(1 + n + k)}{\Gamma(1 + n + k)} \right. \\ &\left. - \frac{\Gamma'(\alpha + n + k)}{\Gamma(\alpha + n + k)} - \frac{\Gamma'(\beta + n + k)}{\Gamma(\beta + n + k)} - \log x \right] x^{n+k} \end{aligned} \right.$$

Necesitaremos también saber cambiar x en $1 - x$ en la segunda solución de la ecuación de Gauss, $x^{1-\gamma}F(1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma, x)$. La segunda fórmula de cambio de x en $1 - x$ se obtiene al aplicar (E, 2, 1) a $F(1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma, x)$, y transformando las dos hipergeométricas obtenidas con la ayuda de (E, 1, 6): El resultado de estas operaciones será utilizado en la forma siguiente:

(E, 2, 3)

$$\left\{ \begin{aligned} (1-x)^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma, 1 - x) &= \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, x) \\ &+ \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(1 + \alpha - \gamma)\Gamma(1 + \beta - \gamma)} x^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 + \gamma - \alpha - \beta, x) \end{aligned} \right.$$

Cuando $\gamma - \alpha - \beta$ es un entero positivo k , el paso al límite se estudia de manera habitual, y conduce a la fórmula siguiente:

$$(E, 2, 4) \left\{ \begin{array}{l} (1-x)^{1-k-\alpha-\beta} F(1-k-\beta, 1-k-\alpha, 2-k-\alpha-\beta, 1-x) \\ = \frac{\Gamma(2-k-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \\ \left[1 + \sum_{n=1}^{k-1} \alpha \dots (\alpha+n-1) \beta \dots (\beta+n-1) (k-n+1)! \frac{x^n}{n!} \right] \\ + (-1)^k \Gamma(2-k-\alpha-\beta) \frac{\text{sen } \pi \alpha \text{sen } \pi \beta}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+k)\Gamma(\beta+n+k)}{n!(n+k)!} \\ \left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(1+n+k)}{\Gamma(1+n+k)} - \frac{\Gamma'(\alpha+n+k)}{\Gamma(\alpha+n+k)} - \frac{\Gamma'(\beta+n+k)}{\Gamma(\beta+n+k)} \right. \\ \left. - \frac{\cos \pi \beta}{\text{sen } \pi \beta} - \frac{\cos \pi \alpha}{\text{sen } \pi \alpha} - \log x \right] x^{n+k} \end{array} \right.$$

3. - Cambio de $-x$ en $-1/x$.

Al cambiar x en $1/x$ en la ecuación de Gauss, e identificando las constantes, se obtiene la fórmula de cambio de $-x$ en $-1/x$. (Los signos $-$ son necesarios, si se quiere tener valores reales para x real positivo):

$$(E, 3, 1) \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, -\frac{1}{x}\right) \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, -\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

Cuando $\beta - \alpha = k$ es un entero positivo (para un entero negativo, basta con invertir los roles de α y β), se encuentra, por pasos al límite habituales:

$$(E, 4, 1) \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha, \alpha+k, \gamma, -x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{-\alpha} \\ \left[(k-1)! + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma+n)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)} \frac{(k-n-1)!}{n!} \frac{1}{x^n} \right] \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\text{sen}(\gamma-\alpha)\pi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+n)\Gamma(\alpha+k+n+1-\gamma)}{n!(n+k)!} (-1)^n \\ \left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(1+k+n)}{\Gamma(1+k+n)} - \frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)} - \frac{\Gamma'(\beta+1-\gamma+n)}{\Gamma(\beta+1-\gamma+n)} \right. \\ \left. + \pi \frac{\cos(\gamma-\alpha)\pi}{\text{sen}(\gamma-\alpha)\pi} - \log \frac{1}{x} \right] \left(\frac{1}{x} \right)^{\alpha+k+n} \end{array} \right.$$

ANEXO F

EXPRESION DEL ZITTERBEWEGUNG CON LA AYUDA DE LAS FUNCIONES DE BERNOUILLI

SUMARIO

1. - Definición del número B_λ y de la función $B_\lambda(x)$ de Bernouilli para índices λ no enteros. $B_\lambda(x)$ está definido por un desarrollo en serie de Fourier cuyo término general tiene un coeficiente en $1/p^\lambda$.
2. - Aplicación al cálculo explícito del término fluctuante (Zitterbewegung) en la expresión de una varianza transitiva de una dimensión. Si a es la malla, b el alcance, y ε el número comprendido entre 0 y 1 congruente con b/a modulo 1, el término fluctuante asociado a $(b-x)^\lambda$ es $Z_\lambda(\varepsilon)a^{1+\lambda}$, con:

$$Z_\lambda(\varepsilon) = \frac{2}{1+\lambda} B_{1+\lambda}(\varepsilon)$$

El término fluctuante tiene una media nula respecto de ε :

$$\int_0^1 Z_\lambda(\varepsilon) d\varepsilon = 0$$

3. - Los resultados obtenidos conducen a una generalización de la fórmula de Euler-Mac Laurin en el caso en que ciertas irregularidades analíticas se manifiestan en las extremidades del intervalo de integración.

1. - Funciones y números generalizados de Bernouilli.

El número de Bernouilli de índice par $2k$ está dado clásicamente por:

$$B_{2k} = \frac{(2k)!}{\pi^{2k} 2^{2k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2k}}$$

El polinomio de Bernouilli de índice entero k coincide, en el intervalo $(0, 1)$ con la función periódica definida por el desarrollo:

$$B_k(x) = \frac{k!}{\pi^k 2^{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi px - k \frac{\pi}{2}\right)}{p^k}$$

La relación entre el número B_{2k} y el polinomio $B_{2k}(x)$ es la siguiente:

$$B_{2k} = (-1)^k B_{2k}(0)$$

Para una generalización inmediata, definiremos (para $\lambda > 1$ cualquiera) un número generalizado y una función de Bernoulli:

$$(F, 1) \quad \begin{cases} B_\lambda = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\pi^\lambda 2^{\lambda-1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^\lambda} \\ B_\lambda(x) = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\pi^\lambda 2^{\lambda-1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi x - \lambda \frac{\pi}{2}\right)}{p^\lambda} \end{cases}$$

En particular, se tiene:

$$(F, 2) \quad B_\lambda(0) = \cos \lambda \frac{\pi}{2} B_\lambda$$

2. - Cálculo del Zitterbewegung.

Según (IV, 2, 7), a cada término en $(b-x)^\lambda$ del desarrollo de un covariograma respecto de $x = b$ le corresponde, en el desarrollo limitado de la varianza de estimación (calculada en el espacio de una dimensión) un término de la forma:

$$Z_\lambda(\varepsilon) a^{l+\lambda}$$

En que el coeficiente $Z_\lambda(\varepsilon)$ solo depende de λ y de la cantidad sin dimensión ε igual a $\frac{b}{a}$ modulo 1: Si N es el entero más grande tal que se tiene: $Na < b$, ε está definido por:

$$(F, 3) \quad \varepsilon = \frac{b - Na}{a} \quad \text{o} \quad \frac{b}{a} = N + \varepsilon$$

Para calcular, de manera explícita, $Z_\lambda(\varepsilon)$, utilizaremos el covariograma particular:

$$(F, 4) \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{(2b)^\lambda} (b^2 - x^2)^\lambda & \text{para } |x| \leq b \\ g(x) = 0 & \text{para } |x| > b \end{cases}$$

Cuyo desarrollo comienza por el término $(b-x)^\lambda$, y para el cual el término de extensión desaparece, porque la parte irregular en la vecindad de 0 es idénticamente nula. Calcularemos $\sigma^2(a)$ por la fórmula teórica (IV, 1, 10), es decir:

$$\sigma^2(a) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} G\left(\frac{p}{a}\right)$$

La transformada $G(u)$ de $g(u)$ es igual, según (A, 8, 29) a:

$$G(u) = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{(2\pi)^\lambda} \sqrt{b} \frac{1}{u^{\lambda+\frac{1}{2}}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\pi ub)$$

Queda así:

$$\frac{\sigma^2(a)}{a^{1+\lambda}} = 2^{1+\lambda} \pi^{-\lambda} \Gamma(1+\lambda) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\lambda+\frac{1}{2}}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}\left(2\pi p \frac{b}{a}\right)$$

Cuando x es muy grande, la parte principal de $J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x)$ es:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \lambda \frac{\pi}{2}\right)$$

Luego, para a muy pequeño, $\sigma^2(a) / a^{1+\lambda}$ es equivalente a:

$$\frac{2^{1-\lambda}}{\pi^{1+\lambda}} \Gamma(1+\lambda) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\lambda}} \text{sen}\left(2\pi p \frac{b}{a} - \lambda \frac{\pi}{2}\right)$$

Según (3) b/a es congruente con ε módulo 1. La expresión anterior es equivalente a $\sigma^2(a) / a^{1+\lambda}$ solo depende de λ y ε , y coincide, por consiguiente, con $Z_\lambda(\varepsilon)$. De donde la expresión buscada del Zitterbewegung:

$$(F, 5) \quad Z_\lambda(\varepsilon) = \frac{2^{1-\lambda}}{\pi^{1+\lambda}} \Gamma(1+\lambda) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(2\pi p \varepsilon - \lambda \frac{\pi}{2}\right)}{p^{1+\lambda}}$$

Basta con comparar la expresión (1) de la función de Bernouilli de orden 1 para obtener:

$$(F, 6) \quad Z_\lambda(\varepsilon) = \frac{2}{\lambda+1} B_{\lambda+1}(\varepsilon)$$

OBSERVACIONES. - Para $\varepsilon = 0$, $Z_\lambda(0)$ coincide con el coeficiente T_λ el cual sirve para el cálculo de la varianza de extensión: esto es inmediatamente visible sobre la fórmula (IV, 2, 9):

$$Z_\lambda(0) = T_\lambda = -\frac{2}{1+\lambda} B_{1+\lambda} \operatorname{sen} \frac{\lambda\pi}{2}$$

Por otra parte, el desarrollo (5) no tiene términos independientes de ε , de manera que se tiene, cualquiera que sea $\lambda > 0$:

$$(F, 7) \quad \int_0^1 Z_\lambda(\varepsilon) d\varepsilon = 0$$

Esta circunstancia permite, en la práctica, despreciar el Zitterbewegung. En efecto, ε no es nunca conocido a priori y puede ser asimilado a una variable aleatoria cuya ley de probabilidad está uniformemente repartida en el intervalo $(0, 1)$. Resulta entonces de (7) que la esperanza matemática del Zitterbewegung es igual a 0.

3. - Generalización de la fórmula de Euler-Mac Laurin.

Los resultados anteriores permiten proponer una generalización de la fórmula de Euler-Mac Laurin. Sea, en el intervalo $[0, b]$ una función $f(x)$ tal que:

$$f(b) = 0$$

Se supone que sobre todo el intervalo $[a, b-a]$ ($a > 0$) $f(x)$ es indefinidamente derivable. Al contrario, en $x = 0$ y $x = b$, $f(x)$ presenta irregularidades analíticas y admite desarrollos limitados de la forma:

$$\sum_{\lambda} C_{\lambda} x^{\lambda} \quad \text{y} \quad \sum_{\mu} C'_{\mu} (b-x)^{\mu}$$

Donde los exponentes λ y μ son positivos. Sea $a < b$, y ε el número comprendido entre 0 y 1, congruente con b/a módulo 1. Se tiene un desarrollo limitado de la forma:

$$\int_0^b f(x) dx = a \left[\frac{1}{2} f(0) + f(a) + f(2a) + \dots + f(b - \varepsilon a) \right] \\ - \sum_{\lambda} \frac{C_{\lambda} a^{1+\lambda}}{\lambda+1} B_{\lambda+1}(0) - \sum_{\mu} \frac{C'_{\mu} a^{1+\mu}}{\mu+1} B_{\mu+1}(\varepsilon)$$

En que $B_{\lambda+1}(x)$ y $B_{\mu+1}(x)$ son las funciones de Bernoulli. Cuando λ y μ toman valores enteros (y cuando $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $x = b$), y para $\varepsilon = 0$, se encuentra de nuevo la fórmula usual de Euler-Mac Laurin, escrita en (IV, 2, 1)

TABLA DE MATERIAS

PRIMERA PARTE

LAS REPRESENTACIONES TRANSITIVAS.

INTRODUCCION.....	4
CAPITULO PRIMERO.- <i>El simbolismo transitivo</i>	12
1. El covariograma y su transformada de Fourier.....	13
2. Variable con soporte no puntual, y regularización de variables.....	19
3. Procesos de subida y descenso.....	23
4. Subida y descenso en modelo isótropo.....	25
5. Modelo recíproco y grupo de Hankel.....	32
CAPITULO II. - <i>Ejemplos de modelos isótropos</i>	36
1. Los modelo de Bessel.....	36
2. Modelos y representación de Gauss.....	43
3. Modelos de Laguerre.....	45
4. Los modelos hipergeométricos.....	47
5. Los modelos esféricos.....	52
CAPITULO III. - <i>Representaciones transitivas de las Distribuciones</i>	55
1. El simbolismo transitivo para las distribuciones con soporte acotado.....	55
2. Subida y descenso para las distribuciones temperadas isótropas.....	60
3. Subida y descenso para la distribución r^μ	64
CAPITULO IV.- <i>La estimación de las variables regionalizadas</i>	66
1. Teoría general de las mallas regulares.....	67
2. Cálculo de varianzas de estimación de una dimensión.....	74
3. Cálculo de varianzas de estimación con varias dimensiones.....	80
4. Mallas aleatorias estratificadas.....	87
CAPITULO V. – <i>Representación Transitiva de las Corregionalizaciones</i>	91
1. La matriz de covariación.....	91
2. Condición de independencia interna.....	94
3. Relación entre una variable y su campo geométrico.....	96
4. Las correlaciones diferidas.....	99

CAPITULO VI. - *Aplicación al problema geométrico*.....102

1. Propiedades del covariograma geométrico.....102
2. Aplicación a la estimación de superficies.....105

SEGUNDA PARTE

LA TEORIA INTRINSECA

CAPITULO VII.- *Resumen de las funciones aleatorias*.....111

1. Definición de las Funciones aleatorias.....112
2. Funciones aleatorias estacionarias de orden 2.....114
3. Integración y derivación estocástica.....116

CAPITULO VIII. - *Los esquemas estocásticos intrínsecos*.....119

1. Definiciones y Momentos.....120
2. Significación y propiedades de la función intrínseca $\gamma(h)$123
3. Variables no puntuales y varianza de extensión.....127
4. Varianza de v en V132
5. Relaciones entre esquemas intrínsecos y representaciones transitivas.....138

CAPITULO IX.- *Teoría intrínseca de las Correogionalizaciones*.....142

1. Matriz de codispersión intrínseca.....142
2. Variables no puntuales y covarianza de extensión.....144
3. La independencia intrínseca.....146

CAPITULO X. - *Distribuciones aleatorias y teoría intrínseca para las distribuciones*.....150

1. Definición de las distribuciones aleatorias.....151
2. La distribución de covarianza.....154
3. Análisis armónico de una distribución estacionaria de orden 2.....157
4. Regularización de una distribución estacionaria con incrementos independientes.....160
5. Derivación de las Distribuciones aleatorias.....166
6. La teoría intrínseca para las distribuciones.....169

CAPITULO XI. – *La subida intrínseca bajo potencia constante*.....177

1. Definición y algoritmos de la subida bajo potencia constante.....177
2. Subida recta bajo potencia constante de r^λ180
3. Las fórmulas del rectángulo para r^λ186
4. Las fórmulas del paralelepípedo para r^λ191

CAPITULO XII. - <i>La estimación y el krigado</i>	193
1. El problema de la estimación.....	194
2. Mallas regulares con implantación preferencial.....	197
3. Cálculo de varianzas de estimación.....	200
4. Malla regular con implantación flotante.....	209
5. Mallas aleatorias y aleatorias estratificadas.....	212
6. El Krigado.....	216
CAPITULO XIII.- <i>Estimaciones y fluctuaciones de los momentos intrínsecos</i>	221
1. Terminología y Momentos de orden 4.....	222
2. Estimación y fluctuación de la deriva lineal.....	225
3. Estimación y fluctuación del variograma local.....	228
4. Estimación y fluctuación de la varianza local.....	233
ANEXO A. Resumen de las Distribuciones.....	241
ANEXO B.....	272
ANEXO C.....	274
ANEXO D.....	278
ANEXO E.....	282
ANEXO F.....	286
