

Escuela Nacional Superior de Minas de París

Georges Matheron

Estimar y Elegir

Un Ensayo acerca
de la Práctica de las Probabilidades

Traducido al español por
Marco Antonio Alfaro Sironvalle

2008

TABLA DE MATERIAS

Prefacio del traductor.....	2
<u>Primera parte: A la búsqueda de la objetividad.....</u>	<u>3</u>
Introducción.....	4
Capítulo I. El azar de J. Monod o cómo atravesar los límites de la objetividad.....	9
Capítulo II. Porque no estamos de acuerdo con los etruscos o de la objetividad de los modelos probabilísticos.....	20
<u>Segunda parte: Los criterios de objetividad interna en el caso de los fenómenos únicos....</u>	<u>44</u>
Capítulo III. El bosque poissoniano.....	45
Capítulo IV. La elección y jerarquía de los modelos.....	55
Capítulo V. Hacer el orden.....	73
<u>Tercera parte: La reconstrucción operatoria.....</u>	<u>92</u>
Capítulo VI. Los modelos globales.....	93
Capítulo VII. Los modelos locales.....	114
Capítulo VIII. La esperanza condicional ¿Es operatoria?.....	127

PREFACIO DEL TRADUCTOR.

Al fin he terminado la traducción de la última obra del Maestro Georges Matheron, “Estimer et Choisir” publicada por la Escuela de Minas de París en 1978. Existe una versión en inglés, de la editorial Springer, traducido por A. M. Hasofer, en 1989.

Confieso que esta traducción al español ha sido una tarea dura y difícil, dado el gran nivel filosófico e intelectual de la obra. Recorro entonces a la buena voluntad de los lectores...

De manera de respetar al máximo posible la versión original, he tenido que usar palabras que no pertenecen a la lengua española tales como anticipatoria, decidable, chance, etc...

La frase “après le coup”, aparece como 70 veces el texto, y se refiere a “después de haber tirado los dados”, la he traducido por “después de la tirada” (en la versión inglesa aparece “after the fact”).

¡ Buena lectura y comprensión de la práctica de las probabilidades a los fenómenos naturales únicos y a la filosofía de la geoestadística !

Marco Antonio Alfaro Sironvalle
Santiago, Chile, Noviembre 2008

PRIMERA PARTE

A LA BUSQUEDA DE LA OBJETIVIDAD.

“Cualquiera que desee lo absoluto, debe tomar la subjetividad – el egocentrismo – por aumento, y cualquiera que desee la objetividad no puede evitar el problema del relativismo”

H. Weyl

INTRODUCCION

Este libro no es desinteresado. Más que una tesis, definiendo una práctica, un conjunto de modelos, métodos y “vueltas de mano”, a veces poco ortodoxas, elaborados¹, desde hace años, para describir, estudiar, estimar fenómenos muy variados: puede tratarse de células cancerígenas o de bosques; de la estructura de una roca o la de una aleación metálica; de un yacimiento de petróleo, o de una capa de una autopista; de contaminación o de meteorología; de cartografía submarina, o de prospección geofísica etc.... Esta metodología y esta práctica tienen su origen en un problema totalmente terrenal: el problema de la estimación de los yacimientos mineros. Este dominio bien particular ha servido de banco de ensayo, y ha proporcionado verificaciones muy numerosas y muy decisivas.

El problema de las materias primas está hoy, así parece, en el corazón de las preocupaciones de cada uno de nosotros. Sin embargo, exceptuando un pequeño número de especialistas de la industria minera, pocas personas soportan escuchar hasta el final una exposición seria acerca de la noción de reservas recuperables de un yacimiento minero. Es aún más difícil mostrarles las dificultades, múltiples y realmente sutiles, que es necesario elucidar una a una, y resolver efectivamente, antes de poder proponer una estimación simplemente sensata de estas reservas. La disciplina nueva que ha sido necesaria forjar para este propósito – la Geoestadística minera – que ya ha pasado sus pruebas, sorprendería quizás, por su complejidad, a los estadísticos o los probabilistas que tendrían el coraje de tomar conocimiento de ella. Pero el aspecto técnico de estos problemas desanimará, lo sé, al lector de mejor voluntad. En adelante, solo hablaré, por alusiones discretas acerca de estos problemas.

Que conste que, los problemas que nos interesan presentan dos características importantes: de una parte, se desplazan en el espacio físico, en el cual vivimos, y se manifiestan, como lo decimos nosotros, en una forma regionalizada. Por otra parte, y lo más a menudo, se trata de fenómenos únicos. Habiendo tratado y resuelto, con un éxito real, confirmado por la práctica, un gran número de estos casos particulares, sospechamos, es cierto, que estos problemas no eran quizás tan únicos como nos parecía al comienzo. La metodología que nos ha permitido resolverlos, habiendo pasado sus pruebas, refleja sin ninguna duda una cierta forma de objetividad, que llamaremos objetividad externa: es, simplemente, la sanción de la práctica. Pero estos objetos siguen siendo únicos, como individuos tales que no se encontrará nunca en otra parte idénticos a ellos mismos. No existen dos yacimientos, ni dos bosques, ni dos estrellas idénticas. ¿En que medida una estimación, o un modelo probabilística respecto de este yacimiento, de este bosque (y no un yacimiento o un bosque en general) posee una significación objetiva? Es a la investigación de los criterios de esta objetividad interna que está consagrado este ensayo.

No puede entonces, de ninguna manera, eludir la famosa pregunta, tan mal formulada: “¿La probabilidad es subjetiva u objetiva?”. En realidad no hay probabilidad en sí. Solo hay modelos probabilísticas. O si se prefiere, lo “aleatorio” no es de ninguna manera una propiedad unívocamente definida, ni aún definible, del fenómeno mismo. Sino, solamente, una característica del, o de los, modelos que nosotros elegimos para describir, interpretar, y

¹ Principalmente en el Centro de Geoestadística y de Morfología Matemática de la Escuela de Minas de París, en Fontainebleau.

resolver tal o tal problema que nosotros nos proponemos. Y, siguiendo la naturaleza de estos problemas, podemos bien adoptar, sucesivamente, modelos diferentes, atribuyendo, según el contexto, probabilidades diferentes a un suceso dado cuyo enunciado, aparentemente, sigue siendo el mismo. El único problema real es saber si un modelo dado, en un contexto dado, posee o no, una significación objetiva y, si no es así, hacer un orden: Quiero decir, entre los conceptos, enunciados, parámetros etc... que figuran en el modelo, distinguir los que poseen en (lo que llamamos) la realidad una contraparte objetiva, observable, medible, etc... y los otros: estos últimos, que llamaré convencionales (en vez de subjetivos) podrán jugar un papel heurístico útil en la elaboración y la implementación del modelo. Pero deberán desaparecer de la formulación última de nuestras conclusiones y de nuestros resultados. Porque, en la medida misma en que los problemas que buscamos resolver son problemas reales, las soluciones que proponemos deben, ellas también, con el riesgo de revelarse ilusorias, respetar el principio de realidad.

No se trata, digámoslo bien, de adoptar alguna posición “conciliadora” entre estos dos extremos que representan las tesis “objetivistas” y “subjetivistas”. Es necesario cortar por lo sano. De los bayesianos, retengo mucho: Su crítica feroz de los postulados implícitos de los objetivistas, postulados que, en muchos casos, no pueden ser dichos ni verdaderos ni falsos, sino solamente sin sentido; o bien aún el papel fundamental que ellos atribuyen, con razón, a lo que ellos llaman la información “a priori”, es decir, la información no numérica o cualitativa, de naturaleza estructural, que nos dice, en suma, muy simplemente, de qué se trata: delante de una misma sucesión de 0 y de 1, no elegiremos el mismo modelo según se trate de resultados de un juego de cara o cruz, de una alternancia de días de lluvia y de buen tiempo, o de la escritura binaria de un número trascendente.

Pero no concluyo de ninguna manera, que nuestros modelos probabilísticos deben ser abandonados, sin recurso, al arbitrario de la subjetividad individual. Yo propongo, al contrario, en primer lugar de hacer un orden, como ya lo dije, luego, sobretodo, de ponernos en la escuela de los físicos, y de proceder a la reconstrucción operatoria de los conceptos de nuestro modelo, o al menos de aquellos que nuestra crítica inicial habrá considerado como aptos para transportar una información objetiva.

Esta posición metodológica se refleja en la terminología que yo adopto. Los estadísticos ortodoxos habrían dicho: estimar y predecir. Los bayesianos, o subjetivistas: evaluar y prever. Yo preferiré: estimar y elegir. Esto merece un comentario. Yo utilizo el verbo “estimar” cada vez que se trate de evaluar una magnitud que no conocemos, pero que existe independientemente de nosotros y del estado de nuestra información: la estimación, entonces, se refiere a una magnitud física, objetiva, e importa poco que esta magnitud sea asociada, en nuestro modelo, a una variable aleatoria o a un “parámetro”. De hecho, una misma realidad – digamos, la ley media de un yacimiento minero, será, según el caso, tratada en el modelo, sea como un parámetro (objetivo), sea como una variable aleatoria. Pero en un caso como en el otro, yo hablaré de la estimación de esta ley media (y no de su predicción o de su previsión). Utilizaré el verbo “elegir” como en un sentido neutro (sin prejuzgar del sentido, objetivo o convencional, que conviene atribuir al parámetro así elegido) como también en un sentido limitativo, cuando se tratará, por razones de comodidad, de atribuir un valor numérico a un parámetro convencional (no objetivo), valor que puede ser elegido de manera más o menos arbitraria sin comprometer la objetividad de la gestión tomada en su conjunto. En suma, se estiman magnitudes (objetivas), se eligen los métodos, los modelos, o los parámetros convencionales, y se convienen los criterios. Para los bayesianos, no hay estimación, sino

solamente “elecciones”. Ellos evalúan probabilidades (subjetivas) y obtienen previsiones (igualmente subjetivas) respecto de los sucesos o las magnitudes desconocidas. Los ortodoxos, u objetivistas, al contrario, reservan el término “estimación” a la elección de los parámetros de sus modelos, sin preguntarse de antemano, si estos parámetros poseen o no, una contraparte objetiva en la realidad. Al contrario, ellos predicen los valores (futuros o desconocidos) de variables aleatorias, aún si ellas no representan realidades físicas efectivas. Su terminología transporta una suerte de platonismo clandestino: el modelo y sus parámetros vienen del cielo de las ideas, y sacan de este noble origen una realidad substancial, un status ontológico bien superior a aquel que podrían reivindicar sus pálidas y terrestres imitaciones (las variables del modelo, es decir las magnitudes físicas de la realidad). Esta es la presunción substancial que denuncian, con razón, los bayesianos. Para nosotros, solamente, después de un examen crítico efectuado en cada caso particular, daremos este status objetivo a tal o tal parámetro y, en consecuencia, hablaremos de su estimación.

Lo anterior dicta el plan de este ensayo. En la primera parte, examinaré los criterios, y las limitaciones, de la objetividad externa, o metodológica, que es simplemente la sanción (a la larga) de la práctica, y la objetividad interna, la cual se funda, definitivamente, en las características físicas, concretas, del objeto individual. En este estadio, los ejemplos que yo doy están tomados de un fondo cultural común: La lluvia y el buen tiempo, el juego de cara o cruz, las moléculas de proteínas. En la segunda parte, se tratan más específicamente los fenómenos regionalizados en el espacio, y los modelos “topo-probabilísticos” que los representan. El objetivo es entonces desarrollar criterios de objetividad interna: ¿Cómo elegir un modelo, coma hacer la separación entre lo que es objetivo y lo que no lo es, cómo localizar en esta jerarquía el punto preciso en el cual nosotros introducimos, en Proxy, esta hipótesis anticipativa, llena de información objetiva no contenida en los datos, que nos permite resolver los problemas que nos hemos propuesto, pero que no nos garantiza nunca contra un riesgo de error radical ? Estas son las preguntas que ensayaré de responder: En la tercera parte, trataré, pero en casos particulares solamente, de reconstruir en términos operatorios, a la manera de los físicos, algunos de los conceptos subyacentes de nuestros modelos. Esta reconstrucción nos permitirá precisar la naturaleza de la famosa hipótesis anticipada.: Se tratará simplemente, de una aproximación banal, pero adoptada, como una hipótesis, antes que su validez pueda ser realmente controlada. De aquí el riesgo, siempre presente, del error radical. De la misma manera, la “inferencia estadística” se despojará, en gran parte, de su misterio: aún en el caso de estudiar un parámetro convencional, se trata en suma de un falso problema. En el caso contrario, cuando ella apunta una realidad física, se trata simplemente del cálculo numérico aproximado de una integral en el espacio.

La gran víctima de este examen será quizás la esperanza condicional, noción matemática muy profunda, la cual se revelará como no apta, en nuestro contexto, para recibir el status de concepto físico. Como consuelo propondré un sustituto más simple, el estimador disyuntivo, y yo diré algunas palabras también del uso, posible y legítimo mediante ciertas condiciones, de modelos puramente heurísticos.

A pesar que los modelos probabilísticos permiten abordar problemas muy variados, cuantitativos y cualitativos², es por razones de simplicidad, que centraré la exposición sobre la

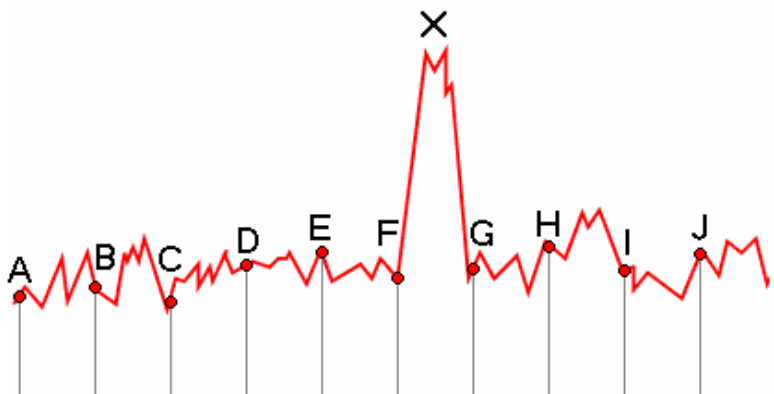
² Ver por ejemplo, lo que nosotros llamamos la Morfología Matemática.

estimación. Las dificultades que genera el problema de la estimación no son de naturaleza matemática, o al menos principalmente. Se les encuentra en los dos niveles extremos: en la etapa inicial de la conceptualización, es decir de la elección del modelo, y en la etapa terminal, de la implementación práctica.

En la etapa inicial, vemos surgir preguntas inevitables respecto del sentido, la objetividad y la validez de todas las etapas posteriores. Siendo dado un fenómeno único, perfectamente determinado aún si queda largamente desconocido, ¿es posible, y esto presenta aún un sentido, conceptualizarlo en la forma de un modelo probabilístico, es decir, en suma, de representar este fenómeno como uno, cualquiera, tirado al azar en una familia de fenómenos virtuales considerados como posibles? La elección de este modelo tiene significación objetiva, es decir, ¿es susceptible de prestarse a tal o tal forma de control experimental, o debe ser abandonado sin recurso al arbitrario de la subjetividad individual?

Finalmente, si suponemos que estos controles experimentales son posibles, ¿conducen a resultados positivos que permitan concluir sin ambigüedad, la validez objetiva o al menos parcial del conjunto inicial?

En la etapa terminal, es decir al nivel de las aplicaciones prácticas, se ven surgir preguntas análogas, pero en una forma particular. A partir de la información que disponemos para estimar, siempre fragmentaria, a menudo de calidad mediocre, por ejemplo en un yacimiento minero, ¿podemos especificar un modelo probabilístico adecuado a estos datos (luego, en particular, podemos evaluar de manera razonable los valores numéricos de los parámetros de los cuales depende el modelo) y, suponiendo que esto sea posible, en qué medida podemos enseguida extrapolar de lo conocido a lo desconocido, es decir, deducir del modelo, contrastando con los datos conocidos, conclusiones válidas para las partes no informadas del yacimiento? A esta pregunta (bastante kantiana) “¿Cómo es posible la estimación?” parece bien que solo se puede aportar una respuesta que aceptando, de una forma u otra, una hipótesis de homogeneidad estadística, al menos local, en la cual la estacionaridad clásica constituye un extremo fuerte, exageradamente severa: El fenómeno debería, en suma, comportarse, donde no se le conoce, de una manera razonablemente análoga a lo que se puede observar sobre los datos disponibles en la vecindad. Pero, si esta hipótesis es indispensable para fundar la posibilidad de la estimación, no resulta automáticamente que esta se verifique en todas partes. Es fácil dar contra ejemplos, en la figura siguiente, en que los puntos A, B, C, ..., J representan los datos disponibles, se puede ver un caso de este tipo: Nada permite prever la anomalía X y la estimación no es posible (cualquiera que sea el método): El error radical es aquí, inevitable.



Una palabra aún, para terminar esta introducción un poco larga. No se encontrará en lo que sigue ninguna “concepción del mundo”, explícita o implícita, sino solamente consejos metodológicos para los que practican las probabilidades. Se puede, si se quiere distinguir el motor y el código. El elemento motor, o “dialéctico”, está siempre presente implícitamente. Es este elemento el que nos incita a progresar, a generar siempre nuevas diligencias, sin quedarse nunca en reposo. Es él quien nos permite “comprender” todo el desarrollo anterior en, una vasta síntesis retrospectiva – pero, solamente, a destiempo, a la manera de la “lechuza de Minerva”, que se levanta después que se acuesta el sol. Por otra parte, podría bien haber alguna ilusión de tipo antropomórfico. De todas maneras, este punto de vista conviene a un historiador o a un filósofo de las ciencias, el cual busca reconstituir las etapas recorridas por el espíritu humano en su esfuerzo para elaborar y reconstituir lo real, pero no a un práctico: Este, en el curso de su trabajo, tiene más bien necesidad de un código, o digamos de una plomada para construir muros bien rectos. Esto no quiere decir que él adhiere a una filosofía cualquiera de la plomada, sino solamente, que le gusta su oficio.

CAPITULO I

EL AZAR DE J. MONOD

O

COMO ATRAVESAR LOS LIMITES DE LA OBJETIVIDAD.

En una obra seria, escrita por un autor competente, sobre un tema científico, una expresión tal como “este fenómeno de debe al azar”, constituye en principio, simplemente, una manera rápida de hablar, significando en realidad “todo sucede como si este fenómeno se debiera al azar”, o, en un lenguaje más preciso: “Para describir, o interpretar, o formalizar este fenómeno, hasta ahora, solo los modelos probabilísticos han proporcionado buenos resultados”. Se trata entonces simplemente de constatar un hecho. Eventualmente, el autor puede agregar: “Y no me parece que esta situación sea de naturaleza tal que se puede modificar en un futuro previsible”. Esta vez existe una toma de posición personal, una elección metodológica, que abre posibilidades a la investigación, pero cierra otras. Se entiende bien que el autor, que conoce su sujeto debido a que lo ha practicado durante años, desea evitar a sus colegas caer en un impasse y ahorrarles un tiempo precioso. Hay un riesgo, porque después de todo, nada prueba que mañana o en 10 años otro investigador publicará una teoría determinística que explique maravillosamente e integralmente el fenómeno en cuestión, y nosotros quizás habremos perdido el carro por haber seguido el consejo implícito de nuestro autor: Esto es un riesgo real, pero normal e inherente a la práctica del trabajo científico porque de todas maneras estamos obligados de hacer elecciones metodológicas. Entendiendo en este sentido, puramente operatorio, el recurso al azar, es decir, en realidad, la decisión de utilizar modelos probabilísticos, es perfectamente legítima, y no nos hace salir del marco de las disciplinas positivas.

Pero a veces también, lo más a menudo en las obras de divulgación o de síntesis filosófica como en los trabajos propiamente científicos, se desliza otra interpretación. Se sugiere, o igualmente se afirma, que el Azar (a veces con letra mayúscula), ejerce una acción decisiva sobre el curso de los sucesos: No se trata más de una elección metodológica, el azar es apostatado³, provisto de atributos positivos, erigido en deus ex machina. En estas condiciones, imputar el fenómeno al Azar o a la Providencia constituyen dos actitudes equivalentes, ajenos a la metodología científica.

EL AZAR, CONCEPTO METAFISICO.

El uso ilegítimo de conceptos científicos más allá de los límites al interior de los cuales tienen un sentido operatorio: Esto es el pasaje subrepticio a la metafísica, peligro que acecha aún los más grandes. Tomemos una obra famosa, escrita por un biólogo de alto renombre, “El Azar y la Necesidad” de J. Monod. En la última página encontramos esta afirmación angustiosa: “La antigua alianza se rompió: El hombre sabe finalmente que está solo en la inmensidad indiferente del Universo de donde él emergió por azar”. Aquí, la palabra está visiblemente

³ Nota del traductor: apostatado significa negar la fe de Jesucristo.

empleada en una concepción metafísica (no operatoria). Por otra parte⁴, nosotros capturamos en vivo el paso de un status a otro:

“Diremos que estas alteraciones [es decir alteraciones genéticas] son accidentales, que se deben al azar⁵. Y, porque constituyen la única⁶ fuente disponible de modificaciones del texto genético, depositario único a su turno de estructuras hereditarias del organismo, se deduce necesariamente que el azar es la única fuente de cualquier novedad, de cualquier creación en la biosfera: El azar puro, el único azar, libertad absoluta, pero ciega, está en la raíz del prodigioso edificio de la evolución: esta noción central es la única concebible, como la única compatible con los hechos de observación y de experiencia”

La primera frase (las alteraciones genéticas se deben al azar) puede aún ser entendida en un sentido científico (es decir operatorio), y significa en este caso: Los datos experimentales que poseemos son compatibles con tal modelo probabilístico (que, por otra parte sería necesario especificar), y nosotros no disponemos de algún modelo determinístico apto para tomar en cuenta de manera más satisfactoria. Al contrario, a partir de la segunda frase, el azar es crédito de un papel activo, positivo: Constituiría la única fuente posible de cualquier novedad en la biosfera. ¿En qué manera el azar puede ser “fuente” de cualquier cosa? Para darse cuenta que hay un pasaje subrepticio a la metafísica, basta, con reemplazar la palabra “azar” por su definición operatoria. Esto proporciona aproximadamente: “El hecho que, hasta ahora, solo los modelos probabilísticos se hayan revelado compatibles con lo que nosotros sabemos acerca de las alteraciones genéticas constituyen la única fuente de cualquier creación y de cualquier novedad en la biosfera”. El sentimiento de malestar que nosotros experimentamos con la lectura de este extraño enunciado está ligado a la heterogeneidad radical del sujeto (una constatación metodológica, relativa a nuestra modesta práctica científica y a su escala limitada) y al papel activo y universal que se le atribuye (el de un demiurgo⁷ cosmológico).

J. Monod tenía, en parte, conciencia de esta temible confusión de estilos. A continuación del pasaje que acabamos de citar, agrega en efecto que es “muy importante precisar el sentido exacto en el cual la palabra azar puede y debe ser empleada, tratándose de mutaciones como fuente de la evolución”. El introduce entonces una distinción entre dos tipos de incertidumbre: una “incertidumbre operacional” y una “incertidumbre esencial”. Yo no estoy seguro que se trata de una distinción pertinente. Porque, con el riesgo de salir del marco de las disciplinas positivas, sería necesario definir un criterio operatorio que permita discriminar sin equívocos los dos tipos de incertidumbre. Podemos dudar que esto sea posible. La base propiamente empírica sobre la cual nosotros fundamos nuestro diagnóstico de incertidumbre es, en efecto, la misma en los dos casos: En el estado actual de nuestros conocimientos no podemos predecir con certeza tal suceso o tal fenómeno: En el primer caso, admitimos que una mejora considerable (concebible, al menos teóricamente, aún si no tenemos apenas la esperanza de verlo realizado en la práctica) de nuestros conocimientos o de nuestros medios de investigación nos permitirían levantar esta incertidumbre. En el segundo caso, nosotros decretamos categóricamente que esto está excluido: Pero somos nosotros que lo decretamos, no los datos empíricos que poseemos, que siguen perfectamente mudos sobre este punto. Esto

⁴ Página 127.

⁵ Subrayado por mí.

⁶ Subrayado por J. Monod

⁷ Nota del traductor: Dios creador en la filosofía platónica.

no es una constatación, sino una interpretación sobre ajustada, una extrapolación al infinito, y por esto mismo ilegítima, aún si se basa en consideraciones teóricas serias: porque, en el dominio de las disciplinas empíricas, no podemos extrapolar al infinito una teoría por muy corroborada que sea, sin salir ipso-facto de los límites al interior de los cuales esta teoría posee un sentido operatorio y ha recibido la sanción de la experiencia.

LA PARABOLA DEL PLOMERO Y DEL MEDICO.

Es notable, por otra parte, que el ilustre biólogo no haya, de ninguna manera, pensado en definir un criterio operatorio que permitiera distinguir los dos tipos de incertidumbre. “Lo mejor, dice él, es tomar algunos ejemplos”. El primer ejemplo, clásico, es el de los juegos de dados o el de la ruleta. Es bien cierto que si nosotros conociéramos con una precisión suficiente las condiciones iniciales (posición, velocidad y momento cinético del dado en el momento en que cae) y las condiciones en los límites (la topografía precisa de la tabla en que se juega el partido) las leyes de la mecánica nos permitirían, en principio, prever con certeza el número destinado a salir. Ahora bien, se encuentra que variaciones muy ligeras de estas condiciones iniciales, muy inferiores a las que somos capaces de controlar experimentalmente, bastan para modificar el resultado final (sacar 5 en vez de 6, etc..). Encontramos aquí la condición de “inseparabilidad de las condiciones iniciales”, característica, según J. Ullmo⁸ de la introducción de modelos probabilísticos en física. Se trata bien de una “incertidumbre operacional, y no esencial”, y es bien que “por razones puramente metodológicas” nosotros recurrimos al cálculo de probabilidades. Esto es incontestable, y en suma trivial. Esperamos con impaciencia el segundo ejemplo, el que nos va a aclarar sobre la naturaleza un poco misteriosa el segundo tipo de incertidumbre, la incertidumbre “esencial”. ¡Ay!, lo que sigue es la “parábola” ultra conocida del plomero Dubois trabajando en un techo y dejando caer inadvertidamente su martillo, el cual viene a quebrar el cráneo del doctor Dupont quién pasaba justamente por allí, llamado de toda urgencia por uno de sus enfermos. Ningún lector de este bello y gran libro que es “El Azar y la Necesidad” no ha podido, yo pienso, defenderse de un sentimiento de malestar al encontrar un argumento tan débil caído de una pluma tan ilustre. Esta “parábola” es reputada para definir la noción de “coincidencia absoluta” o, lo que equivale a lo mismo, de “azar esencial”, es decir, nos dice Monod, tomando una idea que viene de Cournot, “inherente a la independencia total de dos series de sucesos cuyo encuentro produce el accidente”.

La terminología desarrollada denuncia por si sola la extrapolación más allá de todo límite. La coincidencia es absoluta, la independencia es total. ¿Estos adjetivos tienen un sentido, al aplicarlos a nociones aproximadas, de alcance limitado, como la coincidencia o la independencia? Por otra parte, hay una contradicción al hablar de dos series de eventos “totalmente” independientes, y sin embargo se encuentran. La noción de “independencia” utilizada aquí no está definida. Se nos dice solamente que estas dos series de sucesos “no tienen nada que ver” uno con el otro. Pero, cualquiera que sea el sentido de este lenguaje aproximado, es claro que solamente es a nuestros ojos que estas dos series “no tenían nada que ver”. Lo que significa, de nuevo, que éramos incapaces de prever su “encuentro” y el “accidente” que debía resultar: nada más. ¿En qué difiere esta imprevisibilidad de la asociada

⁸ Ver, por ejemplo, “Les Concepts Physiques”, en “Logique et Connaissance Scientifique”, por J. Piaget y otros, París, 1967, La Pléiade.

a un juego de dados? La diferencia existe bien, pero está relacionada con el nivel de abstracción en que nos hemos localizado para considerar las dos categorías de sucesos, y no a la “naturaleza” de estos últimos. En el primer caso, se trataba de una partida de dados en general, en el segundo, de un suceso único, singular, enteramente especificado por la identidad del plomero y del médico (también se podría haber agregado el lugar y la fecha): solo la disimetría de los dos puntos de vista crea una impresión de contraste. Ahora bien, yo puedo particularizar el primer punto de vista, aquel relacionado con las partidas de dados, y proponer la “parábola” siguiente, simétrica de la del plomero y el médico: “Ese día, a tal hora, Duval entra en el café X, encuentra su viejo amigo el señor Durand a quien no había visto desde hace tres años, riega abundantemente este feliz suceso, luego, a sugestión del barman, entabla con el señor Durand una larga partida de dados, en la tirada 26, el dado tirado de manera torpe, aterrizando en la taza de café que el señor Duparc venía de vaciar y poner en el mostrador, ¡mostrando así la cifra 6! Se trata esta vez de un suceso también totalmente imprevisible, de un “azar” también “esencial” que en la fábula del plomero y del médico. La moraleja de esta historia trivial es sin duda que no importa el suceso singular que sobreviene en el mundo en que vivimos, una vez que lo individualicemos especificando todos los detalles que lo han acompañado, comprendiendo las condiciones de tiempo y de lugar, aparece como el fruto de un encuentro, no de dos, sino de un gran número de “series de sucesos” que no tenían mucho que ver los unos con los otros, y es el relevo de un “azar” ni más ni menos “esencial” que aquel que invoca J. Monod. Y esto consiste solamente en decir, lo que es trivial, que un suceso único y singular, como tal, no puede relevar un conocimiento científico, la condición de “repetitividad” que, sola, funda la objetividad de nuestras disciplinas empíricas haciendo aquí falta por definición.

En sentido inverso, si despojamos en el pensamiento al suceso único y singular de tales o cuales circunstancias anecdóticas que lo acompañan (y, principalmente, las condiciones de tiempo y de lugar) de manera de reducirlo al status de ocurrencia particular de una clase más general de sucesos susceptibles de repetirse, entonces, por este mismo paso, nosotros le constituimos como objeto, de un conocimiento científico posible. Y, por lo mismo, seremos capaces de avanzar modelos o teorías (determinísticas o probabilísticas), susceptibles de ser corroboradas o refutadas según que estos se revelen o no “de acuerdo” no solamente con este suceso, sino más bien con todos aquellos que dependen de la misma clase (constituida por nosotros) y que nosotros hayamos tenido la ocasión de observar. Por ejemplo, aquí estaríamos conducidos a proponer un modelo probabilístico el cual contiene, por lo menos, tres elementos, a saber: A (caída del martillo de un plomero en un punto y en un instante) B (presencia de un cráneo pasando en el mismo punto, en el mismo instante) y AB (intersección de los dos anteriores) la aserción relativa a la independencia de estos dos sucesos significaría simplemente que, en este modelo, la probabilidad de AB es igual al producto de las probabilidades de A y B, es decir la relación habitual $P(AB) = P(A) P(B)$. En este estadio, se trata solamente de una característica de nuestro modelo y no de un enunciado relativo a la realidad. Para atravesar este paso y obtener un enunciado que tenga una significación objetiva, debemos atribuirle a nuestro modelo aún otras características (por ejemplo, la estacionaridad en el tiempo) mediante las cuales podemos legítimamente identificar (con un grado de aproximación que la estadística matemática permite en principio evaluar) la probabilidad $P(A)$ de un suceso A con la frecuencia media (empírica) $\nu(A)$ de su realización en el curso del tiempo. Ahora, pero ahora solamente, obtenemos un enunciado objetivo, es decir controlable experimentalmente. A saber: La frecuencia $\nu(AB)$ del suceso producto debe ser igual (con el

mismo grado de aproximación anterior) al producto $v(A)v(B)$ de las frecuencias de los dos sucesos en cuestión.

Incidentalmente, y a pesar que no disponemos de los datos estadísticos necesarios, podemos prever que, según toda verosimilitud, la relación $v(AB) = v(A)v(B)$ no sería verificada. Por la simple razón que en los momentos en que no hay, en general, plomeros sobre los techos (la noche, los días muy fríos o de chaparrones torrenciales etc...) son también, en promedio, aquellos en que hay pocos transeúntes en las calles. Así, los dos sucesos que nos habían presentado como el ejemplo típico de la “independencia total” revelarían, sin duda, en el análisis una correlación positiva, estadísticamente significativa.

LAS CADENAS POLIPEPTIDICAS.

Es con un sentimiento de molestia que yo anticipo estas críticas tan pesadas y triviales en contra de un libro que, por otra parte, yo admiro. Pero estas críticas quizás no son inútiles: Si un gran espíritu científico, como J. Monod cayó en una trampa epistemológica tan grosera, es que aparentemente el peligro es real: Para examinar un ejemplo menos trivial, veamos más bien cómo nuestro autor utiliza la noción de azar en un dominio que le es propio, la biología molecular. La misma confusión de géneros, lamentablemente, se va a manifestar. Abramos el libro en la página 110. Se trata de las proteínas, moléculas “constituidas por la polimerización lineal de cuerpos llamados amino-ácidos” Estos amino-ácidos, en número total de 20, se suceden en un orden cualquiera a lo largo de esta “cadena polipeptídica”, y el único modelo compatible con lo que se sabe hoy de esta sucesión es el de la alternativa repetida generalizada, a saber: La frecuencia (o, en el modelo, la probabilidad) con la cual un ácido dado se manifiesta en un punto de la cadena, no depende ni de la posición de este punto en la cadena, ni de la naturaleza de los ácidos que ocupan las posiciones vecinas. En términos probabilísticos, hay (en este modelo) a la vez estacionaridad a lo largo de la cadena, e independencia (estocástica) entre los elementos que afectan los diferentes puntos de esta cadena. Pero es mejor que citemos:

“Decir que la secuencia de los amino-ácidos en un polipeptídico es “al azar” no cuesta nada, es necesario insistir, a una confesión de ignorancia, pero que expresa una constatación de hecho: A saber que, por ejemplo, la frecuencia media con la cual tal residuo [= ácido] es seguido de otro en los polipeptídicos es igual al producto de las frecuencias medias de cada uno de los residuos en las proteínas en general”. Es esta forma, el enunciado es absolutamente inatacable. No desborda de ninguna manera los límites operatorios del modelo, y solo recurre a hechos efectivamente observados. Lamentablemente, está inmediatamente precedido por otro enunciado, de ninguna manera equivalente, lejos de ser: “Estas estructuras (las de los polipeptídicos) son “al azar” en el sentido que, conociendo exactamente el orden de 199 residuos en una proteína que contiene 200, es imposible formular alguna regla teórica o empírica que permitiría prever la naturaleza del único residuo no aún identificado por el análisis”.

Bien lejos de ser equivalentes, estos dos enunciados son incompatibles y se refutan uno del otro, al menos si nosotros los consideramos como enunciados empíricos. En efecto, el primero afirma que un modelo probabilístico bien definido, el de la alternativa repetida generalizada, no ha sido, hasta el presente, desmentido por la experiencia. Ahora bien, para controlar un modelo de naturaleza probabilístico, el camino usual consiste en proceder con tests

estadísticos: Se hace la elección (antes, evidentemente, de haber tomado conocimiento de los datos, o por lo menos, sin dejarse influenciar por ellos) de un suceso, el cual tiene (en el modelo) una probabilidad muy débil, y se conviene en rechazar el modelo este suceso, en efecto, realizado. Hay siempre, un cierto equívoco, porque después de todo, un suceso poco probable puede, a pesar de todo, producirse. Pero esta ambigüedad es más reducida cuando la probabilidad del suceso en cuestión es más débil. En particular si un suceso (definido de antemano) cuya probabilidad, en el modelo, es inferior a 10^{-10} o aún a 10^{-100} sin embargo se realiza, todo el mundo estaría de acuerdo en refutar el modelo (en el caso contrario, sería simplemente imposible, debido a la falta de criterios de control, utilizar los modelos probabilísticos en el dominio de las ciencias empíricas).

Para servir de test, en el caso que nos ocupa, elijamos el suceso siguiente, que llamaremos A para abreviar: “Entre las distintas proteínas cuya fórmula química se conoce en la actualidad, hay por lo menos dos que presentan la misma secuencia de 199 amino ácidos”. Evaluemos groseramente la probabilidad $P(A)$ de este suceso en el modelo “alternativa repetida generalizada”. Yo ignoro el número exacto de proteínas distintas cuya fórmula química se conoce hoy. Pongamos, para no quedar corto, que hay cien mil, es decir $n = 10^5$, y supongamos que las frecuencias de cada uno de estos 20 amino ácidos sean todas iguales a $1/20$ (en realidad, los diferentes amino ácidos no son equiprobables, pero un cálculo riguroso, que tenga en cuenta las frecuencias empíricas observadas sobre cada uno de ellos, conduciría a los mismos órdenes de magnitud). La probabilidad para que una molécula dada comience por una secuencia dada de 199 ácidos es entonces (en el modelo) 20^{-199} es decir cercano a 10^{-258} : Es fácil de ver que $P(A)$ es a lo más igual a $(1/20)^2 * 10^{-258}$, luego, se tiene:

$$P(A) \leq 10^{-248}$$

Esta probabilidad es inconcebiblemente pequeña. Si el suceso A se realizara, esta sería la ocasión o nunca rechazar un modelo probabilístico.

Ahora bien, el segundo enunciado de Monod – si lo interpretamos como una constatación empírica, y no como el simple resultado de una deducción teórica efectuada en el modelo sin haber recibido confirmación experimental – implica que este suceso A, extraordinariamente improbable, de hecho se realizó. En efecto, no podemos afirmar como un hecho experimentalmente probado que no existe ninguna regla teórica o empírica que permita prever el 200vo ácido, conociendo los 199 primeros, que si nosotros hemos observado efectivamente al menos una vez dos proteínas comenzando por la misma secuencia de 199 ácidos y que difieren una de la otra a partir del 200vo residuo. Ahora bien, esto implica que A se realizó y, por esto mismo, conduce a rechazar el modelo probabilístico.

Se puede ir más lejos, y mostrar que el modelo probabilístico no excluye, sino al contrario implica la existencia de una regla empírica la cual permite prever el 200vo ácido a partir de los 199 primeros. Sabiendo que el número de proteínas distintas presentes en un animal superior es del orden de un millón, y admitiendo que, en nuestra galaxia, un millar de planetas, a lo más, han podido dar nacimiento cada uno a un millar de especies diferentes, podemos evaluar como 10^{24} el número de proteínas existentes o que hayan existido en nuestra galaxia (se trata ciertamente de una evaluación por exceso). Ahora bien, la probabilidad (en el modelo) para que, entre 10^{24} moléculas distintas, existan dos que presenten la misma

secuencia inicial de 199 residuos es a lo más $(1/2) 10^{48} / 20^{199}$, es decir cercano a 10^{-210} : Probabilidad tan pequeña que el suceso correspondiente debe ser considerado como prácticamente imposible. Es decir, con un riesgo de error inferior a 10^{-210} , nosotros podemos afirmar que el conocimiento de los 199 residuos permite identificar, con toda seguridad, y sin equívocos, cualquiera de las proteínas existentes o que hayan existido en nuestro universo (seguramente, puramente empírica) permitiendo prever sin riesgo de error no solamente el 200vo residuo, sino igualmente, todos los demás, a partir de los 199 primeros.

La naturaleza de esta regla es sin misterio. Se la puede comparar con el estado civil. El conocimiento de un número pequeño de parámetros (nombre, apellido, fecha y lugar de nacimiento) permite, con un riesgo de error despreciable, identificar cada uno de los 50 millones de ciudadanos de nuestro país. Luego, como se nos amenaza, los datos biográficos relativos a cada uno de ellos fueran puestos en la memoria de cualquier computadora, cualquier persona (con la reserva de tener acceso a la Gran Computadora) sería capaz de prever con toda seguridad la estatura, la profesión, etc... de cualquier ciudadano francés a partir solamente de su estado civil. No hay que preocuparse en decretar que este modo operatorio es extraño a la ciencia. Porque las clasificaciones sistemáticas, en botánica o en zoología, no proceden de una manera fundamentalmente diferente.

En el caso de las proteínas, la regla que permite hacer esta previsión es actualmente, y continuará sin ninguna duda para siempre, fuera de nuestro alcance, porque es bien cierto que no conoceremos nunca la fórmula exacta de las 10^{24} proteínas. Pero esta no existe (o entonces, el modelo probabilístico de Monod es, por lo mismo, refutado). Ahora, por otra parte, sobre la base de algunas centenas o millares de proteínas, de las cuales nosotros conocemos efectivamente la estructura, un cierto tipo de previsión es posible: Si, luego del análisis de una especie nueva, encontramos que los 199 residuos coinciden con los de una molécula conocida, podemos apostar, con toda seguridad (si el modelo es bueno) que se trata de la misma proteína, y luego prever con toda certidumbre los resultados que aún no han sido analizados.

UNA PARADOJA APARENTE.

El lector podrá estar perturbado por esta paradoja aparente: A pesar, o más bien, justamente debido al carácter “puramente aleatorio” del modelo utilizado para describir la sucesión de los amino ácidos a lo largo de la cadena de los polipeptídicos, podemos afirmar igualmente, con un grado de certeza que es raro alcanzar (¡una probabilidad de error a lo más de 10^{-210} !) que existe una regla la cual permite prever el 200vo residuo conociendo sus 199 predecesores. Se trata, se dirá quizás, “de una regla empírica”, muy complicada, que solo podremos explicitar en la forma de un inventario exhaustivo, y de la cual ninguna teoría simple podrá rendir cuenta. ¿Pero es esto una objeción? Nadie, y Monod menos que cualquiera, no ha exigido que esta regla sea “simple”. Por otra parte, no es fácil definir con precisión lo que se puede entender, por simplicidad, esta regla, si es que existe, y es: si ella no nos parece simple, se trata de un juicio de valor de parte nuestra, es decir una apreciación puramente subjetiva que no mancha para nada la objetividad de la regla en cuestión. Con qué derecho, después de todo, ¿exigiríamos nosotros al cosmos que quede conforme con nuestras estructuras mentales o a nuestras preferencias estéticas?

Por otra parte, no es totalmente cierto que la regla en cuestión no sea “simple”, y sería difícil probar experimentalmente que no lo es. Tomemos un ejemplo. Tomemos los 20 amino ácidos en un orden cualquiera, pero fijo (lo que es posible de $20! = 2.4 \cdot 10^8$ maneras diferentes), de manera que a cada ácido le corresponde un número a_i bien definido comprendido entre 0 y 19. La regla siguiente (llamémosla R):

$$(R) \quad a_{200} = a_1 + a_2 + \dots + a_{199} \pmod{20}$$

Puede ser llamada simple. Esta regla nos parece a priori poco plausible, porque, diríamos, no hay “ninguna razón” para que las cosas se pasen de esta manera. Pero, para demostrar experimentalmente que esta regla es falsa, debemos ensayar sucesivamente las $2.4 \cdot 10^{18}$ versiones posibles, y exhibir para cada una de ellas un contra ejemplo experimental. Por otra parte, nadie lo ha hecho, y, ciertamente no lo hará nunca. Supongamos que basta con un milésimo de segundo en promedio para encontrar cada contra ejemplo, sería necesario un millón de siglos para acabar la verificación. Y, por supuesto, se pueden considerar otros tipos de reglas “simples”. Se objetará que ninguna persona sensata, en la actualidad, aceptaría la posibilidad de reglas tan “absurdas”, es decir que no presentan ninguna relación inteligible con el contexto biológico presente, y de mi parte no aconsejaría a un joven investigador comprometerse en una vía de investigación tan estéril. Sin embargo, no olvidemos que es para nosotros solamente que no hay una relación inteligible entre esta regla y el fenómeno, y que, por otra parte, el buen sentido nos hace rechazarla hoy día, sin examen. Durante siglos, la humanidad se ha complacido con especulaciones “aritméticas” más bien extrañas.

Para hacer más puntuda la paradoja, notemos que la regla R conduciría a secuencias numéricas que parecerían (salvo algunas elecciones muy particulares y poco numerosas de la secuencia inicial, por ejemplo $a_1 = a_2 = \dots = a_{199}$) secuencias “puramente aleatorias”, es decir obtenidas por sorteos independientes al azar. Más precisamente, es muy fácil demostrar el teorema siguiente: Si a_1, a_2, \dots, a_{199} son 199 variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en los 20 primeros enteros, entonces las 199 variables aleatorias a_2, a_3, \dots, a_{199} son también mutuamente independientes. Es solamente en el orden 200, es decir cuando interviene explícitamente la ley de distribución simultánea de las 200 variables aleatorias a_1, a_2, \dots, a_{200} que es posible poner en evidencia el efecto de la independencia funcional. Dicho de otra manera, los tests estadísticos usuales, aún si se dispone de secuencias de 200 valores numéricos obtenidas por este procedimiento, concluirían regularmente e infaliblemente a la ausencia completa de la dependencia.

Por otra parte las técnicas de simulación reposan sobre procedimientos muy análogos, los cuales son bien conocidos por todos aquellos que han tenido la ocasión de utilizar en la práctica la teoría de las probabilidades. Contrariamente a lo que se cree, no es para nada fácil elegir un número “al azar” entre, digamos 1 y 10^6 , y es aún más difícil realizar un número grande de estos sorteos independientes unos de otros. Esta dificultad técnica, bien conocida por los prácticos, debería incitarnos a una mayor circunspección en el manejo de nociones falsamente claras como la del “azar”. Sería imprudente, en efecto, extrapolar a la escala cósmica un concepto que somos incapaces de controlar de manera realmente operatoria a una escala tan modesta como la simulación de algunos millares de valores numéricos. La manera como se hace, en la práctica, es paradójica, (y por lo mismo muy instructiva). Los

procedimientos que utilizan, en general, los prácticos, son en efecto, de una aritmética simple, y absolutamente determinística, totalmente comparable, en esto, con la regla R anterior. Por ejemplo, se elige un número inicial n_1 “cualquiera” entre 0 y 10^6 , se eleva al cubo y se retienen las 6 cifras centrales de la escritura decimal del número obtenido: n_2 es el número cuya escritura decimal está dada por las 6 cifras así retenidas. Se puede reiterar la operación varios millares de veces, y someter los valores obtenidos a los más severos tests estadísticos: Se obtiene, en general, una buena confirmación de la “independencia” estas llamadas variables aleatorias (salvo, de tiempo en tiempo, para ciertos valores particulares del número inicial n_1 . Y sin embargo, el procedimiento de generación de estos números “al azar” es absolutamente determinístico. Estamos seguros aquí, porque somos nosotros los que los hemos elegido, que existe una “regla teórica” simple, la cual permite prever el millonésimo número conociendo el primero. La apariencia “aleatoria” del resultado, que resiste los tests más severos, proviene, nadie lo duda, del carácter extraño, heterogéneo, de las diferentes manipulaciones numéricas que nosotros efectuamos. Elevar al cubo y retener los 6 decimales centrales son operaciones aritméticas que no tienen “nada que ver” entre ellas, por lo menos para nosotros, y esto permite “comprender” porqué los números así fabricados nos parecen “al azar”. Pero estos números no lo son, y tests más potentes efectuados sobre una secuencia extremadamente larga harían aparecer el carácter determinístico (por ejemplo, luego de un millón de operaciones, se cae, necesariamente sobre un valor numérico ya escrito, y a partir de ese momento, la sucesión se hace periódica, y se reproduce de la misma manera hasta el infinito). Ahora bien, no se trata de ninguna manera de una “curiosidad” aritmética, sino de un procedimiento corriente utilizado por los prácticos para fabricar números “al azar” : La existencia de una regla teórica simple, de naturaleza determinística no contradice de ninguna manera, a sus ojos, el carácter “aleatorio” empíricamente bien corroborado, de los números que ellos obtienen.

EL UMBRAL DE REALISMO O DE OBJETIVIDAD.

Estos ejemplos ilustran bien, yo creo, la diferencia capital que existe entre un teorema y un enunciado empírico. Un modelo dado, por muy bien testado y corroborado que haya sido, contiene siempre necesariamente teoremas que no corresponden a enunciados empíricos controlados, ni aún controlables más allá de un cierto límite. Existe siempre un umbral de realismo, más allá del cual el matemático puede, claro está, perseguir alegremente sus deducciones, las cuales el físico debe respetar, con el riesgo de obtener solamente enunciados incontrolables en primer lugar, luego, poco a poco, incontrolables, es decir desprovistos de significación objetiva, o si se quiere, “metafísicos” en el sentido que toma este adjetivo en el uso de las ciencias positivas. En el caso de nuestras proteínas, para todo entero n , la probabilidad (en el modelo) de una secuencia dada a_1, a_2, \dots, a_n de n amino ácidos es igual al producto $P(a_1)P(a_2) \dots P(a_n)$ de las probabilidades individuales, es decir a 20^{-n} en el caso en que los diferentes amino ácidos son equiprobables. Esto es un teorema del modelo. Para que le corresponda un enunciado “objetivo” o “empírico”, es decir controlable experimentalmente, es necesario que, entre las 20^n secuencias⁹ posible, algunas al menos se encuentran repetidas un número suficiente de veces entre las 10^{28} secuencias que sería (¡teóricamente!) posible observar. Si queremos, por ejemplo, que exista (en el modelo) una

⁹ Al admitir que las proteínas contienen 10^4 ácidos en promedio, las 10^{24} moléculas del universo contienen (aproximadamente) $10^4 * 10^{24} = 10^{28}$ secuencias de 200 ácidos consecutivos.

probabilidad superior a $1/100$ para que una, al menos, de estas 20^n secuencias se repita al menos 10 veces (y es verdaderamente el mínimo que se pueda exigir) se ve fácilmente que n no puede sobrepasar un valor del orden 24 aproximadamente. Un enunciado de orden superior, por ejemplo del orden $n = 200$, como el de Monod, es empíricamente vacío¹⁰. Si ahora, no consideramos el conjunto de las moléculas que existen en el universo, sino solamente aquellas de las cuales conocemos efectivamente la fórmula, en nombre, admitamos, de 1000, lo que da a lo más 10^8 configuraciones observadas, debemos esperar a que una secuencia dada, de largo n figure, en promedio, $10^8 * 20^{-n}$ veces en nuestro material experimental. Para $n = 2$ y 3 , tendremos más de 10^5 y 10^4 repeticiones, en promedio, y por consiguiente muy buenas posibilidades de control experimental. Para $n = 6$, ya, este número promedio es del orden de la unidad: en el orden de 6 , solo será posible controlar algunas secuencias (en un número muy pequeño) aquellas que, “por azar” se han repetido, digamos, al menos diez veces. Más allá de $n = 7$ o 8 , el material experimental disponible hoy día no permite prácticamente ningún control (o, esto significa por el hecho mismo que el modelo probabilístico es refutado).

En resumen, una aserción relativa a la independencia de orden $n = 10$ no puede, si el modelo es bueno, ser considerada como experimentalmente establecida hoy día. Respecto de la noción de independencia de orden $n \geq 30$ (y a fortiori de orden 200) ella está totalmente desprovista de significación objetiva. ¿Cómo, entonces, podríamos extrapolar a la escala cósmica, y afirmar categóricamente, como si se tratara de un hecho experimental probado, o aún simplemente de un enunciado que presente una significación objetiva cualquiera, que el “azar constituye la única fuente posible de cualquier creación y de cualquier novedad en la biosfera”? Es verosímil que J. Monod haya concebido su filosofía, antes de todo, como una máquina de guerra contra la de Teilhard de Chardin¹¹. Es esto lo que explica su semejanza. El

¹⁰ Atraigamos, al pasar, la atención de los lógicos sobre el status extraño (que recuerda, en sentido más complejo, la famosa paradoja del Mentiroso) de los enunciados obtenidos, como el de Monod, quebrantando largamente el umbral de realismo de un modelo probabilístico: estos son a la vez teoremas y falsificadores virtuales del modelo. Si son verdaderos (empíricamente), son falsos (teóricamente) [es decir: Si se verifican experimentalmente, o aún simplemente si las condiciones de un control experimental posible se encuentran reunidas, el modelo de donde fueron deducidas es, por lo mismo, refutado]. Si son verdaderos (teóricamente), son incontrolables (empíricamente) [si el modelo puede ser considerado como bueno, es decir, no es desmentido por la experiencia, las condiciones de un control experimental del enunciado no están reunidas]. Es por esto que pueden ser llamados objetivamente vacíos: Más precisamente, éstos solo podrían tener significación objetiva cuando el modelo en el cual han sido deducidos ha sido refutado por la experiencia.

¹¹ Los sentimientos de Monod respecto de Teilhard de Chardin me parecen del tipo “amor decepcionado, transformado en odio”. Althusser ha revelado las numerosas reminiscencias teilhardianas que salpican los textos de Monod, y ha analizado (lamentablemente en el lenguaje y según el punto de vista un poco rígido de una Escuela) las relaciones ambiguas que existen entre estos dos autores. Se encontrará un buen análisis (en un lenguaje normal, y según un punto de vista menos particular) y una bibliografía en Madelaine Barthélemy-Madaule, “L'idéologie du hasard et de la nécessité”, París, 1977. Este autor, filósofo universitario, me parece que vio bastante bien lo esencial: a saber que el ilustre biólogo, cuando empleaba palabras tales como “azar” o “probabilidad”, no sabía simplemente de qué hablaba. Pero no siendo ella misma una probabilística, se creyó autorizada para decir las cosas tan brutalmente. Por otra parte, el “modelo” de Monod ha sido seriamente contestado en el fondo (es decir del punto de vista de la biología) por los mismos biólogos. No me pertenece, debido a mi falta de competencia, tomar posición en este debate, y solo puedo referirlos a la exposición de J. Raffié, en “De la biologie à la culture”, París, 1976, páginas 205 y siguientes. El lector habrá entendido que mi único objetivo en las páginas anteriores, era ilustrar, sobre un ejemplo impresionante, los peligros que comporta la extrapolación al infinito a partir de conceptos o de modelos probabilísticos.

azar de J. Monod es el hermano enemigo del punto Omega del buen Padre: Su enemigo, ciertamente, pero fundamentalmente su hermano; ellos son bien de la misma familia.

CAPITULO II

PORQUE NO ESTAMOS DE ACUERDO CON LOS ETRUSCOS

O

DE LA OBJETIVIDAD DE LOS MODELOS PROBABILISTICOS

“Nos diferenciamos de los Etruscos¹², consumados en la ciencia de la interpretación de los rayos, en lo siguiente: Creemos nosotros que estallan por el choque de dos nubes, y ellos dicen que ocurre choque porque hay explosión. Como todo lo refieren a Dios, están persuadidos de que el rayo no anuncia el porvenir porque se forma, sino que lo forman porque ha de anunciarlo”

Séneca (Cuestiones Naturales, II, 32)

¹² Nota del Traductor: La versión original de Séneca habla de Toscanos (Etruscos) ...

EL PROBLEMA.

En las páginas anteriores, hemos visto como se puede atravesar lo que hemos llamado el umbral de la objetividad de un modelo probabilístico, umbral más allá del cual, la deducción solo proporciona enunciados empíricamente vacíos. Pero ¿existe realmente un tal umbral más allá del cual un modelo probabilístico sea susceptible de presentar alguna significación objetiva? Se sabe que una escuela del pensamiento lo contesta. Los “subjetivistas”¹³, o partidarios de la interpretación puramente subjetiva de “la” probabilidad, dicen que es imposible dar un sentido objetivo a un enunciado probabilístico respecto de un suceso único y singular. Si yo digo, por ejemplo, que “hay una chance sobre dos para que una forma de vida inteligente exista en el planeta Marte”, no se puede ver en este enunciado solamente una opinión personal (puramente subjetiva). Pero, si un contradictor me hace una objeción “pero no, esta probabilidad es 7/10 (o 3/10 etc...)” nadie podrá desempatarlos nunca: sabremos con verosimilitud en un futuro próximo si Marte está o no “habitado”, pero esta constatación experimental no confirmará ni refutará ninguno de nuestros enunciados probabilísticos, los cuales continuarán así insolubles para siempre. El argumento es incontestable. Pero resulta que, necesariamente que “la” probabilidad no puede nunca, en ningún contexto, ¿representar nada más que una opinión “puramente subjetiva”? Los objetivistas replican que ellos no se interesan de ninguna manera en la predicción de un suceso único y singular: se trata en este caso, según ellos, de una pregunta ajena a la ciencia.

Citemos K. R. Popper¹⁴ “toda controversia relativa a la pregunta de saber si hay sucesos que solo se producen una vez y no pueden ser repetidos no puede ser zanjado por la ciencia: se trata de una controversia metafísica”. Lo que les interesa, es solamente el comportamiento estadístico de grandes efectivos, y las leyes perfectamente objetivas que los rigen. Una probabilidad a la escala del individuo emerge, por el juego de la ley de los grandes números, bajo la forma de una frecuencia que podemos alcanzar y medir. Nuestros enunciados probabilísticos son entonces perfectamente objetivos, porque los podemos controlar experimentalmente, con la reserva de poder repetir un número suficiente de veces la misma experiencia. A esto los bayesianos responden: “Son ustedes los que juzgan que se trata de la misma experiencia. Esta es una opinión subjetiva que nosotros no estamos obligados a compartir. De esta opinión que ustedes han adoptado, resulta lógicamente que después de un número n bastante elevado de experiencias, ustedes deben utilizar la frecuencia observada para evaluar la probabilidad (subjetiva) que ustedes atribuyen a la experiencia $(n + 1)$ va, aún no realizada: Pero esto no significa de ninguna manera que esta probabilidad haya adquirido una significación objetiva”. Y el diálogo de sordos podrá continuar por mucho tiempo.

Se percibe bien que el argumento de los subjetivistas es excesivo. Delante de los éxitos indiscutibles, brillantes, obtenidos por los modelos probabilísticos en dominios tan diversos

¹³ Se les llama también “bayesianos” debido al uso intensivo que hacen del teorema de Bayes (bastante clásico): Denominación impropia, porque este teorema, como todo teorema, es de naturaleza puramente formal (matemático) y no prejuzga de la interpretación subjetivista u objetivista que se le puede dar, en las aplicaciones, a las probabilidades que considera.

Los físicos, objetivistas por vocación, también utilizan este teorema (por ejemplo en el análisis de la “retrodicción” - Nota del traductor: También se usa “teleología” - término forjado por analogía con “predicción” para designar la reconstitución del pasado a partir del presente).

¹⁴ La logique de la découverte scientifique, p.43 de la edición francesa.

como la termodinámica, la mecánica cuántica, los seguros, la demografía, etc..., delante de las previsiones precisas a las cuales conducen, y regularmente confirmadas por la experiencia, es simplemente poco razonable negar su valor objetivo. Los físicos, alentados por sus éxitos, están convencidos con justa razón de la objetividad de sus “probabilidades”, y se oponen categóricamente a esta intromisión de los subjetivistas. Pero, en sentido inverso, los argumentos de estos últimos sobre la imposibilidad de dar un sentido objetivo a la probabilidad de un suceso único son aparentemente irrefutables. Se podría, como Salomón, proponer cortar al niño en dos, quiero decir abandonar sin recursos los fenómenos únicos a la arbitrariedad de los subjetivistas, y limitar la objetividad de los métodos probabilísticos al dominio solo de los fenómenos “regulares y repetibles”, semejantes los que estudian los físicos. Pero nuestro objetivo, en estas páginas, es justamente examinar si, y en qué medida, un fenómeno único puede ser objeto de una estimación o de una previsión sobre la base de una información fragmentaria: Como las técnicas de estimación utilizadas en la práctica están, lo más a menudo, fundadas en modelos probabilísticos, no es posible eludir el debate.

ALGUNAS ILUSIONES ANTROPOMORFICAS.

El capítulo precedente hará hecho justicia, espero, de la ilusión substancialista que se le presta al Azar, con mayúscula, yo no sé cual responsabilidad cósmica. Pero las ilusiones de este tipo tienen la vida dura, debido a que nuestra naturaleza está hecha así y nosotros buscamos con avidez explicaciones profundas y definitivas, capaces creemos de aclararnos la naturaleza misteriosa de las cosas. En física, los modelos determinísticos utilizados a la escala macroscópica corresponden, a menudo, a la representación intuitiva de una acción que se transmite de un próximo a un próximo y se traduce, matemáticamente, por una o varias ecuaciones con derivadas parciales. Si se trata de las cuerdas vibrantes, por ejemplo, nos parece claro que el desplazamiento de un pequeño elemento situado en el punto x ejerce una acción sobre el elemento vecino situado en $x + \delta x$, y lo arrastra. Nuestra intuición motriz, tal como ella ha podido formarse en el curso de una evolución que ha requerido millones de años, nos entrega aquí representaciones espontáneas, de naturaleza arquetípicas, que nos hacen creer que nosotros comprendemos lo que pasa realmente. Hay aquí una cierta ilusión antropomórfica (o zoocéntrica), es lo que la microfísica nos ha enseñado a nuestro detrimento, o a nuestra ventaja, porque nosotros hemos asimilado así esta lección esencial: el modelo, nunca, es idéntico a la realidad. Innumerables aspectos de lo real se le escapan siempre, e, inversamente, el modelo contiene innumerables proposiciones parásitas, sin contraparte alguna con la realidad. Si se trata de un modelo único y de un modelo probabilístico, es decir de un espacio (Ω, A, P) puesto en correspondencia con esta realidad única, el mismo tipo de ilusión nos incita a decir que todo se pasa, en suma, como si el suceso que se realizó fue “tirado al azar” según la ley P en el espacio Ω . Pero este es un enunciado falsamente claro, y las representaciones subyacentes que lo alimentan son particularmente inadecuadas. ¿Cuál es el mecanismo de esta “elección al azar” que nosotros invocamos, cuál croupier celeste, cuál jugador del dado cósmico agita aquí los cubiletes de hierro de la necesidad? Este mito, porque lo es (en sentido peyorativo), del “sorteo al azar” es a la vez inútil y gratuito. Gratuito: porque, si se supone que una suerte de demiurgo haya procedido de una vez por todas, en un sorteo al azar único, con la elección de un elemento ω_0 , nosotros no tendríamos ninguna esperanza de reconstituir nunca, ni este espacio Ω , ni esta probabilidad P . Porque, como se trata de un suceso único, las únicas fuentes de información que podríamos disponer estarían

contenidas en el único elemento ω_0 que habría sido elegido así el primer día: Todo el resto, el espacio Ω entero, y el océano infinito de virtualidades que contiene, desapareció, borrado para siempre por este sorteo único. Inútil, es decir sin valor explicativo, por la misma razón de fondo: Porque las propiedades que podemos observar en nuestro universo están contenidas en este único elemento ω_0 , y no dependen más de otra cosa. De manera que podemos olvidar resolutivamente todas las riquezas que estaban latentes en los otros elementos ω , los que no han sido elegidos. Este elemento ω_0 , el nuestro, tenía sin duda una probabilidad nula de ser sorteado, y nuestro universo era en suma casi imposible: sin embargo es el único universo que nos ha sido dado, y el único que podemos estudiar.

EL CRITERIO POPPERIANO DE LA OBJETIVIDAD.

Antes de comenzar la discusión, conviene precisar el sentido de los términos utilizados. No se trata absolutamente aquí de analizar en profundidad las relaciones entre el sujeto y el objeto¹⁵, sino de dar un criterio, el más simple posible, el cual nos permitirá con seguridad si, y en qué medida un enunciado, un modelo, etc... presenta un sentido objetivo, o debe ser considerado como “puramente subjetivo”. Imaginemos el diálogo¹⁶ siguiente, entre dos personas A y B:

A: Es Júpiter que lanza los rayos

B: No, los rayos se producen cuando dos nubes que traen cargas eléctricas de signos opuestos se encuentran.

A: Naturalmente: es el medio que utiliza Júpiter. Cuando el quiere lanzar los rayos, el hace que dos nubes se encuentren.

O bien (versión de apariencia más “moderna”):

A: Los rayos se deben al azar.

B: No, etc...

A: Por supuesto, pero es justamente por azar que se encuentran estas dos nubes.

La discusión puede prolongarse indefinidamente. A cada tentativa de refutación de B, A opone una objeción ad hoc absolutamente imparable. En efecto, es perfectamente imposible probar que no es Júpiter (o el Azar, etc...) el que lanza los rayos. Es justamente, debido a esta imposibilidad que nosotros podemos imaginar una experiencia, o una observación etc... cuyo resultado eventual sería refutar A. Entonces nosotros juzgamos la opinión de A como “puramente subjetiva”, o desprovista de objetividad. De hecho, si esta opinión es compatible con cualquier cosa y con su contrario, en sentido inverso, ella no puede predecir nada: Lo que equivale a decir que no nos aporta ninguna información real.

¹⁵ Sobre la objetividad, concebida como el fruto de una elaboración o de una reconstrucción de lo real por el sujeto (epistémico), ver los trabajos de J. Piaget, y principalmente, *Logique et Connaissance Scientifique*, ya citado.

¹⁶ Ver la cita de Séneca en el epígrafe de este capítulo.

En suma, la objetividad de un enunciado, de una opinión, etc... está ligada a la posibilidad de controlar su exactitud. Según K. R. Popper ¹⁷, “la objetividad de los enunciados científicos reside en el hecho que pueden ser sometidos a tests ínter subjetivos”. Sin embargo, hay lugar para distinguir dos casos bastante diferentes, según que se trate de enunciados singulares o universales.

En el caso “singular” tenemos los enunciados del tipo “constatación de un hecho”. Por ejemplo: “Llueve (aquí, en este momento)”, o “las tropas aliadas han desembarcado el 6 de Junio de 1944 en las playas de Normandía”. Entiendo bien que no existen “datos inmediatos” ni “hechos brutos”, y que cuando nos referimos a esas palabras, siempre resultan de una elaboración y construcción primaria. Pero, en la práctica, (en la vida de todos los días, como también en la práctica cotidiana del trabajo científico) esta observación presenta poco interés. Diremos simplemente que, por hipótesis o por convención (como se quiera), suponemos que un cierto consenso se realiza en lo que respecta el sentido de las palabras y su adecuación a (lo que nosotros llamamos) la realidad. Dos observadores presentes en el mismo momento y en el mismo lugar se pondrán de acuerdo para decir si llueve (o no). Dos historiadores, con acceso a todas las fuentes, admitirán que el desembarco tuvo lugar ese día. Así, en lo que concierne a los enunciados singulares, es decir las “constataciones” (posibles) respecto de un hecho (presente, pasado o futuro), el criterio de objetividad reside en el hecho que una vez reunida toda la información necesaria, se realiza un consenso entre las “personas sensatas” respecto de la verdad o la falsedad del enunciado en cuestión: se trata de enunciados decidibles, es decir enunciados en los cuales sería unívocamente posible decidir si son verdaderos o falsos, siempre que se disponga de las informaciones deseadas. Puede suceder, que un enunciado decidible (como: “Llovió en París el 1 de Julio del año 251 A. C.”) continúe, en efecto, indecيدido, debido a que no tenemos acceso a las fuentes. Esto no le quita en nada objetividad: Esta, igualmente, es independiente de la pregunta de saber si, en definitiva, el enunciado se revelará verdadero o falso. Un enunciado objetivo puede bien ser falso. Basta con que sea posible declararlo falso.

Enseguida vienen los enunciados de tipo universal. Se les encuentra, evidentemente, en las ciencias llamadas positivas (por ejemplo “dos cuerpos se atraen en razón inversa al cuadrado de su distancia”) como, también, en la vida cotidiana (“llueve todos los días en Londres”). Estos se refieren a una clase ilimitada, no necesariamente infinita, pero de extensión indefinida: todos los cuerpos existen, existieron o existirán en el universo etc... Afirman que todos los elementos de esta clase verifican una propiedad controlable (en principio). No pueden ser verificables (constatar que son verdaderos), a menos de poder proceder a un inventario exhaustivo del universo. Pero se les puede falsificar (mostrar que son falsos) al exhibir al exhibir contraejemplos (por ejemplo, testigos pueden asegurarnos que no llovió en Londres el 1 de Julio del año pasado): Su objetividad está ligada a su propiedad de falsificar. En materia científica, tratándose de un enunciado, de un modelo, de una teoría, etc... (considerados como tales cuando se refieren a un sector bien definido del mundo que nosotros llamamos real) diremos que tienen una significación objetiva se, y en la medida que, sea posible someterlos al control de experiencias o de observaciones cuyo resultado sea interpretado sin equívoco (lo que quiere decir que el enunciado de estos resultados deben ser susceptibles de realizar el consenso de los especialistas) . Lo más a menudo, un enunciado

¹⁷ Logique de la decouverte scientifique.

científico es de tipo universal, y no puede por consiguiente ser el objeto de una verificación (lógica) rigurosa, la cual implicaría la realización efectiva de una infinidad de observaciones o de experiencias. Al contrario, siempre debe ser posible deducir de un enunciado científico general, enunciados más particulares (predicción del resultado de experiencias o de observaciones efectuadas en condiciones bien definidas, verificables o falsificables). Si son confirmados, no resulta que el enunciado general sea verificable, sino solamente que es “corroborado” (no refutado). Al contrario, si uno de ellos es invalidado, el enunciado general es por esto falsificado (refutado). Dicho de otra manera, el enunciado general tiene una significación objetiva en la medida en que es falsificable, y posee una validez (relativa y siempre provisoria) en la medida en que ha sido corroborado, es decir ha resistido victoriosamente todas las tentativas de falsificación a las cuales ha sido sometido hasta el presente: y nosotros le proporcionaremos un grado de validez mayor en la medida en que estas tentativas han sido más numerosas y más severas. Tal es el criterio de falsificabilidad que propone K. R. Popper¹⁸ como línea de demarcación entre enunciados “metafísicos” y enunciados “empíricos” u objetivos. Este es el criterio que utilizaremos.

LOS CONCEPTOS OPERATORIOS.

La búsqueda de la objetividad ha conducido desde hace mucho tiempo a los físicos (que pueden servirnos de guía en la materia) a solo aceptar el uso de conceptos operatorios (en el sentido de Bridgman), es decir, según J. Ullmo¹⁹, los conceptos “definidos por el procedimiento regular y repetible que permite alcanzarlos y medirlos”, esto no significa, que su definición debe estar fundada sobre criterios que permitan efectuar medidas; pero, más profundamente, que el concepto está definido o constituido por el sistema mismo de las “relaciones repetibles” que nos permiten centrarnos y por las leyes físicas que resumen este sistema. Así, la resistencia eléctrica se define por la ley de Ohm $V = R I$. En este concepto no hay nada de operatorio, nada más (pero también: Nada menos) que un sistema de operaciones, efectivamente realizables por el físico, las cuales se controlan y se confirman entre sí. Y son justamente los invariantes que ponen en evidencia estos controles y confirmaciones mutuas los que constituyen los conceptos operatorios.

Resulta enseguida que el valor, y también la significación objetiva, de un concepto operatorio son siempre relativos y limitados: relativos a la escala y al sector de la realidad donde las operaciones que lo constituyen tienen un sentido; limitados por la precisión de las medidas que lo definen. Y se trata solamente de decir que nosotros solo podremos tener un conocimiento aproximado de los “verdaderos” valores que existirían, a pesar que no los conocemos. Conceptos perfectamente operatorios a nuestra escala, como la longitud o la velocidad, se atenúan en una suerte de difusión, y pierden poco a poco toda significación objetiva en la medida en que descendemos a las escalas microscópicas²⁰. Es aquí cuando la distinción necesaria entre modelo y realidad toma toda su importancia. Porque, una vez que

¹⁸ Op. Cit.

¹⁹ Los conceptos físicos, en Logique et Connaissance Scientifique.

²⁰ La longitud de una regla es definible, digamos, a la décima de milímetro, pero no con 15 decimales exactos : con mayor razón, la pregunta de saber si esta longitud se expresa en centímetros por un número racional o irracional, no tiene ningún sentido para un físico.

los conceptos operatorios y las leyes físicas que los soportan han sido reunidos en el marco de un modelo matemático, la tentación de olvidar esos límites es grande y, confiando de manera ciega en el formalismo matemático, de sacar deducciones del modelo, las cuales van bien más allá que su dominio de validez objetiva. Hemos visto en el capítulo anterior un ejemplo que sobrepasaba este umbral de objetividad. La existencia de este umbral, y la tentación de atravesarlo, constituyen un peligro permanente, peligro que debemos guardar en nuestro espíritu cuando implementamos modelos probabilísticos.

LA SUBJETIVIDAD.

La noción de subjetividad, debido a que designa las opiniones, creencias, sentimientos de convicción de tal o tal individuo, nos retendrá por menos tiempo. Sobretudo notamos que esta noción no constituye de ninguna manera el contrario lógico de la objetividad. Las personas dichas “razonables” o “sensatas” proporcionan, lo más a menudo, su consentimiento (subjetivo) a un enunciado (objetivo) bien corroborado, tal como: “Cuando una manzana se despega del árbol, cae a tierra y no vuela hacia las estrellas”. En este sentido, evidentemente, un enunciado probabilístico, en la medida en que un cierto individuo le da su adhesión, puede siempre ser dicho subjetivo, pero esto no excluye a priori su objetividad (una ley objetiva como la ley de atracción universal, en la medida en que yo la creo “verdadera” puede, ella también, ser dicha subjetiva, porque representa, en efecto, también mi opinión personal). Los subjetivistas juegan a veces con las palabras, lo que no es evidentemente que ellos las entienden. Cuando ellos dicen que “la probabilidad” es subjetiva, esto quiere decir “puramente subjetiva” en el sentido en que está desprovista de cualquier significación objetiva: Sin que esto implique una connotación arbitraria o de fantasía (irracional). Ellos se refieren más bien al hecho (innegable) que dos individuos diferentes, localizados en la misma situación y teniendo la misma información, pueden bien comportarse de manera diferente, sin que sus comportamientos sean irracionales. Simplemente sus gustos, sus aspiraciones etc... difieren, y también sus apreciaciones personales de la situación (apreciaciones que, según los bayesianos, pueden siempre ser explicitadas en la forma de evaluación de la probabilidad (subjetiva) atribuida a las diferentes eventualidades).

NO HAY PROBABILIDAD EN SI, SOLAMENTE MODELOS PROBABILISTICOS.

Abordemos ahora nuestro problema. Recusemos en primer lugar las afirmaciones definitivas respecto de la objetividad o la subjetividad en sí de “la” probabilidad. El singular y el artículo definido son, propiamente, aberrantes. En una σ -álgebra (no trivial ²¹), se puede siempre construir una infinidad de probabilidades. Y, en las aplicaciones, existen maneras diferentes (todas razonables) de probabilizar un fenómeno dado, según el punto de vista adoptado, el objetivo que se persigue, etc... Finalmente, la noción de probabilidad es de naturaleza matemática, y no empírica, y, entonces la noción de objetividad como es aceptada en las ciencias positivas²² no es relevante respecto de ella. Se dirá, evidentemente, que lo que no

²¹ Es decir que contiene al menos un elemento distinto del elemento imposible (vacío) y del suceso seguro (total).

²² Nadie, parece, habla de espacio vectorial subjetivo (o objetivo).

está en causa aquí no es la teoría de probabilidades como tal, sino su aplicación a la realidad. Lamentablemente, nadie ha aplicado nunca, y no aplicará nunca a la realidad ni la teoría de las probabilidades, ni otra teoría matemática. A la realidad, solo se pueden “aplicar” operaciones reales (físicas, técnicas, etc...), y no operaciones matemáticas. Estas últimas se aplican a modelos matemáticos de la misma naturaleza que ellas. Dicho de otra manera siempre, y solamente, se aplica la teoría de las probabilidades a modelos probabilísticos. Y la pregunta que aparece es examinar si estos modelos probabilísticos pueden, o no, tener una significación objetiva. Yo no contesto que sea posible²³ y aún útil, para un individuo, poner orden en sus ideas u opiniones representándolas en la forma de modelos probabilísticos. Pero ¿esto implica que los modelos u otros que podemos formar por otras vías están necesariamente desprovistos de objetividad?

Para resumir: No hay probabilidad en sí. Hay solamente modelos probabilísticos. La única pregunta que aparece en realidad, en cada caso particular, es la de saber si tal modelo probabilístico, en relación a tal fenómeno real, presenta o no un sentido objetivo. Como hemos visto, esto equivale a preguntarse si el modelo es falsificable. La práctica muestra que la respuesta a esta pregunta puede ser positiva. Hay, en efecto, casos en que todo el mundo, a la luz de los resultados experimentales, convendrá en abandonar el modelo probabilístico que había sido propuesto al inicio. ¿Pero qué es un modelo probabilístico?

LOS MODELOS PROBABILISTICOS.

De una manera general, un “modelo probabilístico” es un “espacio de probabilidad” (Ω , \mathbf{A} , \mathbf{P}) más una convención la cual permite establecer una correspondencia entre los elementos de este espacio y un cierto sector de la realidad. Los elementos ω de Ω son los estados (considerados como) posibles para el o los fenómenos que nosotros queremos describir. Los elementos A de la σ -álgebra \mathbf{A} (llamados tradicionalmente “sucesos”, pero en el sentido de sucesos posibles, no necesariamente realizados) representan los enunciados (considerados como) decidibles, es decir las constataciones (virtuales) susceptibles de aparecer como el resultado eventual de observaciones o experiencias que nosotros podemos (podremos o podríamos) efectuar a propósito de este fenómeno. La probabilidad \mathbf{P} , finalmente, es una función definida en \mathbf{A} (la cual atribuye a cada elemento A de \mathbf{A} un número $P(A)$ llamado probabilidad (numérica) de A , que nosotros podemos, en el inicio, elegir a nuestra manera, solamente con la condición de respetar los axiomas. A menudo, en la práctica, se presentan dos casos: Unas veces, elegiremos, al entrar al juego, una probabilidad \mathbf{P} , única, bien definida, y diremos que el modelo está (enteramente) especificado; otras veces, al contrario, nos reservaremos un cierto margen de maniobra, al elegir solamente una familia $\mathbf{P}(\lambda, \mu)$ de probabilidades las cuales dependen de un número pequeño de parámetros λ, μ, \dots . En este último caso, diremos que solamente hemos elegido el tipo de modelo, dejar para más tarde el problema de su especificación, es decir de la elección de los valores numéricos que conviene atribuir a los parámetros λ, μ, \dots . En la óptica de los estadísticos “ortodoxos”, la elección del

²³ La técnica de apuesta utilizada por los subjetivistas para sus evaluaciones de probabilidades me parece utilizable en la práctica solamente cuando un número pequeño de variables aleatorias (no independientes) intervienen simultáneamente: Su procedimiento sería difícil de implementar en el caso de las funciones aleatorias, donde interviene (teóricamente) una infinidad de variables (a menudo, en la práctica, varios millares).

tipo de modelo constituye una “hipótesis”, mientras que el problema de la especificación (de los valores numéricos de los parámetros) lleva el nombre de “inferencia estadística” o “de estimación” de estos parámetros. Debido a que esta terminología tiene supuestos implícitos²⁴ (respecto de la existencia real, objetiva, de estos parámetros), nosotros utilizaremos el término neutro y puramente descriptivo de elección (del tipo de modelo, de los parámetros, etc...: Y de hecho, en cualquier estado de causa, somos nosotros los que los elegimos).

EL MODELO DE LA ALTERNATIVA REPETIDA.

Tomemos el ejemplo clásico del tipo de modelo llamado “alternativa repetida”. Este modelo se usa para describir una sucesión (potencialmente) infinita de experiencias²⁵, en las cuales cada una solo puede conducir a dos resultados (llamados, convencionalmente “éxito” o “fracaso”): El ejemplo tradicional es el juego de cara o cruz. Pero se puede tratar de otra cosa, por ejemplo de la sucesión a lo largo del tiempo, de los días de lluvia y de buen tiempo. El espacio Ω está constituido por todas las sucesiones $\omega = (x_1, x_2, \dots)$ en que cada x_n puede ser 1 o 0, según que la prueba número n es (o fue o será) un éxito o un fracaso. El valor numérico de x_n es evidentemente determinado una vez que se conoce el resultado completo de la secuencia de pruebas es decir $\omega = (x_1, x_2, \dots)$. Existe entonces una función X_n sobre Ω , tal que se tiene, justamente, $x_n = X_n(\omega)$: X_n es la variable aleatoria asociada, en el modelo, al resultado de la prueba n . El conjunto \mathbf{A} de las constataciones posibles comprende, evidentemente, los resultados eventuales de cada uno de los ensayos, es decir los sucesos $\{X_n = 0\}$ y $\{X_n = 1\}$, para todos los valores de n , como también todos los sucesos que se pueden deducir de los anteriores por un número finito o numerable de operaciones lógicas. Por ejemplo, el suceso $\{X_1 = X_2 = \dots = 1\}$, o $\{\omega = (1, 1, \dots)\}$, es decir una infinidad de sucesos consecutivos, es la conjunción (o producto) de los sucesos $\{X_n = 1\}$ para $n = 1, 2, \dots$

En este tipo de modelo (la alternativa repetida) las variables X_n son, por definición²⁶, variables aleatorias independientes, y, por definición, igualmente, los valores numéricos de las probabilidades de éxito de las diferentes pruebas, son iguales, es decir:

$$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \dots = P(X_n = 1) = \dots = p$$

Este valor común p constituye el único parámetro del cual depende este tipo de modelo. Si elegimos de antemano el valor numérico de p , digamos $p = 1/2$ (lo que haríamos con verosimilitud en el caso de un juego de cara o cruz), el modelo (matemático) está enteramente especificado. Pero no estamos obligados de hacerlo, y podemos esperar la recepción de la

²⁴ Sobre este punto, yo apruebo en gran parte la crítica severa que hacen los “subjetivistas” de esta terminología. Ver por ejemplo B. de Finetti, Theory of probability, J. Wiley, 1974, passim (pero yo no saco las mismas conclusiones).

²⁵ Yo no digo de ninguna manera que se trata de la “misma experiencia”, lo que (los subjetivistas tienen razón en esto) no tendría, hablando estrictamente, ninguna significación objetiva.

²⁶ Se trata de la definición del modelo matemático, en absoluto de una afirmación relativa al mundo físico. Los subjetivistas (ver por ejemplo B. de Finetti, op. Cit) tienen razón al recalcar que cualquier aserción relativa a la independencia de los resultados del primer y segundo experimento (de esta partida, jugada tal día, con esta moneda, , por los señores Durand y Dubois) está desprovista de significación objetiva.

recolección de una cierta cantidad de informaciones experimentales antes de terminar la especificación de nuestro modelo. También puede ocurrir (como veremos en otro capítulo) que no necesitemos, realmente, proceder a esta última elección. Lo esencial, del punto de vista metodológico, es distinguir cuidadosamente los dos papeles muy diferentes que atribuimos a este mismo símbolo p . De un lado, p es un parámetro del modelo. Luego, es susceptible, como el modelo mismo, de presentar (o no) una significación objetiva y, la aserción “ $p = 1 / 2$ ” puede ser (o no) falsificable (es decir objetiva o empírica). Por otro lado, el mismo símbolo figura en la igualdad $P(X_{10} = 1) = p$. En este caso, se afirma que la probabilidad de éxito en la tirada 10 (de este juego) tiene un valor numérico determinado, por ejemplo $p = 1 / 2$: enunciado singular e indecible, luego ciertamente desprovisto de significación objetiva como todo enunciado relativo a la probabilidad de un suceso único²⁷.

A LA BUSQUEDA DE UN CRITERIO DE OBJETIVIDAD.

Queda ahora ponerse de acuerdo²⁸ acerca de un criterio de objetividad. Este criterio está sugerido fuertemente a la vez por la intuición y por la terminología. Los probabilísticos (aún en estudios puramente matemáticos) llaman, en efecto, “casi imposibles” los sucesos de probabilidad nula, y “casi ciertos” los sucesos de probabilidad igual a 1. La palabra “casi” indica que no se trata de una imposibilidad o de una necesidad lógica. Por ejemplo, en la alternativa repetido, el suceso $\{X_n = 1 \text{ para todo } n\}$ es decir, la secuencia infinita de éxitos sin ningún fracaso, es lógicamente posible, pero de probabilidad nula (siempre que p sea estrictamente inferior a 1), luego, “casi imposible” pero no posible. De hecho, si observamos una sucesión infinita (en la práctica, digamos, de algunos millares) de éxitos consecutivos, elegiríamos un modelo determinístico del tipo “se gana siempre a este juego”: modelo totalmente objetivo (porque es falsificable), el cual abandonaríamos eventualmente más adelante, si observáramos algunos fracasos, pero es ciertamente preferible, en el estado actual de nuestra información, a cualquier modelo probabilístico (debido a que es más simple). El criterio definitorio (en sentido estricto) acerca de la objetividad de los modelos probabilísticos sería luego este: Convendremos en declarar el modelo como falsificable si un suceso de probabilidad nula (en el modelo) se produce de hecho (en la realidad). En este punto crucial de la exposición, se imponen varias observaciones:

- a) La primera observación respecta lo que (según Cournot) se llama habitualmente la “ley del azar”, ley según la cual los sucesos de probabilidad nula (o muy débil) no se producen nunca. A. Lichnerowicz²⁹ lo enuncia así: “Los sucesos cuya probabilidad es bastante débil, son experimentalmente imposibles” y comenta en estos términos: “... Esta ley es aún bastante misteriosa, y en el fondo solo se justifica por la coincidencia corriente de las consecuencias teóricas del cálculo de probabilidades con los hechos interpretados experimentalmente, sin que sea posible aún de perforar enteramente el secreto de esta coincidencia”. Es sin malicia que yo levanto esta ingenuidad que se le escapa a un gran matemático (quien, no es, por otra parte, un práctico del cálculo de

²⁷ Aquí todavía estoy de acuerdo con los “subjetivistas”.

²⁸ Yo utilizo esta expresión intencionalmente, porque todo criterio de objetividad reposa, en definitiva, sobre un consenso.

²⁹ Remarques sur les Mathématiques et la réalité, en Logique et Connaissances scientifiques, p.82.

las probabilidades), sino más bien para mostrar con qué facilidad los mejores espíritus científicos³⁰ se equivocan cuando se habla de azar y de probabilidades. Esta ley no tiene nada de misterioso, en efecto, por la simple razón de que no es una ley, sino un criterio convencional, el único por otra parte, que nos permite falsificar (o rechazar) un modelo probabilístico.

- b) Una dificultad (teórica) proviene del hecho que existe, en general (en el modelo) una infinidad no numerable de sucesos casi imposibles. En los casos de la alternativa repetida, no es solamente la secuencia infinita de éxitos (1, 1, ...) sino también cada una de las sucesiones particulares (x_1, x_2, \dots) que recibe una probabilidad nula: Cualquiera que sea el resultado de una sucesión infinita de experiencias, esta es casi imposible. Sin embargo, uno de estos resultados casi imposibles debe necesariamente realizarse³¹.

Esto significa que se debe siempre elegir antes (antes de conocer los datos, o, en todo caso, sin dejar “influenciarse” por estos) el suceso (o los sucesos en número finito, o a lo más numerable) de probabilidad nula o muy débil destinado a servir de “test”. Hay aquí, sin duda, algo de arbitrario, incómodo desde el punto de vista teórico. Pero el consenso se establece sin demasiadas dificultades en las aplicaciones prácticas.

- c) Otra dificultad es la siguiente: Lo más a menudo, los sucesos casi imposibles del modelo dan cuenta de casos límites, y no corresponden a constataciones experimentales realmente posibles (no se puede efectuar en la realidad una infinidad de tiradas). En la práctica los estadísticos elegirán entonces como test un suceso de probabilidad ε pequeña, pero no nula. ¿Cuánto hay que tomar $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-6}, 10^{-9}$, etc...? Aquí hay un peligro real de arbitrariedad. Volveremos sobre este punto.
- d) Como nuestro criterio es convencional, los subjetivistas estarán libres de refutarlo, lo cual harán, sin duda, con la lógica de hierro que siempre los ha caracterizado. Aquí, sin embargo, su lógica de hierro pelagra de entrar en contradicción con la práctica científica normal, y con el simple buen sentido. Espero no deformar demasiado su pensamiento al atribuir a ellos el argumento siguiente: En primer lugar, ellos no utilizan nunca un modelo enteramente especificado ($p = 1/2$ por ejemplo) porque nadie está absolutamente asegurado que la moneda no esté trucada. Ellos utilizarán entonces el modelo no especificado, pero agregando esta restricción importante, la cual modifica la naturaleza probabilística: p para ellos, no será un parámetro de valor desconocido con valor fijo, sino una primera variable aleatoria a la cual ellos atribuyen una ley de probabilidad (subjetiva), la cual considera la información que ellos disponen antes de comenzar la partida, pero que en definitiva expresa su propia opinión. Por ejemplo, ellos elegirán para p una ley uniforme en el intervalo $(0, 1)$ (o cualquier otra ley). Es, entonces, solamente con p fijo que las variables X_n son independientes. Pero p no es fijo, y las X_n no son independientes en su modelo. Supongamos ahora que después de una partida muy larga, digamos $n = 10^6$ tiradas, se

³⁰ Ver el ejemplo de J. Monod en el capítulo anterior.

³¹ La unión de estos sucesos de probabilidad nula tiene entonces una probabilidad igual a 1, lo cual no está prohibido por los axiomas, porque se trata de una familia no numerable. Se ve así que la restricción del axioma de aditividad a las familias *numerables* de sucesos disjuntos constituye una limitación esencial.

haya obtenido un millón de éxitos consecutivos. Al considerar esta información nueva, ellos reemplazan la ley inicial (“a priori”) que ellos atribuían a p antes de la experiencia por la ley condicional que toma esta variable cuando se ha observado un millón de sucesos. En nuestro ejemplo, esta ley admite la densidad $(n + 1) p^n$ y la esperanza $E(p) = (n + 1) / (n + 2) = 0.999999$ (pero no 1). Esto quiere decir que, si se va a apostar sobre la tirada $(n + 1)$, ellos se comportarán como se existiera una chance sobre un millón de ser un fracaso.

Del punto de vista práctico, esto es más o menos equivalente a la certitud del suceso, pero subsiste una diferencia teóricamente irreducible. No se puede refutar su modelo, que es, por construcción, compatible con todos los resultados experimentalmente posibles: Lo que es lógico, porque, justamente, ellos niegan a este modelo, cualquier significación objetiva. Sin embargo, en este caso, como lo hemos observado, la actitud científica más recomendable consistiría en admitir (provisoriamente) el modelo determinístico: “Se gana siempre en este juego”, y a buscar porqué (la moneda no comportaría, por ejemplo, dos lados “cara”, asumiendo que pila representa éxito etc...). Lo que descalifica aquí la interpretación subjetivista, no es su falta de lógica, sino simplemente su falta de interés³².

RECONSTRUCCION OPERATORIA DE LOS CONCEPTOS PROBABILISTICOS.

Hemos visto que es el carácter operatorio de un concepto el que funda, en definitiva, su objetividad. Esto significa que un concepto (matemáticamente bien definido) que interviene en un modelo (determinístico o probabilístico) no podrá ser declarado como “objetivo” antes de haberlo redefinido enteramente, o, mejor, reconstruido en términos estrictamente operatorios: metamorfosis radical, o cambio profundo de su personalidad, si se puede decir, que, de su estado inicial de simple concepto matemático lo hace acceder al status de concepto físico. Luego del examen crítico de un modelo probabilístico dado, será muy importante poner las cosas en orden: Yo quiero decir, distinguir cuidadosamente los conceptos susceptibles de ser operatorios, y los otros. Los primeros solos, como también los enunciados, los parámetros, etc... que les son asociados podrán ser llamados objetivos. Los otros (conceptos, enunciados, parámetros) quedarán como puramente convencionales. Estos tendrán un sentido (matemático) bien definido en el modelo, pero sin que les corresponda una contraparte unívocamente constatable en el fenómeno real. Esto no nos prohibirá de ninguna manera de utilizarlos, sino más bien darles un rol heurístico : para sugerirnos métodos y algoritmos, y no para justificar nuestras conclusiones. Más precisamente, las conclusiones que ellos nos habrán sugerido deberán ser pasados por el tamiz de la crítica, reformulados en términos operatorios y sometidos a tests objetivos antes de ser (provisoriamente) adoptados... La regla, aquí, consistirá en asegurarse que toda traza de estos conceptos o parámetros convencionales ha desaparecido del último resultado.

³² Llevada a su fin, esta lógica conduce a atribuir una probabilidad subjetiva a cada uno de los enunciados singulares deducidos de las leyes físicas. Por ejemplo, se evaluará a 1 sobre mil (o un millón, ¡o un millar!, o como se quiera) la probabilidad (subjetiva) para que estos dos cuerpos aquí, mañana a tal hora, no se atraigan en razón inversa del cuadrado de su distancia: Se puede hacer, pero esto no es muy interesante. Mi tesis es simplemente que ciertos modelos probabilísticos (no necesariamente todos) y ciertos de los conceptos que ponen en juego (no todos) poseen una objetividad del mismo tipo que lo que el consenso general atribuye a los conceptos y a las leyes de la física.

Es bien así como proceden los físicos, en el caso de la alternativa repetida, para construir el concepto (matemático) de probabilidad p y transformarlo en un concepto físico muy diferente, el de frecuencia teórica. Su enfoque puede ser descrito así: a cualquier sucesión (finita) de n pruebas que proporcionen los resultados (x_1, x_2, \dots, x_n) le asociamos el número medio de éxitos que contiene, es decir el número:

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Llamado frecuencia empírica. Esta frecuencia f_n es evidentemente una función de la sucesión completa $\omega = (x_1, x_2, \dots)$, luego una variable aleatoria del modelo, admitiendo (en el modelo) una ley de probabilidad bien definida. Podemos entonces considerar la sucesión infinita (f_1, f_2, \dots) constituida por frecuencias empíricas sucesivas. Esta sucesión puede ser convergente o no, converger hacia p o hacia otro valor numérico. El conjunto de los ω para los cuales la secuencia f_n converge hacia p constituye un suceso del modelo (es decir pertenece a la σ -álgebra A), a saber el suceso $\{f_n \text{ converge hacia } p\}$, o $\{f_n \rightarrow p\}$.

Se demuestra (matemáticamente) que este suceso tiene (en el modelo) una probabilidad igual a 1:

$$P(f_n \rightarrow p) = 1$$

Este teorema, conocido con el nombre de "ley fuerte de los grandes números", nos enseña que hay (en el modelo) una probabilidad igual a 1 para que la sucesión de frecuencias empíricas converja hacia el parámetro p .

Este suceso $\{f_n \rightarrow p\}$ es casi cierto (en el modelo), tenemos entonces el derecho de elegirlo como criterio de falsificación. Dicho de otra manera, decidimos en principio rechazar el modelo si la secuencia numérica de las frecuencias observadas en la experiencia real no converge. En la práctica, evidentemente, solo podremos efectuar un número finito N (tan grande como queramos, pero será bien necesario parar) de experiencias. Sin embargo, para un físico este resultado experimental será ya aclaratorio.

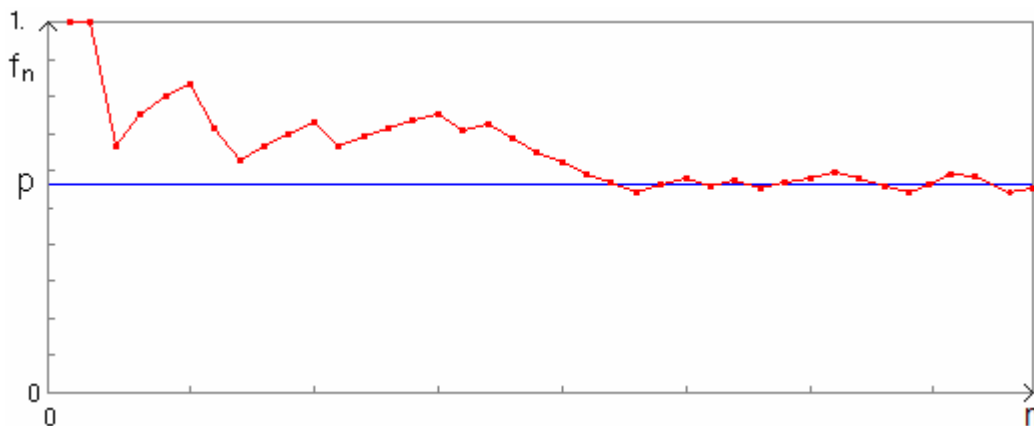


Figura 1: Convergencia de las frecuencias observadas ³³.

³³ Esta figura no es la original, la cual es errónea.

Si el físico constata que la amplitud de las oscilaciones, al comienzo muy fuertes, se atenúa de manera más o menos regular, de manera que, siendo n creciente, la curva parece que se estabiliza bien respecto de una asíntota horizontal de ordenada p , entonces adoptará provisoriamente la hipótesis “ f_n converge hacia p ” y procederá a realizar diversos controles: Seguir la experiencia más allá de N ; extraer y estudiar separadamente subsucesiones (por ejemplo la sucesión de los impares (f_3, f_5, \dots) y la sucesión par (f_2, f_4, \dots); recomenzar con otras series³⁴ de experiencias etc... Estos diversos controles y confirmaciones mutuas, se conceden para poner en evidencia la existencia del mismo límite asintótico p , concediendo por esto a este el status de concepto operatorio: El concepto matemático está ahora reemplazado por el concepto físico así construido, al cual se le puede dar el nombre de frecuencia teórica. A este concepto, le asociamos el valor numérico del límite asintótico así desarrollado por el procedimiento mismo que nos ha servido para construir el concepto, y nosotros designamos todavía por p el resultado de esta medida. En efecto, p solo se conoce con una cierta aproximación. Pero esta es la maldición de todos los conceptos y de todas las medidas físicas. Por otra parte, podemos, en principio, mejorar esta aproximación, si lo deseamos, procediendo a nuevas experiencias. Además, la rapidez con la cual la secuencia f_n converge hacia p (en el modelo) es el objeto de teoremas precisos, cuyos enunciados pueden, ser reconstruidos en términos operatorios y ayudarnos a apreciar el orden de magnitud de la aproximación obtenida.

Otros conceptos pueden también beneficiarse de esta metamorfosis: la estacionaridad por ejemplo. No podemos “verificar” que $P(X_n = 1)$ es independiente de n , porque este es un enunciado que pone en juego probabilidades de sucesos individuales. Pero, si hemos efectuado $N = 10000$ ensayos, por ejemplo, podemos cortar esta secuencia en 100 rebanadas de 100 ensayos consecutivos, examinar si cada una de estas 100 frecuencias correspondientes es, o no, vecina de p , comparar la distribución empírica de estas 100 frecuencias con aquella que deja prever el modelo, hacer tests estadísticos precisos (sugeridos por el modelo) etc... De nuevo, todo este conjunto de controles y de recortes da nacimiento a un concepto operatorio, el de la estacionaridad física.

También para la independencia. Nunca podremos “verificar” que X_3 y X_4 son independientes (debido a que no es un enunciado objetivo). Pero, de la misma manera que hemos construido el concepto operatorio de frecuencia (de una sucesión), podemos construir el de la frecuencia de dos éxitos consecutivos, o de un éxito seguido de un fracaso etc... Podemos así poner en evidencia una ley física, según la cual la frecuencia de dos sucesos consecutivos es igual al producto de las frecuencias de cada uno, ley física que, en turnos, sirve como definición operatoria del concepto físico de independencia de orden 2. Se puede, análogamente, dar un sentido físico a la independencia de orden 3 o 4 (pero, como hemos visto, no se podrá ir muy lejos, y la independencia de orden 200, por ejemplo, quedará inaccesible).

En este caso (ideal), hemos logrado, a partir del modelo matemático inicial, reconstruir un modelo físico enteramente objetivo. La transposición no es y no puede ser total. Nada nos garantiza nunca (suponiendo que esto tiene sentido) que los ensayos 13 y 14 eran

³⁴ Esto supone, en principio, una ampliación del modelo inicial, el cual debe contener ahora variables con 2 índices $X_{n,m}$ (la cual representa el resultado n de la experiencia m) pero este punto no presenta dificultades.

independientes y tenían la misma probabilidad que los otros. En el juego de cara o cruz , podría darse que para estos dos ensayos, justamente, con la exclusión de todos los otros, se haya sustituido la moneda inicial por una moneda trucada: El análisis estadístico no nos permitirá nunca darnos cuenta. Pero lo esencial, yo quiero decir el contenido objetivo de nuestro modelo, ha sido protegido.

LA HIPOTESIS ANTICIPATIVA Y EL RIESGO DE ERROR RADICAL.

En este ejemplo nos dimos la parte bonita, suponiendo que podíamos, en principio, realizar las experiencias que nosotros queríamos. Es bien así que proceden (o al menos razonan así) los físicos, nuestros maestros en la materia. Pero en la práctica, las cosas pasan a menudo de manera bien diferente. A menudo estamos obligados de tomar inmediatamente una decisión sobre la base de una información limitada, de la cual no tenemos el tiempo o los medios para completarla. Por ejemplo, supongamos que se tienen, en el ejemplo anterior, 20 experiencias las cuales han dado los resultados (S) siguientes:

(S): 11001001000011111101

Se nos pide, sobre la base de estos 20 datos, hacer una previsión respecto de la frecuencia media de aparición de la cifra 1 en los 10000 ensayos que vienen, y en caso de ser posible, proporcionar el orden de magnitud del error posible.

El estadístico “ortodoxo” avanzará la “hipótesis”³⁵ que “se trata” de una alternativa repetida con un parámetro p desconocido (en este caso estimará p por medio de la frecuencia $f = 11/20 = 0.55$) o bien (si existen por otra parte indicaciones en este sentido) con $p = 1/2$ por ejemplo. Luego procederá con los “tests” que darán, por otra parte, resultados positivos, o mejor, no darán resultados negativos, respecto de la independencia (de orden 2), el valor $p = 1/2$, etc... Si él ha elegido el modelo especificado $p = 1/2$, anunciará entonces, para los 10000 ensayos a venir, un número de éxitos de 5000 ± 100 con una probabilidad de error del 5% (correspondiente a 2 desviaciones estándar): El subjetivista, por otra parte, llegará a una previsión sensiblemente equivalente, pero enunciada en un lenguaje diferente.

Naturalmente, esta previsión puede revelarse radicalmente falsa. Puede llegar, por ejemplo, que el fenómeno cambia de naturaleza por una razón que no podemos prever, Solo hay 0 a partir del ensayo 1000. El estadístico ha tomado un riesgo (inevitable). Pero si hay riesgo, es decir que su previsión puede ser desmentida, esto significa que esta previsión era falsificable, luego tenía un sentido objetivo. El estadístico había entonces realmente avanzado una hipótesis objetiva (falsificable): No es exactamente la que él había enunciado, relacionada solamente con el modelo matemático, sino, implícitamente, una hipótesis anticipativa relativa a la validez del modelo físico, cuya construcción operatoria hemos explicado aquí. Se trata bien de una hipótesis objetiva (porque se puede revelar falsa después de la tirada), y anticipativa (porque los tests más rigurosos efectuados sobre los 20 datos, suponiendo que

³⁵ En nuestro lenguaje, no se trata aquí de una hipótesis, sino de una elección de un tipo de modelo y, en caso contrario, de su especificación $p = 1 / 2$. Pero esta elección implica bien, como lo veremos, una hipótesis objetiva (falsificable).

corroboran la validez del modelo para estos 20 datos, no nos garantiza de ninguna manera que el fenómeno no cambiará de naturaleza más adelante). Debido a que ella es objetiva (introduce una información suplementaria, no contenida en los 20 datos), esta hipótesis nos permite sacar de estos datos más que lo que contienen, y de avanzar una previsión. Debido a que es anticipativa (adaptada antes de que su validez haya sido controlada) introduce un riesgo de error radical³⁶ : Y este riesgo es la contraparte obligada de la ganancia de información que ella introduce. Más adelante volveremos largamente sobre este punto.

Otras eventualidades inesperadas pueden manifestarse. Supongamos que tenemos la idea (extraña) de poner una coma después de las dos primeras cifras 1, y leer la sucesión (S) como la escritura binaria de un número $x < 4$: Al poner x en escritura decimal, encontramos, porque hay 20 símbolos binarios, que x está comprendido entre 3.141590 y 3.141594. Debemos concluir que (por una razón desconocida) se tiene bien $x = \pi$, y avanzar como una previsión “determinística” que los 10000 ensayos por venir corresponden a los símbolos de la escritura binaria del número π , y avanzar como una previsión “determinística” que los 10000 ensayos por venir corresponden a los símbolos siguientes de la escritura binaria del número π . Esta es una hipótesis anticipativa mucho más fuerte que la anterior (más fácilmente falsificable) pero de la misma naturaleza y, cosa curiosa, de ninguna manera incompatible³⁷.

MODELOS PANSCOPICOS Y MONOSCOPICOS.

Esta idea de una hipótesis anticipativa la cual estamos obligados de adelantar, y la del riesgo de error radical, nos hace penetrar en el corazón del debate que opone a “objetivistas y subjetivistas”. Detrás de las peleas de palabras, las pasiones sectarias³⁸ y las terminologías más o menos inadecuadas, se adivina una oposición más fundamental: aquella, en grueso, que separa el ideal del “conocimiento científico”, y las necesidades de la “vida real” o de la práctica. El científico busca la construcción de modelos tan ricos, tan comprensivos y también bien corroborados posibles. El admite que se tiene (al menos en principio) a la vez la posibilidad y el tiempo libre para reunir toda la información necesaria, de proceder a todos los controles deseables antes de sostener un juicio sobre la validez objetiva de cada una de sus hipótesis. El práctico, afronta situaciones de urgencia. En el fuego de la acción, en efecto, solo se dispone lo más a menudo de una información fragmentaria, de calidad a veces dudosa, sobre la cual debe, imperativamente, tomar una decisión importante. Esto es igual en el dominio de la vida social, económica o política, como también en la vida profesional o

³⁶ Cuya amplitud es de otro orden de magnitud que el “nivel de error de 5%” de ± 100 que predice el modelo. Es la razón porqué yo hablo de error radical.

³⁷ En el sentido que los tests usuales, aplicados a la sucesión de los n primeros símbolos binarios de π , no conducirían con verosimilitud al rechazo del modelo “alternativa repetida”. El suceso mismo “ $(x_1, x_2, \dots, x_n) = n$ primeros símbolos binarios de π ” tiene, en el modelo, la probabilidad $1/2^n$, muy débil ya para $n = 20$ (un millonésimo), pero no puede, en principio, servir de criterio porque su elección ha sido sugerida por los datos. De hecho, cada sucesión de 20 símbolos puede ser considerada como el comienzo de la escritura de un número más o menos notable (múltiplos enteros y potencias de π etc....: basta con encontrar un millón).

³⁸ Se encuentra, en el caso de algunos subjetivistas, proclamaciones estrepitosas, respecto, por ejemplo, del siglo 21, que será, parece, un siglo “valles año”. Aún un autor que se expresa de manera muy sensata y cortés, como B. de Fínete, deja caer a veces usases definitivos. “Speaking of unknown probabilities must be forbidden as meaningless”, texto que leemos en su “Theory of Probability” (J. Wiley and Sons, 1974, p. 190). ¿Porqué este ruido de botas en la república de los sabios?

privada de cada uno de nosotros. Con el costo de una exageración, se opondrá el carácter objetivo y desinteresado del conocimiento científico a la subjetividad y a la rapacidad salvajes que se desencadenan en el dominio de la acción práctica; o, al contrario, se exaltará la vida del hombre de acción, en detrimento del investigador, acusado de huir de la vida real y de sus responsabilidades. Se puede también, quizás más razonablemente, pensar que se trata de una oposición de grado más que de natura. Porque la información que dispone el científico nunca es perfecta, y el también por consecuencia, debe avanzar bajo su responsabilidad, hipótesis cuya validez, por muy bien corroborada que esté hoy, puede ser en cada instante ser puesta en causa por el resultado inesperado de una experiencia nueva. Y, de su lado, el práctico no está nunca despojado para que las hipótesis anticipativas (explícitas o implícitas) sobre las cuales el funda sus decisiones estén totalmente desprovistas de valor objetivo: sino, el juego sin piedad de la selección natural lo haría desaparecer rápidamente de la escena de la acción práctica.

No existe una oposición real, entre los objetivos que se proponen, y los criterios que se utilizan en estos dos tipos de actividades. En lo que respecta a los objetivos, primero, se puede observar que nuestras ciencias y nuestras técnicas parecen vacilar, u oscilar, entre un modo especulativo o explicativo, y un modo instrumental o de manipulación. El primero, realista y “desinteresado”³⁹, pretende aspirar al conocimiento mismo, comprender o explicar el objeto tal como si existiera independiente de nosotros y de las aplicaciones prácticas que podríamos hacer: No es que desprecie las aplicaciones, sino que estas deberían ser, de alguna manera, “como un bono”, y el solo se interesará en la medida que estos vengan a ilustrar y corroborar sus modelos explicativos. El segundo modo, por el contrario, quiere transformar el mundo, más que explicarlo, manipular y domesticar el objeto, sin interesarse a lo que es en realidad. Es nominalista: El modelo no es la realidad, y muy instrumentalista: El mejor modelo es el más eficaz. Esta oposición no es por otra parte irreducible: La manipulación solo es eficaz en la medida que el modelo utilizado es, de una u otra manera, adaptado a la realidad, o al aspecto de la realidad, en el cual nosotros estamos interesados; y las teorías las más desinteresadas son científicas en la medida en que sean operatorias: es, en definitiva la eficiencia de las previsiones la que permite que se juzgue el grado de su validez. Pero, si tomamos en consideración el número, la amplitud y la generalidad de los objetivos perseguidos, podemos decir, en grueso, que los modelos o teorías científicas pretenden ser panoscópicas⁴⁰ mientras que los modelos prácticos, o técnicos, se contentan mas modestamente, de ser poliscópicas, o aún estrictamente monoscópicas.

En efecto, un modelo, o una teoría científica, para ser válida, debe, por definición, permitir prever correctamente el resultado de toda experiencia, de toda observación, que nuestros medios técnicos y nuestros conocimientos actuales nos permiten imaginar y realizar efectivamente (al menos en el dominio en el cual la teoría es operatoria).. Y ella debe entonces permitir también la solución eficaz de todos los problemas prácticos, que tienen un sentido actual, que somos o seríamos capaces de proponernos en este dominio. Así, el criterio de validez es la eficiencia operatoria respecto de todos los objetivos considerables. Diremos entonces que las teorías científicas tienen un carácter panoscópico.

³⁹ “La acción desinteresada es, en realidad, muy interesante, e interesada, admitiendo que...” señala Nietzsche (“Par dela le bien et le mal”).

⁴⁰ Panscópicas: Todos los objetivos; monoscópica: Un solo objetivo.

Pero, para alcanzar este ideal científico panscópico, es necesario tiempo, reflexión, medios, y una masa enorme de información. En las actividades prácticas, este ideal aparecerá a menudo como un lujo que, en el fuego de la acción, no tiene ni el tiempo, ni los medios para ofrecerse. De donde el carácter más o menos monoscópico de los modelos prácticos, el cual resulta en alguna medida de un principio de economía. De hecho, en las actividades técnicas, económicas, el hombre está confrontado sin cesar a problemas prácticos que deben imperativamente recibir una solución (lo más buena posible, pero es necesario elegir una), y a decisiones que deben imperativamente ser tomadas sobre la base de una información insuficiente. En estas condiciones, no queda la distracción (ni aún el gusto) de interrogarse largamente sobre las características objetivas de la situación que no concierne directamente al problema a resolver, o la decisión a tomar.

Lo que el esperará entonces, antes de todo, de un modelo (probabilístico o no) es la eficiencia operatoria real en el único dominio que le interesa, y le importará poco que el modelo sea groseramente falso respecto de otros aspectos de la situación que no le interesan directamente. Su objetivo es monoscópico, y esto por razones de urgencia y de elección de prioridades.

Los criterios de validez no son evidentemente los mismos para los dos tipos de modelos. Una teoría científica (panscópica) se encuentra automáticamente refutada si una cualquiera de las consecuencias que se pueden deducir (en el dominio donde ella es operatoria) es refutada por la experiencia. El modelo monoscópico, debe ser juzgado después de su adecuación al único objetivo que persigue. Pero, correlativamente, no se debe, no más, esperar de el respuestas sensatas a las preguntas para las cuales no estaba concebido para resolver.

Además, contrariamente a las teorías científicas, que presentan siempre un grado más o menos elevado de universalidad, el modelo monoscópico concierne lo más a menudo un fenómeno particular, una situación única, que no se encontrará nunca más idéntica a ella misma. La condición de repetitividad, sin la cual es difícil fundar definiciones operatorias y de justificar la validez objetiva de un modelo, falta aquí. Si se agrega a esto que el modelo monoscópico se elige en el fuego de la acción, es decir sobre la base de una información insuficiente por definición, y constituye entonces siempre una hipótesis anticipativa, que podrá eventualmente ser controlada “después de la tirada”, pero de la cual nadie, en todo rigor, permitirá afirmar la validez en el momento que se adopta, se concibe que nos podemos interrogar sobre su status epistemológico, y también como los Bayesianos sobre su significación objetiva.

Volveremos largamente al caso de la pregunta importante de la significación y del valor objetivo de los modelos probabilísticos monoscópicos. Lo más importante a retener, por el instante, es que en el momento en el cual se elige, este modelo monoscópico introduce una hipótesis anticipativa cuya legitimidad no puede, de ninguna manera, ser garantizada por su compatibilidad con los datos numéricos disponibles: Porque esta hipótesis consiste, en suma, justamente, a admitir que las características estructurales que hemos inducidos a partir de estos datos pueden ser extrapoladas tal cual a las partes desconocidas del fenómeno; o aún, si se quiere, que el fenómeno se comporte, donde no se le conoce, de una manera suficientemente análoga a lo que se ha observado donde es conocido. Esto implica dos consecuencias: Para elegir una hipótesis de este tipo, es necesario tener en cuenta, cuidadosamente, todas las fuentes de información, numéricas o no, de las cuales se dispone (conocimientos generales acerca de la física de este fenómeno, experiencia adquirida en casos

análogos, etc...); por otra parte debilitar al máximo esta hipótesis, de manera de reducirla al mínimo estrictamente indispensable para permitir alcanzar el objetivo al cual mira el modelo monoscópico: Valorización máxima de todas las fuentes de información, y principio de economía estricta sobre la elección de las hipótesis anticipativas.

LOS CRITERIOS EXTERNOS O LA OBJETIVIDAD DE UNA METODOLOGIA.

Cuando se trata de un modelo dado (lo más a menudo monoscópico), destinado a representar un fenómeno único, es a veces difícil justificar rigurosamente la significación y el valor objetivo de este modelo particular. Veremos pero más lejos, que existen criterios internos de objetividad susceptibles de aportar una respuesta, por lo menos parcial, aún en el caso de un fenómeno único. Pero, si no es evidente que se pueda llevar un juicio sobre cada caso individual, no es el caso de la metodología general que nosotros utilizamos para elegir modelos monoscópicos en cada caso particular: ella hará a la larga, la prueba de su mayor o menor eficiencia. En efecto, cada situación, cada problema es único y es el objeto de un modelo monoscópico ad hoc. Pero hay clases de situaciones y de problemas que, sin ser idénticos, son lo suficientemente análogos para que las reglas que dictan le elección del modelo que nosotros adoptamos en cada caso puedan ser, por lo menos parcialmente, formalizadas, y terminen por constituir un sistema metodológico: Este sistema será sometido a la sanción de la práctica, y deberá hacer sus pruebas o ser abandonado.

En otros términos, es exacto que es, en definitiva, la posibilidad de repetición que funda la objetividad (la “relación repetible” de J. Ullmo ⁴¹) . Pero esto no significa que no exista ciencia posible de lo único. Primeramente, en efecto, es siempre en un sentido relativo que se habla de rehacer la “misma” experiencia. En palabras estrictas, no hay dos experimentos idénticos: estos difieren siempre, uno del otro, por algunos factores accesorios (pero somos nosotros los que los juzgamos como tales), y por condiciones de lugar y de tiempo. Todo lo que se puede decir, es que los factores que nos parecen importantes, con los medios técnicos disponibles, nos permiten afirmar que son semejantes, y los otros son lo que son. Análogamente, no se puede hablar de un fenómeno que se reproduce, sino solamente de una clase de fenómenos que nosotros juzgamos suficientemente próximos los unos de los otros para considerarlos como equivalentes. Esta proximidad, o semejanza, puede, por otra parte, ser cualitativa y estructural, sin ir hasta la igualdad de los parámetros numéricos descriptivos. En geología y en astronomía, por ejemplo, no hay dos objetos idénticos, lo que no impide de ninguna manera, fundar la objetividad sobre la repetición del semejante.

De la misma manera, los llamados “únicos” son únicos siendo objetos o situaciones individuales, pero se dejan clasificar en especies o géneros que reagrupan objetos y situaciones cualitativamente y estructuralmente análogas. Es al interior de estas clases (somos nosotros los que debemos definir de la manera más precisa posible, porque ¡esta definición jugará un papel constitutivo en nuestra disciplina!) que opera la repetición que funda la objetividad. En la polémica que los opone sobre la interpretación que conviene dar a la “probabilidad”, los frecuentistas tendrían razón contra los subjetivistas, pero en un sentido generoso solamente: Es la comparación sistemática de la previsión probabilística y de la

⁴¹ Los conceptos físicos, en op. Cit.

realización, hecha en una clase de pruebas eventualmente no idénticas, pero perteneciendo al mismo género, definido de manera más o menos ancha, que se funda a la larga la objetividad, y no quizás de una previsión singular, sino al menos la de la metodología que la ha conducido. Si esta previsión solo representa nada más que el estado de ánimo del práctico o del que toma decisiones, esto no interesaría a nadie, ni aún al que toma las decisiones: Debido a que lo que el quiere, sobretodo, es que su decisión sea la más eficaz posible, y esta eficiencia depende evidentemente de la situación objetiva.

Este criterio externo de objetividad consiste entonces, en suma, a examinar si se tiene o no “razón en promedio” de utilizar tal metodología para tratar de resolver tal categoría de problema.

Para tratar de formular esto de manera un poquillo más técnica, observamos primero que, para utilizar el modelo de la alternativa repetida, o modelos análogos del tipo ⁴² “sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas” no hemos, en ningún momento, supuesto que se trataba (en la realidad) de la misma experiencia repetida indefinidamente. Yo no afirmaré de manera tan categórica, como los subjetivistas, que una tal expresión no pueda, en ningún caso, presentar la menor significación objetiva. Porque, después de todo, los físicos me parecen personas que saben lo que dicen (y lo que hacen). Pero, en el dominio que es el nuestro, las dificultades serían muy reales. Se encuentra, felizmente, que no necesitamos de ninguna manera una hipótesis de este tipo para fundar nuestro criterio de objetividad externa (metodológica). Puede tratarse, en principio, de experiencias cualesquiera, siempre que se sepa, o se pueda, identificarlas. Naturalmente, en materia científica, no más, no está prohibido tener buen sentido, y no se introducirá de manera voluntaria en el mismo modelo las elecciones francesas de 1978, los yacimientos de petróleo de Oriente Próximo, la edad del capitán y la cabra del señor Seguin. Pero puede tratarse de experiencias realmente muy diferentes.

Lo mejor es tomar un ejemplo. Existen tipos sorprendentemente variados de yacimientos de cobre, pequeños y grandes, muy ricos o con ley media muy baja, de estructura simple o complicada, con leyes débilmente o fuertemente dispersas, etc... Por otra parte, la información de la cual se dispone para proceder a su estimación es, también, extremadamente variable en naturaleza, cantidad y calidad. Descartemos los detalles técnicos, y supongamos unívocamente definida la noción de recurso o cantidad Q , expresada en millares de toneladas de cobre contenido en un yacimiento dado. Esta cantidad solo será conocida una vez

⁴² La clase más general de modelos de este tipo está dada por un espacio de probabilidad (Ω, A, P) definido como el producto de una sucesión infinita de espacios (Ω_n, A_n, P_n) idénticos (en lenguaje riguroso: Isomorfos). Cada espacio factor describe un fenómeno o una experiencia dada, el espacio producto corresponde al conjunto de estos fenómenos o experiencias: Debido a que la probabilidad P está definida como el producto de las probabilidades P_n , las variables X_n, Y_n, \dots las cuales describen la experiencia n son, por construcción independientes (en el modelo) de las variables relacionadas con las otras experiencias. Esta clase de modelos constituye la transposición matemática de la noción física de repetitividad. Se observa el carácter formal, o convencional, del espacio Ω (definido, simplemente, en suma, como el conjunto de todos los resultados posibles de todos los experimentos que se puedan considerar). Y su carácter modular (en el sentido de ser extensible a voluntad): Siempre puede ser enriquecido a voluntad al agregarle nuevos factores isomorfos (Ω_n, A_n, P_n) cada vez que el deseo de tomar en cuenta una nueva sucesión de experiencias posibles se haga sentir. Esto contrasta con el carácter concreto del espacio Ω de los modelos para los cuales existen (como en física) criterios internos de objetividad.

efectuada la explotación efectiva. Supongamos (lo que es el caso) que nosotros disponemos de una metodología la cual nos permite integrar, en un modelo probabilístico, cualquier información disponible en el momento en el cual se debe estimar este yacimiento (luego, antes de su puesta en explotación). En este modelo, le corresponde a Q una variable aleatoria que también llamaremos Q , y nuestro modelo contiene el enunciado: “Hay una chance sobre dos para que Q sea superior a q ”. Aquí, q es un valor numérico el cual somos capaces de calcular (en el modelo, q es la mediana de la variable Q condicional a la información disponible). Poco nos importa, por el momento, que este enunciado individual tenga o no un sentido objetivo. Si hemos estimado así un centenar de yacimientos, numerados de $n=1$ a $n=100$, podemos comparar, para cada uno de ellos, sus recursos Q_n , ahora conocidos, y la mediana q_n que nuestra metodología había atribuido a la variable correspondiente del modelo. Poniendo $X_n = 1$ si $Q_n \geq q_n$ y $X_n = 0$ si $Q_n < q_n$, estamos en presencia de una sucesión de éxitos y fracasos a la cual le asociamos el modelo (específico) de la alternativa repetida con $p = 1/2$: podemos entonces testear este modelo (más precisamente, controlar la validez del modelo físico que este modelo probabilístico permite reconstruir). Si se juzga que 100 pruebas no bastan (en la práctica yo quiero decir: a los ojos de los prácticos de la industria minera, bastarán con certitud), se puede esperar tener 200 o 1000. Pero estamos (o estaremos) en medida de tener un juicio sobre el valor de nuestra metodología. Esta es entonces objetiva, porque puede ser, y será descalificada si conduce, en promedio, a errores notables de previsión⁴³.

CRITERIOS DE OBJETIVIDAD INTERNA, LIGADAS AL CARÁCTER CONCRETO DEL ESPACIO Ω .

Según el texto ya citado de J. Ullmo⁴⁴, la “idea de azar”, es decir, en realidad, el uso de modelos probabilísticos se introduce en física “cuando las condiciones iniciales inseparables experimentalmente son seguidas ulteriormente de una separación manifiestamente de los fenómenos observados”. Lo mejor que podemos hacer aquí es ilustrar esta concepción profunda con un ejemplo simple: Consideremos el caso (ideal) de un billar circular. La bola, la cual se lanza inicialmente sin efecto de rotación rebota en la banda circular respetando las leyes de la reflexión, de manera que, de un choque al siguiente, el ángulo θ que fija su posición aumenta en una cantidad (en principio) constante $\Delta\theta$. Admitiremos además que las pérdidas de energía pueden ser despreciadas, de manera que la bola circula indefinidamente sobre el billar. Introduzcamos una noción física simple, la de frecuencia de visita $f_n(l)$ de un arco cualquiera de longitud l contada en radianes sobre la banda, en el curso de n rebotes consecutivos. Dicho de otra forma, se tiene $f_n(l) = k/n$, en que k es el número de ocasiones en que el rebote se produce en un punto del arco l . Se demuestra, entonces, el teorema siguiente: cuando n tiende a infinito, la frecuencia de visita tiende hacia la razón $l/2\pi$, siempre y cuando $\Delta\theta/2\pi$ no sea un número racional. Si, al contrario, $\Delta\theta/2\pi$ es un número racional, la bola pasará indefinidamente de nuevo por los mismos puntos, en número finito, y

⁴³ Se puede ir más lejos. A cada Q_n nuestra metodología le asocia la ley de probabilidad F_n de la variable que le corresponde en el modelo, $F_n(Q_n)$ es entonces una variable con distribución uniforme en $(0, 1)$. Se puede entonces, utilizando la sucesión $X_n = F_n(Q_n)$ de los valores numéricos obtenidos, testear la validez del modelo “sucesión de variables independientes e uniformemente distribuidas en $(0, 1)$ ”

⁴⁴ Los conceptos físicos, en Logique et Connaissance Scientifique, por J. Piaget y otros, París, 1967, p. 649.

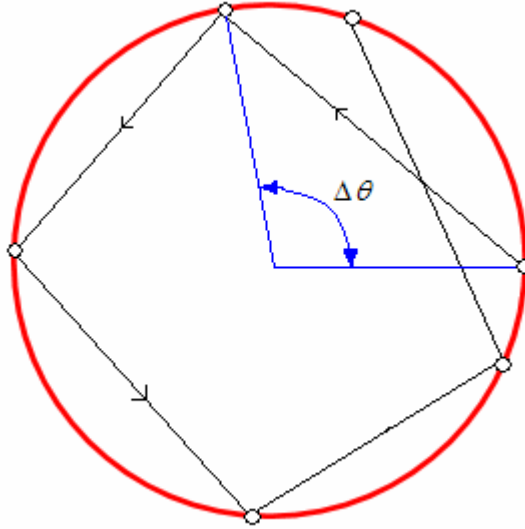


Figura 2: El billar circular.

los otros puntos nunca serán visitados. Este teorema sugiere irresistiblemente que la ley de probabilidad uniforme sobre el círculo debe, de una manera u otra intervenir en la descripción del comportamiento de la bola, con la excepción posible (importante) de los casos en que $\Delta\theta/2\pi$ sería “por azar” un número racional. Tenemos el sentimiento intuitivo que estos casos de excepción deben ser poco numerosos, o aún, en la práctica, no deberían producirse nunca... Si elegimos “al azar”, es decir con una densidad uniforme, un arco $\Delta\theta$ comprendido entre 0 y 2π , hay, en efecto, una probabilidad nula para que $\Delta\theta/2\pi$ sea un número racional. Para un físico, como se trata de un fenómeno macroscópico, esta eventualidad se excluye simplemente.

Partiendo de la posición θ_0 (la cual suponemos, para simplificar exactamente conocido), la bola, después de n rebotes, ocupa la posición $\theta_n = \theta_0 + n\Delta\theta$. Por muy precisa que sea nuestra medida inicial de $\Delta\theta$, conocido con un error ε muy pequeño, este error se va a amplificar desmesuradamente, porque solo podemos prever θ_n con un error de $\pm n\varepsilon$. Cuando n es grande, este error $n\varepsilon$ sobrepasa el valor 2π , o un múltiplo dado, pongamos 10 veces 2π : Lo que quiere decir que el rebote n tendrá lugar no importa donde en la banda. Las condiciones inicialmente inseparables de J. Ullmo terminaron por ser separadas. Esto sugiere un modelo probabilístico (el cual se puede controlar al repetir la experiencia) en el cual θ_n sería representado por una variable uniformemente distribuida en el círculo unidad.

La elección de esta ley uniforme, independiente de cualquier control experimental, está impuesta unívocamente por la naturaleza física de este modelo. De hecho, supongamos que elegimos para θ_n otra ley diferente de la uniforme (siempre que, solamente, admita una densidad⁴⁵). Se demuestra entonces, sin dificultad, que para n' bastante grande, la ley de $\theta_{n+n'}$ difiere también lo poco que se quiera de la ley uniforme. Basta entonces con

⁴⁵ Desde el punto de vista físico, esta restricción no es molesta: Porque para atribuir un átomo bien localizado a esta ley, sería necesario tener una información extraordinariamente precisa (experimentalmente imposible) sobre el error ε .

reemplazar n por $n + n'$ para obtener, de nuevo, la misma ley: Este fenómeno de convergencia hacia una ley límite unívocamente impuesta es una manifestación de la propiedad conocida con el nombre de ergodicidad.

La manera más simple para definir el modelo probabilístico consiste en hacer corresponder a ε una variable aleatoria la cual tiene una ley cualquiera, siempre que admita una densidad. Entonces $\Delta\theta$ es de la forma $\Delta\theta = \Delta\theta_0 + \varepsilon$, con un $\Delta\theta_0$ numéricamente conocido, y, en el modelo $\theta_n = \theta_0 + n\Delta\theta_0 + n\varepsilon$ es una variable aleatoria, cuya ley de nuevo, converge hacia la ley uniforme. El interés de esta formulación es que, ahora, los casos de excepción ($\Delta\theta/2\pi$ racional) tienen, en el modelo, una probabilidad nula (cualquiera que sea la ley de ε la cual admite una densidad).

Se puede también mejorar el modelo al observar que, el plano del billar y la banda presentan lógicamente pequeñas irregularidades, los incrementos sucesivos $\Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n$ no podrán ser rigurosamente iguales. Aún si, por azar, uno de ellos fuera un múltiplo racional de 2π , los otros no lo serían. De manera que los casos de excepción son efectivamente excluidos por esta consideración física. Al tomar esta vez $\Delta\theta_n = \Delta\theta + \varepsilon_n$, con (en el modelo) variables aleatorias ε_n cualesquiera (no necesariamente independientes, basta con que no sean muy correlacionadas), se demuestra entonces que $\theta_n, \theta_{2n}, \theta_{3n}$, etc... para n bastante grande son, en el modelo, variables independientes, las cuales admiten siempre esta misma ley uniforme. Y el valor de este modelo puede, ahora, ser controlado experimentalmente, sin que sea necesario repetir la experiencia.

No insistiré más con este ejemplo ⁴⁶, cuyo objetivo era solamente mostrar como las consideraciones físicas concretas imponen, en ciertos casos, la elección de un modelo probabilístico único y bien determinado: Es el análisis físico del fenómeno mismo el que nos ha proporcionado los criterios de objetividad interna (es decir que permite juzgar desde el interior la objetividad del modelo probabilístico, sin recurrir a la repetición de la “misma” experiencia).

Sin embargo, en estas indicaciones ejemplares que nos ofrece la física, no se trata verdaderamente de fenómenos únicos, porque la condición de repetitividad está siempre presente, y nos permite reforzar y recortar mediante controles externos, basados en la repetición, los criterios propiamente internos de la objetividad de estos modelos. Demos entonces un ejemplo, de apariencia totalmente banal, pero que sin embargo se revelará esclarecedor cuando abordemos, en la tercera parte, la búsqueda de modelos estrictamente objetivos, o, como los llamaremos, de representaciones probabilísticas, los cuales permiten describir los fenómenos únicos.

Sea S un dominio acotado del espacio usual (con dos dimensiones por ejemplo) y $f(x)$ una función ⁴⁷ definida en S . Nos damos, igualmente, una ley de probabilidad en S , por ejemplo la ley de densidad uniforme en S . En el modelo en que x designa el punto aleatorio

⁴⁶ La mecánica estadística proporcionaría, algo más grande, un ejemplo comparable, y conduciría a conclusiones de la misma naturaleza: Es el carácter concreto del modelo o de la teoría física el que impone aquí de manera unívoca la elección del modelo probabilístico.

⁴⁷ Se trata, por supuesto, de una función medible.

obtenido al “tirar al azar” un punto de x en S según esta ley de probabilidad ⁴⁸, la función $f(x)$ es una variable aleatoria. La ley de esta variable está definida por su función de distribución $F: F(a)$, probabilidad de tener $f(x) \leq a$, es la medida (superficie, si el espacio es de dos dimensiones) del subconjunto de S definido por la condición $f(x) \leq a$. Esta ley tiene un sentido absolutamente concreto y, en particular, objetivo: Una vez que se conoce la función f , cualquier enunciado probabilístico relativo, en este modelo, a la variable aleatoria $f(x)$ es, en efecto, decidible, en sentido estricto. Todos los parámetros asociados a esta ley tienen, ellos también, una estricta significación objetiva. Por ejemplo, la esperanza matemática m de la variable $f(x)$ de este modelo es, por construcción, igual al valor medio en S de la función f , es decir:

$$m = \frac{1}{S} \int_S f(x) dx$$

Magnitud que tiene una significación perfectamente objetiva (decidible).

Supongamos ahora que “elegimos al azar” en S , de manera independiente, puntos particulares x_1, x_2, \dots (lo que es técnicamente realizable por medio de tablas de números al azar o gracias a procedimientos “aritméticos” de tales números, tal como los vimos en el capítulo anterior). Los valores numéricos obtenidos $f(x_1), f(x_2), \dots$ pueden ser interpretados en el marco del modelo “sucesión de variables independientes que admiten la misma ley F ”. En particular, si la función f , la cual está perfectamente determinada, no nos es conocida, de manera que solo conocemos la sucesión numérica $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, nosotros reconstruiremos en un marco absolutamente concreto, las condiciones del problema teórico de la “inferencia estadística” y de la “estimación de m ”: Con la ventaja enorme que aquí estamos asegurados, al entrar al juego, de la significación objetiva de la ley que buscamos inferir, o del parámetro m que buscamos estimar. Además, consideraciones muy terrenales, relativas al cálculo numérico aproximado de la integral en el espacio la cual define m a partir de un número pequeño de puntos x_1, x_2, \dots, x_n , vienen a dar una luz crecida, pero apreciable, sobre la naturaleza un poco misteriosa de esta famosa “inferencia estadística”. En este marco, está permitido de hablar sin comillas de la estimación ⁴⁹ del parámetro m , porque este m existe realmente más allá de nuestro modelo probabilístico.

⁴⁸ En lenguaje más correcto, se trata del modelo (Ω, A, P) en que $\Omega = S$, A es el conjunto de los borelianos de S , y P la probabilidad uniforme en S . Concretamente, S podría representar un yacimiento minero, $f(x)$ la ley en un punto x , y x una muestra (un sondeaje por ejemplo) implantado “al azar” en S .

⁴⁹ Recuerdo que yo me reservo el término “estimación” a la evaluación de una magnitud, la cual no conocemos su valor exacto, pero que existe, en la realidad, independiente de nosotros. Solamente, cuando estoy asegurado, como en el caso anterior, de la significación objetiva de un parámetro, es que hablo de estimar este parámetro. En los otros casos yo utilizo el verbo elegir. Guardemos siempre en el espíritu la distinción entre enunciados objetivos, elecciones metodológicas y criterios de control: Se estiman magnitudes objetivas, se eligen los métodos y se convienen los criterios.

SEGUNDA PARTE

LOS CRITERIOS DE LA OBJETIVIDAD INTERNA EN EL CASO DE FENOMENOS
UNICOS.

“Omnis res positiva extra animam eo ipso est singularis”

G. d'Ockham

Traducción aproximada: “Toda cosa que existe fuera del pensamiento, es por ello mismo una cosa singular”.

CAPITULO III

EL BOSQUE POISSONIANO.

En las páginas que siguen y, salvo excepción, hasta el fin de esta obra, concentraremos nuestra atención sobre el caso de un objeto o fenómeno único – un bosque, un yacimiento minero, una cadena de montañas etc... – ocupando una porción bien delimitada y acotada del espacio en el cual vivimos. Estos objetos son interesantes por sí mismos. Pueden ser, y son efectivamente, estudiados del punto de vista panscópico que es aquél del conocimiento científico. Pero ellos son también útiles. El práctico encargado de administrarlos y de explotarlos – el forestal, el minero – encuentran problemas, de naturaleza esencialmente práctica, los cuales debe resolver, de una manera u otra para llevar bien su tarea: El minero, por ejemplo, debe estimar las diferentes partes de su yacimiento, antes de decidir cuales explotar y cuales abandonar, como muy pobres. Para hacer esta estimación, solo dispone, por la fuerza de las cosas, de una información limitada y fragmentaria: Su punto de vista será entonces, esencialmente monoscópico: No porque no le interesen otros aspectos de su objeto, sino que se observa, a menudo, por el contrario, en los profesionales, una suerte de entusiasmo contenido; pero el debe pensar primero en cumplir su tarea. En adelante, adoptaré unas veces uno y otras veces el otro de estos puntos de vista, pero el balance se inclinará más bien a favor de los modelos monoscópicos: Es a propósito de estos últimos, en efecto, que el problema de la objetividad se plantea de la manera más aguda; es de ellos también que yo adquiriré, por una práctica larga, el máximo de experiencia directa, por consiguiente de ellos yo puedo esperar hablar sabiendo más o menos lo que digo.

La objetividad externa, es decir la de la metodología general que sirve para construir los modelos individuales, no ocasiona problemas mayores: Es simplemente, la sanción de la práctica. La Geoestadística, por ejemplo, ya ha servido para estimar más de un centenar de yacimientos mineros, y ya ha hecho sus pruebas, y puede ser considerada como objetivamente fundada. Se tratará entonces, en lo que sigue, esencialmente de la objetividad interna: la de los enunciados respecto de este yacimiento, este bosque. Comenzaremos por un ejemplo como introducción, el del “bosque poissoniano”.

EL PARAMETRO θ : ¿EXISTE, ES UTIL?

Para entrar concretamente en el corazón del sujeto, consideremos el modelo poissoniano a veces utilizado por los forestales para representar la distribución de los árboles (asimilados a puntos) en el estudio del bosque (J. P. Marbeau⁵⁰). Naturalmente, decir que el bosque “es” poissoniano es una manera abreviada de indicar que los datos disponibles no son incompatibles con esta interpretación poissoniana. En la óptica estadística “ortodoxa”, el problema más importante que se plantearía entonces sería el de “la inferencia estadística”, es decir, el de la estimación de la densidad desconocida θ de este proceso poissoniano. En efecto, una vez que este parámetro es conocido, se pueden calcular todas las otras características del proceso. Este punto de vista atribuye, implícitamente, una existencia real, objetiva, a la densidad θ : aún en el caso en que nuestra información solo nos permita una estimación que se aproxima al verdadero valor θ , esto no cambia el hecho de su existencia en la naturaleza, y podría ser objeto de una medida rigurosa si nuestra información fuera perfecta. Por otra parte, no es cierto que esta afirmación tenga un sentido operatorio: Para determinar θ rigurosamente, sería necesario que el bosque se extienda hasta el infinito (permaneciendo poissoniano), mientras que su extensión real está evidentemente limitada. Esta falsa evidencia (la existencia de θ) reposa sobre una identificación resumida del modelo (el proceso de Poisson) y la realidad (el bosque): Esta confusión, frecuente en los estadísticos, es un verdadero corto circuito epistemológico. Porque, por muy adaptado que sea el modelo a su objeto, no tenemos en ningún caso la garantía que todas sus características sean el reflejo fiel de propiedades objetivas que les correspondería biunívocamente en la realidad.

Si mantenemos cerradamente esta distinción necesaria entre el modelo y la realidad, el problema (en estricto rigor insoluble) de la inferencia estadística pierde en gran parte su importancia. El parámetro θ quedaría en parte indeterminado, aún si conociéramos perfectamente el bosque: Se puede entonces poner seriamente en duda su “existencia objetiva”, y por consiguiente también de no juzgar como demasiado grave su indeterminación. De hecho, el problema práctico que interesa al forestal no es en ningún caso, la estimación de la densidad poissoniana θ del modelo teórico: Esta (si se recurra a ella) no intervendrá nunca, solamente como un intermediario cómodo de cálculo, y desaparecerá siempre del resultado final. En realidad, el forestal desea, por ejemplo, estimar el número $N(S)$ de árboles presentes en una superficie S dada, conociendo el número $N(s)$ de árboles contados en la superficie s muestreada. Para estimar $\theta(S)$ y $N(S)$, él calculará las cantidades:

$$(1-1) \quad \theta^*(S) = \frac{1}{S} N(s) \quad ; \quad N^*(S) = \frac{S}{s} N(s)$$

Lo notable es que la interpretación poissoniana no juega, en realidad, casi ningún papel en la formación de estos “estimadores”, que parecen bien, los más “naturales” posibles. De hecho, estos estimadores aparecen como insesgados en el marco de una interpretación mucho menos restrictiva que el modelo poissoniano. Basta, por ejemplo, con postular una cierta forma de estacionaridad (en la terminología relativa al modelo probabilístico), es decir una cierta forma de homogeneidad del fenómeno en el espacio, una cierta constancia de la densidad media

⁵⁰ Geostatística Forestal, Tesis, Fontainebleau, 1976.

(terminología más vaga, pero relativa a la realidad física, y no más al modelo, y presentando un sentido para los prácticos).

Al contrario, el carácter poissoniano del modelo interviene efectivamente en el momento del cálculo de la varianza de estimación σ^2 , es decir, la varianza (en el modelo) del error $N(S) - N^*(S)$. Si se supone que la superficie muestreada s está incluida en la superficie S a estimar ($s \subset S$), se encuentra sin dificultad la expresión siguiente:

$$\sigma_E^2 = \theta \frac{S(S-s)}{s}$$

Pero, en realidad, el parámetro θ que figura en esta fórmula no se conoce exactamente; se le reemplaza entonces por su estimación $N(s)/s$, lo que conduce a tomar:

$$(1-2) \quad \sigma_E^2 = N(s) \frac{S}{s} \left(\frac{S}{s} - 1 \right)$$

Relación en la cual no figura más ningún parámetro del modelo poissoniano hipotético, y donde intervienen solamente cantidades conocidas experimentalmente.

Luego, el parámetro θ del modelo no figura en ninguna parte, ni en la expresión (1-1) de los estimadores, ni en la expresión (1.2) de la varianza que nosotros le atribuimos. Este parámetro no ha sido jamás utilizado, además que su significación objetiva es, por otra parte, dudosa, entonces se comienza a sospechar que el famoso problema de la inferencia estadística es sin duda un falso problema. Al contrario, para pasar de (1-1) a (1-2), es decir para obtener la varianza de estimación, se utiliza explícitamente “la hipótesis” poissoniana, es decir el hecho que el modelo probabilístico que elegimos es de tipo poissoniano, pero sin que sea necesario, en algún momento, especificar el modelo, es decir, de fijar el valor numérico de θ . Pero elegir un modelo genérico de tipo poissoniano (considerado como independiente de los valores del parámetro θ que lo especifica) consiste simplemente en formular en un lenguaje probabilístico - con todas las ventajas conceptuales y todas las posibilidades operatorias que este proporciona - una propiedad física objetiva que solo se podría describir de otra manera en un lenguaje más vago, a saber:

- i) La densidad “media” de árboles por hectárea no parece presentar variaciones sistemáticas en el espacio, y
- ii) El hecho que una zona s esté muy (o muy poco) provista de árboles no implica “en promedio”, que una zona s' vecina de s está más (o menos) provista de árboles que las otras.

Estas dos propiedades (aún si es difícil darles un enunciado preciso en un lenguaje probabilístico) corresponden innegablemente a características objetivas del fenómeno real. Parecerán llenas de sentido al práctico (el forestal) que, en general, no vacilará en decir para cada caso particular si le parecen, o no, plausibles.

Se ve que no se trata exactamente del problema clásico de la inferencia estadística (estimación de la densidad θ de un proceso de Poisson) sino más bien de la elección de un modelo

adecuado para representar una realidad física dada. Una vez admitida – y este es un punto crucial - una cierta interpretación física de la realidad (homogeneidad en el espacio, e “independencia” de zonas disjuntas) la cual conduce a adoptar el modelo genérico poissoniano, el problema de la especificación de este modelo (la estimación de θ) solo presenta una importancia limitada, o, análogamente no existe realmente: Ni las expresiones (1-1) de los estimadores, ni la varianza (1-2) que se les atribuye dependen de θ . Solamente para simplificar el lenguaje se dirá “este bosque puede ser representado por un proceso de Poisson el cual admite la densidad $\theta = \text{tantos árboles por hectárea}$ ” (y el valor numérico atribuido a θ coincidirá con el del estimador $\hat{\theta}^*(S)$ de la densidad media en S).

LAS TRES ETAPAS DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO.

Ahora bien, este enunciado resume tres etapas cuyo status epistemológico es bien diferente:

- 1) Hay primero una elección epistemológica: Se decide recurrir a estas técnicas probabilísticas para representar el fenómeno (el bosque). Se trata de una decisión, no de una hipótesis: decisión constitutiva (ella constituye para nosotros el bosque como objeto de estudio, define el marco general en el cual vamos a trabajar y determina la elección de los instrumentos que vamos a utilizar), y no una hipótesis experimentalmente controlable (no es verdadero ni falso decir que “este bosque es una realización de un proceso estocástico en el sentido de que no existen experiencias u observaciones concebibles cuyo resultado sería susceptible de refutar esta proposición). En este nivel, hablaremos de modelo constitutivo (aquí, probabilístico).
- 2) Encontramos enseguida una hipótesis de naturaleza física sobre el fenómeno en cuestión – homogeneidad en el espacio, ausencia de influencia sobre zonas vecinas – lo cual conduce a la elección de un modelo genérico: Este proceso es un proceso de Poisson. Contrariamente a la elección precedente (que solo se justifica por su eficiencia, por los éxitos a los cuales conduce, y sobre el cual no se puede extraer un juicio que a la larga, es decir después de haber tratado un número grande de casos) esta segunda elección deriva de una hipótesis física objetivamente controlable. Puede, en consecuencia, ser confirmado o invalidado por los datos experimentales – sea por medio de tests estadísticos, fáciles de implementar en este caso particular muy simple, sea por tal o tal otro método, también por el juicio del práctico que conoce bien este bosque (este recurso a la intuición del práctico no revela ningún misticismo; traduce más bien la prioridad epistemológica atribuida a la realidad sobre el modelo matemático, o estadístico, que se ha elegido para describirlo).

Es conveniente señalar la importancia capital de esta etapa. Es, en efecto, para lo esencial, que incorporemos aquí el modelo de las hipótesis que tienen una significación objetiva, y que permite una información positiva no contenida en los datos numéricos brutos. Solo este aporte positivo permite comprender que podamos sacar (en apariencia) de los datos más de lo que contienen (una previsión más una varianza de estimación). La contraparte de este pequeño milagro, es que ahora nuestro modelo es vulnerable, y que nuestras previsiones pueden ser desmentidas por la experiencia si las hipótesis sobre las cuales las hemos fundado no son objetivamente válidas. Precisemos bien que no basta con asegurar (por ejemplo por tests) que estas

hipótesis son compatibles con los datos, es decir son verificadas en parcelas muestreadas. Es necesario admitir también que estas hipótesis siguen siendo válidas en las zonas no muestreadas. Y esto, solamente después de la tirada, lo sabremos. La elección del modelo constituye una hipótesis anticipativa, e implica siempre un riesgo de error radical, y es porque se debe imperativamente tener en cuenta, no solamente los datos numéricos, sino igualmente todas las otras fuentes de información que se puede disponer (conocimientos generales sobre este tipo de fenómeno, experiencia de los prácticos, etc...).

Para localizar mejor el aporte de la información positiva y la aparición correlativa de la vulnerabilidad del modelo, habrá a menudo interés en distinguir dos etapas en la elección del modelo genérico: Elección de un modelo genérico en sentido amplio, luego elección de un tipo particular en el modelo. Aquí, el modelo genérico (en sentido amplio) sería “proceso puntual estacionario”. La palabra puntual significa que hemos decidido considerar, en primera aproximación, los árboles como puntos en el plano. Esto es una decisión (constitutiva) la cual no implica ni aporte de información ni riesgo de desmentido experimental. Al contrario, la palabra estacionario está asociada a una hipótesis de homogeneidad en el espacio, e implica aporte positivo y vulnerabilidad, pero con un grado relativamente débil. Por tipo de modelo, entenderemos un modelo en el cual solo falta para ser completamente especificado conocer valores numéricos de un número pequeño de parámetros. Aquí, el tipo de modelo elegido es “el proceso de Poisson”, con un solo parámetro indeterminado (el parámetro θ). La elección de este tipo está ligada a una hipótesis muy fuerte (ausencia de influencia entre zonas vecinas); el introduce una información muy rica (que permite entre otras cosas el cálculo de varianzas de estimación) y entonces también riesgos de desmentido experimental. Esto es una circunstancia general: Lo más a menudo, es la elección de un tipo en un modelo genérico lo que constituye la decisión crucial, la que abre el máximo de posibilidades operatorias, y, correlativamente, introduce el máximo de riesgo de error.

- (3) La última etapa, finalmente, es la elección del modelo específico o, como diremos también, la especificación del modelo (aquí la elección del valor numérico θ = tantos árboles por hectárea). La estadística matemática atribuye una importancia absolutamente predominante a este tercer aspecto de la “elección del modelo”, y le asigna el nombre de inferencia estadística (es decir estimación numérica de los parámetros), la cual juega aquí un papel muy apagado, o aún nulo, porque los resultados esenciales (la estimación y la varianza) se expresan, en definitiva, con la ayuda de los datos experimentales solos, en una forma que hace intervenir las elecciones 1) y 2) (y sobre todo la elección del tipo poissoniano) pero de ninguna manera la elección 3) del valor numérico de θ . En suma, solamente por comodidad de lenguaje, y para fijar las ideas, nosotros procedemos a la especificación del modelo, mientras que la elección 1) (epistemológica) y la elección 2) (el modelo genérico y su tipo), junto a la información numérica – aquí $N(s)$ - nos proporcionan una base operatoria suficiente para resolver los problemas que nosotros nos proponemos.

La distinción precisa de estos tres aspectos acerca de la elección del modelo parece elemental y poco interesante en un caso tan simple como el del “bosque poissoniano”. Pero las cosas cambiarán rápidamente en la medida en que examinemos modelos más ricos. Una vez

admitida la elección del modelo constitutivo (decisión epistemológica) el problema capital es la elección 2), la del modelo genérico y más particularmente del tipo de modelo: Porque, una vez adoptado un tipo de modelo que se adapta convenientemente a los datos experimentales, es en general razonablemente posible especificarlo (si se desea verdaderamente) conformemente a estos mismos datos. El problema importante no es entonces la inferencia estadística, sino la elección del modelo genérico y de su tipo. Notamos bien que no se trata simplemente aquí de “testear una hipótesis” con la ayuda de los datos: Este punto de vista, que es el de la estadística ortodoxa, deja escapar lo esencial: No solo necesitamos estar de acuerdo con los datos disponibles, sino que con la hipótesis mucho más fuerte que el tipo elegido sea compatible también con los datos no disponibles, es decir con las partes desconocidas o inaccesibles del fenómeno. Es esta última hipótesis la que explica la fecundidad del método, y también, lo hemos visto, su vulnerabilidad. La compatibilidad con los datos es, evidentemente, necesaria, pero ella no basta en ningún caso para garantizarnos contra un desacuerdo siempre posible con lo que no nos es dado (y que justamente buscamos estimar).

Examinaremos en el capítulo 4, en un marco más general, la jerarquía de los modelos “topo-probabilísticos”, y el problema de la elección, tal como se presente en cada una de las tres o cuatro etapas que hemos distinguido. Antes, vamos a proceder a un examen crítico de nuestro ejemplo elemental, lo que nos permitirá extraer algunos hilos directores.

ALGUNOS HILOS DIRECTORES.

Veamos como se presentan las cosas en el caso del bosque “poissoniano”. Para examinar la objetividad de este modelo, debemos distinguir netamente dos problemas bien diferentes. Es necesario, en primer lugar, hacer abstracción del hecho (en suma totalmente contingente) que nosotros solo disponemos de una información parcial, y suponer (lo que no nos hace salir del marco operatorio) que disponemos de un levantamiento topográfico completo el cual proporciona la implantación de cada uno de los árboles del bosque: Solamente los conceptos accesibles a partir de esta base experimental máxima tendrán un sentido operatorio y una significación objetiva. En segundo lugar, conviene examinar las complicaciones e incertidumbres suplementarias que introduce el carácter lacunario de nuestra información real, y el problema que se plantea es aquel del grado de validez o igual de la posibilidad de una estimación efectuada sobre esta base: Este segundo problema es el más importante en la práctica, pero del punto de vista de la metodología, es más bien el primer punto que gana.

a) El bosque se supone perfectamente conocido, ¿ podemos nosotros, en un sentido objetivo, calificarla de poissoniana”, y, en particular, podemos nosotros dar una definición operatoria de la densidad poissoniana θ ? La respuesta es: Si, pero en ciertos límites solamente. EL bosque tiene, por ejemplo, una superficie $S = 10.000$ hectáreas, y puede ser dividido en parcelas unidas y disjuntas de igual superficie s : s no debe ser muy pequeño (digamos al menos 400 m^2), para que la asimilación de los árboles a puntos siga siendo razonable, ni muy grande (digamos, a lo más 100 hectáreas) para disponer de un efectivo “estadístico” suficiente. Para cada valor de s , disponemos de una población de $n = S / s$ valores numéricos, a saber, los números de árboles contados en cada una de estas parcelas s , y nosotros podemos examinar si el histograma correspondiente es, o no, compatible con una

interpretación poissoniana. Es cierto que las respuestas que dan los tests estadísticos son siempre equívocos. Pero, tratándose de poblaciones que tienen al menos 100 individuos, y en general mucho más (hasta 250.000 para el valor más pequeño de s), estas respuestas serán suficientemente netas para que nosotros podamos despreciar este margen de ambigüedad o de indeterminación (inherente, lo hemos visto, a la definición de cualquier concepto operatorio). Si estas poblaciones son suficientemente poissonianas, y si las varianzas (experimentales) correspondientes $\sigma^2(s)$ son aproximadamente proporcionales a la superficie s (y el grado de aproximación admisible puede igualmente, en una cierta medida, ser precisado en la base de consideraciones estadísticas), hemos puesto en evidencia la existencia de una ley (aproximada) $\sigma^2(s) = \theta s$, que constituye justamente la definición operatoria de la “densidad poissoniana” θ .

Dicho esto, es necesario agregar inmediatamente:

- i) Que esta densidad θ no está, medida, pero también, más profundamente, definida, con un cierto margen de indeterminación correspondiente al carácter aproximado de la ley $\sigma^2(s) = \theta s$ que constituye la definición de θ , y también
- ii) Que el concepto de densidad poissoniana pierde toda su validez objetiva para superficies muy pequeñas o, sobre todo, demasiado grandes. Por ejemplo, para $s = S / 2$ (2 parcelas) o $s = S$ (una parcela única) no se puede hablar más de población poissoniana ni de varianza proporcional a s . En particular, considerar el número total $N(S)$ de árboles en el bosque “como una variable poissoniana de media θ ” no presenta más ninguna especie de significación objetiva: Nos hemos salido completamente del dominio de validez del concepto operatorio.

Se pueden hacer aún otras observaciones. El modelo poissoniano, en sus límites de validez operatoria, no es el único posible, ni aún el mejor. En efecto, para razonar un instante en un marco puramente probabilístico, se sabe que, cualquiera que sea el parámetro θ del proceso de Poisson, una vez determinado el número total $N(S)$ de puntos que caen en la superficie S , estos $N(S)$ puntos están uniformemente repartidos de manera independiente los unos de los otros en S con una densidad de probabilidad uniforme: Dicho de otra manera, condicionalmente con $N(S)$ fijo, esta ley de distribución es la misma cualquiera que sea el valor de θ . Siempre, con $N(S)$ fijo, las parcelas disjuntas s no son más independientes porque la suma de árboles que ellas contienen debe ser igual a $N(S)$, pero, para $S / s > 100$ su grado de dependencia puede ser considerado como despreciable. Las leyes correspondientes son binomiales (y no más poissonianas, a pesar que difieren poco de las leyes poissonianas), esperanzas y varianzas están dadas por:

$$(1-3) \quad E[N(s)] = \frac{s}{S} N(S) \quad ; \quad \text{Var}[N(s)] = \frac{s}{S} \left(1 - \frac{s}{S}\right) N(S)$$

Como s / S es menor o igual a $1 / 100$, la varianza es prácticamente igual a $(s / S) N(S)$, es decir a la esperanza: Obtenemos el mismo resultado que con una ley poissoniana de esperanza $s \theta(S)$ (en vez de $s \theta$), en que $\theta(S) = N(S) / S$ representa justamente “la estimación” clásica de la densidad θ .

Para un estadístico, esta eliminación del parámetro θ proviene del hecho que $\theta(S) = N(S) / S$ constituye una “estadística exhaustiva”, es decir resume la totalidad de la información que disponemos para “estimar” θ , lo que se traduce aquí por el hecho que la ley “condicional” de las variables $N(s)$ asociada a las diferentes parcelas no depende más de θ cuando $N(S)$ es fijo. En esta forma, se trata de una particularidad del proceso de Poisson, la cual no permanecería en el caso de procesos más generales. Pero esta manera de presentar las cosas consiste en invertir los papeles, yo quiero decir un juicio sobre la realidad poniéndose en el punto de vista del modelo. Daré más lejos un enunciado general del criterio de objetividad que necesitamos. Por el momento, sigamos el estudio de nuestro bosque poissoniano.

UN CRITERIO DE OBJETIVIDAD: LAS MAGNITUDES REGIONALES.

En este estado del análisis, comenzamos a sospechar que el parámetro θ del modelo teórico está quizás bien desprovisto de existencia objetiva, porque todas las características objetivas que le hemos atribuido, comprendiendo su definición operativa, están también considerados por el pretendido estimador $\theta(S) = N(S) / S$ (y, en efecto, mejor, porque la fórmula (1-3) de la varianza conserva un sentido para $s = S$: La varianza de $N(S)$ es efectivamente nula, porque $N(S)$ es fijo). Se ve así caer el punto de vista de la estadística ortodoxa: Lo que era considerado como una realidad, desconocida pero existente objetivamente y que debe ser objeto de una “inferencia estadística” (el parámetro θ), se revela una ficción inútil, y es la pretendida estimación (la densidad media $\theta(S) = N(S) / S$ del bosque real) la cual recibe sola, ahora una significación objetiva.

Convenimos en llamar magnitudes regionales, o simplemente regionales las cantidades como $N(S)$, o también los números $N(s)$ asociados a todas las parcelas s posibles, se encuentran definidas sin equívoco cuando el fenómeno regionalizado en el cual estamos interesados (aquí, el bosque) es suficientemente conocido en la totalidad de su extensión espacial (o campo) S . El parámetro θ no es una magnitud regional, y, también, lo hemos visto, está desprovisto de significación objetiva. Podemos enunciar un primer principio, útil para orientarnos en la elección de modelos probabilísticos destinados a describir los fenómenos únicos:

Principio de las magnitudes regionales: Entre los parámetros de un modelo top-probabilístico destinado a describir un fenómeno único, solo tienen significación objetiva aquellos que se pueden expresar en términos de magnitudes regionales. Análogamente, entre los conceptos introducidos por este modelo, solo tienen un sentido objetivo los que pueden recibir una definición operatoria en términos de magnitudes regionales, es decir una definición constituida por un sistema de relaciones experimentalmente verificables (en un dominio de validez dado, con una aproximación dada) entre tales magnitudes.

Así, el concepto de ley de distribución (poissoniana o binomial) del número $N(s)$ de árboles presentes sobre las parcelas de talla s tiene, innegablemente, un sentido operatorio, siempre que s no sea ni muy pequeño ni muy grande. Al contrario, para $s = S$, no tiene ningún sentido operatorio considerar $N(S)$ como una variable poissoniana de esperanza θS .

EL PUNTO DE VISTA DE LA PRACTICA.

Vamos ahora al segundo problema, el de la posibilidad de una estimación sobre la base de una información parcial. En particular, debemos preguntarnos si el concepto de varianza de estimación introducido anteriormente, es susceptible de recibir una definición operatoria en términos de regionales. La respuesta es diferente si nos localizamos “después de la tirada” (es decir si se supone el bosque perfectamente conocido, y si se compara con la realidad las estimaciones que se habrían podido hacer sobre la base de tal o tal información parcial que nosotros podemos elegir a voluntad) o en “el calor de la acción” (es decir si se supone que solamente se tiene una información parcial a nuestra disposición).

Después de la tirada, la respuesta es ciertamente positiva: Se puede definir la varianza de estimación en términos de magnitudes regionales (en el caso general, hay también, varias formas no equivalentes de hacerlo, y esta dificultad retendrá más tarde nuestra atención. Pero, en el caso “poissoniano”, todas estas definiciones son equivalentes y la ambigüedad desaparece). La fórmula (1-3), en efecto, la cual proporciona la varianza de $N(s)$ (con $N(S)$ fijo) expresa una relación, experimentablemente verificable, entre magnitudes regionales: En la medida en que ella ha sido efectivamente verificada, tenemos el derecho de deducir la varianza del error asociado a la estimación de $N(S)$ sobre la información $N(s)$ aportada por el muestreo de una superficie (de forma cualquiera) de talla s , lo cual proporciona:

$$(1-4) \quad \sigma_E^2 = \left(\frac{S}{s} - 1 \right) N(S)$$

Si, ahora, nos localizamos “en el calor de la acción”, $N(S)$ es desconocido (es justamente esta magnitud la que queremos estimar) y solo se puede sustituir por su estimación, que es $(S / s) N(s)$. Se encuentra de nuevo la relación (1-2), que constituye una aproximación razonable de (1-4), siempre que s no sea muy pequeño.

El valor objetivo de la fórmula (1-2) – la única que se puede utilizar en la práctica – es entonces inferior, pero comparable con la de la definición operatoria (1-4). Solamente la validez de esta última solo puede ser definitivamente establecida en el caso después de la tirada (cuando se conoce todo el bosque) y no sobre la base de información parcial disponible “en el calor de la acción”. Por consiguiente también, el valor de (1-2) depende de la validez de una hipótesis anticipativa (que puede revelarse como falsa después de la tirada) según la cual el carácter poissoniano, que hemos podido razonablemente testear en la porción muestreada, puede ser extendido a toda la superficie S .

Esta es una circunstancia general: Nunca estaremos al abrigo de malas sorpresas: El hecho que el modelo esté en buen acuerdo con un muestreo parcial no nos garantizará nunca que permanecerá compatible con la totalidad del fenómeno. Por consiguiente toda previsión (comprendiendo la de una varianza de estimación o de cualquier otro concepto expresable en términos de magnitudes regionales) hecha sobre la base de una información parcial y de un modelo puede revelarse groseramente falsa. El grado de confianza que nosotros

podemos atribuirle está ligado al valor objetivo de una hipótesis anticipatoria la cual, justamente, solo podremos juzgar después de la tirada. En materia científica, siempre se puede suspender el juicio esperando disponer de información complementaria. Pero el práctico, el, está obligado de tomar una decisión en el calor de la acción, es decir sobre la base de una información en general insuficiente, y esto implica siempre un riesgo de error radical.

CAPITULO IV

LA ELECCION Y LA JERARQUIA DE LOS MODELOS

Ahora es necesario definir con un poco más de precisión los niveles que hemos encontrado a propósito del ejemplo simple del “bosque poissoniano”: El modelo constitutivo, el modelo genérico, su tipo de especificación. La situación de referencia es la siguiente: nos interesamos en un cierto fenómeno definido en un dominio acotado S del espacio (euclidiano, con 1, 2 o 3 dimensiones, eventualmente 4 si se desea también hacer intervenir el tiempo). Supondremos que este fenómeno se deja describir de manera satisfactoria por el conocimiento de una (o eventualmente varias) función z definida en S , que llamaremos, de una manera general, variable regionalizada (V. R.). La expresión “después de la tirada” significará siempre que nos localizamos, en el pensamiento, en la situación ideal en la cual se conoce el valor numérico de $z(x)$ en cada punto $x \in S$; la expresión “in praxis⁵¹”, al contrario, designa la situación, habitual en la práctica, en que solo se dispone de un muestreo parcial de la V. R., por ejemplo de los N valores numéricos $z_\alpha = z(x_\alpha)$ tomados por ella en N puntos experimentales dados, x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (se puede también, naturalmente, considerar el caso en que los z_α son valores numéricos de tales o cuales funcionales de z , por ejemplo los valores medios de la V. R. en conjuntos dados $s_\alpha \subset S$, aquel en el cual los valores medios de la V. R. están afectados de errores de medida, etc...). Pero se entiende que, aún “en praxis”, tenemos también, además de la información numérica, ciertos conocimientos de naturaleza cualitativa y estructural sobre la física del fenómeno, algunas ideas (intuitivas o rigurosas, por otra parte, eventualmente erróneas) sobre el tipo de comportamiento que es susceptible de presentar, una experiencia adquirida por haber tratado ya casos similares, las opiniones (eventualmente contradictorias) de diversos especialistas y prácticos etc... Estas diversas fuentes de información, a pesar de su naturaleza heterogénea y su desigual calidad, miden un gran peso en el momento en que se debe elegir un modelo, es decir adoptar “in praxis” una hipótesis anticipativa. Nosotros los designaremos de manera general como la información no numérica o cualitativa.

UN PRIMER CRITERIO: LA DECISIBILIDAD CON LA AYUDA DE REGIONALES

Llamaremos magnitud regional, o simplemente regional cualquier funcional de la variable regionalizada z definida en S , es decir toda magnitud cuyo valor se encuentra determinado por el conocimiento de todos los valores numéricos $z(x)$ cuando x recorre S . En un primer tiempo, por lo menos, utilizaremos las regionales como criterio de objetividad. En un marco (demasiado estricto, como lo veremos) un enunciado tiene un valor objetivo si, y solamente si, es decidable después de la tirada: es decir, si puede ser declarado, sin ambigüedad, verdadero o falso una vez que se conocen todos los valores $z(x)$, $x \in S$. Utilizaremos (provisoriamente) la decisibilidad, y no, como lo habría

⁵¹ In praxi: en la acción. Con un poco de lirismo, se puede entender como: en el fuego de la acción.

sugerido el criterio de K. R. POPPER, la única falsificabilidad, porque, después de la tirada, por definición, todos los “falsificadores virtuales” del enunciado son ellos mismos decididos, es decir clasificados unívocamente como verdaderos o falsos. En estas condiciones, por otra parte, el “valor de verdad” del enunciado (1 si es verdadero, 0 si es falso) aparece como un funcional de z , luego también es un valor regional.

En adelante, flexibilizaremos este criterio demasiado rígido, y volveremos al criterio popperiano fundado en la falsificabilidad solamente. Es que en efecto la variable regionalizada z no es de ninguna manera igual a la realidad, pero constituye por ella misma un primer modelo. No hay, originalmente, en la naturaleza, nada como los puntos $x \in S$ o los valores numéricos $z(x)$: Somos nosotros los que los introducimos, después de una primera poda o de una primera simplificación de la abundancia de la realidad. Esta diferencia original queda desapercibida la mayor parte del tiempo, pero reaparece en ciertas ocasiones críticas, cuando se hace sentir el deseo de un análisis más fino acerca de ciertos conceptos matemáticos (la continuidad y la derivabilidad por ejemplo). Volveremos sobre esta dificultad en el párrafo consagrado al modelo primario, y razonaremos, por el momento, como si tuviéramos el derecho de identificar la V. R. a la realidad.

Según este criterio, enunciados tales como: “La variable regionalizada z es la realización de una función aleatoria”, o también, más precisamente, “de una función aleatoria estacionaria” no tienen significación objetiva: No podrían ser declarados ni verdaderos ni falsos, aún si conociéramos todos los valores numéricos de z , es decir el máximo de información empírica que nos es posible adquirir. Análogamente, un enunciado como: “Hay 99 chances sobre 100 para que el valor medio de z sea superior a 2.5” no tiene significación objetiva, al menos con el criterio presente, que es un criterio de objetividad interna.

En la práctica, sin embargo, se utilizan enunciados de este género. Se tiene razón de hacerlo, y, por otra parte, se está casi obligado: Pero es necesario invocar un criterio diferente, el que hemos llamado la objetividad externa, o metodológica.

Entre los parámetros que sirven para especificar nuestro modelo, solamente tendrán significación objetiva aquellos para los cuales será posible su identificación con magnitudes regionales. Les llamaremos parámetros objetivos, y los otros serán llamados parámetros auxiliares o convencionales. Por ejemplo, en el modelo en que la variable regionalizada z es considerada como una realización de una función aleatoria, con esperanza $m = E[Z(x)]$, esta esperanza no es un parámetro objetivo, sino un parámetro convencional. Análogamente, un concepto, aún en el caso de admitir en el modelo una definición matemática, será considerado como operatorio (en un dominio de validez definido) si es posible redefinirlo por medio de un sistema de relaciones experimentalmente controlables después de la tirada (con una aproximación dada, en un dominio dado), entre valores regionales.

EL MODELO CONSTITUTIVO.

En el caso que nos ocupa, el modelo “constitutivo” es el de la función aleatoria (F. A.). Elegir este modelo significa que nosotros decidimos considerar la V. R. $z(x)$, $x \in S$ como (la restricción a S de) una realización de una F. A. $Z(x)$, que debemos especificar más adelante,

pero en este estadio se trata solamente de la noción (matemática) de F. A. en general. Se trata entonces únicamente de una elección metodológica, de una decisión que nosotros tomamos, y no de una hipótesis verificable o falsificable. Hemos visto, por otra parte, que la proposición “la V. R. z es una realización de una F. A.” está desprovista de significación objetiva. Esto no significa que esta decisión sea arbitraria. Si la tomamos, es que tenemos buenas razones para pensar que es la mejor decisión posible, la única quizás, que nos proporciona un marco conceptual en el cual podemos esperar la formulación y la mejor resolución de los problemas que nos ocupan. Antes de tomarla, nosotros habremos ciertamente ensayado, en este caso o en otros análogos, de ajustar un modelo determinístico o funcional, que nos habría, es cierto, permitido previsiones más precisas, pero siempre, sin éxito (esto se entiende, evidentemente, in praxis: después de la tirada, disponemos siempre de un modelo funcional muy preciso, a saber la función z misma. Pero, aún después de la tirada este modelo perfecto tiene el riesgo de ser mucho más complicado para que se le pueda utilizar de manera cómoda).

Esta elección no es constitutiva respecto del fenómeno mismo (que existe y que es independiente de las decisiones que tomemos respecto de su materia), ni respecto de la V. R. $z(x)$ también: ésta representa por otra parte un primer modelo constitutivo, anterior a la F. A., porque delimita y constituye un primer objeto de estudio, operando una primera reducción o simplificación en el aumento desproporcionado de la realidad. Pero esta elección (del modelo “F. A.”) es constitutiva porque funda o constituye el objeto que nosotros vamos efectivamente estudiar (que es ahora: La V. R. como una realización de una F. A.), y determina así de antemano los métodos que utilizaremos para este estudio (es decir: Las técnicas probabilísticas).

La intuición que guía esta elección fundamental es evidentemente la de la coexistencia, en el seno mismo del fenómeno, de un aspecto estructurado y de un aspecto “aleatorio” o caótico. Sospechamos la existencia de ciertos rasgos estructurales, escondidos por la variabilidad caótica que manifiesta el fenómeno a nivel local, y que excluye cualquier representación funcional simple.

Esta interpretación probabilística es relativamente efímera, y difícil de explicitar. Puede aún desaparecer completamente con una elección diferente del modelo constitutivo. Por ejemplo, podríamos elegir representar la V. R. $z(x)$ por un desarrollo del tipo:

$$z(x) = \sum a_n f_n(x) \quad (x \in S)$$

En que los f_n son funciones “ortogonales” en S (por ejemplo funciones trigonométricas, si deseamos hacer el análisis armónico del fenómeno, o bien polinomios ortogonales, etc...). Al elegir los f_n , la interpretación probabilística consistiría en considerar los coeficientes a_n como realizaciones de variables aleatorias A_n . Pero esta interpretación tiene olor a artificio. Si se conoce la totalidad de lo que se puede saber acerca de la V. R. $z(x)$, es decir los valores numéricos de los coeficientes a_n , todo lo que se puede decir de cada variable aleatoria A_n , es que una tirada al azar (única) le asignó el valor a_n . En la óptica clásica, estamos en un caso en que la inferencia estadística está completamente indeterminada (no se puede reconstituir la ley de la V. A. A_n a partir del único valor numérico a_n). En la presente terminología,

diremos, que las leyes de los A_n no corresponden a ningún concepto operatorio. Este modelo (los A_n aleatorios), en efecto, no es especificadle en términos de magnitudes regionales. En realidad, no tendríamos ninguna necesidad de probabilizar los coeficientes a_n del desarrollo de $z(x)$. Una vez que la V. R. es perfectamente conocida, estos coeficientes quedan numéricamente determinados, y constituyen entonces parámetros objetivos. Si nuestro objetivo es realizar un análisis espectral (energético), los $|a_n|^2$ nos proporcionan lo que buscamos. Si deseamos una representación simplificada, alisada, del fenómeno, podemos descomponer z en dos términos:

$$D = \sum_{n=0}^N a_n f_n \quad ; \quad R = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n f_n$$

Deriva y residuo (la elección de N es evidentemente arbitraria, pero en la práctica, y considerando el objetivo que se persigue, hay poca ambigüedad). En este estadio, decir que D representa la parte determinística del fenómeno y R la parte aleatoria, es una manera de hablar bastante vacía, porque estos dos términos son de la misma naturaleza y tienen el mismo status epistemológico. La intuición probabilística ha sido bien evacuada.

En praxis, aparecen dificultades. Sobre la base de una información limitada (algunos puntos experimentales), podríamos quizás evaluar, de manera aproximada, los primeros coeficientes a_n , por ejemplo, los que figuran en la expresión D . Pero, en ausencia de modelo probabilístico, sería más difícil apreciar el orden de magnitud del error cometido en esta estimación.

EL MODELO GENERICO TIPO Y ESPECIFICACION.

El enfoque principal ahora va a consistir en elegir, entre todas las F. A. posibles, la que vamos a encarar de representar el fenómeno al cual nos interesamos. Designaremos esta función aleatoria por Z o $Z(x)$, $x \in S$. Para hacer esta elección, disponemos por una parte información cualitativa sobre el fenómeno, por otra, de la V. R. $z(x)$, $x \in S$ (conocida solamente en forma parcial in praxis) considerada como una realización de Z . Es aquí que nosotros nos enfrentamos con el difícil problema que la terminología clásica designa con el nombre de inferencia estadística. Es común, en efecto, definir una F. A. por su ley espacial, es decir por el conocimiento de todas las leyes de distribución (en número infinito) de la forma:

$$P[Z(x_1) \leq z_1; Z(x_2) \leq z_2; \dots; Z(x_n) \leq z_n]$$

Para todos los enteros $n \geq 1$, y todas las elecciones posibles de los puntos de apoyo $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ y los números reales z_1, \dots, z_n . Ahora bien, no es posible proceder a la estimación de todas estas leyes, a partir de la información, disponible in praxis, la cual está constituida de un número finito de muestras tomadas en S . Contrariamente a lo que sucede en física por ejemplo, donde se tiene, en principio la posibilidad de repetir tan a menudo como se quiera una misma experiencia, y donde se puede así disponer de varias realizaciones de una misma

F. A. , debemos tratar aquí una sola realización muestreada en un número finito de puntos solamente. La inferencia estadística de la ley espacial (en su totalidad) no es ciertamente posible “in praxis”. Y, lo que es más importante, es fácil darse cuenta que tampoco es posible “después de la tirada”, es decir si se conoce $z(x)$ en todo $x \in S$. Del punto de vista clásico, nos enfrentamos con un problema insoluble o indeterminado. Para nosotros, considerando nuestro criterio de objetividad en términos de magnitudes regionales, concluiremos que se trata más bien de un falso problema: La ley espacial no está unívocamente definida por la V. R., y se encuentra entonces desprovista de significación objetiva.

Por consiguiente, nosotros debemos, de una manera u otra, introducir condiciones limitativas en vista de levantar la indeterminación. Del punto de vista clásico, estas condiciones limitativas son lo más a menudo consideradas como “hipótesis” (por ejemplo “la hipótesis” de estacionaridad) que, en caso de ser verificadas, permiten disminuir el número de parámetros a estimar y hacen razonablemente posible la inferencia estadística in praxis. Aún, sería necesario, que sean controlables después de la tirada. Ahora bien, del mismo punto de vista clásico, una hipótesis muy general como la estacionaridad no puede ser objeto de tests estadísticos significativos. En efecto, cualquier función z definida en un dominio acotado S puede siempre ser considerada como la restricción a S de una función periódica, cuyos períodos (según los ejes de coordenadas) definen un paralelepípedo grande respecto del campo S . Mediante una traslación por un vector aleatorio (distribuido uniformemente en el paralelepípedo de los períodos) esta función periódica es, en todo rigor, una función aleatoria estacionaria cuya función z dada en S puede, muy razonablemente, ser considerada como una realización. De aquí se deduce que, en general, ningún test para comprobar la “estacionaridad” no podrá nunca conducir a una respuesta negativa.

Esta conclusión no debe sorprendernos: Significa que “en general la estacionaridad” no es decidible⁵² en términos de magnitudes regionales, y entonces no tiene significación objetiva. Por consiguiente, entre las condiciones limitativas que introduciremos, debemos, muy cuidadosamente, distinguir entre las que corresponden realmente a hipótesis objetivas (decidibles⁵³ después de la tirada) y aquellas que constituyen solamente elecciones metodológicas. Las primeras solas, conducen esta información suplementaria substancial que nos permite sacar de los datos disponibles in praxis más de lo que está realmente contenido. Son estas las que constituyen, hablando bien, la hipótesis anticipadora, mencionada varias veces, la cual puede encontrarse como desmentida después de la tirada. Esta vulnerabilidad es la contraparte obligada de su fecundidad, y es para disminuir, lo más posible, esta vulnerabilidad que debemos elegir las in praxis según un principio de economía estricta: En la óptica monoscópica que es aquí la nuestra, una hipótesis objetiva solo debe ser adoptada in praxis si esta es absolutamente indispensable para alcanzar el objetivo que nosotros perseguimos (y, naturalmente, si no es incompatible con la información - numérica y cualitativa - que disponemos). Las segundas por el contrario, no introducen ni información positiva, ni riesgo de vulnerabilidad, señalan simples decisiones metodológicas: La regla será entonces elegir aquellas que conducen a la solución más eficaz del problema que se busca

⁵² Tampoco es falsificable: El concepto de estacionaridad esta entonces desprovisto de significación objetiva, no solamente en el sentido del criterio fuerte (decidibilidad) que usamos por el momento, sino también en el sentido Popperiano más fiable (falsificabilidad) sobre el cual volveremos más adelante.

⁵³ O al menos falsificables, cuando hayamos flexibilizado nuestro criterio.

resolver (notemos también, como cada vez que intervienen elecciones metodológicas, que la manera en la cual efectuamos estas elecciones, en cada caso particular, proviene de una metodología más general que a la larga será sometida a la sanción de la práctica, y esto no está entonces desprovisto de objetividad a largo plazo a pesar que cada elección particular queda en un sentido arbitraria).

De todas maneras, una vez introducidas las condiciones limitativas (hipótesis objetivas y elecciones metodológicas), no debemos más buscar nuestra F. A. $Z(x)$ en el conjunto infinitamente más vasto de todas las F. A. posibles, sino solamente en la familia F más restringida definida por estas condiciones, al interior de la cual el número de parámetros que definen una F. A. individual se encuentra substancialmente reducido (bien que queda, lo más a menudo, aún infinito). Naturalmente, si agregamos condiciones limitativas suplementarias, obtenemos una jerarquía de modelos o de submodelos $F_0 \supset F_1 \supset \dots$ al ir del más general al más particular. En este caso diremos que F_0 es un modelo genérico, y un submodelo $F_1 \subset F_0$, restringido lo suficiente para que la identificación de un individuo dentro de F_1 solo haga intervenir un número pequeño de parámetros (dos o tres por ejemplo, raramente más), constituye lo que llamaremos un tipo del modelo genérico F_0 .

Por ejemplo, la familia de las F. A. estacionarias y gaussianas constituye un modelo genérico F_0 . Para definir una F. A. $Z \in F_0$, es necesario darse una esperanza m y una función de covarianza $\sigma(h)$. El submodelo F_1 de las funciones aleatorias estacionarias gaussianas con covarianza exponencial $\sigma(h) = \sigma^2 \exp(-a|h|)$ constituye un submodelo o tipo de F. A. en F_0 , en la cual un individuo está identificado por tres parámetros (la esperanza m , la varianza σ^2 , y el parámetro de escala a de la covarianza).

En lugar de la F. A., se considerará muy a menudo clases de equivalencia de F. A., y se llamará también modelo genérico a una familia F de tales clases de equivalencia. Por ejemplo, en los casos de estimación lineal, solo se necesita conocer los momentos de orden 1 y 2 de una F. A. Se llamará entonces F. A. de orden 2 la clase de todas las F. A. que tienen una esperanza $m(x)$ y una covarianza $\sigma(x, y)$ dadas. Así la familia de las F. A. estacionarias de orden 2 constituirá un modelo genérico F_0 en el cual un individuo queda especificado por el conocimiento de una esperanza m y de una covarianza estacionaria $\sigma(h)$. Las F. A. estacionarias de orden 2 con covarianza exponencial constituyen entonces un tipo F_1 en F_0 , donde un individuo está definido por 3 parámetros solamente (m , σ^2 y a): Pero este "individuo" es en realidad el mismo una clase de F. A. (que no se distingue de los otros individuos): Diremos que constituye un modelo específico o una especificación del modelo genérico F_0 (y del tipo F_1).

Esta jerarquía con 3 niveles (modelo genérico, tipo y especificación) puede parecer arbitraria. En el uso se revela útil, porque, lo más a menudo, la elección del modelo genérico proviene de una simple decisión metodológica, mientras que la elección del tipo tiene casi siempre un alcance objetivo: Es en general en el momento en que se elige (in praxis) el tipo en un modelo genérico cuando se introduce la hipótesis anticipativa más vulnerable y la más fecunda. La especificación (in praxis), es decir, si se quiere, la estimación de algunos parámetros de los cuales depende el tipo, a partir de la información disponible, implica evidentemente también, riesgos serios de errores (es el problema clásico de la "inferencia estadística" pero de

naturaleza quizás menos fundamental. En efecto, una vez que hemos elegido el tipo de modelo, la estadística matemática (aplicada en el marco de este tipo) puede indicarnos si la estimación de los parámetros, puede ser considerada en condiciones razonables o no, sobre la base de la información actual. Si no lo es, esto quiere decir que no podemos resolver el problema que nos interesa en el marco de este modelo genérico y de este tipo, y debemos buscar otra formulación. Notemos también que, por razones fáciles de comprender, la información cualitativa (no numérica) interviene de manera esencial en el momento de la elección del tipo, mientras que la especificación se hace, lo más a menudo, sobre la base de la información numérica sola.

En resumen, un modelo genérico se caracteriza por su extensión y sus criterios de especificación. La extensión: Es simplemente el conjunto de las F. A. que pertenecen a una de las clases del modelo. Por ejemplo, en el modelo genérico “F. A. estacionaria de orden 2”, la extensión está constituida por todas las F. A. que admiten momentos estacionarios de orden 1 y 2. De su lado, los criterios de especificación sirven para definir (o especificar) las clases del modelo genérico, llamadas también modelos específicos. En nuestro ejemplo, un modelo específico está constituido por todas las F. A. que admiten una misma esperanza y una misma covarianza, de manera que los criterios de especificación están constituidos por el conocimiento de una constante m y de una función $\sigma(h)$ de tipo positivo. A medio camino, encontramos de nuevo la noción de tipo, o de submodelo, en el cual los criterios de especificación se reducen a un pequeño número de parámetros (por ejemplo: Las F. A. estacionarias de orden 2 con covarianza exponencial).

En lo que respecta los criterios de especificación, es importante saber si ellos tienen, o no, una significación objetiva. De este punto de vista, el ejemplo anterior no es muy feliz, porque ni m ni $\sigma(h)$ son estrictamente identificables a magnitudes regionales. Análogamente, los parámetros m , σ^2 y a , que intervienen en el tipo con covarianza exponencial, no son parámetros estrictamente objetivos (salvo, quizás, si el campo S es muy grande con respecto de $1/a$). Al contrario, veremos que el producto $a\sigma^2$ (que representa la pendiente del variograma en el origen) tiene una significación objetiva.

Del punto de vista metodológico, notemos también que adoptar un modelo genérico dado implica que se renuncia a distinguir entre ellas las diferentes F. A. que pertenecen a un mismo modelo específico, es decir que responde a los mismos criterios de especificación. Como consecuencia inmediata, solamente se tiene el derecho de utilizar en adelante otros instrumentos de trabajo los cuales son los mismos criterios de especificación. Por ejemplo, en el caso del modelo genérico “F. A. estacionaria de orden 2”, los únicos instrumentos de trabajo autorizados serán la esperanza m y la covarianza $\sigma(h)$; esto significa, por ejemplo, en lo que respecta al problema de la estimación, que debemos restringirnos a la clase de estimadores lineales afines (de la forma $\lambda_0 + \sum \lambda_i z(x_i)$), y, entre las características probabilísticas de los estimadores de esta forma, solamente utilizar sus esperanzas y sus varianzas, las cuales solas, se expresan con la ayuda de m y de $\sigma(h)$. En todo rigor, sería conveniente también ser más severo aún, y, entre los estimadores de este tipo, limitarse a aquellos cuyas características (esperanza y varianzas) son susceptibles de ser redefinidas después de la tirada en términos de magnitudes regionales. En la práctica existen acomodos de esta regla un poco un poco demasiado estricta, pero, en grueso, uno se esfuerza para satisfacerla de manera más o menos aproximada.

PRIMERAS INDICACIONES SOBRE LOS CRITERIOS DE ELECCION

No es posible, aquí, examinar de manera profunda las reglas y las precauciones que conviene observar en el momento de elegir (¡ in praxis !) un modelo, y nos contentaremos con dar algunas indicaciones resumidas. Se entiende, también, que nosotros nos localizamos decididamente en el punto de vista monoscópico, que es en general el que adopta el práctico cuando debe tomar una decisión. En una investigación más desinteresada, se apunta más bien a un modelo lo más panscópico posible, luego presentando un alto grado de especificación posible en base a la información disponible: Porque un modelo es tanto más rico y mejor adaptado para representar los aspectos más variados de la realidad cuando contiene más criterios de especificación. El práctico, por el contrario, para garantizarse mejor contra el riesgo de tomar una decisión errónea, debe debilitar lo más posible, las hipótesis anticipatorias sobre las cuales está bien obligado de fundarse. El busca, por consiguiente, el grado de especificación más débil posible compatible con la resolución efectiva del problema propuesto.

En todos los casos, el modelo debe verificar las cuatro condiciones siguientes:

- a) Debe ser operacional: Una vez especificado , el modelo debe permitir obtener una solución efectiva, numérica, del problema que se desea resolver. Resulta (lo que está bien conforme con nuestro punto de vista monoscópico) que la definición del modelo a utilizar está ligada estrechamente con la naturaleza del objetivo que se persigue. Esto es un punto metodológico fundamental, sobre el cual volveremos. El principio de economía que preside la elección de los modelos monoscópicos puede enunciarse de la manera siguiente: Los criterios de especificación deben contener todo lo que es necesario para resolver el problema planteado, y es inútil que contengan más.
- b) Debe ser especificable. En una forma un poco vaga, que trataremos de precisar en adelante, esto significa que debe ser “razonablemente” posible, sobre la base de la información (numérica y cualitativa) disponible, de elegir el tipo de modelo y de estimar los valores numéricos de los parámetros que lo especifican.
- c) Debe ser compatible con los datos (numéricos y cualitativos) en un sentido que debemos precisar progresivamente: Los problemas que plantean esta condición y la anterior son análogos (pero no idénticos) a los que la estadística clásica conoce con el nombre de “tests de hipótesis” e “inferencia estadística” de los parámetros. Ellos tienen solamente una relevancia parcial en la estadística matemática. Porque, de una parte, si un parámetro está desprovisto de significación objetiva, no debe influenciar sensiblemente la solución de un problema real (porque un problema real se enuncia y se resuelve en términos operatorios, luego con magnitudes regionales). Por consiguiente, este parámetro puede ser elegido de manera relativamente arbitraria: El hecho que la inferencia estadística no sea posible pierde una gran parte de su importancia. Por otra parte, en sentido inverso, si un “test de hipótesis” concluye a la aceptación del tipo de modelo elegido, es decir a que no es incompatible con los datos actuales, esto no significa que otra suerte de test habría conducido al rechazo. Y sobre todo, nada nos garantiza que los datos futuros, los cuales no disponemos ahora, confirmarán nuestra conclusión. El riesgo de error radical está siempre presente.

Finalmente, la verdad nos obliga a reconocer que es raro, en la práctica, que se pueda proceder a tests verdaderamente sofisticados: Sea, simplemente, porque no existen, o, si existen, debido a que son muy complicados; o también, porque su implementación necesitaría una información la cual no disponemos (para testear los momentos de orden dos, sería necesario, por ejemplo, conocer ahora los momentos de orden cuatro, etc...).

- d) Debe ser eficiente, es decir conducir a una solución correcta (en un sentido al menos estadístico) del problema planteado. Este punto solo puede, evidentemente, ser verificado después de la tirada. Pero la experiencia adquirida con la ocasión de casos análogos juega también un papel importante: La sanción de la práctica, semejante a la selección natural, elimina a la larga, sin piedad, las metodologías ineficaces y los modelos inadecuados.

En lo que respecta al punto a) , observamos la importancia decisiva de la elección del método adoptado para resolver un problema dado. El problema es lo que es: una obligación. Pero tenemos, en general, la elección para resolverlo, entre varios métodos, más o menos potentes, más o menos aproximados, los cuales necesitan también para ser implementados, más o menos prerequisites. La primera tarea a hacer es proceder, para cada método posible, a un análisis estricto de los prerequisites mínimos que el método exige realmente (esta poda revela a menudo que ciertos parámetros, que se creían indispensable, son de hecho totalmente superfluos).

Como se tiene interés en tener un modelo lo menos especificado posible, se buscará en hacer coincidir, lo más que se pueda, los criterios de especificación del modelo con los prerequisites mínimos exigidos por el método elegido: Esta es una de las reglas directrices en la elección de un modelo genérico. Los criterios de especificación deben contener los prerequisites mínimos, y es inútil que contengan otros.

Mientras más potente es un método, más prerequisites mínimos exige, y más, por consiguiente, el modelo utilizado debe ser especificado. Pero hay siempre un límite, porque los datos disponibles no permiten nunca sobrepasar un cierto grado de especificación. De donde la segunda regla, relativa esta vez a la elección del método a utilizar para resolver un problema dado: Elegir el método más potente entre aquellos cuyos prerequisites mínimos pueden ser razonablemente especificados a partir de los datos disponibles.

La tercera regla es, evidentemente, la de la no incompatibilidad del modelo con los datos experimentales y nuestra intuición física del fenómeno. Al contrario, su compatibilidad con la realidad misma, nunca está absolutamente asegurada, aún si el examen crítico de la posibilidad de especificación (es decir, de la estimación de las magnitudes regionales requeridas) ha conducido a una respuesta positiva. Nunca estamos completamente al abrigo de malas sorpresas. Pero no tenemos elección, es necesario, en un momento dado, hacer una hipótesis que permita unir, de una manera u otra, la estructura de la parte desconocida del fenómeno con la de los datos disponibles.

EL MODELO PRIMARIO.

En las páginas anteriores, hemos razonado como si fuera posible identificar la realidad con la simple colección de los valores numéricos de la variable regionalizada. Pero esto no agota nunca la riqueza de lo real. Hay siempre otra cosa además de los valores numéricos puntuales. Una cadena de montañas puede, evidentemente, ser definida como una colección de cotas topográficas, pero este punto de vista, analítico y exhaustivo, no es forzosamente el más interesante: También existe la estructura geológica de conjunto de la cadena, su historia, su tectónica, etc... El mapa topográfico simple no basta, y debemos introducir tantas V. R. como magnitudes geológicas a considerar, debemos también conservar constantemente en la memoria, el aspecto evolutivo del fenómeno, su génesis, aún si la observación directa no nos proporciona nada de esto. En un sentido, entonces, lo real es inagotable. Sin embargo, los problemas - técnicos y modestos - que tenemos en vista son de naturaleza estimatoria o de interpolación, y se acomodan bastante bien a una reducción de toda la riqueza de la realidad al conocimiento de una o varias funciones z en S (las V. R.). El resto - las ideas que podemos hacer acerca de la génesis y la estructura del fenómeno, y, más generalmente la intuición física que nos formamos - continúa a jugar un papel muy importante. Es, en general, en este tesoro arquetípico que nosotros tendremos chances de encontrar los esquemas o los principios motores de modelos verdaderamente adaptados. Nos abstendremos entonces del purismo que consiste en identificar lo real con una colección de valores numéricos. Primero, porque los valores numéricos no son lo real, sino una primera imagen (analíticamente muy rica, estructuralmente muy pobre) de éste. Luego, porque los esquemas de la intuición física nos proporcionan exactamente el hilo director que necesitamos para orientarnos en el problema de la elección de un modelo. Pero la reducción analítica de lo real a una colección de valores numéricos, sola, proporciona las bases de una metodología operatoria. Entre los diferentes modelos posibles, y los conceptos que se les puede asociar, retendremos como objetivos (no metafísicos) solamente los que son enteramente explicitables en términos de magnitudes regionales (es decir: Determinados por el conocimiento de una o varias V. R. en el dominio S).

Esto es aquí un poco como en lógica: Se sabe bien que, en un concepto, hay mucho más que su extensión, a saber el elemento motriz, el movimiento dialéctico, etc... Pero el tratamiento formalizado riguroso solo es posible si se acepta identificar el concepto a su extensión. Solamente a este precio evitaremos las ilusiones metafísicas obteniendo un formalismo operatorio. El contenido rico del concepto, fascinante e inembargable, desapareció, en apariencia, para dar lugar a una metodología rigurosa, operatoria, helada, y un poco aburrida. Pero, en realidad, nada se ha perdido. Porque el elemento motriz del concepto continúa, secretamente, inspirando nuestros trámites (y sin él, sin duda, no emprenderíamos nada). Pero estos trámites, y sus resultados, son enseguida traducidos en la lengua del formalismo más depurado, el más riguroso, el único oficialmente reconocido.

La variable regionalizada no es idéntica a la realidad, pero constituye ya ella misma un modelo primario. Esto es porque: El criterio de simple decisibilidad en términos de regionales se revela insuficiente cuando se hace sentir el deseo de un análisis más fino: Es necesario entonces volver al criterio Popperiano, fundado sobre la falsificabilidad solamente.

Esta necesidad se manifiesta de manera imperiosa, cada vez que es necesario considerar la significación física de las magnitudes que manipulamos, y los límites al exterior de los cuales los conceptos que les corresponden cesan de ser operatorios. De hecho, no existen en la naturaleza ni puntos $x \in S$, ni valores numéricos $z(x)$ unívocamente afectados en cada punto x . Para un físico, en efecto, no hay puntos, en sentido matemático, sino solamente elementos de volumen, pequeños con respecto de la escala a la cual se ha elegido trabajar, pero grandes respecto de las escalas inferiores para las cuales el fenómeno que se estudia cesa de ser definible en términos operatorios. Si, por ejemplo, si se supone que $z(x)$ representa la ley en un metal en un “punto” x dado de un yacimiento minero, el volumen elemental δv de referencia será lo más a menudo elegido como grande respecto de las dimensiones granulométricas. Si se quiere estudiar el fenómeno a esta última escala, lo cual es posible, la ley $z(x)$ tomará una forma de todo o nada, casi nula en los granos de estéril, casi constante en los granos mineralizados. En todos los casos, dependerá de la constitución mineralógica del mineral. Pero, aún a esta escala granulométrica, los volúmenes elementales δv , pequeños respecto de los granos, quedan muy grandes respecto de las dimensiones atómicas o infra atómicas: A esta última escala, por otra parte, solo se podría observar un caos de funciones de ondas, el modelo usual del espacio euclidiano con 3 dimensiones cesaría de ser operatorio y ahora ni los puntos $x \in S$ ni la ley $z(x)$ están unívocamente definidos.

Así, como todo concepto físico, el de V. R. está sometido a limitaciones bastante estrictas fuera de las cuales cesa de ser operatorio. Desde este punto de vista, no debemos tomar al pie de la letra enunciados puramente matemáticos respecto de la continuidad y derivabilidad de la V. R. o más generalmente las propiedades topológicas que hacen intervenir todas las vecindades, por pequeñas que sean, de un punto x dado. Se trata aquí, siempre, de características del modelo, y no, en todo rigor, de propiedades de la realidad física, porque, fuera de un cierto nivel infinitesimal, el fenómeno de alguna manera se desvanece o cambia de naturaleza.

Sin embargo, el contraste de las escalas es tal que podemos, en primera aproximación, despreciar estos efectos de imprecisión (que se manifiestan de alguna manera a nuestra escala de trabajo) y considerar en primera aproximación, el modelo “V. R.” como bien representativo de la realidad. Pero, aún así, subsisten serias dificultades. En efecto, el conjunto de los valores numéricos $\{z(x), x \in S\}$ es entonces infinito, y por consiguiente no es accesible a un conocimiento experimental exhaustivo. Así, un enunciado como “Z es continuo o derivable en el punto x ” el cual hace intervenir una infinidad (la cual es también no numerable) de puntos y de valores numéricos, escapa, en todo rigor, a cualquier posibilidad de control experimental efectivo, y por consiguiente debe ser considerado como desprovisto de significación objetiva. De hecho, cualquiera que sea la verdadera función z (en el caso en que sea definible), no podemos encontrar una función Φ continua, derivable, etc... que se le aproxime lo suficiente para que sean experimentalmente coincidentes. Porque solo se conocerá realmente los $z(x_i)$ en una malla $\{x_i\}$ lo más cerrada que se quiera, pero siempre finita, y se podrá siempre interpolar con una función Φ tan regular como se quiera.

Naturalmente, del punto de vista físico, la noción clave es aquí la de escala. La función Φ así elegida será muy regular (derivable, etc... en el sentido estricto de los matemáticos), pero

solamente a la escala de la malla muy cerrada por los $\{x_i\}$: Esta muy alta micro regularidad no prohíbe para nada para que esta función se comporte, prácticamente, a una escala más elevada, como un puro ruido blanco. Si se considera el fenómeno a esta escala, sería físicamente falso (a pesar que matemáticamente verdadero) considerar la función Φ como continua y derivable.

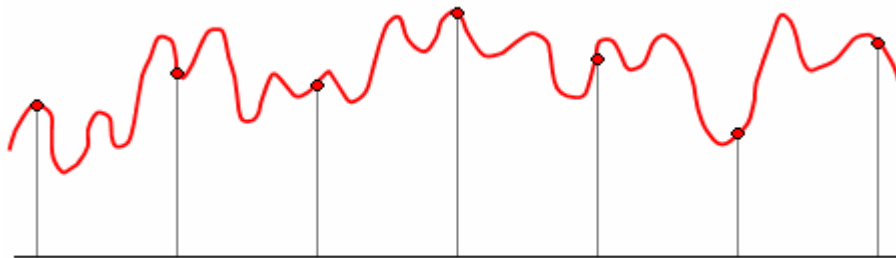


Figura 1. Es matemáticamente correcto pero físicamente incorrecto considerar esta función como derivable.

Así, las nociones matemáticas más usuales, como la continuidad, la derivabilidad, etc..., deben ser objeto de una reconstrucción operatoria. Para tratar un problema que se plantea (por ejemplo) a la escala del metro o de la centena de metros, basta con conocer $z(x)$ en una malla centimétrica, o mejor, de conocer, con esta malla, la regularidad de $z(x)$ en un soporte centimétrico: Los datos físicos, en efecto, corresponden a pequeñas integrales más que a valore estrictamente puntuales: Se puede así, en principio, obtener una definición físicamente exhaustiva de la V. R. , por medio de un número, quizás elevado, pero finito de valores numéricos, experimentalmente medibles. Es a esta escala (centimétrica por ejemplo) que se debe proceder a la redefinición operatoria de los conceptos matemáticos.

UMBRAL DE ROBUSTEZ Y UMBRAL DE REALISMO.

La “dialéctica” de la V. R. y del modelo presenta enseguida otro aspecto importante: Es que el modelo, una vez elegido, va tender a vivir de su propia vida, lo que se nos escapa en parte, y que solo coincide en parte con nuestra intuición física de la realidad y las características de las V. R. que hemos elegido. En efecto, el modelo tiende a desbordar la realidad, en el sentido que, si nosotros nos entregamos sin espíritu crítico al formalismo matemático, si cedemos a la tentación del paso al límite, nos dejaremos arrastrar más allá del dominio donde el modelo es operatorio. Dicho de otra manera, ciertos resultados sacados del modelo por simple deducción matemática corresponden a propiedades reales, otras no: Y esto, notémoslo bien, aún si el modelo ha podido ser especificado después de la tirada (sobre la base de todos los valores numéricos de la V. R.). Este umbral de objetividad más allá del cual no se tiene el derecho de seguir con la deducción matemática, con el riesgo de engendrar artefactos y falsos problemas, es a veces difícil de definir con precisión, pero se concibe bien que existe siempre, y que el sentido físico del investigador juega, en la práctica, un papel importante. La situación se agrava in praxis del hecho que corremos el riesgo de equivocarnos adoptando hipótesis anticipatorias objetivas que se pueden revelar como falsas después de la tirada. Aparece así, in praxis, un umbral de robustez el cual no se debería atravesar, o quizás, dos umbrales, porque se puede distinguir una robustez de tipo y una robustez específica, ligadas respectivamente a

la posibilidad de errores cometidos en la elección del tipo y en la estimación de los parámetros que los especifican. De una manera general, una operación puede ser dicha robusta (respecto de una causa de error) si su resultado está débilmente afectado por esta causa de error. La robustez específica puede ser estudiada de manera cuantitativa, porque siempre se pueden hacer variar los parámetros del modelo respecto de valores elegidos, y examinar en qué medida estas desviaciones influyen los resultados de una operación dada. La robustez de tipo, ligada a la incertidumbre de una elección estructural, es más difícil de estudiar, porque existen, en general, un número ilimitado de tipos imaginables, casi igualmente compatibles con los datos y la información disponible. Aquí también, el buen sentido, la intuición física y la experiencia adquirida tienen su palabra que decir.

En lo que respecta a estos umbrales, lo que importa antes de todo, es conservar siempre en el espíritu la distinción clara entre las características del modelo y las propiedades físicas del fenómeno real. En el marco de la interpretación probabilística, esto equivale, más o menos, a distinguir cuidadosamente la F. A. misma (noción matemática), definida por su ley espacial, o caracterizada simplemente en la práctica, por una función de covarianza o un variograma por una parte, y por otra parte, la realización particular, única y limitada a un dominio S , conocida en su totalidad (después de la tirada), o más a menudo (in praxis) en parte solamente. Esta realización no es otra cosa que la V. R. inicial, reinterpretada en un marco probabilístico. Pero aún en este marco, de ninguna manera existe una identidad entre la F. A. y su realización: si el modelo teórico es estacionario y ergódico, del solo hecho que la realización está restringida a un dominio S acotado, no hay identidad entre las magnitudes regionales (interpretadas ahora como realizaciones de variables aleatorias) y sus valores “teóricos” en el modelo, que son las esperanzas correspondientes. Ahora bien, solo las magnitudes regionales, calculadas sobre la realización, representan la realidad física y tienen una significación objetiva. Su contraparte teórica es solamente un parámetro convencional (no objetivo, a menos que, por chance, este parámetro coincida casi seguramente en el modelo con el valor regional correspondiente).

Se echará de menos quizás que hemos puesto el acento sobre los aspectos pragmáticos, en detrimento de los aspectos teóricos del enfoque topo-probabilístico. Es innegable que los problemas evocados en estas páginas, los métodos y modelos que aquí se describen, parecen mucho más próximos del polo monoscópico e instrumental que del polo especulativo y panscópico. Pero la manipulación solo es eficiente en la medida en que el modelo es, de una manera u otra, grosso modo adaptado a la realidad o al aspecto de la realidad del cual nos interesamos. Los criterios de especificación de nuestros modelos genéricos, o más bien, las magnitudes regionales que les corresponden (y que podemos siempre considerar por sí mismas independientes de la interpretación probabilística que nosotros elegimos) expresan también propiedades estructurales del fenómeno real, y poseen por sí mismas una rica significación física. Así, el comportamiento de un variograma en la vecindad del origen expresa la mayor o menor regularidad (continuidad) de una variación espacial. El variograma del modelo teórico es, es cierto, desprovisto de existencia empírica, pero no es lo mismo para su versión regional. Ciertamente, el variograma regional no está dado tal cual. Resulta de una primera reducción, o modelización del fenómeno, al cual al inicio le dimos el status de V. R., luego de una manipulación efectuada sobre los datos numérico así fabricados (o extraídos) a partir de la realidad. El es real, pero mas bien de una manera técnica que natural. Resulta de la aplicación de un esquema (o procedimiento de construcción). Los elementos motrices de este

esquema salieron de nuestra intuición física del fenómeno, lo cual nos sugiere el tipo de modelo (probabilístico o no, etc...) al cual debemos recurrir. Enseguida, el modelo teórico se anima de vida propia (que es la de una ficción reguladora), y nos sugiere de vuelta la elección de la forma de instrumentos matemáticos (los criterios de especificación) más adaptados a dar una representación numérica precisa de las características físicas que han retenido nuestra atención. La elección del modelo juega entonces un papel heurístico capital, pero, en definitiva, solo sirve de intermediario. Porque, finalmente, nosotros efectuamos manipulaciones numéricas sobre datos numéricos. Cualesquiera que sean las intuiciones físicas y las interpretaciones teóricas que han conducido la elección de estas operaciones, estas manipulaciones pueden y deben ser analizadas por si mismas: Nuestros problemas se reducen siempre a elegir magnitudes regionales y a (ensayar de) estimarlas sobre la base de una información limitada. De este punto de vista, no hay milagro: cualquiera que sea la riqueza de nuestra intuición y la sutileza de nuestros modelos, son siempre los mismos datos numéricos los que nosotros amasamos y moldeamos indefinidamente, sin que estas operaciones puedan, por si solas, engendrar la menor información suplementaria. Así como in praxis existe un umbral de robustez, debe existir un umbral de realismo que sería ilusorio pretender sobrepasarlo. Sobre la base de una información muy pobre o limitada, se podrá formar una solución aproximada de ciertos problemas simples. Pero se deberá renunciar honestamente a resolver otros problemas más complejos. Reconocer la existencia de estos umbrales de robustez y de realismo, y saber apreciarlos correctamente en cada caso particular, esto es lo limpio del buen práctico, y este sentido físico es en definitiva mucho más importante que la teorización matemática.

UN EJEMPLO DE CONTROL DE LA ROBUSTEZ DE TIPO.

He aquí un ejemplo en el cual se puede controlar la influencia de la elección del tipo de modelo sobre el resultado final que se tiene en vista. El test se hará sobre la “varianza de extensión” de un punto en un segmento de recta o un cuadrado, es decir la varianza del error cometido al estimar la ley media del segmento o del cuadrado a partir de la muestra puntual. Esta varianza se expresa con la ayuda de un modelo de covarianza o de variograma en el cual se debe elegir el tipo y especificar los parámetros. Construí mi ejemplo de manera de obtener un variograma presentando, en la vecindad del origen, un comportamiento no habitual, y envié a distintos geoestadísticos el texto que se leerá más adelante: Los enfoques sucesivos corresponden a la práctica real. El uso, en particular, de pedir cruces de sondajes suplementarias a una malla más cerrada, para precisar el comportamiento del variograma en la vecindad del origen es totalmente corriente, y los explotadores, a menudo acceden a esta petición del geoestadístico, a pesar de los gastos que esto implica. Es que, sin ser geoestadístico, un práctico comprende perfectamente la importancia de la estructura en las cortas distancias, y la necesidad de disponer de una información relativa a esta escala. Este es el texto:

“Test de robustez”

“Esto no es una trampa, sino un test para evaluar la robustez de nuestros métodos de ajuste de variograma. Yo pido a cada destinatario ajustar un modelo de variograma, y dar las varianzas de extensión correspondientes a partir de los valores numéricos siguientes:

A

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0.63 \\ \gamma_2 &= 0.80 \\ \gamma_3 &= 0.89 \\ \gamma_4 &= 0.94 \\ \gamma_5 &= 0.97 \\ \gamma_6 &= 0.99\end{aligned}$$

Más allá del paso 6, los valores difieren poco de 1. La unidad de largo elegida es igual a la malla de sondajes (es decir $u = 180$ m para fijar las ideas). El número N de sondajes es grande (varias centenas), de manera que los puntos experimentales pueden ser considerados como muy buenos.

“Le pido a cada uno de hacer su ajuste exactamente de la manera como él procede en la práctica real, y de hacerlo de manera independiente de los otros geoestadísticos y sin dejarse influenciar por ellos”

“Con el modelo ajustado, le pido calcular la varianza de extensión de un punto central en el segmento unidad y en el cuadrado unidad”

B

“A solicitud del geoestadístico, se ejecutó una cruz de sondajes con malla $1/9$ (es decir 20 m) en una zona bien representativa, y proporciona:

$$\begin{aligned}\gamma_{1/9} &= 0.25 \\ \gamma_{2/9} &= 0.34 \\ \gamma_{3/9} &= 0.40 \\ \gamma_{4/9} &= 0.46 \\ \gamma_{5/9} &= 0.50\end{aligned}$$

¿Modificaría usted su ajuste inicial? ¿Cuáles son las nuevas varianzas de extensión?

C

“Luego se cierra la malla, que pasa a 90 m, es decir $1/2$ de nuestra unidad, y se encuentra:







$$\gamma_{1/2} = 0.49$$

¿Varianza de extensión para la malla $1/2$?

Nota: Estos valores numéricos están deducidos de un esquema de tipo no habitual. El interés del test es entonces doble: Pondrá en evidencia la dispersión de las evaluaciones individuales, y sus desviaciones con las que se deducen del esquema en cuestión (estos últimos no son los “verdaderos” valores, porque, en un caso real, nada nos garantiza que este modelo particular sea el “verdadero” modelo).”

Las 10 respuestas que recibí presentan ajustes bastante y notablemente diferentes. En general, el primer modelo era de tipo “efecto de pepita” más un esquema exponencial o esférico (o también dos esféricos superpuestos). Después de la obtención de la cruz de sondajes, el modelo se enriquece y queda sea: pepita + esférico + esférico o pepita + exponencial + esférico o pepita + exponencial + exponencial (y también pepita + 3 esquemas esféricos) también, por otra parte, bastante diferentes de un modelo a otro: Otros modelos fueron propuestos, uno de ellos difería un poco del mío. Gráficamente, sin embargo, estos diferentes ajustes fueron poco diferentes y conducen a valores bastante poco dispersos para las varianzas de extensión.

Estos valores se dan a continuación. Para el primer modelo, ajustado sin tener en cuenta la cruz de sondajes, los valores son bastante dispersos, y en general, demasiado dispersos: En ausencia de información de micro estructuras, el geoestadístico elige, por razones de seguridad, la hipótesis de un efecto de pepita bastante fuerte, luego sobre estima deliberadamente las varianzas de estimación. Una vez realizado el reajuste con la ayuda de la cruz de sondajes, los modelos utilizados, a pesar de ser muy diferentes, conducen prácticamente a los mismos valores numéricos.

Modelo A		Modelo B (malla = 1)		Modelo C (malla = 1/2)	
					
0.377	0.405	0.309	0.364	0.231	0.272
0.377	0.412	0.321	0.381	0.243	0.288
0.330	0.370	0.330	0.370	0.232	0.284
0.372	0.405	0.307	0.370	0.227	0.273
0.409	0.430	0.302	0.376	0.232	0.262
0.370	0.405	0.303	0.367	0.225	0.272
0.396	0.430	0.303	0.380	0.227	0.265
0.353	0.388	0.304	0.364	0.225	0.262
0.347	0.372	0.306	0.368	0.237	0.266
0.369	0.402	0.313	0.346	0.232	0.272

LA ROBUSTEZ RESPECTO DE LOS DATOS.

De una manera general, una operación es robusta si su resultado queda poco influenciado por los errores que hemos podido cometer, sea en la toma de los datos experimentales, sea en la elección (o) en la especificación del modelo genérico. Hay entonces tres tipos de problemas y tres tipos de robustez a considerar: La influencia de los datos dichos aberrantes, la de un error en la especificación del tipo de modelo, finalmente la de un error en el tipo mismo, y correlativamente: Robustez de los datos, robustez específica, robustez de tipo. Hemos hablado lo suficiente de las dos últimas. Nos queda por decir algunas palabras sobre la primera, es decir examinar la robustez de los datos y el problema de los datos “aberrantes”.

Entre los datos disponibles, algunos pueden estar manchados con errores groseros (errores de transcripción, punto decimal mal puesto, medidas falsas por una razón u otra) y deben en lo más posible ser eliminados. Es a menudo cómodo, cuando los datos son numerosos, disponer de procedimientos automáticos, los cuales permiten individualizar las medidas “sospechosas” candidatas a una eliminación eventual. Procedimientos muy simples (histogramas, nubes de correlación) proporcionan a menudo muy buenos resultados. Pero un dato “sospechoso” no es necesariamente falso o “aberrante” y no debe nunca ser eliminado automáticamente. Este dato puede muy bien reflejar el comportamiento real del fenómeno (ejemplo de la figura 3).

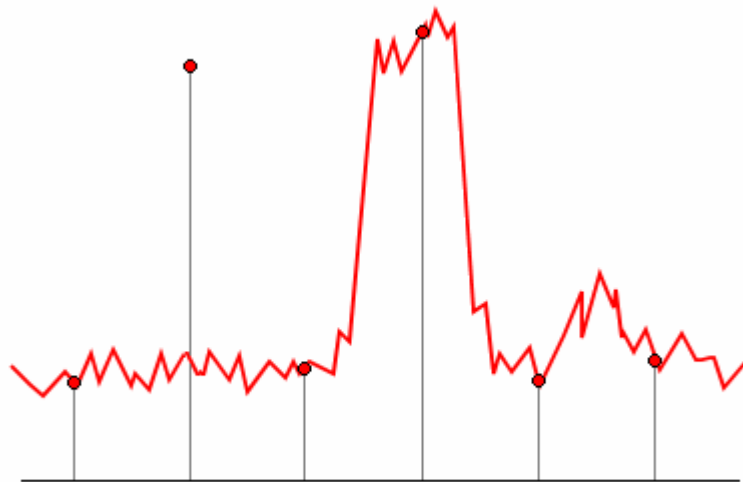


Figura 3: Datos sospechosos no son necesariamente erróneos.

Que un cierto comportamiento nos parezca “anormal” o “aberrante” es de nuestra parte un juicio puramente subjetivo. La realidad es lo que es, pero el modelo (más o menos estacionario) que nos sirve, implícitamente, de piedra de toque⁵⁴ puede ser malo. No es aquí, el dato que es aberrante, sino más bien la estacionaridad que está puesta en falta. Eliminar este dato sería un error, que nos sacaría en adelante toda posibilidad de prever la ocurrencia de accidentes similares en zonas no informadas.

⁵⁴ Nota del traductor: La piedra de toque es un talismán que puede convertir cualquier metal en oro.

La robustez de los datos ha sido objeto de estudios muy profundos, cuyos resultados son, sin duda, en parte, transportables a los modelos topo-probabilísticos: Por otra parte, uno no se trata de premunir contra el efecto de los datos aberrantes, sino también contra la influencia muy exagerada que ejercen a veces, sobre los estimadores usuales, los valores experimentales (muy fuertes o muy débiles) que se manifiestan cuando se tienen leyes de distribución muy alejadas del tipo gaussiano. Por ejemplo, en el caso de ciertas distribuciones simétricas respecto de un valor central θ , se muestra que la mediana es un estimador de θ más robusto (menos sensible al efecto de valores extremos) que la media aritmética.

Sin embargo, si se ha mejorado la robustez respecto de los datos, se ha, quizás, deteriorado la robustez respecto del modelo (debemos ahora “suponer” que la ley es simétrica, etc...). Esta es una objeción seria contra estos estimadores robustos, sofisticados, que nos presenta la estadística matemática: Ellos son a menudo, menos robustos, con respecto al modelo, que los estimadores más simples. Además, estos fueron siempre concebidos para estimar un parámetro (en general no objetivo) del modelo (un valor central, etc...) y no una magnitud regional. De manera que no es ciertamente posible transponerlos tal cual en nuestros modelos topo-probabilísticos. Sería necesario estudiar el problema más general de la robustez de la estimación de una magnitud regional a la vez con respecto de los datos, del tipo y de la especificación. Esto no es ciertamente un problema simple.

Nos damos cuenta que un estimador robusto (respecto de los datos) como la mediana, no es necesariamente adecuado para la estimación, digamos, por ejemplo, de la media regional

$\bar{z} = (1/S) \int_S z(x) dx$, al observar esto: Nuestro estimador, con la forma:

$$z^* = \Phi(z_1, \dots, z_n)$$

Si es óptimo en un sentido cualquiera, debe ciertamente verificar la condición siguiente: Si la malla constituida en S por los puntos experimentales se aprieta más y más (N tiende a infinito y los puntos experimentales cubren en el límite el campo S entero), el estimador z^* debe converger hacia el valor real \bar{z} , y la variable z^* que se le asocia en el modelo debe converger casi seguramente hacia \bar{z} : En efecto, cuando todos los puntos son conocidos, el mejor estimador de \bar{z} es \bar{z} mismo, el cual ahora es experimentalmente accesible. Ahora bien, manifiestamente, un estimador como la mediana, por robusto que sea, no verifica esta condición. Entonces, la mediana es un mejor estimador que la media aritmética cuando la malla es grande y el número N de puntos experimentales es pequeño, pero llega ciertamente un momento en que la malla es más cerrada y N más grande, en que la conclusión se da vuelta: La media aritmética se recupera, por lo menos como un estimador de la regional \bar{z} .

CAPITULO V

HACER EL ORDEN

Cuando se ha elegido un modelo (genérico) queda por hacer el orden, yo quiero decir examinar, entre los diversos criterios y parámetros específicos del modelo, cuales corresponden a realidades y cuales juegan un papel puramente convencional. Para comodidad de la exposición, distinguiré dos etapas en esta búsqueda de la objetividad. La primera que corresponde al orden propiamente dicho, es examinada en este capítulo. Es una crítica interna del modelo, efectuada poniéndose en el punto de vista del modelo mismo. Consiste en buscar, entre las variables aleatorias que el modelo asocia a las diversas regionales, las que, en el modelo, coinciden casi seguramente (= con una probabilidad unidad) con su esperanza matemática. Este punto de vista nos conducirá a examinar dos nociones importantes: Una clásica, que es la ergodicidad ; la otra, menos clásica, pero no menos importante para nuestro propósito, recibirá el nombre de microergodicidad. Será necesario naturalmente también examinar como las cosas se presentan in praxis, es decir abordar el problema de la estimación de estas magnitudes objetivas (es decir regionales) a partir de una información fragmentaria. Después de este orden, o crítica interna del modelo, vendrá la segunda etapa, la de la reconstrucción de los conceptos y de la reformulación del modelo mismo en términos operatorios. Este será el objetivo de la tercera parte.

LAS FLUCTUACIONES DE LAS REGIONALES.

Desde el punto de vista del modelo, la variable regionalizada z , definida en el campo S , se considera como una realización de una función aleatoria Z . Pero esto no significa de ninguna manera que la propiedad epistemológica haya pasado de la primera a la segunda: Siempre es la V. R., y las regionales que se deducen, las que fundan la objetividad. En caso de “desacuerdo” entre el modelo y la V. R., es esta última la que tiene “la razón”: El modelo, mismo, no dice nada más que lo que sugieren las decisiones (quizás torpes) y las hipótesis (quizás falsas) que han guiado su elección. Por ejemplo, en un modelo no estacionario, se interpreta a menudo la esperanza:

$$m = E[Z(x)]$$

De la F. A. en el punto x como representando la “tendencia” o la “deriva” de la variable regionalizada. Esta interpretación es a veces útil. Pero, al menos que se haya reconstruido esta noción en términos operatorios, solo se trata de una característica convencional del modelo. No sería necesario creer, en particular, que $m(x)$ represente el “verdadero” valor de la V. R., cuyo valor numérico real $z(x)$ se desviaría por consecuencia de “un error de la naturaleza”. La situación es, sin embargo, en parte diferente cuando los valores que se dispone in praxis son medidas, afectadas de error, de una V. R. inaccesible.

Lo que acabamos de decir a propósito de los valores puntuales se aplica de la misma manera a todas las magnitudes regionales. Consideremos, en efecto, una regional dada $a = a(z)$, en que

a es una funcional de la variable regionalizada z en S . En adelante, consideraremos los dos ejemplos simples siguientes: El de la media (regional) de la V. R. en su campo S , es decir:

$$(1) \quad \bar{z} = \frac{1}{S} \int_S z(x) dx$$

Y el del variograma regional γ_R : se trata de una función la cual proporciona, para cada valor del argumento vectorial h , el $\frac{1}{2}$ valor medio del cuadrado de la diferencia de los valores tomados por la V. R. en dos puntos x y $x+h$, es decir:

$$(2) \quad \gamma_R(h) = \frac{1}{2K(h)} \int_{S(h)} [z(x+h) - z(x)]^2 dx$$

Como los dos puntos x y $x+h$ deben pertenecer a S , el dominio de integración no es S mismo, sino la intersección de S con el conjunto que se deduce al trasladar S por el vector $-h$, dominio designado por $S(h)$. Respecto a $K(h)$, este representa la medida (superficie, si el espacio es de dos dimensiones, volumen si es de tres, etc...) del dominio $S(h)$ de integración. Como el uso reserva la notación γ al variograma “teórico”, es decir (en el modelo “F. A. intrínseca”) a la esperanza:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[(Z(x+h) - Z(x))^2 \right]$$

Yo he puesto la letra R como índice en $\gamma_R(h)$ para recordar que se trata de la magnitud regional asociada al variograma. No se debe decir que γ_R constituye la versión regional de γ , lo que sería invertir la prioridad epistemológica, sino más bien al contrario que γ es la versión teorizada de γ_R .

Si ahora, en la definición $a = a(z)$, sustituimos la F. A. Z por la V. R. z , obtenemos una variable aleatoria $A = a(Z)$, en lugar de una magnitud numérica a . En el marco de la interpretación probabilística, a se considera entonces como una realización de la V. A. así definida, $A = a(Z)$. Esto no significa de ninguna manera que la esperanza $\alpha = E(A)$ de esta V. A. (que es una característica del modelo) deba ser considerada como “más verdadera” o más “real” que el valor efectivo $a = a(z)$ (el único objetivo), lo que consistiría, en suma, en admitir que la realidad está equivocada y que el modelo tiene razón. En nuestro primer ejemplo, la media regional \bar{z} se asocia a la V. A. \bar{Z} cuya esperanza (si el modelo elegido es estacionario) es igual a la esperanza constante $m = E(Z(x))$:

$$\bar{z} \rightarrow \bar{Z} = \frac{1}{S} \int_S Z(x) dx ; E(\bar{Z}) = m$$

Análogamente, al variograma regional γ_R , se le asocia, en el modelo, la variable aleatoria Γ_R cuya esperanza, en el modelo “F. A. intrínseca”, es igual al variograma “teórico” γ :

$$\gamma_R(h) \rightarrow \Gamma_R(h) = \frac{1}{2K(h)} \int_{S(h)} [Z(x+h) - Z(x)]^2 dx$$

$$E[\gamma_R(h)] = \gamma(h)$$

No hay que olvidar nunca que α , m , $\gamma(h)$ etc... son parámetros del modelo y dependen de la manera en que este ha sido elegido: Son, en efecto, en general, parámetros convencionales, sin significación objetiva. En todo rigor, el único caso en que α es un parámetro objetivo es aquél en que se tiene casi seguramente (en el modelo) $A = \alpha$, es decir justamente el caso en que el valor teórico α coincide con el valor objetivo a (la estimación de α sobre la base de una información fragmentaria plantea otro tipo de problema).

Conforme a la terminología habitual, convengamos en llamar fluctuación a la $V. A.$ (del modelo) igual a $A - \alpha$, cuya desviación $a - \alpha$ entre la magnitud regional a y la característica α del modelo que se la asoció es interpretada como una realización. Si el parámetro α tiene un sentido objetivo, entonces, por definición, la fluctuación es casi seguramente igual a 0 en el modelo. Inversamente, si la fluctuación no es casi seguramente igual a 0, esto significa que el parámetro α no es objetivo.

A la fluctuación $A - \alpha$, de esperanza nula, se le asocia (en el modelo) otras características, por ejemplo su varianza $\text{Var}(A - \alpha)$ etc... Convengamos en decir que $\text{Var}(A - \alpha)$ es la varianza de fluctuación (en el modelo) de la magnitud regional. Si esta varianza es grande, no debemos decir que “la inferencia estadística” del parámetro α es difícil o mala. Debemos decir, al contrario, que este parámetro tiene poca, o no tiene, significación objetiva. En efecto, A , o más bien su realización a - agota completamente el contenido objetivo que se puede atribuir a la operación definida por la aplicación de la funcional a a la $V. R. z$. En otras palabras, la varianza de fluctuación da una medida, no de la dificultad de la “inferencia estadística” del parámetro α del modelo, sino más bien, de la falta de significación objetiva de este parámetro.

En nuestro primer ejemplo, si se designa por $\sigma(h)$ la covarianza centrada (del modelo estacionario), se demuestra que la varianza de fluctuación de la media local es (en el modelo):

$$(3) \quad \text{Var}(\bar{Z} - m) = \frac{1}{S^2} \int \sigma(h)K(h)dh$$

Y es solamente en la medida en que esta varianza sea muy pequeña, que la esperanza m (parámetro convencional) toma una significación objetiva (aproximada). Discutiremos ente punto en el párrafo consagrado a la ergodicidad.

De la misma manera, en el modelo intrínseco, la fluctuación del variograma regional admite una varianza, cuya expresión explícita hace necesariamente intervenir los momentos de orden 4 de los incrementos de la $F. A.$ En el caso (particular) en que estos incrementos obedecen a leyes de Gauss (modelo “ $F. A.$ intrínseca gaussiana”), se demuestra que esta varianza de fluctuación está dada por la expresión:

$$(4) \text{Var}[\Gamma_R(h) - \gamma(h)] = \frac{1}{2[K(h)]^2} \int_{S(h)} \int_{S(h)} [\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2 dx dy \quad 55$$

Cuando el módulo $|h|$ del vector h no es pequeño, esta varianza de fluctuación puede llegar a ser enorme ⁵⁶. Esto no quiere decir que la “inferencia estadística” del variograma sea imposible; sino solamente que este variograma γ fuera de la vecindad del origen, tiene una significación convencional. Consecuencia importante: Entre las características del modelo (las varianzas de estimación por ejemplo) que se expresan con la ayuda del variograma γ , solo podremos utilizar, para resolver un problema real (por ejemplo la estimación de \bar{z}), aquellas que solo dependan, esencialmente, del comportamiento del variograma γ para los valores pequeños de $|h|$, y relativamente están poco afectadas por la forma que presenta esta función fuera de una cierta vecindad del origen. Esta condición de robustez, sola, nos garantiza la objetividad de las magnitudes que nosotros calculamos con la ayuda del variograma. Al contrario, para $|h|$ pequeño, la varianza definida en (4) es, en general, muy pequeña, y esta circunstancia nos permitirá ilustrar la noción de microergodicidad.

LA ERGODICIDAD.

En la óptica clásica, siempre, en definitiva, la posibilidad de la inferencia estadística se funda en una propiedad ergódica.. Esto es cierto, evidentemente, en el caso simple de una prueba indefinidamente repetida. Si se admite la independencia de las pruebas sucesivas, y sobre todo, que la probabilidad p de éxito quede constante, se ha visto, en efecto, que la “frecuencia empírica” converge hacia p con una probabilidad unidad. De estas dos “hipótesis”, la primera puede ser debilitada. Basta con que las correlaciones entre pruebas sucesivas se amortigüen lo suficientemente rápido con la distancia en el tiempo. La segunda es esencial, e implica antes que nada la estacionaridad: Se la puede arreglar, diciendo por ejemplo que la probabilidad $p(t)$ de éxito en el tiempo t es también una F. A. estacionaria y ergódica: En todos los casos se debe introducir la estacionaridad.

Consideremos ahora el caso del modelo “F. A. aleatoria”, y, por ejemplo, de “la estimación” de la covarianza $C(x, y)$. Si se trata de un fenómeno el cual se puede repetir, es decir, si se dispone de tantas realizaciones que se quiera de la misma F. A., la situación es sustancialmente la misma que en el caso de la prueba en todo o nada. Se verá bien (en términos de físico, sino de matemático) si el valor medio del producto $Z(x)Z(y)$ converge o no hacia un límite $C(x, y)$ cuando el número de realizaciones aumente “indefinidamente”. No es por otra parte necesario suponer la independencia de las pruebas sucesivas, sino solamente su estacionaridad en el tiempo (y su ergodicidad). Por ejemplo, $Z(x, t)$ puede ser la temperatura observada en el tiempo t en una estación meteorológica implantada en el punto x del territorio europeo. Se puede admitir (lo que por otra parte no es evidente,

⁵⁵ Nota del traductor: Corregí esta fórmula, la cual es errónea en las versiones en francés e inglés.

⁵⁶ He desarrollado este punto en “Les variables régionalisées et leur estimation”, París, Masson, 1965, Capítulo XIII. Nota del traductor: También existe versión en español: Las variables regionalizadas y su estimación, traducido por Marco Alfaro. Ver biblioteca en línea del Centro de Geoestadística de la Escuela de Minas de París: www.cg.ensmp.fr.

intervienen tendencias “seculares”, sin duda, incompatibles con un modelo realmente estacionario) que la media de las temperaturas observadas en x el primero de enero de cada año a las 0 horas tiende hacia un límite cuando la serie temporal disponible crece indefinidamente. Se puede también, para tener en cuenta, en primera aproximación, de las tendencias seculares, admitir que estas hacen sentir sus efectos solamente a largo plazo, y que a la escala de la decena de años (digamos entre 1970 y 1980), todo sucede como si la temperatura fuera estacionaria, con una media $m = m(t)$ que sería, en realidad, una función que varía muy lentamente en el tiempo t . Esto es, en suma, nuestro modelo de estacionaridad local⁵⁷. Se puede, también utilizar modelos de tipo clásico “deriva secular (funcional) + F. A. estacionaria”. La estacionaridad es aquí un concepto operatorio, porque, bien que es actualmente finita, la sucesión de observaciones es virtualmente infinita y aumenta con el tiempo, de manera que un contratiempo de la estacionaridad terminará, ciertamente, a la larga, por ser revelado, corregido en primera aproximación por el ajuste de una deriva secular, luego, por su parte, luego de su parte, los residuos se revelarán como no estacionarios, etc...

Cuando se trata de un fenómeno único, de extensión acotada (como un yacimiento minero), la situación es sensiblemente diferente, porque, no hay esta vez ninguna posibilidad de repetición. Para evaluar $E(Z_x Z_y)$, suponiendo que lleguemos a darle un sentido operatorio a esta esperanza, solo disponemos en todo y para todo que del único valor numérico $Z_x Z_y$. De donde, por supuesto, hacemos un llamado a una “hipótesis de estacionaridad” la cual permitirá reemplazar la no repetitividad en el tiempo por la repetición en el espacio. Elegiremos entonces (siempre que esto no sea contrario con la información cualitativa sobre el fenómeno) un modelo estacionario, y naturalmente, también, “ergódico”.

Aquí no podemos evitar un paréntesis corto un poco más técnico. Entre las diferentes acepciones que puede vestir el término “ergodicidad”, nos referiremos únicamente a la propiedad según la cual las medias espaciales, tomadas en dominios S de más y más grandes, convergen hacia la esperanza matemática. Pero hay que distinguir netamente un teorema ergódico, totalmente general, y una “hipótesis” ergódica, que constituye una particularidad de ciertos modelos de F. A. estacionarias, pero no de todas. El teorema ergódico nos dice esto: Si $Z(x)$ es una función aleatoria estacionaria y si se tiene una sucesión de dominios S_n que tienden a infinito (en el sentido que cualquier bola de radio dado esté contenida en S_n cuando n es bastante grande), entonces la sucesión de medias en el espacio:

$$Z_n = \frac{1}{S_n} \int_{S_n} Z(x) dx$$

Converge hacia un límite M (en un sentido bien definido, por ejemplo la “convergencia casi segura” o, en el caso de las F. A. de orden 2, la “convergencia en media cuadrática” etc...). Este límite M solo depende de la sucesión S_n elegida. En particular, es invariante por traslación. Pero el teorema no afirma de ninguna manera que M sea idéntico a la esperanza m . En general, este límite M , que existe para “casi todas” las realizaciones posibles de la F. A., toma valores diferentes para las diferentes realizaciones. Es entonces una variable aleatoria, no una magnitud numérica, luego se puede decir solamente que es “invariante por

⁵⁷ Ver el capítulo 7.

traslación”, no que es una constante. En los modelos que verifican lo que se llama la propiedad o “la hipótesis” ergódica, por definición, las únicas variables aleatorias invariantes por traslación son las constantes, y en este caso, evidentemente, $M = m$, o si se prefiere, las medias espaciales Z_n convergen hacia su esperanza m .

Cualquiera que sea su importancia, en mecánica estadística por ejemplo ⁵⁸, la distinción entre el teorema y “la hipótesis” ergódicas no puede jugar ningún papel en el caso de un fenómeno único: En efecto, porque solo disponemos y no dispondremos nunca que una sola realización de la F. A. (a saber la variable regionalizada z) no sabremos nunca si el límite M habría tomado, o no, un valor diferente sobre otra realización: La distinción entre M y m no presenta, en este contexto, ninguna significación objetiva.

Por consiguiente, si (raramente) hubiéramos elegido para Z un modelo que no posee la propiedad ergódica, deberíamos apresurarnos en reemplazarlo por otro modelo en el cual esta propiedad sería verificada (bastaría, por ejemplo, con condicionar la F. A. inicial por la variable M , lo que asegura automáticamente la igualdad $M = m$ sin destruir la estacionaridad). Lo que equivale a elegir como definición de la esperanza m el límite de la sucesión de las medias espaciales Z_n . Si m y M solo tienen un status puramente convencional, no hay ningún inconveniente para identificarlos. Si tienen una significación objetiva, esta significación es la misma para m y M : a saber, para una como para la otra, el límite de la media espacial cuando S tiende hacia el infinito.

En todo rigor, por otra parte, esta definición, solo puede ser convencional: Del hecho que el campo real es irreductiblemente acotado, no es posible, en ninguna forma posible, hacer “tender” realmente S hacia el infinito, y la noción de esperanza m o de límite ergódico M , cuya definición hace intervenir el comportamiento (ficticio) del fenómeno en el infinito está, por lo mismo, desprovista ⁵⁹ de significación objetiva, por lo menos en el sentido estricto. Sin embargo, no es necesario ser tan purista: Si el campo S es verdaderamente muy grande, la varianza que da la fórmula (3), sin ser nula, puede ser lo suficientemente pequeña para ser considerada como despreciable, y el parámetro correspondiente del modelo, sin ser rigurosamente igual a la magnitud regional, puede sin embargo ser confundido con esta regional con una buena aproximación. Diremos, entonces, que la ergodicidad se alcanza prácticamente, en lo que respecta a este parámetro, y esto nos autoriza para hacer su uso legítimo.

EL ALCANCE.

Desde el punto de vista práctico, la noción capital es aquí la de alcance de la covarianza, es decir, en términos aproximados, de la distancia a partir de la cual las correlaciones se apagan o llegan a ser despreciables. Es solamente en la medida en que el campo S es grande con

⁵⁸ Ver el análisis profundo que proporciona F. Fer, en “L’irreversibilité, fondement de la stabilité du monde physique”, 1977.

⁵⁹ En la tercera parte, procederemos a la reconstrucción operatoria de nuestros modelos, y la situación será bien diferente: El parámetro m será entonces definido como una cierta media espacial, y su objetividad será así garantizada automáticamente.

respecto al alcance que se puede esperar alcanzar prácticamente la ergodicidad, y proporcionar así un sentido objetivo a la esperanza m .

El examen de la fórmula (3) permite comprender porqué. En esta fórmula, $K(h)$ represente la medida del dominio $S(h)$, intersección del campo S y de su trasladado por el vector $-h$. En particular, $K(0)$ es igual a la medida de S . Es entonces fácil probar que, para S bastante grande, la varianza de $\bar{Z} - m$ es poco diferente de $(1/S) \int \sigma(h) dh$. Esto sugiere la definición siguiente: Llamaremos alcance integral la cantidad:

$$(5) \quad A = \frac{1}{\sigma^2} \int \sigma(h) dh$$

(la notación tradicional σ^2 representa la varianza, en el modelo, de la F. A. estacionaria $Z(x)$. Se tiene, evidentemente, $\sigma^2 = \sigma(0)$, valor en $h = 0$ de la covarianza $\sigma(h)$). A es una longitud, una superficie o un volumen según que el espacio sea de una, dos o tres dimensiones. Cuando S es grande, al poner $N = S / A$: N representa entonces, si se quiere, el número de adoquines disjuntos de medida A contenidos en el campo S . Con estas notaciones, la fórmula (3) da asintóticamente, es decir cuando S llega a ser grande:

$$Var(\bar{Z} - m) = \frac{\sigma^2}{N}$$

En lo que respecta a “la estimación” de m , todo sucede entonces, en este modelo, como si el estimador \bar{Z} fuera obtenido al tomar la media de N variables aleatorias independientes de varianza σ^2 . El alcance integral representa bien entonces el elemento de referencia respecto del cual tiene sentido decir que el campo S es grande. Mientras más grande sea el número $N = S / A$, más pequeña es, en efecto, la varianza de $\bar{Z} - m$, y además, por consiguiente, el parámetro m presenta significación objetiva.

Pero aquí se presenta una objeción seria: Al definir el alcance integral A por la relación (5), es decir por la expresión donde interviene de manera crucial el comportamiento de la covarianza $\sigma(h)$ para $|h|$ tendiendo a infinito, utilizamos características del modelo las cuales no pueden corresponder a ninguna propiedad objetiva del fenómeno real. En particular, se pueden dar ejemplos de covarianzas diferentes, prácticamente idénticas en el dominio útil ($|h|$ inferior al diámetro más grande de S), las cuales conducen a valores extremadamente diferentes para los alcances A , también un valor infinito (la integral (5) puede bien ser divergente para ciertas elecciones de la covarianza $\sigma(h)$).

Para levantar esta objeción, es necesario, como costumbre, proceder a la reconstrucción operatoria del concepto incriminado. Es aquí que se introduce una regional particular, que llamaremos “varianza de s en S ” la cual designaremos por $v(s / S)$. No daremos una definición rigurosa, la cual se puede encontrar en la literatura especializada, pero el lector concebirá fácilmente que se pueda dividir, al menos en el pensamiento, un campo S dado en un cierto número de elementos iguales entre ellos (o aproximadamente) por traslación: Es entonces fácil definir, numéricamente, la varianza de la población (finita) constituida por los valores medios de la V. R. z en cada uno de los elementos s cuya reunión constituye S : Es,

por definición, la varianza $v(s/S)$ de s en S , expresión cuyo valor numérico constituye una magnitud regional, accesible (después de la tirada) a una determinación experimental. A esta regional $v(s/S)$ se le asocia, como de costumbre, en el modelo, una variable aleatoria $V(s/S)$ cuya esperanza $E[V(s/S)] = \sigma^2(s/S)$ puede ser llamada, si se quiere, varianza teórica de s en S . Esta última cantidad es un parámetro del modelo, que se expresa fácilmente con la ayuda del solo variograma γ (explícitamente, $\sigma^2(s/S) = \bar{\gamma}(S) - \bar{\gamma}(s)$, escritura en que $\bar{\gamma}(s)$, por ejemplo, designa el valor medio de $\gamma(x-y)$ cuando las dos extremidades x e y recorren, independientemente el uno del otro, el dominio s). Estas expresiones no tienen forzosamente significación objetiva, porque, por ejemplo, el cálculo de $\bar{\gamma}(S)$, pone en juego los valores de $\gamma(h)$ para argumentos h que alcanzan el diámetro de S . Pero, después de la tirada, por lo menos, podemos controlar si la relación $v(s/S) = \bar{\gamma}(S) - \bar{\gamma}(s)$ es, o no, aproximadamente verificada. Observamos que es exactamente de esta manera que hemos procedido en el capítulo 3 para reconstruir la noción de densidad poissoniana. Se puede así poner en evidencia la existencia de una ley física válida, con una cierta aproximación, en un cierto dominio de variación s y de S (es necesario, evidentemente, que s sea lo suficientemente pequeño respecto de S , para que tengamos, a nuestra disposición, un efectivo estadístico no demasiado débil, digamos al menos 10 individuos).

Por otra parte, la teoría nos hace prever esto: Si s (y con mayor razón S) es grande respecto del alcance A , tal como lo definimos en la relación (5), entonces $\bar{\gamma}(s)$ difiere muy poco de $\sigma^2 - A/s$. Por consiguiente, si nuestro modelo es bueno, podemos esperar de observar una relación de la forma:

$$(6) \quad v(s/S) = A \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S} \right)$$

Esta relación constituye una ley física, porque $v(s/S)$ es una regional. Si nosotros podemos (después de la tirada) controlar experimentalmente que más allá de un cierto valor de s esta ley es efectivamente válida, hemos, por esto, logrado construir, en términos operatorios el concepto de alcance integral: Es ahora la ley física (6) que constituye por si misma la definición operatoria del concepto.

Esta reconstrucción solo es, en principio, realizable después de la tirada. Lo más a menudo, es posible, aún en praxis, de darse cuenta si el campo S es lo suficientemente grande para que se pueda considerar la ergodicidad como “alcanzada” o “realizada”: Un índice seguro lo proporciona la forma del “variograma experimental” (es decir la estimación del variograma regional que se puede formar, in praxis, a partir de un número limitado de muestras). Si este variograma experimental llega a una meseta o asíntota horizontal, la cual parece estable (haciendo abstracción de las fluctuaciones residuales que siempre se espera observar) se puede, sin gran riesgo de error, avanzar la hipótesis que el alcance existe bien (objetivamente) y hacer una medida aproximada. La figura 4 muestra un ejemplo muy parlante.

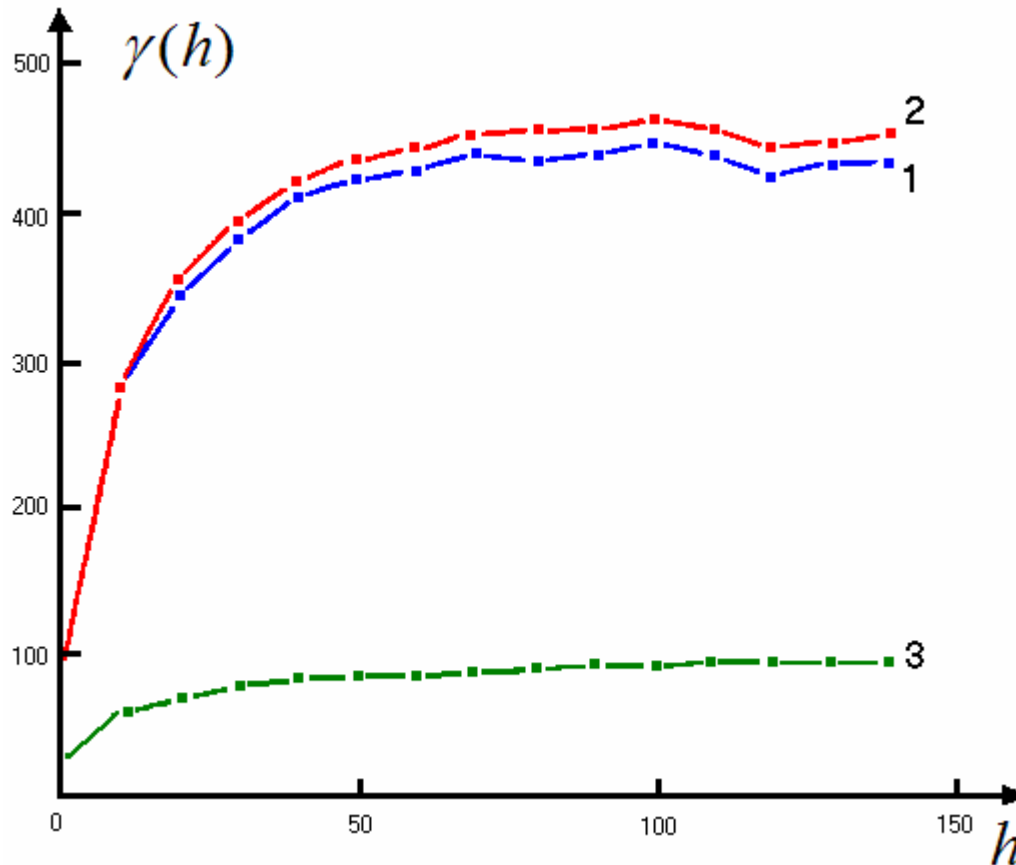


Figura 4: Variogramas asociados a facies observadas en una mina: 1, concreciones calcáreas; 2, minerales interconcreciones; 3, uniones arcillosas. Según J. Serra ⁶⁰.

En la figura 5 al contrario se observa una circunstancia singular: Los cuatro variogramas experimentales, construidos en cuatro direcciones diferentes, casi coinciden hasta $h = 500$ m y la forma de dos de estas curvas parece anunciar la existencia de una meseta y de un alcance del orden de 700 m. Pero más allá de $h = 500$ m, las cuatro curvas divergen violentamente, y la forma de dos de ellas es absolutamente incompatible con la existencia de una meseta. Para un práctico, esta divergencia es un índice muy seguro de la existencia de lo que se llama una “deriva”, noción sobre la cual volveremos. El hecho que estas cuatro curvas experimentales coincidan bastante bien, hasta este valor crítico $h = 500$ m donde las divergencias se revelan bruscamente, es bien típico de lo que llamaremos la estacionaridad local. Veremos, en el capítulo 7, la definición precisa de los modelos correspondientes o, modelos locales. Pero de aquí en adelante, se concibe que será, en este caso, legítimo hacer un uso local (es decir: Solo haciendo intervenir simultáneamente puntos separados por distancias inferiores a 500 m) del modelo de variograma que se presenta en el agrandamiento que se puede ver en la mitad derecha de la figura.

⁶⁰ Morphologie Mathématique et génèse des concrétions carbonatées des minerais de fer de Lorraine. Sedimentology, 10 (1968), 183-208

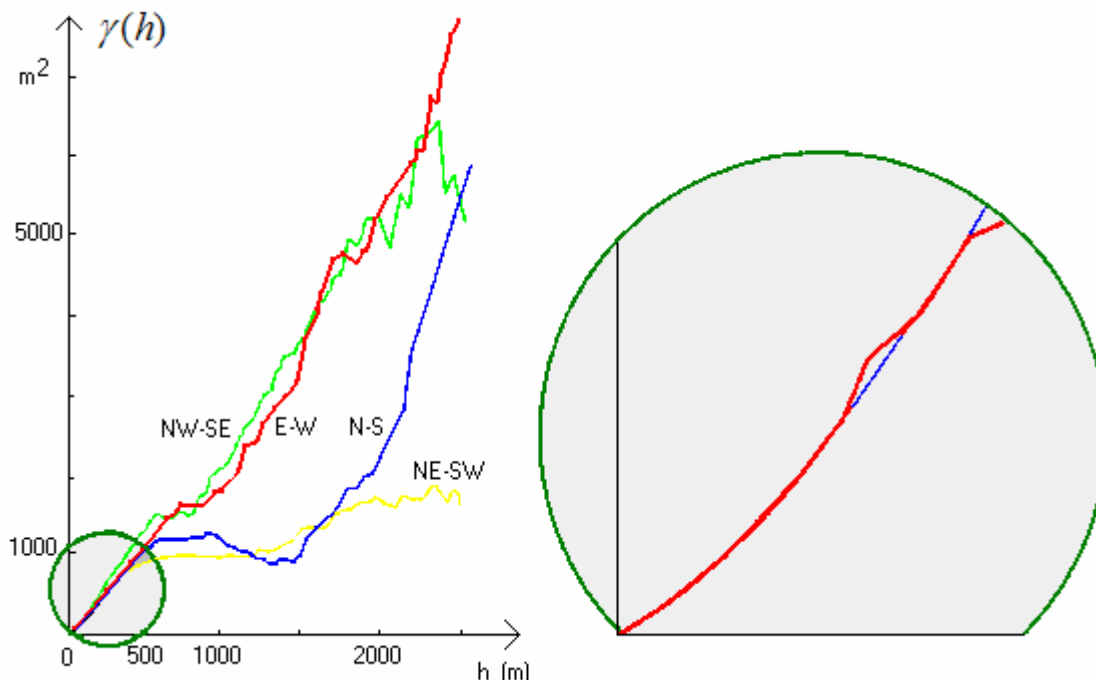


Figura 5: Variogramas experimentales de cotas topográficas (falla de Noiretable 1/25000). Según J. P. Chilés ⁶¹

En la figura 6, se puede ver un ejemplo experimental de la varianza $v(s / S)$ de s en S . Aquí, s (muestras de tamaño fijo) es constante, y, se ha puesto, en función de $\log S / s$ (de $S / s = 2$ a más de 1000) las varianzas de las leyes en zonas S más y más grandes, en un yacimiento de oro: No hay ningún signo que anuncie la existencia de una asíntota horizontal. La relación (6) no se verifica ciertamente, y nada permite atribuir a este fenómeno una varianza σ^2 finita. La curva experimental observada se explica muy bien, al contrario, en el marco del modelo:

$$\gamma(h) = \alpha \log |h|$$

(Variograma logarítmico o “Wijsiano”). Se trata de un variograma indefinidamente creciente, luego sin meseta ni alcance. Se puede, evidentemente, imaginar que la curva terminará bien modificándose, más allá del último punto experimental observado, e introducir, a la fuerza, una meseta (o varianza σ^2) y un alcance finito: Pero se trataría de parámetros puramente convencionales, a los cuales no se les podría asociar ninguna realidad observable. Por otra parte, esto no tendría ninguna importancia: porque este modelo con meseta y alcance finitos, siempre que coincida, aproximadamente, con el modelo Wijsiano hasta el valor más grande posible de $|h|$, conduciría exactamente a las mismas conclusiones que este último, en lo que respecta, por lo menos, a los problemas reales que nos planteamos respecto de este fenómeno: Si se trata de un problema real, no puede poner en juego distancias mayores que las que existen entre los puntos del objeto real.

⁶¹ Géostatistique des phénomènes non stationnaires dans le plan, Tesis, Nancy, 1977.

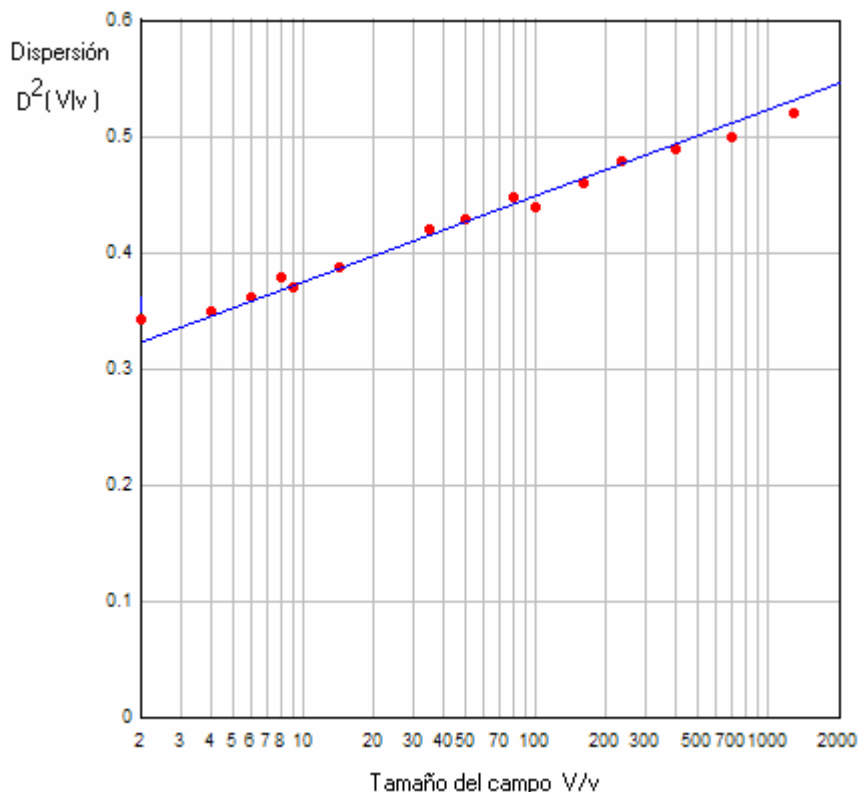


Figura 6: Varianzas experimentales de las leyes de oro en bloques de tamaño fijo en zonas más y más grandes, en un yacimiento de oro de Africa del Sur. Según D. G. Krige, citado en A. Journel ⁶².

LA MICROERGODICIDAD.

Supongamos que hemos medido los valores de la variable regionalizada z en n puntos implantados, por ejemplo, en una malla cuadrada de lado a , en el campo S (que se supone bidimensional). Hay dos maneras bien diferentes de hacer tender n a infinito. O bien, la malla queda constante, se aumenta el campo de investigación, de manera de mantener constante la densidad de muestreo, mientras que la superficie muestreada tiende hacia infinito – o bien, al contrario, se deja fija la superficie muestreada y se cierra la malla, de manera que esta vez a tiende hacia 0 , o la densidad de muestreo tiende a infinito. En el primer caso (y mediante ciertas restricciones poco importantes), se encuentra de nuevo lo esencial, la situación “ergódica” clásica, tal como la hemos analizado aquí.

En el segundo caso, al contrario, se encuentra, en el límite, para $a = 0$, la situación ideal dicha “después de la tirada” cuyo interés epistemológico ya hemos notado, que es aquella en que el valor numérico de la V. R., interpretada ahora como realización de la F. A. del modelo, es conocida en todos los puntos del campo S . Hemos insistido largamente sobre el hecho que las magnitudes regionales, solas, poseen una significación objetiva, y que por consiguiente, los parámetros del modelo que no se dejan identificar con tales magnitudes son, en sentido

⁶² A. Journel y Ch. Huijbregts, “Mining Geostatistics”. Academic Press, Nueva York, 1978.

estricto, desprovistos de realidad. Entre estos parámetros, entonces, hay que hacer un orden, y este será, desde el punto de vista técnico, uno de los aspectos más importantes de la elección y de la especificación del modelo: Para un modelo dado de F. A. y un dominio S , ¿cuáles son los parámetros del modelo que se encuentran rigurosamente (o con una aproximación dada) determinados si se conoce una (sola) realización de la F. A. en S - y cuáles son aquellos que no lo son? Solo los primeros tienen un sentido objetivo y son susceptibles de una definición operatoria en términos de “ a tiende a 0”. Diremos que estos son micro-ergódicos. En cuanto a los otros, estando desprovistos de realidad operatoria, pueden, en una muy grande medida ser elegidos arbitrariamente (porque nunca tendremos indicación experimental verdaderamente exigente a su respecto).

Esta propiedad de micro-ergodicidad es totalmente distinta de la propiedad ergódica habitual y merecería, a mi juicio, un estudio sistemático. Aún en el caso de un modelo estacionario y ergódico, ni la media ni la varianza son micro-ergódicos. Por el contrario, el comportamiento del variograma en la vecindad de $h = 0$ es micro-ergódico, siempre que, como lo vamos a ver, no sea demasiado regular. Bien mejor, y mediante ciertas hipótesis bastante débiles, esta micro-ergodicidad subsiste aún en el caso no estacionario (se trata entonces, evidentemente, del variograma medio definido como el valor medio en S del variograma no estacionario). Así, la estacionaridad y la ergodicidad clásica no implican, de ninguna manera, la micro-ergodicidad, e inversamente, la micro-ergodicidad, puede ser verificada aún en ausencia de estacionaridad.

Examinemos, en efecto, la fórmula (4) que proporciona (en el modelo “F. A. intrínseca”) la varianza de “fluctuación” del variograma regional $\Gamma_R(h)$ (esta fórmula solo es válida en el caso gaussiano, en el caso no-gaussiano, las consecuencias pueden ser diferentes⁶³). Hemos visto que, a menos que $|h|$ sea pequeño (o, agreguémoslo, porque ahora podemos, a menos que el fenómeno admita un alcance finito, pequeño respecto del campo S), esta varianza podía ser muy grande, privando así de significación objetiva al comportamiento del variograma teórico γ para los valores grandes de $|h|$.

Para $|h|$ pequeño, al contrario, se pueden presentar dos casos bien diferentes. Supongamos, para abreviar la discusión, que el variograma γ del modelo sea “isótropo” (es decir que solo depende del módulo $|h|$ del vector h y no de su dirección,) y que para $|h|$ pequeño, $\gamma(h)$ sea equivalente⁶⁴ a una expresión de la forma $a|h|^\lambda$. La teoría prevé que son posibles dos eventualidades:

- O bien $\lambda = 2$, y en este caso la F. A. es “derivable en media cuadrática”: este tipo de modelos está bien adaptado a la descripción de fenómenos muy regulares en su variación espacial.
- O bien $\lambda < 2$, la F. A. es ahora continua, pero no derivable “en media cuadrática”, y el modelo conviene para representar fenómenos mucho más irregulares en su variación espacial.

⁶³ Para el caso no-gaussiano, ver Alfaro-Sironvalle, M. “Etude de la robustesse des simulations des fonctions aléatoires. Tesis, Fontainebleau, 1979.

⁶⁴ Dicho de otra manera $\gamma(h) / |h|^\lambda$ tiende hacia a para $|h|$ tendiendo a 0.

Se demuestra entonces (en el modelo) que la varianza de la razón $\Gamma_R(h) / \gamma(h)$ es, para $|h|$ pequeño, equivalente a una expresión de la forma:

$$C |h|^{4-2\lambda} + B |h|^n$$

(n es el número de dimensiones del espacio, es decir $n = 1, 2$ o 3).

Luego, esta varianza relativa tiende hacia 0 si y solamente si λ es inferior a 2, es decir si la F. A. no es diferenciable en media cuadrática. O también, en el modelo, se tiene la convergencia:

$$(7) \quad \frac{\Gamma_R(h)}{|h|^\lambda} \rightarrow a$$

(En el sentido “en media cuadrática” o, también en, el sentido “casi seguramente”) siempre que λ sea inferior (estrictamente) a 2, y el parámetro a es entonces micro-ergódico. Al contrario, si $\lambda = 2$, esta convergencia no tiene lugar, y la micro-ergodicidad no está ahora asegurada.

Luego se desarrolla una conclusión muy instructiva: Los parámetros que definen el comportamiento del variograma en la vecindad del origen son micro-ergódicos, y luego, el particular, poseen una significación objetiva, siempre que solamente el fenómeno (o más bien la F. A. que le corresponde en el modelo) no sea demasiado regular.

Esta conclusión no debe sorprender. El campo S puede ser muy pequeño (basta con que contenga un conjunto abierto, por ejemplo una bola de radio arbitrariamente pequeño).

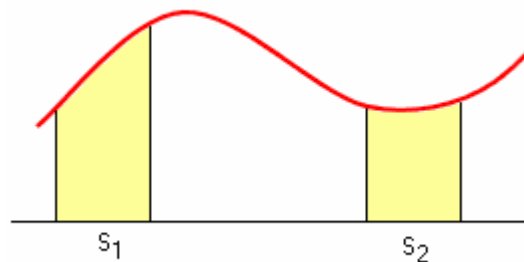


Figura 7.

Si $\lambda = 2$, la realización de Z es una función muy continua, asimilable, en cualquier dominio pequeño S , a una parábola, por ejemplo: Pero, según la implantación S_1, S_2 de este pequeño campo S , se ve que se puede observar cualquier trozo de parábola. En el lenguaje clásico, la inferencia estadística no es posible. Lo que quiere decir en realidad, que el modelo teórico tiene poca significación objetiva. Para $\lambda < 2$, al contrario, la información aportada por los puntos (en número infinito, aún si son muy vecinos unos de otros) que pertenecen a S es mucho menos redundante, del hecho mismo que la F. A. es menos regular, de donde la micro-ergodicidad y la posibilidad de acceder experimentalmente a los parámetros a y λ . El lector

que conoce las propiedades del proceso de Wiener-Levy comprenderá sin dificultad lo que hemos dicho aquí, en términos un poco vagos.

Notemos, sin embargo, que la convergencia (7), para $\lambda < 2$, es un suceso (casi seguro) del modelo, pero su contraparte, escrita en términos de regionales:

$$\frac{\Gamma_R^*(h)}{|h|^\lambda} \rightarrow a$$

No es, realmente, controlable experimentalmente, porque se trata de un límite, el cual pone en juego una infinidad de puntos. Estamos entonces en un caso en el cual es necesario distinguir entre el modelo primario (la V. R.) y la realidad física.

Para precisar el contenido físico de la noción, aparentemente simple, de “comportamiento del variograma en la vecindad del origen” será necesario proceder a una verdadera reconstrucción operatoria. Volveremos sobre este punto en la tercera parte.

LA ESTIMACION IN PRAXIS, DE LAS MAGNITUDES REGIONALES.

El problema de la estimación (in praxis) de una magnitud regional a partir de una información fragmentaria es un problema bien real, que se plantea constantemente en la práctica, y que no se debe, absolutamente, confundir con el de la fluctuación de (o más bien: Que el modelo atribuye a) de la magnitud regional respecto de su versión teorizada. En particular, en el caso límite en que la información tiende a ser perfecta, la estimación coincide con el verdadero valor regional, mientras que la fluctuación subsiste. En el caso más simple, el problema es el siguiente: Conociendo los valores numéricos $z_\alpha = z(x_\alpha)$ de la V. R. en los puntos experimentales x_α , se busca una función $a^* = a^*(z_1, \dots, z_N; x_1, \dots, x_N)$ de estas variables que realiza la mejor (en un sentido a definir) estimación de la regional $a = a(z)$. En el modelo, luego de una sustitución de $Z(x)$ por $z(x)$, a y a^* se transforman en V. A. (no independientes), sean A y A^* respectivamente. En la versión teorizada del problema de la estimación, somos conducidos, entonces a buscar una función a^* de N variables tal que la V. A. $A^* = a^*(Z_1, \dots, Z_N)$ sea lo más próximo posible (en un sentido a definir) de la V. A. que se desea estimar, a saber $A = a(Z)$. Por ejemplo, se puede buscar minimizar la varianza de estimación $\text{Var}(A - A^*)$ con la condición de “insegado” $E(A - A^*) = 0$. Esta varianza y esta esperanza son características del modelo, luego una primera limitación: Nos debemos contentar con buscar la función a^* en la clase Φ de funciones (medibles) ϕ tales que las cantidades:

$$E[a - \phi(Z_1, \dots, Z_N)] \quad \text{y} \quad \text{Var}[A - \phi(Z_1, \dots, Z_N)]$$

Se expresen en función de los únicos criterios de especificación del modelo elegido. El problema sería entonces:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \varphi \in \Phi \text{ tal que } \text{Var}[A - \varphi(Z_1, \dots, Z_N)] \text{ sea mínimo con la condición} \\ E[A - \varphi(Z_1, \dots, Z_N)] = 0 \end{cases}$$

A esta limitación evidente (solo buscar φ en la clase de estimadores en los cuales somos efectivamente capaces de calcular su esperanza y la varianza que el modelo le atribuye) hay que agregar restricciones respecto la significación objetiva de esta esperanza y de esta varianza. El examen de esta última pregunta necesita, en efecto, la reconstrucción operatoria del modelo, y será abordado en la tercera parte, y anotamos solamente aquí algunas observaciones preliminares.

Desde el punto de vista práctico, lo esencial se resume en una línea:

CUIDADO CON LOS UMBRALES DE REALISMO Y DE ROBUSTEZ

Lo mejor en este estadio, es sin duda examinar algunos ejemplos.

EJEMPLO DE LA ESPERANZA CONDICIONAL.

Localicémonos, un instante, en el caso ideal de un modelo completamente especificado, es decir en el cual se ha elegido explícitamente la ley espacial de la F. A. A cada regional a , se le puede asociar entonces la ley de la V. A. correspondiente A , tomada condicionalmente a los datos disponibles z_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Y esto resuelve el problema de la estimación, porque el mejor estimador posible es entonces la esperanza condicional:

$$a^*(Z_1, \dots, Z_N) = E(A | Z_1, \dots, Z_N)$$

Se trata, por otra parte, de un caso puramente ideal, porque, en la práctica los datos disponibles no permiten nunca especificar completamente la ley espacial de la F. A. teórica. En la práctica, se reemplaza, a menudo, la esperanza condicional inaccesible por un estimador lineal óptimo, o por un estimador más elaborado (del tipo “disjuntivo” por ejemplo, ver capítulo 8), los que exigen menos prerequisites que la esperanza condicional.

En efecto, si no se utilizan las leyes condicionales esto no es solamente (para retomar la terminología tradicional) porque los datos disponibles permiten raramente la inferencia estadística de la ley espacial. Puede suceder, en efecto, a veces, que el modelo esté completamente especificado, por ejemplo, si se trata de una F. A. estacionaria gaussiana o lognormal cuya esperanza y covarianza han sido objeto de una estimación seria. Otra consideración interviene, ligada a lo que hemos llamado la robustez de modelo (robustez de tipo y robustez específica). En términos teóricos (probabilísticos) esto consiste en preguntarse que pasa si la F. A. “real” no está de ninguna manera en conformidad con el modelo elegido (no es gaussiana, no es estacionaria, tiene una covarianza real ligeramente diferente de la que hemos retenido, etc...). Hay lugar para temer que la esperanza condicional esté gravemente afectada por estas variaciones, y que así nuestros umbrales de robustez estén largamente sobrepasados. Volveremos sobre este punto en el capítulo 8.

Más generalmente, localizándose en un punto de vista puramente teórico (y a suponer siempre que se ha logrado especificar completamente el modelo de F. A.) se podría creer que el mejor modelo posible a utilizar en el problema de la estimación es el de la F. A. inicial $Z(x)$ tomada condicionalmente a la información disponible, es decir a $Z(x_\alpha) = z_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$ fijos. Pero el trazo más destacado de la ley espacial así condicionada es que, por construcción, la ley espacial no contiene ningún elemento accesible a un control experimental directo: En efecto, todos los datos experimentales pasaron al lado de las variables condicionantes, y juegan el papel de parámetros en la expresión de la ley condicionada. Se concibe que es erróneo dar una confianza de hierro al modelo elegido para osar utilizar, a ojos cerrados, esta ley condicionada. Hay todo lugar para temer que en este estado, no solamente el umbral de robustez sino también el umbral de realismo han sido sobrepasados hace tiempo.

EJEMPLO DEL KRIGEADO ⁶⁵.

Para tomar un ejemplo menos ambicioso, consideremos ahora el caso del modelo genérico “F. A. estacionaria de orden 2”, en el cual los parámetros de especificación son entonces: Una esperanza m y una covarianza centrada $\sigma(h)$ estacionaria. Supongamos que deseamos estimar el valor $z(x)$ de la V. R. en un punto x diferente de los puntos experimentales x_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), o más generalmente, una “media ponderada” del tipo:

$$z(p) = \int p(dx)z(x)$$

En que p es una “medida” de suma unidad y con soporte en S , es decir una magnitud regional definida por una funcional lineal de la V. R. z . La clase Φ de los estimadores posibles (caracterizables con la ayuda de los solos criterios de especificación del modelo) está constituida por combinaciones lineales afines de la forma $a + \sum \lambda^\alpha z_\alpha$. La versión teorizada del problema de la estimación es entonces la siguiente:

Encontrar las constantes a y λ^α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$, que minimicen $E[Z(p) - a - \sum \lambda^\alpha Z_\alpha]^2$.

(No agregamos la condición de insesgamiento $E(Z^* - Z(p)) = 0$, que, en esta formulación, está automáticamente verificada). La solución, como se sabe, se obtiene al tomar el estimador:

$$z^* = m + \sum \lambda^\alpha (z_\alpha - m)$$

Con pesos λ^α que verifican el sistema:

$$\sum \lambda^\alpha \sigma(x_\alpha - x_\beta) = \int p(dx)\sigma(x - x_\beta)$$

La expresión de este estimador depende, evidentemente, de los criterios de especificación elegidos, m y $\sigma(h)$. Además, si los puntos experimentales x_α son en número elevado ($N =$

⁶⁵ Este término que tiene su origen en la Geoestadística Minera, hace alusión a los trabajos de D. G. Krige, y significa “mejor estimador lineal verificando tal o tal condición de insesgado”.

100, o 1000, etc...), nos podemos preguntar si el sistema está “bien condicionado”. Finalmente, si se trata de estimar $z(x)$ en un punto dado, o una media $z(p)$ tomada en una vecindad inmediata de este punto, nos damos cuenta, examinando estas fórmulas, que existe el riesgo de atribuir un peso exageradamente importante a los puntos experimentales muy alejados del punto a estimar. Parece físicamente poco plausible que estos puntos tan alejados ejerzan una influencia tan fuerte. Sería necesario aquí de nuevo, dar una confianza verdaderamente total al modelo “F. A. estacionaria de orden 2” para aplicar estas fórmulas con los ojos cerrados. Aquí, el sentido físico debe intervenir, y rectificar lo que es demasiado rígido en el modelo teórico. Ciertamente, la realidad es más o menos “estacionaria” (en un sentido físico, difícil de precisar), pero más o menos solamente, y debemos prohibirnos de utilizar estimadores tan poco robustos como este respecto de la estacionaridad del modelo teórico. En la práctica entonces:

- i) Se impondrá a los coeficientes la condición $\sum \lambda_\alpha = 1$, y se minimizará la varianza de estimación bajo esta condición: Esto tiene la ventaja de filtrar el momento m de orden 1, que desaparece de la expresión del estimador (y entonces poco importa que este m , cualquiera que sea su status epistemológico, sea o no realmente constante en el espacio); SE puede aún ver en esta desaparición de m una aplicación de la regla general, según la cual las operaciones efectuadas deben siempre estar expresadas (o expresables) en términos de magnitudes regionales – y
- ii) De manera más drástica aún, excluirémos de nuestro estimador los puntos experimentales más alejados, para conservar aquellos que pertenecen a una vecindad razonable del punto a estimar (la elección de esta vecindad puede parecer arbitraria, pero un práctico experimentado, que tiene una buena intuición de su fenómeno, no vacilará mucho tiempo). Mediante una pérdida (teórica) de precisión, por otra parte en general poco considerable, se aumenta mucho la robustez del estimador (respecto de la elección del modelo y de su especificación). Y, accesoriamente, se alivianan considerablemente los cálculos (lo cual no es despreciable en la práctica real, donde las consideraciones de costo de los cálculos juegan siempre un papel importante). Además, habiendo restringido la clase de los estimadores dentro de la cual buscamos nuestro óptimo, nos damos cuenta que nuestro modelo inicial estaba demasiado especificado. En efecto, el parámetro convencional m se revela como inútil, y la covarianza $\sigma(h)$ puede ser (ventajosamente) reemplazada por el variograma $\gamma(h)$. Nuestro estimador está ahora dado por la expresión:

$$z^* = \sum \lambda^i z_i$$

En que la sumatoria solo comprende los puntos experimentales x_i situados en la vecindad de la zona a estimar ($N = 10$ a 20 por ejemplo) y los pesos λ^i verifican el sistema:

$$\begin{cases} \sum \lambda_i \gamma(x_i - x_j) = \int p(dx) \gamma(x_i - x_j) + \mu \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$$

En resumen, al modelo inicial “F. A. estacionaria de orden 2”, le hemos sustituido el modelo “F. A. intrínseca” (F. A. I), y además, en realidad, el modelo (considerablemente menos especificado) “F. A. localmente intrínseca” (ver capítulo 7). Así, no solo hemos solamente mejorado la robustez de nuestro estimador, también hemos debilitado considerablemente la hipótesis anticipativa sobre la cual está fundado. En la medida misma en que hemos reducido los criterios de especificación (desaparición de m , necesidad de conocer $\gamma(h)$ solamente en la vecindad de la zona a estimar, es decir justamente esta parte del variograma que tiene más significación objetiva).

A esta estimación, el modelo le asocia una “varianza de estimación” que permite darse una idea del orden de magnitud de los errores posibles. Volveremos, largamente, en los capítulos que vienen, sobre el sentido objetivo de esta varianza de estimación y su reconstrucción en términos operatorios. Demos solamente aquí un ejemplo ⁶⁶ tomado de la Geoestadística Minera. Se trata de un gran yacimiento de cobre, en el cual 810 paneles de igual dimensión han sido estimados por krigeado, con la ayuda de los sondajes vecinos. La malla es regular, la geometría respectiva del panel y de los sondajes era invariable, de manera que el modelo atribuía la misma varianza de estimación (teórica) a cada uno de los paneles. Cosa excepcional en la industria minera, en este caso fue posible, después de la explotación, reconstituir las leyes reales de los 810 paneles, y entonces calcular el error medio (que es prácticamente nulo) y la varianza experimental de los 810 paneles. Se ha encontrado (en (%)² de Cu):

Varianza teórica. 0.117

Varianza experimental: 0.118

Ejemplos como este no dejan lugar a dudas en lo que respecta la significación objetiva (y la validez) de la noción de varianza de estimación. Pero, en la práctica se encuentra una dificultad bien real: Es que la varianza de estimación, tal como se la puede evaluar in praxis, es decir sobre la base de una información parcial y de una estimación aproximada de los parámetros del modelo elegido, es, en efecto, por sí misma, una estimación: Sería necesario entonces, de nuevo, avaluar la varianza de esta estimación, y así sucesivamente hasta el infinito.

Si el modelo ha sido bien elegido, la varianza de estimación que se desea evaluar se expresa, en principio, con la ayuda de los solos parámetros objetivos del modelo, es decir aquellos que se expresan en términos de magnitudes regionales. Pero la dificultad subsiste: Para apreciar la posibilidad de la estimación de regionales que especifican el modelo, es en general necesario hacer intervenir otros instrumentos de trabajo además de los que tenemos el derecho en este marco. De donde la obligación:

- i) De hacer uso de un modelo más especificado que el que tenemos en vista.
- ii) De proceder previamente a la estimación de otras regionales, además de aquellas en las cuales deseamos criticar la estimación. Por ejemplo, para tener un juicio acerca de la estimación de un momento de orden 2 (covarianza o variograma) y

⁶⁶ Según A. Maréchal e I. Ugarte, citado en A. Journal, Mining Geostatistics.

calcular, digamos, la varianza de estimación correspondiente, es necesario hacer uso de los momentos de orden 4. La estimación de estos momentos de orden 4 es a veces posible (en regla general, en condiciones menos favorables que las de los momentos de orden 2 mismos), pero nos obliga a adoptar un modelo más especificado (especificado por los momentos de orden 2 y 4), y se ve así comenzar un desastroso regressus ad infinitum (desastroso, porque experimentalmente no se puede nunca ir muy lejos, y por otra parte los umbrales de robustez y de realismo serían rápidamente sobrepasados). A menudo, por otra parte, la estimación directa de los momentos de orden 4 no aparece como razonablemente posible. Se puede entonces tratar de abrirse introduciendo una hipótesis mucho más fuerte, la cual permita deducir, por el cálculo, los momentos de orden 4 a partir de los momentos de orden 2 (por ejemplo, se puede admitir que la ley espacial es gaussiana o lognormal, etc...). Pero esta hipótesis suplementaria (que nos impone para entrar al juego la elección de un modelo aún más específico que el anterior) debe también ser justificada. Y de nuevo, la carrera al mal infinito. En la práctica, sin embargo, no nos preocupamos demasiado de esta dificultad teórica: Porque un error sobre la varianza de estimación es evidentemente menos grave que un error sobre la estimación misma (y así en adelante).

TERCERA PARTE

LA RECONSTRUCCION OPERATORIA

CAPITULO VI

LOS MODELOS GLOBALES.

En los tres últimos capítulos de esta obra, quisiera sobre todo dedicarme a dar luz al contenido físico implícito de los modelos probabilísticos que utilizamos para representar los fenómenos regionalizados. La riqueza de un concepto físico depende del número y de la variedad de fenómenos entre los cuales este concepto permite establecer acercamientos, luego de la riqueza de la red de relaciones y de leyes físicas en las que interviene, y que constituyen, hablando claro, la definición misma de este concepto como operatorio. Entonces debemos entregarnos a una verdadera reconstrucción operatoria de nuestros modelos probabilísticos: Tarea inmensa, que, evidentemente, no es posible cumplir en su totalidad. Me contentaré entonces con examinar algunos casos particulares típicos, sin, por otra parte, pretender de ninguna manera, que el camino que adoptaré (paso por el intermediario de las “representaciones probabilísticas”) sea el único posible, ni aún, forzosamente el mejor.

El ejemplo del variograma nos retendrá largo tiempo. Precisemos bien que no se trata del variograma γ del modelo, cuyo status objetivo es aún en parte incierto, sino más bien de lo que hemos llamado el variograma regional γ_R : No su esperanza, sino el valor medio en el espacio del cuadrado de la diferencia $z(x+h) - z(x)$. Reescribamos su definición, es decir la fórmula (2) del capítulo precedente:

$$\gamma_R(h) = \frac{1}{2K(h)} \int_{S(h)} [z(x+h) - z(x)]^2 dx$$

En esta escritura, nada evoca las probabilidades. El valor regional γ_R es una realidad física, que podemos considerar por sí misma, independiente de interpretaciones (probabilísticas o no) las cuales le adjuntaremos más adelante. El variograma regional constituye, por sí mismo, una suerte de resumen de las características estructurales de la V. R., y vehicula una información ya muy rica, de naturaleza física y no probabilística. Hemos visto como su comportamiento a los grandes valores de $|h|$ era revelador para un práctico: Si las curvas observadas en las diferentes direcciones del espacio se estabilizan en torno de una asíntota horizontal común (o meseta) tenemos un índice seguro de la “estacionaridad” (en un sentido físico), es decir de la homogeneidad del fenómeno en el espacio. A esta realidad física se le asocia un concepto operatorio, el de alcance, en el cual hemos visto su construcción a partir de una ley física (varianza de s en S). Por el contrario, si las curvas divergen violentamente en las diferentes direcciones, diremos que hay una “deriva”: Concepto más difícil a delimitar, sobre el cual debemos volver, pero que corresponde, sin embargo, a alguna forma de realidad física, a una cierta forma de la variación espacial de la V. R.

Más rico aún de enseñanzas, quizás, se revela el comportamiento del variograma en la vecindad del origen. Por su definición misma, además, γ_R caracteriza las propiedades de

regularidad y de continuidad del fenómeno: O más precisamente, nos proporciona una imagen promedio de estas propiedades. Mientras más rápido es su crecimiento, cuando $|h|$ aumenta, más rápido se deteriora en promedio “la influencia” de un punto x sobre su vecino $x + h$, y luego, más discontinuo e irregular se revela el fenómeno mismo. Somos llevados a representar el comportamiento de γ_R en una vecindad de $|h| = 0$ por modelos simples, que son de hecho, aproximaciones, utilizables solamente en una cierta escala de trabajo: Por ejemplo, comportamiento parabólico (en $|h|^2$), o lineal (en $|h|$) o “efecto de pepita” (discontinuidad en el origen). Estos tipos de comportamiento responden a propiedades reales del fenómeno. En el caso parabólico, se tiene un fenómeno muy regular, el cual es posible de cartografiar a esta escala, con todos sus detalles. En el caso lineal, la cartografía es aún, en grueso posible, pero deja escapar muchos detalles, ligados a la demasiado grande irregularidad local. Finalmente, si hay un efecto de pepita, se sabe de antemano que cualquier carta será, en gran parte ilusoria. Estas observaciones, puramente empíricas, se imponen al práctico con una evidencia o una necesidad ineluctable: Las leyes físicas están aquí a la obra, a pesar que no han sido aún formalizadas, y van a permitir la reconstrucción operatoria de la noción “de aspecto del variograma en la vecindad del origen”.

Para llevar más lejos el análisis, vamos a tratar una etapa intermedia: Entre la V. R. inicial y el modelo probabilístico, vamos a insertar lo que llamaremos las “representaciones probabilísticas”, es decir modelos perfectamente objetivos que presentan en una forma probabilística la totalidad de la información contenida en la V. R.: modelos tautológicos, accesibles solamente después de la tirada, e inutilizables en si mismos. Servirán como criterios para juzgar los modelos más simples utilizados en la práctica (estacionarios, intrínsecos, etc...). Estos últimos no caerán más como hechos del cielo de las ideas. Su status será el de simples aproximaciones anticipadas de estos modelos estrictamente objetivos, inaccesibles, que nosotros llamaremos representaciones.

El misterioso problema de “la inferencia estadística” aparecerá, el también, en una forma un poco nueva. Por ahora, en efecto, lo esencial de la realidad física de la cual queremos darnos cuenta se encuentra sintetizada en el variograma regional, el problema no es “inferir” el misterioso γ del modelo teórico, sino estimar la integral espacial que figura en la fórmula (1), en la base de datos que disponemos in praxis: No se trata entonces “de inferencia estadística” sino más bien del cálculo aproximado de una integral a partir de un número pequeño de puntos experimentales. Por lo tanto el problema no está resuelto, pero la oscuridad que nos ocultaba su verdadera naturaleza se ha disipado un poco.

En el párrafo siguiente, definiremos dos tipos de representaciones probabilísticas de una V. R. : Las representaciones transitivas, útiles para el estudio de problemas globales (por ejemplo, la estimación de la integral $Q = \int z(x)dx$, y las representaciones deslizantes, que nos permitirán abordar problemas locales (por ejemplo, la estimación del valor $z(x)$ en un punto x dado). El resto de este capítulo será consagrado a los problemas y a los modelos globales, los modelos locales serán el objeto del capítulo siguiente.

LAS REPRESENTACIONES, O MODELOS PROBABILISTICOS ESTRICTAMENTE OBJETIVOS.

Debido al principio de objetividad extremadamente estricto que hemos adoptado, tenemos el buen derecho de preguntarnos si es solamente posible, para una V. R. dada, encontrar (después de la tirada) un modelo probabilístico perfectamente objetivo, es decir en el cual todos los parámetros puedan ser identificados con magnitudes regionales. Esto quizás puede ser una exigencia excesiva. Nosotros solo buscaremos, en efecto, modelos monoscópicos es decir elaborados expresamente en vista de resolver un problema dado, por medio de un método que hemos elegido: La definición de este problema y de este método hace, en general, llamado a ciertos parámetros, independientes de la V. R. pero determinados sin ningún equívoco. Los llamaremos parámetros metodológicos. Por ejemplo, supongamos que el problema propuesto consiste en estimar la integral $Q = \int z(x)dx$ de una V. R. z en el espacio de dos dimensiones, a partir de los resultados $z(x_{\alpha})$ proporcionados por el muestreo de una red regular de puntos experimentales x_{α} implantados según una malla cuadrada ($a \times a$): Este parámetro a o malla, no está ligado a la V. R., pero lo impone el problema a resolver: Es un parámetro metodológico, que se puede, sin arbitrariedad, incorporar al modelo monoscópico con el título de parámetro auxiliar.

Convengamos en decir que un modelo es estrictamente objetivo si sus criterios de especificación solo hacen intervenir parámetros objetivos (identificables con magnitudes regionales) y parámetros metodológicos (impuestos sin ambigüedad por el problema a resolver y el método elegido) con exclusión de cualquier otro tipo de parámetros convencionales. Vamos a ver que es efectivamente siempre posible, después de la tirada, definir modelos estrictamente objetivos, que nos habrían permitido resolver de manera perfecta el problema propuesto si nos hubiera sido posible especificarlos correctamente in praxis: Naturalmente, no hay milagro, y la especificación perfecta de un modelo objetivo queda fuera de ser alcanzado, in praxis, precisamente porque no conocemos los valores exactos de las regionales asociadas a los parámetros objetivos. Teóricamente, esto es un círculo vicioso. Es claro, por otra parte, que un modelo estrictamente objetivo – y es justamente porque es estrictamente objetivo – solo puede ser tautológico: Solo hace presentar en otra forma la misma información, la que está contenida en los datos de la misma V. R. , y que es accesible solamente después de la tirada. Se trata simplemente de una representación de la misma V. R.

En la práctica, sin embargo, la introducción de ciertas hipótesis de aproximación razonables o de simplificación permiten romper el círculo: Es aquí donde vamos a encontrar de nuevo nuestras famosas hipótesis anticipativas (con la fecundidad y la vulnerabilidad que estas implican), y que nosotros podremos ensayar de precisar un poco su status epistemológico, que es el de una aproximación anticipada: a la representación rigurosa de la V. R. (modelo muy rico para ser especificable in praxis) vamos a sustituir una representación aproximada mucho más simple, es decir un tipo de modelo cuyos parámetros pueden ser objeto de una estimación razonable in praxis, y que sin embargo conduzcan a una solución del problema, prácticamente equivalente a la que se habría elegido si se hubiera podido disponer de la representación rigurosa. Naturalmente, es,

como siempre, que solamente se puede afirmar esta equivalencia práctica, después de la tirada. El riesgo de error no ha sido eliminado, quedará simplemente mejor circunscrito.

Dicho esto, la representación, o modelo estrictamente objetivo, es de naturaleza probabilística, mientras que la situación real es única, con nada de aleatorio, por lo menos a la partida. Está caracterizada por dos elementos: De una parte la V. R. z , definida en un campo S , y conocida después de la tirada solamente; por otra parte la red de puntos experimentales x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$ en los cuales están dados in praxis los valores numéricos $z_\alpha = z(x_\alpha)$. Para probabilizar, debemos acompañar, de alguna manera, esta situación actual de un halo de estados virtuales considerados como “posibles”, y admitir, de una manera u otra, que el estado actual es solamente uno, cualquiera, de estos estados posibles, y no se singulariza por nada de particular. Se acabará la construcción del modelo al darse una ley de probabilidad sobre este conjunto de estados considerados como posibles. Aquí, el principal peligro a evitar es evidentemente el peligro a lo arbitrario. En la definición probabilística de estos estados virtuales, no podemos utilizar (si deseamos quedar estrictamente objetivos) nada más que la misma V. R. y la estructura de la red de información. Pero al mismo tiempo, debemos proporcionar una cierta movilidad relativa a estos dos elementos del problema, con el propósito, precisamente, de engendrar una familia de estados virtuales realizables. La idea directriz, muy simple, consiste en imaginar que la red de información se desplaza (o deforma) en el campo S de la V. R.

Para fijar las ideas, consideremos el caso más simple posible, en el cual los puntos experimentales x_α forman una red regular, con malla cuadrada o rectangular en el espacio de dos dimensiones, y donde el problema planteado es el de una estimación lineal. Las cosas se presentan de manera bastante diferente según que se trate de una estimación global o local.

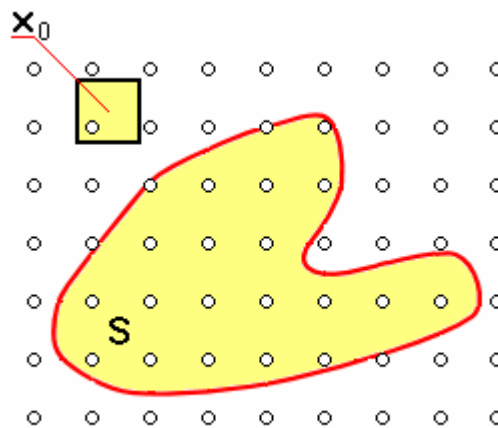


Figura 7: Estimación global.

a) Estimación global: Se trata, por ejemplo de estimar la integral:

$$Q = \int z(x) dx$$

La forma exacta del campo S de la V. R. es desconocida (in praxis), pero el problema de la estimación global se plantea, razonablemente en la práctica, cuando la red regular de los puntos x_α , en número necesariamente finito, desborda, en efecto, de manera suficiente el campo S para que se pueda, sin inconvenientes, prolongarlo al infinito (atribuyendo un valor cero a estos puntos ficticios suplementarios). Este punto de vista corresponde a las representaciones transitivas⁶⁷: Uno, cualquiera, de los puntos experimentales, sea x_0 , se elige como origen de la red, y se supone que se desplaza en el rectángulo definido por la malla, arrastrando con él, el conjunto de la red. Este desplazamiento define el conjunto de estados virtuales, y basta enseguida con considerar este punto x_0 como un punto aleatorio distribuido uniformemente en el rectángulo de la malla, para terminar con la definición del modelo.

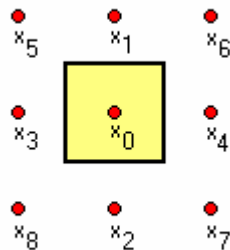


Figura 8: Estimación local.

- b) En un problema de estimación local, se trata, al contrario, de estimar una figura ligada a la red de muestreo, por ejemplo el valor medio de $z(x)$ en la “zona de influencia” $\Pi(x_0)$ de un punto x_0 de la red (es decir en el rectángulo con malla centrada en este punto x_0). Teniendo en cuenta las consideraciones acerca de la robustez, expuestas anteriormente, se decide utilizar, para esta estimación, los puntos experimentales más próximos, es decir x_0 mismo y sus ocho vecinos inmediatos x_1, \dots, x_8 . En estas condiciones, la configuración completa formada por $\Pi(x_0)$ y los nueve puntos x_0, x_1, \dots, x_8 es la que se desplaza en el espacio: El punto x_0 , arrastra con él al conjunto de la configuración, describirá un dominio S_0 (elegido por nosotros: S_0 será, en general, un subconjunto del campo total S , seleccionado in praxis, al mirar los resultados del muestreo mismo). Bastará, enseguida, con considerar x_0 como un punto aleatorio uniformemente distribuido en S_0 para acabar con la probabilización. Este segundo punto de vista corresponde a lo que llamaremos las representaciones deslizantes.

En el primer punto de vista la zona a estimar (idéntica al campo total S) quedaba fija en el espacio, mientras que la red de muestreos se desplazaba por traslación (en la terminología minera, este dispositivo se llama del tipo “campo fijo e implantación flotante”). Ahora, al contrario, es la configuración completa, constituida por los puntos experimentales y la zona a

⁶⁷ La palabra “transitivo” se emplea, aquí, como un equivalente espacial de “transitorio”. Indica que deseamos tener en cuenta, en nuestro modelo, fenómenos de discontinuidad que se observan cuando se atraviesan las fronteras del campo S .

estimar, la que se desplaza en su conjunto (en la terminología minera, se habla de dispositivo de tipo “campo flotante e implantación preferencial”: entendiéndose que el campo flotante corresponde a la zona a estimar $\Pi(x_0)$ y no más al campo total S que queda, evidentemente, fijo en el espacio.

LAS REPRESENTACIONES TRANSITIVAS.

Además de la V. R. z misma, definida en un campo S (desconocido) y prolongado al infinito al poner $z(x) = 0$ cuando x no pertenece a S , consideramos una red de “puntos de muestreo” $x_i = x_0 + h_i$ implantados según una malla regular. Para fijar las ideas, tomemos el caso de una malla rectangular en el espacio de dos dimensiones (se puede, evidentemente, considerar otros tipos de malla, y tratar también el caso del espacio de 3 dimensiones). La malla está definida por un rectángulo de base π , con lados a_1 y a_2 , centrado en el origen de coordenadas. Los vectores h_i de la malla admiten como componentes, según los ejes de coordenadas, múltiplos enteros de a_1 y de a_2 respectivamente. El origen x_0 de la red se “implanta al azar en π ” (esto quiere decir que tomamos como espacio Ω el rectángulo π , y, como probabilidad p , la ley uniforme en π). Los datos experimentales $z(x_i)$, implantados en los puntos $x_i = x_0 + h_i$, llegan a ser entonces, en el modelo, variables aleatorias (ellas son, en efecto, funciones de $\omega = x_0$).

Este esquema corresponde bien a la situación, muy frecuente en la práctica, en que no se conocen (in praxis) los límites exactos del campo S de la V. R., y en el que la red, en su conjunto, ha sido implantada “no importa donde” respecto a este campo. El espacio de los estados virtuales está constituido por diversas implantaciones posibles de la misma red, consideradas como “igualmente probables”, de donde la elección de una densidad uniforme en Π . Esta probabilización corresponde, en suma, a una traslación aleatoria que afecta al conjunto de la red. Se podría “enriquecer” el modelo al agregar también una rotación aleatoria. Pero esto no sería realista. Porque las direcciones preferenciales, si existen, que presenta la variación espacial del fenómeno son, en general, bastante bien detectadas experimentalmente cuando se conocen los resultados de una malla regular. No sería entonces correcto considerar, entre los estados virtuales, todas las orientaciones posibles de la red respecto de la V. R. como igualmente probables (porque, en efecto, una de ellas ha sido realizada y se conoce).

Respecto de las traslaciones que afectan al origen de la red, al contrario, la situación es bien diferente: Ciertamente, se puede pensar que ciertas implantaciones del punto $x_0 \in \Pi$ conducen a resultados excepcionalmente favorables o desfavorables, pero no se sabe (in praxis) absolutamente cuáles: Es entonces bien “natural” considerar todas estas implantaciones posibles como igualmente probables. Se trata, por supuesto, de una elección epistemológica, pero dictada sin equívoco por la naturaleza del problema propuesto (estimación global) y la estructura de la información (red regular implantada en ausencia de información sobre los límites del campo).

La cantidad a estimar $Q = \int z(x)dx$ es una magnitud regional de carácter global. El estimador lineal más simple posible que se pueda considerar es:

$$(2) \quad Q^*(x_0) = v \sum z(x_0 + h_i)$$

En que v es la medida del elemento de base Π (longitud, superficie o volumen, según que el espacio sea de 1, 2, o 3 dimensiones). Como x_0 es (en el modelo) aleatorio en Π , este estimador $Q^*(x_0)$ es una variable aleatoria definida en el espacio $\Omega = \Pi$ provisto de la probabilidad uniforme en Π . Según la manera como esta V. A. ha sido definida, todas sus propiedades se expresarán con la ayuda de las solas características de Π (parámetros metodológicos) y de la V. R. z (parámetros objetivos). Se trata bien entonces de un modelo estrictamente objetivo (o representación).

La esperanza de esta variable es, por definición:

$$E[Q^*] = \frac{1}{v} \int_{\pi} Q^*(x_0) dx_0$$

Al reemplazar $Q^*(x_0)$ por su expresión (2), se ve sin dificultad que la sumatoria sobre todos los vectores h_i de la malla, junto a la integración en el rectángulo de base, reconstituye la integral extendida a todo el espacio entero, de manera que queda:

$$E[Q^*] = \int z(x) dx = Q$$

Se trata entonces (en el modelo) de un estimador sin sesgos del parámetro (objetivo) Q el cual buscamos estimar. Un cálculo totalmente análogo muestra que el momento de orden 2, es decir la esperanza matemática de $(Q^*)^2$ es:

$$E[(Q^*)^2] = v \sum_i \int z(x) z(x + h_i) dx$$

Estamos conducidos así a asociar a nuestra V. R. z la función g , llamada covariograma transitivo, definido por la relación:

$$(3) \quad g(h) = \int z(x) z(x + h) dx$$

El momento de orden 2 se escribe entonces simplemente $E[(Q^*)^2] = v \sum g(h_i)$. Al integrar en h la función definida en (3), se hace aparecer el cuadrado de la cantidad $Q = \int z(x) dx$, que es necesario estimar, luego:

$$\int g(h) dh = Q^2$$

Luego, en el modelo, la variable aleatoria Q^* admite una varianza $\text{Var } Q^* = E[(Q^*)^2] - Q^2$, que llamaremos varianza de estimación. Según lo anterior, la varianza de estimación está dada por la relación:

$$(4) \quad \text{Var } Q^* = v \sum_i g(h_i) - \int g(h)dh$$

Esta fórmula merece un comentario. Une una noción objetiva, definida sin ambigüedad, la varianza de estimación, con una función muy simple, el covariograma transitivo g : el cual, como se puede ver en la fórmula (3), constituye en alguna manera el equivalente “determinístico” de la covarianza $C(h) = E[Z(x)Z(x+h)]$ de una F. A. estacionaria Z . Rendirá, en todo caso, los mismos servicios en la práctica. Pero no ha sido necesario introducir ninguna “hipótesis” de estacionaridad respecto la V. R.: Esta no ha sido, por otra parte, en ningún momento, interpretada como la realización de una función aleatoria. La estacionaridad que se manifiesta aquí, no es una propiedad del fenómeno, sino solamente una característica de nuestra red de muestreo. Nuestro covariograma transitivo contiene exactamente la misma información estructural que una covarianza estacionaria, pero presenta sobre esta última una ventaja decisiva: Está definida sin ambigüedad por la relación (3), y su significación es puramente objetiva. Si nos contentamos, como se hace a menudo en la práctica, con caracterizar la precisión de la estimación global por la sola varianza de estimación, la fórmula (4) muestra que se trata de un problema bien planteado, el cual admite una solución definida sin equívoco, por lo menos después de la tirada.

La significación física de esta fórmula (4) es por otra parte simple y fácil de captar. La varianza de estimación aparece, en efecto, como la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de una misma integral $\int g(h)dh$, luego, si se quiere, como el error que se cometería al evaluar esta integral con la ayuda de una suma discreta sobre los puntos h_i de la malla. Según lo que se sabe del cálculo numérico aproximado de integrales, se debe entonces esperar que la varianza sea más pequeña, cuando la malla es más cerrada, lo que es bien natural; y tanto más pequeña, también, cuando la función g es más regular. Como la regularidad de g refleja las propiedades medias de continuidad de la variable regionalizada z misma, aparece entonces que, para una malla dada, la estimación será mucho más precisa cuando la V. R. será también más regular y continua en su variación espacial: Esto está en conformidad con lo que la intuición nos sugiere, y proporciona al contenido de esta intuición, una expresión matemática rigurosa.

LA ESTIMACION DEL COVARIOGRAMA TRANSITIVO.

Queda por examinar como se presentan las cosas in praxis. Del hecho que los parámetros metodológicos (v y los vectores h_i) están dados al inicio, el único problema que se plantea (pero que es serio) es el de la estimación del covariograma transitivo g .

En primer lugar, en efecto, esta estimación parece plantear un problema más difícil que el problema inicial (la estimación de Q), y tiene dos partes: Por una parte estimar los valores $g(h_i)$ del covariograma para los argumentos h_i que corresponden a los vectores de la red (los únicos para los cuales se tiene una información experimental utilizable directamente). Por otra parte, interpolar entre estos valores estimados, de manera de obtener una evaluación de $g(h)$ para los otros vectores h .

Para un vector h dado, la estimación de $g(h) = \int z(x)z(x+h)dx$ es análoga a la de Q (la V. R. misma se reemplaza simplemente por $z(x)z(x+h_i)$), y esto conduce a tomar el estimador:

$$g^*(h_i) = v \sum_i z(x_0 + h_j)z(x_0 + h_i + h_j)$$

Debido a que la red es invariante por traslación, los puntos $(x_0 + h_i + h_j)$ están, en efecto, disponible al mismo tiempo que los $(x_0 + h_j)$. Para h_i fijo, el producto $z(x)z(x+h_i)$ es también una función de x , es decir una V. R. Sin embargo, el campo de esta nueva V. R. es la intersección $S \cap S_{-h_i}$, luego más pequeña que el campo inicial, y los datos útiles (diferentes de 0) son entonces menos numerosos que los que se dispone para estimar Q . Se podría pensar, para apreciar la precisión de esta estimación, aplicar la fórmula (4) al covariograma asociado a la V. R. producto de $z(x)z(x+h_i)$, y así sucesivamente: Esto nos conduciría a una desastrosa regresión al infinito, introduciendo covariogramas de orden más y más elevados, que sería necesario estimar a partir de datos de menos en menos numerosos (del hecho de la disminución del campo útil), y por otra parte en condiciones más y más dudosas (se sabe bien, en estadística, que la estimación de los momentos de orden un poco elevados pierde rápidamente robustez). No será entonces posible ir bien lejos en esta dirección, y, en la práctica, se renunciará a menudo a asociar una varianza al estimador $g^*(h_i)$.

El segundo problema es el de la interpolación de g entre los valores (estimados $g^*(h_i)$). En verdad, según la fórmula (4), solo necesitamos – en apariencia – la integral $\int g(h)dh = Q^2$, y se podría pensar entonces sustituirla a su estimador $(Q^*)^2$.

Lamentablemente, esta sustitución conduciría a atribuir a $\text{Var } Q^*$ el valor 0. Esto resulta de la identidad fácil de verificar:

$$v \sum_i g^*(h_i) - (Q^*)^2 = 0$$

Este resultado se entiende fácilmente: Al sustituir Q y a los $g(h_i)$ sus estimadores Q^* y $g^*(h_i)$ obtenidos a partir de la sola red de puntos $x_0 + h_i$, hemos, en suma, reemplazado el problema de la estimación de la integral $Q = \int z(x)dx$ por el de la suma discreta:

$$Q^* = v \sum z(x_0 + h_i)$$

Y la identidad anterior significa que $Q^*(x_0)$ es un excelente estimador de $Q^*(x_0)$ mismo. En términos menos triviales, esto quiere decir que no se puede deducir de los mismos datos, al mismo tiempo, una estimación y la precisión de esta estimación.

La conclusión es entonces (como siempre) que se debe introducir necesariamente una hipótesis anticipatoria de aproximación, es decir, reemplazar el verdadero $g(h)$ (desconocido) por una función $\bar{g}(h; \lambda, \mu)$ de un tipo convenientemente elegido, el cual depende de un número poco elevado de parámetros λ, μ, \dots , que se especificarán lo mejor

posible con la ayuda de los datos experimentales (los $g^*(h_i)$). Esta elección presenta una importancia crucial porque en definitiva el resultado que obtendremos al aplicar la fórmula (4) al modelo \bar{g} (una vez especificado) solo tendrá valor en la medida en que este modelo simplificado representará una aproximación aceptable del verdadero $g(h)$ desconocido. Lo peor que se puede hacer aquí sería dejarse llevar ciegamente con algún procedimiento automático para interpolar entre los valores experimentales $g^*(h_i)$.

Para hacer esta elección con conocimiento de causa, conviene examinar de más cerca la estructura de la fórmula (4), de manera de identificar, lo máximo posible, los factores que ejercen la mayor influencia sobre la varianza de estimación. Según la definición (3), el covariograma transitivo g es una función de “tipo positivo”. Es, por otra parte, esta condición la cual nos garantiza que la expresión (4) es necesariamente positiva, como conviene a una varianza. El modelo \bar{g} que nosotros elegimos deberá, entonces, el mismo, ser una función de este tipo. Ahora bien, las irregularidades de estas funciones están localizadas, en lo esencial, en la vecindad del origen, y ahora, entonces, de nuevo, nuestra atención es atraída por el comportamiento del covariograma respecto de $h = 0$. De hecho, un análisis más fino muestra que el valor numérico proporcionado por la fórmula (4) depende principalmente del comportamiento de $g(h)$ en una vecindad del origen, cuyas dimensiones son comparables con las del elemento de base Π de la red de muestreo. El punto crucial concierne entonces la interpolación de $\bar{g}(h)$ entre $g^*(0)$ y los primeros puntos experimentales disponibles en la vecindad de 0 , y el tipo de comportamiento analítico que presenta el modelo elegido \bar{g} en esta zona (por ejemplo: Lineal con efecto de pepita, o comportamiento en $|h|^\lambda$, $0 < \lambda < 2$): Es en efecto, la elección de este tipo de comportamiento en la vecindad de $h = 0$, la que constituye lo esencial de la hipótesis anticipatoria.

LAS FORMULAS DE APROXIMACION.

Hay un muy gran interés, desde el punto de vista físico, para estudiar el comportamiento de la varianza de estimación cuando la malla es pequeña, y relacionarlo con el que presenta el covariograma en un entorno de $h = 0$. Localicémosnos primero en el espacio de una sola dimensión (la recta) y designemos por L (en lugar de S) la longitud del campo de la V. R.: L es también el alcance de $g(h)$, es decir la distancia más allá de la cual, esta función es idénticamente nula. En $h = L$, $g(h)$ presenta ciertas irregularidades analíticas, ligadas a la manera, más o menos brutal, como se hace, en este punto, el empalme con el eje de las h . Designemos por a la malla, o equidistancia entre puntos de muestreo, y por $\sigma^2(a)$ la varianza de estimación, tal como está dada en la fórmula (4): Se encuentra entonces que esta varianza es la suma de dos términos:

$$\sigma^2(a) = T(a) + T'(a)$$

El primer término $T(a)$ está ligado al comportamiento de g en $h = 0$; el segundo $T'(a)$ está ligado al comportamiento de esta función respecto del alcance. $T'(a)$ depende, por lo esencial, de la cantidad $\varepsilon = L/a \text{ Modulo}(1)$ (es decir $\varepsilon = (L - na)/a$, en que n es el entero tal que: $na \leq L \leq (n + 1)a$). Es una función periódica de ε , de periodo 1 y sin término

constante, luego, de promedio nulo. Se le llama, por esta razón, término fluctuante (o Zitterbewegung). Su amplitud puede ser considerable, como lo muestra la figura 9:

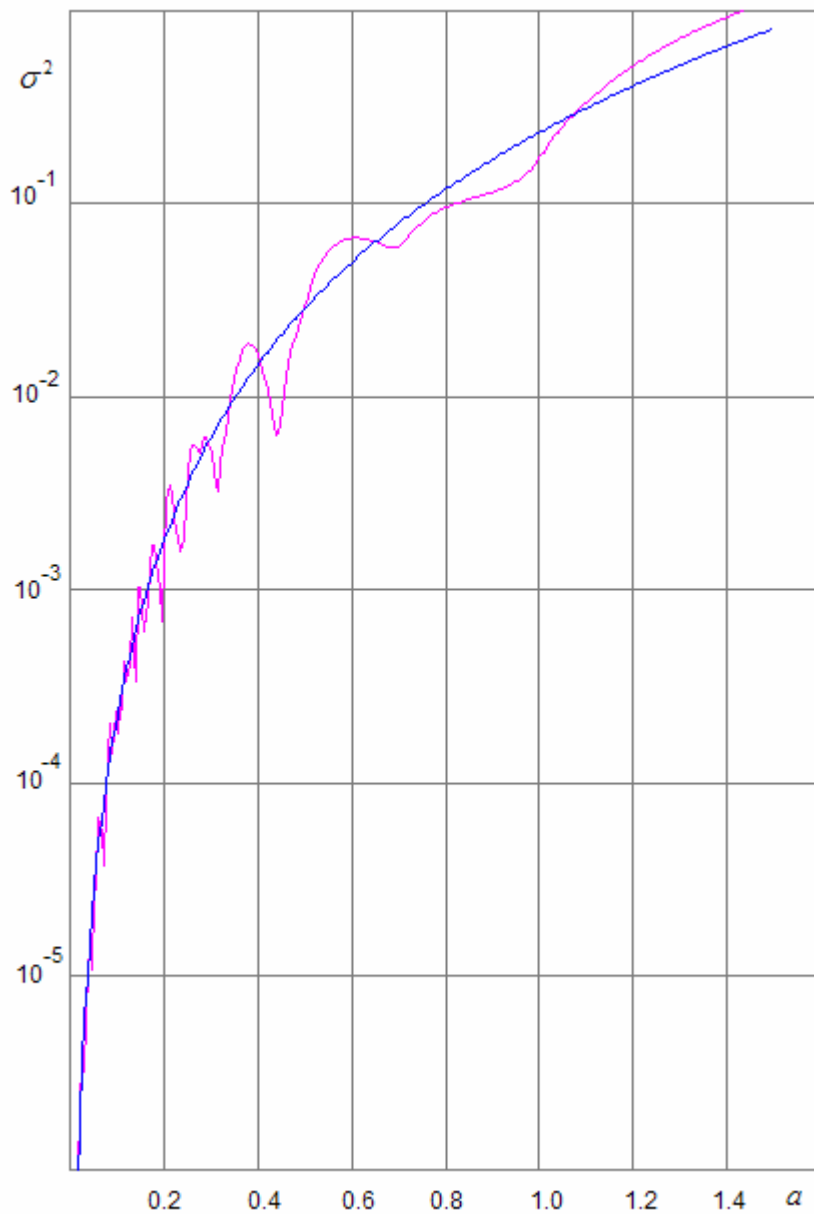


Figura 9: Zitterbewegung en la estimación de un círculo de diámetro unidad con la ayuda de una red de malla cuadrada. En abscisa la malla a . En ordenada, la varianza de estimación correspondiente $\sigma^2(a)$. La curva en azul representa el valor exacto $T(a) + T'(a)$, calculado a partir de la fórmula exacta (4). La curva morada representa la fórmula $\sigma^2(a) = 0.2276 a^3 + 0.00477 a^5$ obtenida al despreciar el Zitterbewegung y reteniendo los dos primeros términos del desarrollo limitado de $\sigma^2(a)$. Nota del Traductor: No corresponde a la figura original, la cual es, en parte, errónea.

A pesar que se sabe formar su expresión teórica, no se puede nunca, en las aplicaciones, prever su valor exacto: Porque, justamente, el valor exacto del alcance L se conoce con un

error $\pm a$, y que ε , que es L/a Modulo 1 está entonces totalmente indeterminado. Estamos autorizados, del hecho que el valor medio, en ε , de este término es igual a 0 a despreciarlo puramente y simplemente. Se observará el carácter probabilístico camuflado de esta aproximación. Todo ocurre, en efecto, casi como si se considerara que $\sigma^2(a)$ es una variable aleatoria, cuya esperanza sería el término regular $T(a)$, mientras que el término fluctuante $T'(a)$ representa la parte puramente aleatoria e imprevisible. De hecho, la figura 9 evoca la situación prealeatoria analizada por J. Ullmo, en la cual condiciones iniciales inseparables implican ulteriormente una separación de los fenómenos observados.

En lo que respecta al término regular $T(a)$, está ligado al comportamiento de $g(h)$ en la vecindad de $h = 0$. Por ejemplo, en un modelo en el cual $g(h)$ es de la forma $g(h) = g(0) - A|h|^\lambda + \dots$ ($0 < \lambda \leq 2$), se encuentra, cuando la malla es pequeña, una expresión asintótica del tipo:

$$T(a) = A T_\lambda a^{1+\lambda}$$

(T_λ es un coeficiente numérico conocido, por ejemplo $T_\lambda = 1/6$ si $\lambda = 1$, etc).

Designemos por n el número de puntos de muestreo x_i donde $z(x_i)$ no es nulo: Se tiene, aproximadamente, $n = L / a$. Al reemplazar a por L / n , se ve que la fórmula anterior nos lleva a prever (para n grande) una varianza de estimación de la forma:

$$(5) \quad \sigma^2(a) = \frac{C}{n^{1+\lambda}}$$

En el caso (frecuente) de un covariograma “lineal” en la vecindad de $h = 0$, es decir, $\lambda = 1$, la varianza varía en razón inversa del cuadrado del número de muestras útiles, por lo menos cuando este número n es grande.

En el caso del espacio de dos dimensiones y con una malla rectangular $a_1 \times a_2$, se obtienen resultados análogos. Hay también un término fluctuante, de ninguna manera despreciable como lo muestra la figura 9, y un término regular, que es esta vez de grado $2 + \lambda$ (más precisamente, si $a_1 \leq a_2$, comporta un término en $(a_2)^{2+\lambda}$ y otro en $a_2(a_1)^{1+\lambda}$). Tomemos, por ejemplo, el caso de una malla cuadrada $a_1 = a_2 = a$: La varianza es proporcional a $a^{2+\lambda}$. Como el número n de estos datos es aproximadamente $n = S / a^2$, se encuentra esta vez una ley de la forma:

$$\sigma^2(a) = \frac{C}{n^{1+\frac{\lambda}{2}}}$$

Por ejemplo, en el caso frecuente en que λ es igual a 1, la varianza de estimación está, esta vez en razón inversa de la potencia 3/2 del número de datos útiles.

Estas relaciones (5) o (6) constituyen, en efecto, leyes físicas. Después de la tirada al menos, es posible, en efecto, controlarlas experimentalmente. Ellas nos muestran de qué manera el orden de magnitud de la varianza de estimación se relaciona con el número de muestras. Y, porque se trata de leyes físicas, el parámetro λ que ponen en juego recibe, de la misma tirada, un status operatorio: Estas relaciones nos garantizan que el modelo de comportamiento que le hemos atribuido al covariograma g representa más que una simple aproximación gráfica: A saber un concepto físico (el del comportamiento de g en la vecindad del origen, representado por un “grado de regularidad” λ) así como las leyes físicas que constituyen este concepto y permiten medirlo.

CASO DE LAS MALLAS IRREGULARES.

El covariograma transitivo $g(h)$, que se introduce de manera natural en la expresión (4) de la varianza de estimación, presenta grandes analogías formales con una covarianza estacionaria, y el problema que se plantea es el de su estimación in praxis nos recuerda las dificultades que implica “la inferencia estadística” de una función de covarianza a partir de una realización de una F. A. estacionaria: Sin embargo, no hemos introducido ninguna hipótesis de estacionaridad relativa a la V. R. que, por otra parte, también, no ha sido considerada como la realización de una F. A., y ha conservado su status “determinístico”. Al contrario, la red regular de muestreos, considerando la ley uniforme en la base Π atribuida a su origen x_0 , ha sido en efecto tratada como un proceso puntual estacionario. Es la estacionaridad de la red la que nos ha permitido, en ausencia de cualquier hipótesis respecto de la V. R., beneficiarnos de las circunstancias muy ventajosas que se cree generalmente que están ligadas a la estacionaridad del fenómeno mismo, o de la V. R. que lo representa.. Volveremos sobre esta observación importante: La estacionaridad puede a menudo ser introducida, no como una hipótesis relativa a la realidad física, sino simplemente como una característica del método de estimación elegido por nosotros.

Ahora, en el caso en que los puntos experimentales están implantados de manera cualquiera en el campo S y en su vecindad, y no constituyen una malla regular, no podemos más, sin artificio, imaginar que esta red se desplaza en el espacio sin deformarse. La idea que viene entonces al espíritu consiste en considerar esta red como un proceso puntual. Si además este proceso puede ser considerado como estacionario, se encontrará de nuevo, para la varianza de estimación, fórmulas en que la V. R. interviene por el intermediario de su covariograma transitivo $g(h)$: Aquí aún el principio del trabajo a realizar consiste en atribuir la estacionaridad al dispositivo informante (la red) y no a la realidad física (la V. R.).

Naturalmente, conviene interrogarse sobre la significación de una hipótesis o más bien de una decisión metodológica, de este género. Se trata, en efecto, de una decisión constitutiva, que define, en particular la noción de varianza de estimación como una función de las características que nosotros elegimos de atribuir a este proceso puntual: Para que la noción así construida pueda ser considerada como realista y utilizable en la práctica, es necesario que la red de reconocimiento presente un grado suficiente de homogeneidad en el espacio para que sea al menos plausible asimilarla a una realización de un proceso puntual estacionario, el cual admite tales y tales características.

Notemos bien que en general (a diferencia de lo que pasa cuando se trata de avanzar una “hipótesis” de estacionaridad respecto de la realidad física) tenemos en la mano, in praxis, todos los elementos de apreciación como si nosotros mismos hubiéramos implantado la red, o como si nosotros tuviéramos a nuestra disposición por lo menos la historia del reconocimiento. Hay casos sin equívoco (por ejemplo el caso en el cual las implantaciones de los puntos han sido realmente tiradas al azar según un esquema aleatorio o aleatorio estratificado): También, a menudo, la red se presenta como muy heterogénea, pero puede, sin demasiada ambigüedad dejarse dividir en dos o más subzonas homogéneas, en las cuales se tiene todo el interés de tratarlas en forma separada. Esta circunstancia se encuentra frecuentemente en geoestadística minera, donde tal o tal parte del yacimiento ha sido objeto de un reconocimiento más exagerado que el resto (en razón de su riqueza particular, o simplemente por la planificación de la explotación). Pero hay también casos más difíciles, por ejemplo cuando se sabe que la implantación de la red ha sido influenciada por hipótesis (verdaderas o por otra parte, falsas) respecto de la V. R. Así, en materia minera, se sabe que en el estado del primer reconocimiento los sondeos se implantan en función de un objetivo estructural, por ejemplo, para verificar una hipótesis de naturaleza geológica etc... Este efecto preferencial es un generador de sesgos importantes pero difíciles de apreciar, y prohíbe prácticamente toda estimación cuantitativa precisa.

Desde el punto de vista matemático, este modelo (red de muestreos considerada como un proceso puntual estacionario) conduce a fórmulas análogas a (4). Aquí también se puede poner en evidencia el papel crucial que juega el comportamiento del covariograma en la vecindad del origen. Por ejemplo, en el caso de una malla “aleatoria estratificada”, se encuentra, para la varianza de estimación, la expresión:

$$\text{Var } Q^* = v [g(0) - g(\pi)]$$

En que $g(\pi)$ representa el valor medio de $g(x - y)$ cuando los dos puntos x e y describen el rectángulo Π que define la malla: En esta fórmula intervienen los valores que toma g en una vecindad del origen cuyas dimensiones son del mismo orden de magnitud que la malla misma.

PASO A LOS MODELOS PROBABILISTICOS USUALES.

En las aplicaciones prácticas, se utilizan raramente las representaciones transitivas mismas, y se prefiere sustituirlas por modelos probabilísticos del tipo usual, más fáciles de implementar: En efecto, las representaciones transitivas trabajan con integrales, más que con valores medios, de aquí una cierta pesantez en su manipulación. Consideremos, por ejemplo, la definición (3) del covariograma transitivo: La integral es, en realidad, extendida al dominio $S(h)$ en el cual $z(x)$ y $z(x + h)$ son ambas diferentes de 0 : $S(h)$ es la intersección del campo S con el dominio que se deduce por la traslación $- h$. Designaremos por $K(h)$ la medida de $S(h)$. Los valores numéricos del covariograma están muy influenciados por esta función $K(h)$ que, a su manera, refleja las propiedades geométricas del campo S más que la variabilidad de la V. R. $z(x)$ misma. Es entonces interesante tentar la separación de estos dos

tipos de efecto, al reemplazar la integral por el valor medio correspondiente, es decir, poniendo:

$$(7) \quad C_R(h) = \frac{1}{K(h)} \int_{S(h)} z(x)z(x+h)dx = \frac{g(h)}{K(h)}$$

En ciertos casos, esta separación es ilusoria. Por ejemplo, si la V. R. presenta un aspecto zonal típico, caracterizado por un decrecimiento más o menos continuo a partir de un corazón rico, la geometría del campo está ligada de manera demasiado íntima con el aspecto de la variación espacial de la V. R. para que sea posible distinguir estos dos factores. Al contrario, en otros casos, se tiene la impresión que el campo corta, como un sacabocados, una regionalización que perfectamente, podría bien seguir más allá: En este último caso, que es el de los fenómenos que presentan una cierta forma de estacionaridad (en el sentido físico), $C_R(h)$ representa, mejor que $g(h)$, las propiedades de la V. R. z “misma”, considerada como independiente de la geometría del campo.

Esta función $C_R(h)$ tiene, evidentemente, el sentido de una covarianza. De hecho, si elegimos el modelo “F. A. estacionaria”, la expresión $C_R(h)$ escrita en (7) representa exactamente “el estimador” que se utilizaría después de la tirada para proceder a lo que el punto de vista clásico llama “la inferencia estadística” de la “verdadera” covarianza $C(h)$ (no centrada) del modelo. En efecto, sabemos que la media espacial $C_R(h)$ agota el contenido objetivo de la noción de covarianza, porque ninguna información suplementaria nos permitirá nunca remontar más lejos en la dirección de la covarianza ideal. Podríamos identificar estas dos funciones, y elegir justamente $C_R(h)$ como la covarianza del modelo⁶⁸. Pero esta manera de ver deja escapar un punto importante. De hecho el covariograma transitivo, el cual suponemos es conocido después de la tirada, presentaría pequeñas ondulaciones, puntos singulares y toda una estructura de detalle que proporcionaría tanta información o casi, que el conocimiento de la V. R. misma. Pero esta rica estructura de detalle es absolutamente inaccesible in praxis. Aún después de la tirada, por otra parte, seríamos llevados a simplificar, a reemplazar el verdadero $g(h)$, demasiado complejo, por un modelo más accesible. En particular, como lo hemos visto, introducimos una hipótesis respecto el comportamiento (en $|h|^\lambda$ por ejemplo) de esta función en la vecindad de $h = 0$: Hipótesis que tiene una significación perfectamente objetiva⁶⁹, en la medida en que ella implica relaciones, como (5) o (6), que tienen el sentido de leyes físicas, y se prestan a un control experimental. Pero se puede, naturalmente, también, interpretar este reemplazo de la verdadera función g , o C_R , por un modelo más simple como un paso a la esperanza matemática: Es entonces este modelo simplificado, el cual tiene un sentido objetivo, el que puede servir de definición de la covarianza $C(h)$.

Por otra parte, a menos que solo nos interesa la estimación global, no tenemos ninguna razón para limitar nuestra elección a los solos modelos estacionarios: Los resultados esenciales que nos han proporcionado el estudio de las representaciones transitivas no dependen, en efecto,

⁶⁸ Con la reserva de verificar que esta función es bien de tipo positivo; g y K son, por construcción, de tipo positivo pero no forzosamente su razón.

⁶⁹ En el sentido del criterio popperiano (falsificabilidad), y no en el sentido del criterio demasiado estricto de decisibilidad en términos de regionales (ver capítulo 4, el párrafo consagrado al modelo primario).

de ninguna manera de una hipótesis cualquiera que concierne la estacionaridad física del fenómeno. Están ligados solamente con la estacionaridad de la red de muestreos. Esto sugiere el camino siguiente: Sin riesgo alguno de desmentido experimental, podemos considerar la V. R. $z(x)$ como la realización de una F. A. no estacionaria de orden 2, $Z(x)$, caracterizada por una covarianza $C(x; y) = E[Z(x)Z(y)]$, la cual depende separadamente de los puntos de apoyo x e y , y no solamente de su diferencia $x - y$. En la óptica clásica, esta covarianza no estacionaria no puede ser objeto de una “inferencia estadística”, porque disponemos de una sola realización. Preferimos decir que la covarianza no presenta significación objetiva, y juega, en nuestro modelo, un papel puramente convencional. Esto no tiene ninguna importancia, porque nosotros no tenemos realmente necesidad de conocerla. En efecto, en nuestro modelo, el covariograma transitivo es una función aleatoria de h , a saber:

$$G(h) = \int_{S(h)} Z(x)Z(x+h)dx$$

La esperanza de esta V. A. $G(h)$ puede ser identificada, no a $g(h)$ mismo, sino más bien al modelo simplificado $g(h)$ que le hemos sustituido, el que comportaba (por ejemplo) un comportamiento en $|h|^\lambda$ en la vecindad del origen, y del cual hemos señalado la significación física. Es fácil de ver que esta esperanza $E[G(h)] = \bar{g}$ se expresa de manera simple con la ayuda de la covarianza no estacionaria $C(x, y)$. Designemos, en efecto, por $\bar{C}(h)$ el valor medio de la covarianza $C(x, x+h)$ relativa a dos puntos x e $y = x+h$ distantes de h , cuando el punto x recorre el dominio $S(h)$. Se encuentra la relación simple:

$$\bar{g}(h) = K(h)\bar{C}(h)$$

Esta relación muestra que es necesario conocer, no la totalidad de la función $C(x, y)$, sino solamente la “covarianza media” $\bar{C}(h)$. Más precisamente, también, solo necesitamos conocer el comportamiento de $\bar{C}(h)$ en la vecindad de $h = 0$, y su aspecto analítico. Podemos también utilizar el variograma medio de este modelo, es decir:

$$\bar{\gamma}(h) = \bar{C}(0) - \bar{C}(h)$$

Entre este variograma $\bar{\gamma}$ y la regional definida en (1), existe la misma relación que entre el modelo $\bar{g} = E(G)$ y el covariograma transitivo g : $\bar{\gamma}$ es una versión simplificada de γ_R , el cual presenta por ejemplo en $h = 0$ un comportamiento analítico en $|h|^\lambda$, siempre conservando el sentido objetivo y el rico contenido físico que nosotros hemos analizado.

Del punto de vista puramente monoscópico, el modelo que proponemos para resolver el problema de la estimación global puede ser definido como sigue: El modelo genérico está constituido por clases de F. A. no estacionarias las cuales admiten un mismo variograma medio $\bar{\gamma}$ en S , y los criterios de especificación del modelo están proporcionados por $\bar{\gamma}$ mismo, o más simplemente por los parámetros que definen su comportamiento en la vecindad del origen. En definitiva, entonces, hemos identificado y unido en una misma rúbrica los

parámetros que sirven para especificar el modelo, los que permiten resolver el problema planteado y los que poseen el más rico contenido físico.

Una observación para terminar. A la varianza de estimación (4) de las representaciones transitivas se encuentra hora asociado, en el modelo, la variable aleatoria obtenida al sustituir $G(h)$ en $g(h)$. La esperanza $\sigma^2 = E(\text{Var } Q^*)$ de esta V. A. constituye lo que podríamos llamar la “varianza de estimación teórica”. Como $E(G)$ es igual, por definición, al modelo \bar{g} de covariograma, esta varianza teórica se calcula a partir de \bar{g} exactamente de la misma manera que $\text{Var } Q^*$ a partir de g . Dicho de otra manera, esta varianza teórica se identifica con el término regular, ligado al comportamiento del covariograma en $h = 0$, mientras que la fluctuación $\text{Var } Q^* - \sigma^2$, variable aleatoria de esperanza nula en el presente modelo, coincide con el término fluctuante ligado al comportamiento de $g(h)$ en la vecindad del alcance: El aspecto prealeatorio, e imprevisible in praxis, de este término fluctuante se encuentra así, el también, tomado en cuenta en la nueva formulación.

MODELOS GLOBALES NO ESTACIONARIOS.

Como hemos visto, la ausencia de estacionaridad (física) del fenómeno no suscita dificultades mayores mientras nos limitemos a un problema de estimación global. Pero a menudo se persiguen otros objetivos. Puede suceder que nuestro objetivo sea, justamente estudiar la no estacionaridad misma y de darle una representación global precisa, visualizada en forma de mapas. Los geofísicos, por ejemplo, buscarán separar “la anomalía regional” de la “anomalía local”, La primera refleja las estructuras profundas del subsuelo, la segunda está ligada a accidentes superficiales, de interés puramente local: Esta distinción es quizás difícil de precisar, pero presenta ciertamente una significación objetiva. La intuición física que sirve aquí de guía es la de un fenómeno “autorregulado”: En ausencia de perturbaciones, la evolución del fenómeno en el espacio se dejaría describir por una función $m(x)$ suficientemente regular, en nuestra escala de trabajo, para que nosotros podamos considerarla como “determinística”, es decir en proporcionar una representación funcional suficientemente simple y precisa. Debido a las irregularidades y accidentes superficiales, la V. R. $z(x)$ real se desvía hacia arriba y debajo de esta posición de equilibrio $m(x)$, pero estas desviaciones nunca son muy amplias ni muy duraderas: Todo sucede como si una fuerza de advertencia hace que $z(x)$ vuelva a la vecindad de $m(x)$, y la figura que resulta es la de una suerte de oscilación respecto de la posición de equilibrio representada por $m(x)$. Esto sugiere el modelo simple:

$$(8) \quad Z(x) = m(x) + Y(x)$$

En que $Y(x)$ es una función aleatoria estacionaria, con esperanza nula y de alcance finito ((se puede, evidentemente, considerar también modelos más complejos). Diremos que $m(x)$ es la deriva y que $Y(x)$ el residuo, o la fluctuación. En este modelo, la deriva $m(x)$ es la esperanza (no constante) de la F. A. $Z(x)$ asociada a la V. R. $z(x)$. A la fluctuación, o F. A. $Y(x)$ del modelo, le corresponde una nueva V. R., es decir $y(x) = z(x) - m(x)$. Se entiende que $y(x)$ representa, también, una realidad física, y de ninguna manera un “error de la naturaleza” (en nuestro ejemplo: La influencia de las estructuras superficiales), y la F. A.

$Y(x)$ del modelo no es un simple “ruido”. Posee, también, características estructurales (una covarianza, un alcance, etc...), pero a una escala más modesta que la deriva $m(x)$.

Este primer ejemplo no es demasiado ambiguo, porque un modelo físico previo nos garantiza que la dicotomía deriva + residuo corresponde a una realidad (estructuras profundas y accidentes de superficie). Pero no siempre es así. En cartografía submarina, se espera bien que la profundidad aumente cuando nos alejamos de las costas. Se trata, manifiestamente, de un fenómeno no estacionario. Pero nosotros estamos en condiciones de definir con alguna precisión la noción de deriva que conviene utilizar aquí. Podemos, convencionalmente, elegir de llamar deriva el resultado proporcionado por tal o tal procedimiento de alisamiento (media móvil, filtro de altas frecuencias, etc...). Pero aquí se trata de una definición puramente instrumental, y no de un concepto. La dificultad proviene, sin duda, del hecho que la representación intuitiva que tenemos en la cabeza, cuando hablamos de deriva, está esencialmente ligada a una escala de trabajo. Para tomar otro ejemplo, consideremos una montaña: Si trabajamos a la escala de una decena o de la centena de metros, la montaña se presenta como una deriva funcional, y los accidentes locales del relieve (pequeños barrancos, roqueríos aislados, etc..) hacen la figura de residuos. Pero si se trabaja a la escala de la decena de kilómetros, estudiamos ahora el conjunto de la cadena a la cual pertenece nuestra montaña, ésta solo nos parece una fluctuación local que nada en particular nos permite distinguir entre las montañas circundantes. El modelo ha cambiado. Lo que recién nos parecía una deriva, ha sido tomada en cuenta, a la escala de la cadena, por una función aleatoria eventualmente estacionaria.

DE hecho, entre los dos términos de la dicotomía (8), un cierto balance es siempre posible: Podemos, en una cierta medida, elegir de incorporar tal o tal característica estructural del fenómeno, a voluntad, sea en la deriva, sea en el residuo: Aquí aparecen varios modelos posibles aproximadamente equivalentes, unos presentan una deriva compleja y un residuo pobre, de alcance muy corto, otros, al contrario, una deriva muy simple (lineal o cuadrática por ejemplo) y, en contraparte un residuo de estructura más rica, una función de covarianza más complicada, un alcance más grande etc... No hay aquí, un criterio unívoco de objetividad, y se impone el punto de vista monoscópico. Es mediante el uso que aprendemos a elegir, en cada caso particular, el tipo de modelo que nos permite resolver lo mejor posible el problema que nos hemos planteado.

Luego, la noción de deriva, o de tendencia, corresponde a una falsa evidencia, y se revela, a un análisis singularmente equívoco. Se oscila entre dos polos: El primero corresponde a una simple atracción visual: se representa, instintivamente, la deriva como la curva o la superficie “regular” que pasa lo más cerca posible de los puntos experimentales. Por superficie “regular”, se entiende, lo más a menudo, sea un polinomio de grado dado (este es el punto de vista correspondiente a la técnica de ajuste por mínimos cuadrados), sea una superficie sometida a condiciones de curvatura (por ejemplo) que le imponen un cierto tipo de regularidad (este es el punto de vista de la técnica de las funciones spline). Estas técnicas son perfectamente defendibles, y proporcionan grandes servicios en ciertos tipos de problemas. No hay nada que objetarlos, mientras que:

- i) Que se reconoce claramente su carácter convencional y puramente instrumental, y que no se tomen los resultados numéricos a los cuales conducen, ni por la “realidad física”, ni por la realización de un concepto, y:

- ii) Que no se confundan los resultados obtenidos in praxis aplicando estas técnicas a los solos datos experimentales con lo que se obtendría (después de la tirada) aplicándolos a la totalidad de los valores numéricos $z(x)$ disponibles en S .

Este último punto es importante. Lo que se obtiene al aplicar, por ejemplo, la técnica de los mínimos cuadrados a los datos experimentales $z(x_\alpha)$ no constituye de ninguna manera el mejor estimador del resultado que daría la misma técnica aplicada a la V. R. z conocida en todos los puntos x de S . Para obtener esta mejor estimación, conviene estimar estos mínimos cuadrados “futuros” en la base de la información disponible. Por ejemplo, se efectuará un krigeado global, si se dispone de un modelo global, o mas simplemente un pegado de krigeados locales si solo se dispone de un modelo local. Es fácil de ver que esto consiste exactamente en aplicar la técnica de los mínimos cuadrados a la superficie obtenida al krigear los valores desconocidos de $z(x)$. Dicho de otra manera, se debe ajustar por mínimos cuadrados, no los valores experimentales $z(x_\alpha)$, sino los valores krigeados $z^*(x)$, $x \in S$.

El otro punto de vista (que tiene el fuerte riesgo de revelarse como puramente metafísico, a menos que se disponga de un modelo físico preliminar) corresponde a la creencia espontánea en la existencia de una suerte de tendencia regular, o fondo continuo (“trend”), tendencia respecto de la cual las desviaciones que presenta el fenómeno real constituirían “errores de la naturaleza” o, mejor, a “anomalías”, con significación puramente local. En efecto, no se ve bien sobre qué bases se podría acusar a la naturaleza de cometer errores (yo no hablo aquí del problema, bien diferente, y totalmente realista, que se plantea cuando los datos experimentales están afectados de errores de medida). El concepto de anomalía es ciertamente más rico y más interesante, pero muy difícil de elucidar.

De todas maneras, antes de elegir un estimador, es necesario definir de manera precisa y operatoria lo que se quiere estimar. Concretamente, esta definición estará constituida por un algoritmo aplicable, después de la tirada, a la V. R. z . Siempre es una magnitud regional lo que se busca estimar, es decir aproximarla lo mejor posible con la ayuda de una función de los datos disponibles. Si entonces los geofísicos, por ejemplo, nos piden, a la vista de resultados discretos de una campaña de medidas, separar “la anomalía local” y “la anomalía regional”, nosotros le plantearemos la pregunta crucial habitual: Si usted conociera su V. R. $z(x)$ en todos los puntos x del campo que les interesa – luego todo lo que es, en principio experimentalmente posible conocer respecto de este fenómeno - ¿Cómo procedería usted para separar estas dos componentes locales y regionales? ¿Esta distinción resulta de un modelo preciso, que usted ha sugerido por los conocimientos que usted puede tener sobre la física de este fenómeno, y este modelo lo conducirá, en caso de conocimiento experimental exhaustivo, a una determinación rigurosa de cada una de estas dos componentes, o al menos un procedimiento de estimación bien definido? ¿O bien usted se contenta con aplicar mecánicamente tal o tal procedimiento de filtrado o de ajuste por mínimos cuadrados? En todos los casos, nosotros le exigimos a usted precisarnos, bajo su responsabilidad, el procedimiento numérico – el algoritmo – que usted utilizaría si conociera perfectamente vuestro fenómeno.

El resultado (actualmente desconocido porque en efecto z está dado solo en algunos puntos) al cual conduciría el algoritmo elegido por usted constituye la magnitud regional que para nosotros, y para su servicio, nosotros podemos estimar para usted de la mejor manera posible, considerando la información que disponemos y del modelo que hemos logrado especificar sobre esta base. Pero de nuestra parte, nosotros no disponemos una regla universal que permita, al entrar al juego, separa “deriva en si” y “residuo en si”, “liso” y “rugoso” y así sucesivamente.

En ciertos casos, la noción de deriva se presta para una reconstrucción operatoria, análoga a la que nos ha permitido definir el alcance, y presenta entonces una significación objetiva sin equívoco: Pero, más a menudo la dicotomía (8) aparece irreductiblemente arbitraria. Ahora bien, sabemos que una solución sensata de un problema real no puede depender de una elección puramente convencional. Dicho de otra manera, si la noción de deriva no es susceptible de una definición objetiva, nosotros no la necesitaremos nunca para resolver un problema real. Esta observación conduce a buscar modelos más sintéticos que (8), en los cuales se renuncia a separar “deriva” y “residuo”, pero que conservan sin embargo, una forma atenuada de estacionaridad: Estacionaridad bastante débil para que sea compatible con la realidad, pero suficiente para permitir la “inferencia estadística” clásica. Un buen ejemplo de este género lo proporcionan las “funciones aleatorias intrínsecas de orden k ”⁷⁰. Se trata de una F. A. $Z(x)$ no estacionaria, pero en la cual los “incrementos generalizados”, ellos, son estacionarios: Entre las combinaciones lineales de la forma $\sum \lambda_i Z(x_i)$, solo son estacionarias las “combinaciones lineales autorizadas”, es decir las que filtran (anulan) los polinomios de grado inferior o igual a k . La función de covarianza de Z es de la forma:

$$(9) \quad C(x, y) = K(x - y) + \sum_l a_l(x) f^l(y) + \sum_l a_l(y) f^l(x)$$

En esta relación los f^l representan los monomios de grado inferior o igual a k , y los $a_l(x)$ funciones cualesquiera (desconocidas), inaccesibles in praxis, y quizás también después de la tirada. La parte no estacionaria de la covarianza $C(x, y)$, es decir las dos sumas del tipo $\sum a_l f^l$, tiene entonces una significación puramente convencional. Por el contrario, la parte estacionaria $K(x - y)$, o “covarianza generalizada” es accesible (después de la tirada) y puede ser (in praxis) objeto de una estimación: Debido a que las varianzas de las combinaciones lineales autorizadas solo dependen de esta función K , y no de la parte no estacionaria de la covarianza. Es entonces la covarianza generalizada K la que constituye el criterio de especificación del modelo genérico “F. A. intrínseca de orden k ”. Corolario obligado, si elegimos este modelo debemos restringirnos solamente a manipular combinaciones lineales autorizadas: Limitación real, pero no nos impide de ninguna manera aportar soluciones sensatas a los problemas bien propuestos.

La noción de deriva no figura entre los criterios de especificación y las herramientas de trabajo autorizadas por este modelo. Sin embargo está tomada en cuenta, pero de manera implícita solamente. En efecto, a una misma covarianza generalizada K (modelo específico)

⁷⁰ Ver mi artículo “Intrinsic Random Functions”, Adv. In APP. Prob., Dic.1973, y la exposición de P. Delfiner “Linears estimations of non stationary spatial phenomena”, en Advanced Geostatistics in the Mining Industry, Ed. Por M. Guarascio y otros, 1976, D. Reidel.

le corresponde toda una clase de F. A. , las cuales difieren unas de otras por polinomios con coeficientes aleatorios. Si $Y(X)$ es una de estas F. A., las otras son de la forma:

$$Z(x) = Y(x) + \sum A_i f^i(x)$$

En que los f^i son monomios, y los A_i variables aleatorias, no independientes de $Y(x)$ en general. Cualquier combinación lineal autorizada que filtre, por definición, los polinomios de grado k , define entonces una sola y misma variable $\sum \lambda_i Z(x_i) = \sum \lambda_i Y(x_i)$ independiente de la elección de Y o de Z . Se puede, si se desea, llamar deriva al polinomio aleatorio $\sum A_i f^i(x)$ el cual es así, automáticamente filtrado por las combinaciones lineales autorizadas. Pero esta “deriva” no está definida, ni aún es definible, porque, no existe, en general, en la clase de las F. A. asociadas a una misma covarianza generalizada K , una función aleatoria privilegiada (estacionaria por ejemplo) que pueda servir de referencia fija.

En el caso particular $k = 0$, se obtienen clases de F. A. con incrementos estacionarios, definidos salvo una constante (aleatoria), y, salvo un signo, la covarianza generalizada se identifica al variograma, es decir $K = -\gamma$. Hemos visto anteriormente que el comportamiento del variograma en la vecindad del origen presentaba una significación objetiva innegable, rica en contenido físico, y se prestaba para una reconstrucción operatoria. Podemos esperar que será similar para la covarianza generalizada $K(h)$ cuando h es mayor que 0 . Por razones de comodidad, examinaremos este punto, en el capítulo siguiente, consagrado a los modelos locales.

CAPITULO VII

LOS MODELOS LOCALES.

En esta capítulo consagrado a los modelos locales – es decir a los modelos en los cuales se ha elegido solamente manipular puntos que relativamente sean poco distantes unos de otros – nuestra tarea será casi la misma que en el capítulo precedente: fundar la objetividad, esbozar la reconstrucción operatoria. Esta tarea será, en un sentido, menos arduo, porque la repetición en el espacio que, debido a la falta de repetición en el tiempo, nos proporciona nuestro criterio de objetividad interna, se introduce de manera particularmente natural cuando nosotros adoptamos el punto de vista de los modelos locales. El camino, aquí también, consistirá en partir de un modelo estrictamente objetivo o representación, que servirá enseguida de criterio de comparación para juzgar la objetividad y el valor de los modelos usuales. Y, de nuevo, la elección de estos últimos, tal como se puede efectuar in praxis, nos aparecerá como tributario de una hipótesis de aproximación anticipada.

LAS REPRESENTACIONES DESLIZANTES.

Para introducir de manera natural nuestro segundo grupo de modelos estrictamente objetivos, que llamaremos representaciones deslizantes, dejémosnos guiar por un problema simple, que se presenta, por otra parte, de manera frecuente en la práctica, el de la estimación lineal local. La situación típica es la siguiente: Nosotros tenemos una V. R. z definida en un campo S . Como de costumbre, prolongamos z al espacio entero al poner $z(x) = 0$ para todo x que no pertenece a S . Queremos, sobre la base de puntos experimentales x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$, estimar el valor $z(x)$ en cada punto x de un dominio S_0 elegido por nosotros. Más generalmente, se podría también considerar la estimación de una media móvil del tipo $z_p(x) = \int z(x+y) p(dy)$ en que p sería una medida cuyo soporte estaría contenido en la vecindad móvil V definida más adelante: Pero, en este ejemplo introductorio, nosotros nos podemos limitar al caso más simple, el de los valores puntuales $z(x)$.

Para proceder a esta estimación, nosotros hemos (con razón o equivocados, volveremos sobre este punto) tomado un cierto número de decisiones metodológicas:

- i) Hemos elegido utilizar solamente estimadores lineales del tipo $z^*(x) = \sum \lambda^\alpha z_\alpha$, y, más precisamente, como en el caso del krigeadado, hemos decidido, para estimar un punto x dado, retener los puntos experimentales más próximos al punto a estimar. Esta decisión tiene esencialmente por objetivo reforzar la robustez de nuestro procedimiento. De una manera precisa, hemos elegido una vecindad V del origen, llamada vecindad deslizante, y, para estimar $z(x)$, retenemos los puntos x_α que caen en la vecindad V_x (trasladado de V por la traslación x) del punto x . Dicho de otra manera, al designar por x_i los puntos experimentales retenidos, y poniendo $h_i = x_i - x \in V$, nos limitamos a la clase de estimadores lineales del tipo:

$$(1) \quad z^*(x) = \sum_i \lambda^i z(x+h_i)$$

ii) Además (y desde el punto de vista metodológico es la decisión más importante), decidimos utilizar, para formar nuestros estimadores $z^*(x)$, solamente algoritmos invariantes por traslación. Esto quiere decir que los pesos λ_i que figuran en la expresión (1) podrán depender de los vectores h_1, h_2, \dots de la vecindad móvil V , pero no del punto x a estimar. Dicho de otra manera, estos pesos serán invariantes por traslación: Si llamamos configuración la figura constituida por el punto x a estimar y los puntos $x_i = x + h_i \in V_x$ seleccionados para formar el estimador (1), los pesos λ_i no serán modificados por una traslación que afecte al conjunto de la configuración.

Se trata, repitémoslo, de una decisión de parte nuestra (juiciosa o no) y de ninguna manera una hipótesis relativa a la realidad física. Este es un segundo ejemplo del camino que consiste en hacer de la estacionaridad una característica (elegida por nosotros) de la clase de estimadores que utilizamos, más que una hipótesis (vulnerable) relativa a la realidad.

Para apreciar (después de la tirada) el valor del estimador (1) en que los pesos λ_i y los vectores h_i se suponen fijos, elegiremos convencionalmente (pero es una convención bastante “natural”) el criterio: Valor cuadrático medio del error $z^*(x) - z(x)$ cuando el punto x recorre el dominio S_0 en el cual hemos elegido limitar nuestro interés. Pongamos entonces, por definición:

$$\|z^* - z\|^2 = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} [z^*(x) - z(x)]^2 dx$$

Al reemplazar $z^*(x)$ por su expresión (1), se ve aparecer la función $C(h, h')$ definida por la fórmula:

$$(2) \quad C(h, h') = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} z(x+h)z(x+h')dx$$

Y nuestro error cuadrático medio puede escribirse:

$$\|z^* - z\|^2 = C(0,0) - 2 \sum_i \lambda^i C(0, h_i) + \sum_{i,j} \lambda^i \lambda^j C(h_i, h_j)$$

Si la función $c(h, h')$ fuera conocida (in praxis, evidentemente, será necesario estimarla) la secuencia de operaciones (elección de los pesos λ_i óptimos, etc...) se desarrollaría exactamente como en el caso de un krigado. Esta función $C(h, h')$, según su definición (2), tiene bien la significación de una covarianza. Esto sugiere la definición totalmente general siguiente:

Siendo dados una vecindad deslizante V , un dominio S_0 y una V. R. z , diremos que la F. A. definida por:

$$(3) \quad Z(h) = z(\underline{x} + h) \quad (h \in V)$$

En que \underline{x} es el punto aleatorio obtenido al darle a S_0 una ley de probabilidad uniforme, constituye la representación deslizante de la V. R. z en S_0 (para la vecindad deslizante V).

Con esta definición, la relación (2) se puede reescribir en la forma $C(h, h') = E[Z(h) Z(h')]$, de manera que $C(h, h')$ es bien la función de covarianza asociada a la F. A. $Z(h)$ que acabamos de definir.

La vecindad deslizante V y el dominio S_0 , elegidos por nosotros, son parámetros metodológicos: Según la definición anterior, todas las características de la F. A. $Z(h)$, $h \in V$, se expresan en función de S_0 , V y de magnitudes regionales, con la exclusión de los otros parámetros. Se trata bien de un modelo estrictamente objetivo, o representación, por otra parte perfectamente tautológica, porque lo único que hemos hecho es presentar la V. R. en una forma diferente. Sin embargo, notemos los puntos siguientes, que conciernen en las relaciones mutuas de V , S_0 y el campo real S al exterior del cual z es idénticamente nulo:

Los únicos puntos y del espacio implicados en la definición (3) son los puntos de la forma $y = x + h$, en que x describe el dominio S_0 , y h , la vecindad V elegidas por nosotros. Ellos forman un conjunto, que podemos designar por $S_0 \oplus V$ y llamarlo “dilatado⁷¹ de S_0 por V ”. Dos casos presentan un interés particular:

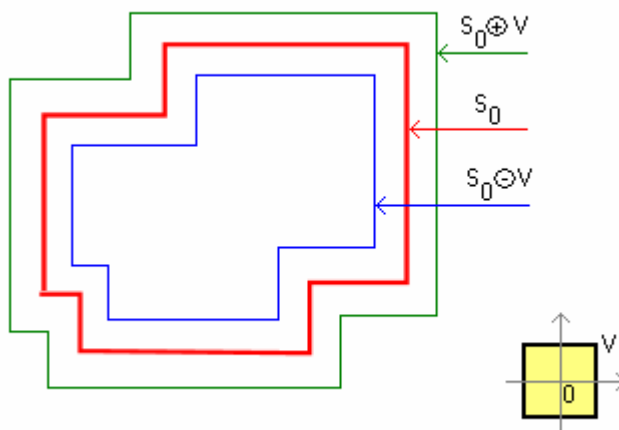


Figura 10: El dominio S_0 su erosión y su dilatación.

Si el conjunto dilatado $S_0 \oplus V$ está enteramente contenido en el campo real S de la variable regionalizada (campo S fuera del cual z es idénticamente nula), la definición (3) de la F. A.

⁷¹ Yo supongo aquí que V es una vecindad simétrica con respecto al origen 0 de coordenadas, de manera de no tener que distinguir entre V y su simétrico con respecto al origen.

$Z(h)$ no utiliza realmente la prolongación (ficticia) de la V. R. al exterior de su campo natural. Diremos que se trata de una representación deslizante interna, modelo particularmente bien adaptado al estudio de la variabilidad “interna” de z , es decir al interior de su campo S haciendo abstracción de su geometría.

La F. A. $Z(h)$ se anula, idénticamente, sobre V cada vez que el punto aleatorio x cae al exterior del dilatado $S \oplus V$ del campo S por la vecindad V . Entonces, si el dominio S_0 elegido por nosotros contiene $S \oplus V$, o, lo que es lo mismo, si el campo S está contenido en el erosionado $S \ominus V$ (ver figura 10), todas las configuraciones no triviales que se pueden observar en las vecindades deslizantes V_x intervienen efectivamente en la definición de la F. A. $Z(h)$. Diremos, en este caso, que se trata de una representación externa o exhaustiva de la variable regionalizada.

Se puede demostrar el teorema siguiente: Toda representación deslizante externa es una función aleatoria estacionaria en V . En particular, si se designa por $g(h)$ al covariograma transitivo de la V. R. z , la función de covarianza de la F. A. estacionaria sobre V que se le asocia en una representación externa es:

$$C(h, h') = \frac{1}{S_0} g(h - h')$$

Sin embargo, y a pesar de este bonito teorema, las representaciones externas son raramente interesantes en las aplicaciones. Corresponden, en efecto, a una situación donde se habría decidido a priori, utilizar el mismo algoritmo invariante por traslación tanto para las configuraciones internas (V_x incluido en el campo de la V. R.) como para aquellas que sobrepasan la frontera: Actitud en general poco realista porque, en la mayoría de los casos, existe un interés evidente en tratar aparte, de manera diferente, las configuraciones de borde (que contienen datos nulos, exteriores al campo real). Por otra parte, a menudo, el dominio S que nos interesa es una parte, seleccionada por nosotros, de un campo total más vasto, y en este caso la representación deslizante es necesariamente interna. Estas representaciones deslizantes externas son en realidad una versión localizada de las representaciones transitivas. No pueden entonces, como estas últimas, presentar interés solamente cuando la geometría del campo de la V. R. presenta una gran importancia para el problema a resolver, por ejemplo, si el campo S está constituido de un gran número de componentes conexas disjuntas o presenta numerosos enclaves de estéril.

PRIORIDAD DEL METODO.

El punto de vista de las representaciones deslizantes consiste, en suma, en tratar de hacer de la estacionaridad una característica (limitativa) elegida por nosotros en la clase de estimadores a utilizar más que considerarla como una propiedad de la realidad física (la V. R.) o también como una característica de un modelo de F. A. (no estrictamente objetivo) elegido a priori. La operación tiene éxito perfecto en el caso de las representaciones externas (ver el teorema anterior), solamente parcialmente en los otros casos. Volveremos sobre este punto. Nuestra decisión metodológica: Solamente utilizar estimadores con carácter local, asociados con

algoritmos invariantes por traslación, no supone de ninguna manera la estacionaridad o la homogeneidad del fenómeno en el espacio, pero no será absurda en caso de heterogeneidad.

Es cierto, en caso de heterogeneidad, si fuera realmente posible (a partir de los datos disponibles in praxis) dividir el campo total en subzonas en las cuales el fenómeno queda aproximadamente homogéneo (y ¡especificar un modelo diferente para cada una de estas zonas!) se tendrá interés, en general, en utilizar algoritmos diferentes, ajustados especialmente para cada una de las subzonas: El error será menor, en promedio, y además las varianzas de estimación estarán localizadas (es decir serán diferentes de una subzona a otra, conforme a lo que sugiere la intuición física).

Lamentablemente, no es siempre posible definir, en condiciones aceptables, esta partición del campo, ni de especificar los diferentes modelos adaptados a cada una de las zonas: Esto, simplemente, porque los datos disponibles se hacen raros, a medida que estas subzonas se multiplican, de manera que los errores cometidos comienzan a ser más y más grandes, y que se tiene el riesgo fuerte de sobrepasar el umbral de robustez – y también el umbral de simple realismo.

Ante el método potente, que utiliza algoritmos diferentes en cada una de las subzonas, pero que necesita prerequisites demasiado numerosos, prácticamente inaccesibles in praxis (tantos modelos específicos como subzonas), debemos a menudo, conforme con nuestras reglas metodológicas generales, sustituir un método menos potente (un solo algoritmo invariante por traslación, por lo menos mientras x pertenezca a S), pero necesariamente también con menos prerequisites. Tendremos, es cierto, así una varianza de estimación más fuerte y no localizada: El valor numérico que le atribuiremos representará solamente la media de los valores diferentes que la varianza toma en cada una de las subzonas que hemos renunciado a distinguir. En contraparte, caemos bajo del umbral de robustez, y la especificación del modelo vuelve a ser accesible in praxis.

Sin embargo observamos un punto importante: Aquí no se requiere ninguna hipótesis respecto de la homogeneidad física del fenómeno. Por el contrario, nuestras representaciones deslizantes son realistas solamente si el reconocimiento (la red de los puntos experimentales), es suficientemente homogéneo (en el dominio $S_0 \oplus V$). En efecto, para una configuración dada, centrada en x , nosotros calculamos la varianza de estimación al tomar la media cuadrática del error cuando x describe S_0 : Esto es sensato si se puede esperar encontrar configuraciones idénticas, o al menos suficientemente análogas, para implantaciones de x repartidas de manera más o menos uniforme en S_0 . En el caso contrario, en efecto, tenemos el riesgo de utilizar características globales de la V . R., bien diferentes quizás de las características locales que habrían convenido al tratamiento de esta configuración demasiado particular. En caso de heterogeneidad, la solución consistirá, en principio, de cortar el campo en subzonas reconocidas de manera homogénea (lo que es más fácil, o menos riesgoso, que el corte en zonas en que el fenómeno mismo es homogéneo) y tratar separadamente estas subzonas.

En este estado en que hemos llegado, conviene introducir una noción general, la de regional deslizante asociada a una regionalización deslizante, noción en la cual el estimador (1)

constituye un caso particular. La V. R. z ha sido prolongada (por valores idénticamente nulos al exterior de S), consideremos una funcional cualquiera $a(z; V)$ definida por la restricción de z a la vecindad V del origen 0 . Para cada x pongamos $a(z; V_x) = a(z_{-x}; V)$, en que z_{-x} es la V. R. deducida de z por la traslación $-x$, es decir $z_{-x}(y) = z(x + y)$: Diremos que la función $x \rightarrow a(z; V_x)$ así definida constituye la regional deslizando asociada al algoritmo $a(z; V)$ invariante por traslación. La restricción de esta función a S_0 (provisto de la ley uniforme) Es entonces una variable aleatoria asociada a la F. A. $Z(h)$ definida por la representación deslizando: A saber la V. A. $a(z; V)$. El formalismo de las representaciones deslizantes permite entonces, en principio, estudiar cualquier regional deslizando, lineal o no, y entonces, en particular, abordar los problemas de estimación (local) no lineales, por medio de esperanzas condicionales, o de estimadores de tipo disyuntivo etc...: Bajo la reserva (esencial) que la especificación in praxis sea razonablemente accesible.

En toda generalidad, el problema de la estimación local es el de la estimación del valor en todo $x \in S_0$ de una regional deslizando $a(z, V_x)$. Si los puntos experimentales $x_i = x + h_i$ disponibles en la vecindad deslizando V_x del punto x han proporcionado los valores $z(x_i) = z_i$, es decir un algoritmo $a^*(z_i; h_i)$ también invariante por traslación y pudiendo jugar el papel de un estimador. Para elegir un tal algoritmo, podemos adoptar diferentes criterios. El más simple de ellos consiste en minimizar (en el modelo) la varianza de estimación, o también simplemente, el error cuadrático medio:

$$E[(a(Z, V) - a^*(Z_i, h_i))^2]$$

Cuando la función a^* describe una familia Φ elegida por nosotros. In praxis, evidentemente, elegiremos una familia lo más grande que pueda especificar nuestro modelo. Por ejemplo Φ podrá ser la clase de estimadores lineales, los cuales verifican tal o tal condición “de universalidad”, o bien la de los estimadores disyuntivos (ver capítulo 8) etc...

La regional deslizando que debemos estimar puede ser más o menos cualquiera (con la reserva que su definición solo haga intervenir valores observables sobre una misma vecindad V . Por ejemplo, se puede tratar de una media móvil:

$$z_p(x) = \int z(x + y)p(dy)$$

De la V. R. ponderada por una medida p cuyo soporte está contenido en V : El caso más frecuente en la práctica es el de la ley media de un “panel deslizando” $v_x \subset V_x$. Pero a puede también representar una funcional no lineal en z . Por ejemplo, si además de la ley media de los paneles deslizantes, nos interesamos también a sus leyes de distribución, se buscará, para cada $x \in S$ y cada número real u , estimar la cantidad:

$$\theta_p(x; u) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_p(x) \geq u \\ 0 & \text{si } z_p(x) < u \end{cases}$$

El problema a resolver (estimar la regional $a(z, V)$) es un dato impuesto, sobre el cual no podemos actuar. En lo que respecta a la elección del método (es decir la elección en la clase Φ de los estimadores a utilizar) disponemos de una gran latitud. Mientras más grande sea esta clase Φ , más potente será nuestro estimador, pero también serán más numerosos los prerequisites relativos a la ley espacial de la representación deslizante $Z(h)$ cuyo conocimiento será imperativamente requerido para determinar efectivamente el estimador óptimo. Si la representación deslizante estuviera completamente especificada (lo que sería el caso después de la tirada), se debería tomar para Φ la clase más grande posible, es decir la de todas las funciones medibles. El estimador óptimo sería en consecuencia, la esperanza condicional. Pero, in praxis, no es posible especificar suficientemente la representación para que la esperanza condicional sea accesible en condiciones de robustez razonables. La táctica a observar va a consistir entonces en restringir la clase Φ de los estimadores a utilizar, de manera suficiente para que la especificación de los prerequisites necesarios sea razonablemente posible, pero sin embargo no demasiado, para no disminuir más la potencia de nuestro estimador.

Encontramos aquí de nuevo, muy exactamente, el problema de la elección y de la especificación de un modelo de F. A., tal como fue expuesto en el capítulo 4, pero con una diferencia capital: Como ahora se trata de representaciones, es decir de modelos estrictamente objetivos, los parámetros de este modelo (salvo S y V que se eligen de una sola vez) todos tienen una significación puramente objetiva.

Mucho mejor, la pertenencia de $Z(h)$ a tal o tal modelo genérico es decidible después de la tirada, de manera que un enunciado como “la representación $Z(h)$ es una F. A. estacionaria de orden 2” constituye ahora una hipótesis objetiva, verdadera o falsa, pero decidible después de la tirada. Después de la tirada, en efecto, podemos calcular las expresiones:

$$\begin{cases} m(h) = E[Z(h)] = \frac{1}{S_0} \int_{s_0} z(x+h) dx \\ C(h, h') = E[Z(h)Z(h')] = \frac{1}{S_0} \int_{s_0} z(x+h)z(x+h') dx \end{cases}$$

Y constatar si estas son, o no, invariantes por traslación. En la práctica, no serán nunca (rigurosamente) estacionarias. Pero nosotros no demandamos tanto, y estamos todos dispuestos a contentarnos con una estacionaridad aproximada. Si encontramos, con una aproximación aceptable (para h, h' pertenecientes a V):

$$(4) \quad \begin{cases} m(h) \cong m \\ C(h, h') \cong \bar{C}(h-h') \end{cases}$$

Reemplazaremos, sin dificultad, la verdadera representación $Z(h)$ por el modelo estacionario de orden 2 definido por m y $\bar{C}(h-h')$. Respecto a lo que hay que entender por aproximación “aceptable”, esto depende evidentemente del problema a resolver y de los datos disponibles: A partir de estos datos, el modelo exacto y el modelo aproximado deben conducir a estimadores poco diferentes, y atribuirles varianzas de estimación poco diferentes.

Naturalmente, solamente después de la tirada podremos constatar si esta condición se satisface y si el modelo genérico “F. A. estacionaria de orden 2” constituye una aproximación aceptable de la representación $Z(h)$. Adoptar este modelo in praxis constituye siempre una hipótesis anticipatoria (a la vez fecunda y vulnerable), como en el capítulo 4, pero ahora la significación es puramente objetiva (decidible después de la tirada); y cuyo status epistemológico es perfectamente claro: La elección in praxis de un modelo genérico por la representación deslizando constituye simplemente una hipótesis de aproximación anticipada.

Ahora vamos a pasar en revista algunos modelos genéricos que se utilizan a menudo en la práctica como una aproximación de las representaciones deslizantes. Diremos que se trata de modelos locales. El adjetivo “local” no debe hacer ilusión. El modelo dicho “local”, en efecto, no pretende de ninguna manera distinguir las unas y las otras características que posee la V. R. en las diferentes partes de su campo, sino que presenta solamente una imagen media de estas diversas propiedades localizadas. Se dice “local” porque permite hacer estimaciones locales, y solo está definido en la vecindad V del origen. Pero los parámetros que lo definen tienen todos una significación global (están definidos por integrales en S).

De aquí esta consecuencia (que es paradójica en apariencia) importante para la metodología: La especificación in praxis de un modelo local plantea siempre un problema de estimación global. Para abordar este problema, hay, en general, interés en distinguir dos etapas:

- i) En primer lugar, localizarse (en el pensamiento) en la situación “después de la tirada” y preguntarse cuál algoritmo constituiría entonces la mejor definición del parámetro dado.
- ii) Preguntarse enseguida cómo el algoritmo en cuestión (inaccesible in praxis) puede ser estimado en la base de la información actualmente disponible.

F. A. LOCALMENTE ESTACIONARIA DE ORDEN 2.

Es, por definición, el modelo constituido por las hipótesis de aproximación (4): $m(h)$ aproximadamente constante y $C(h, h')$ aproximadamente invariante por traslación (en V). Este modelo está adaptado para la investigación del mejor estimador afín de una regional deslizando lineal en z (por ejemplo una media móvil). Para definir (después de la tirada) m , se puede, por ejemplo, poner:

$$m = \frac{1}{V} \int_V m(h) dh$$

En forma explícita, m aparece como una regional, y constituye una media de los valores de $z(x)$ en $S_0 \oplus V$, ponderados por una función que considera la distancia del punto x a la frontera del dominio S_0 . Cuando la vecindad móvil V es relativamente pequeña con respecto de S_0 (lo que es el caso más usual) m difiere poco de la media (ordinaria) de $z(x)$ en S_0 .

Análogamente, para la covarianza $\bar{C}(u)$ se la puede definir como el valor medio de $C(h, h + u)$ cuando h recorre el dominio $V(u)$, igual a la intersección de V y de su trasladado por $-u$. En forma explícita, la regional $\bar{C}(u)$ aparecerá como un valor medio en $S_0 \oplus V$ de la expresión $z(y)z(y + u)$, ponderada por una función que tiene en cuenta la proximidad de las fronteras. Aquí también, si V es pequeño delante de S_0 , aparecerán simplificaciones, y $\bar{C}(u)$ será poco diferente de la media no ponderada da la misma expresión tomada en el dominio $S_0(u)$: Es en suma, la “covarianza media” $\bar{C}(h) = g(h) / K(h)$ del último párrafo del capítulo precedente.

Resulta de lo anterior que el problema de la estimación, in praxis, de m y de $\bar{C}(u)$ se presentará, formalmente, en las mismas condiciones que el de “la inferencia estadística” clásica. Sin embargo con esta diferencia, importante del punto de vista metodológico, que sabemos exactamente lo que buscamos estimar: Integrales del espacio, y que conocemos la naturaleza de los errores que cometemos, los que acompañan necesariamente el cálculo numérico aproximado de una integral a partir de un número finito de puntos.

F. A. LOCALMENTE INTRINSECA (de orden 0).

Por razones de robustez, como ya se ha indicado, se reemplaza lo más a menudo, la clase de los estimadores afines por la de los estimadores lineales autorizados de orden 0. El momento de orden 1, $m(h)$, no figura más entre los prerequisites, y la covarianza $C(h, h')$ se reemplaza por el variograma (no centrado, no intrínseco en general).

$$\gamma(h, h') = \frac{1}{2S_0} \int_{S_0} [z(x+h) - z(x+h')]^2 dx$$

El modelo “F. A. localmente intrínseca (de orden 0)” esta definido entonces, muy simplemente, por la hipótesis de aproximación:

$$\gamma(h, h') \cong \bar{\gamma}(h - h')$$

En que $\bar{\gamma}$ designa el variograma medio, cuya expresión explícita hace aparecer una media ponderada de los $[z(x + u) - z(x)]^2$, lo cual, por otra parte es poco diferente, si V es relativamente pequeño delante de S_0 , del variograma regional γ_R definido en el capítulo 7

(con la diferencia que el campo real S está reemplazado por el dominio S_0 elegido por nosotros).

La estimación in praxis se hace en las mismas condiciones que la del variograma de una F. A. intrínseca a partir de una realización única: Habiendo elegido “clases de ángulo y de distancia” Δu_i de centros u_i , se forma una expresión de la forma:

$$(5) \quad \gamma^*(u_i) = \frac{1}{N_i} \sum \frac{[z(x_\alpha) - z(x_\beta)]^2}{2}$$

En que la suma se extiende a las N_i parejas de puntos experimentales tales que $x_\alpha - x_\beta \in \Delta u$. Se puede también, eventualmente, introducir pesos para tener en cuenta las “zonas de influencia” de las diferentes muestras. Queda por ajustar a estos valores experimentales discretos un modelo $\gamma(u)$ ($u \in V$) juiciosamente elegido: El elemento decisivo está aquí, como de costumbre, la elección del tipo de comportamiento en el origen.

Así, una vez despojado de cualquier interpretación metafísica, el famoso problema de la “inferencia estadística” comporta dos aspectos:

- i) Examinar en qué medida la suma discreta (5) constituye una aproximación aceptable de la integral del espacio correspondiente; Este es un problema de estimación global de tipo banal. Es cierto, nunca estaremos al abrigo de malas sorpresas, pero la experiencia indica que, en la mayoría de los casos, siempre que los puntos experimentales no sean poco numerosos, esta estimación es posible en condiciones razonables. Se podría por otra parte asociar a esta estimación una varianza $\text{Var}(\gamma^* - \gamma)$, definida en el marco de una nueva representación, transitiva o deslizante, que no es conveniente explicitar aquí. Pero el cálculo de esta varianza de estimación necesitaría, de su lado, la especificación de un modelo aproximado para esta nueva representación, e iniciaría así la mala regresión al infinito.
- ii) Elegir un tipo de modelo (es decir esencialmente un tipo de comportamiento de γ en la vecindad del origen) Y ajustar a los valores experimentales $\gamma^*(u_i)$. El ajuste mismo no plantea casi problemas, pero no es lo mismo en la elección del tipo: Esta elección constituye una hipótesis anticipatoria, vulnerable y fecunda a la vez. Aquí de nuevo esta hipótesis tiene el status de una aproximación anticipativa. La situación, es la misma que en el caso de la estimación del covariograma transitivo (Capítulo 6). El verdadero $\bar{\gamma}(u)$, si lo conociéramos, presentaría ciertamente un comportamiento muy complicado en la vecindad del origen, y no se dejaría ciertamente reducir (en todo rigor) a uno u otro de los tipos muy simples de los cuales nosotros hacemos uso. Pero, podríamos, en primera aproximación sustituirle un variograma γ del tipo más simple, y juzgar si esta aproximación es aceptable al examinar sus consecuencias sobre es problema que nos ocupa: Si esta sustitución modifica muy poco los pesos y la varianza de krigado de las configuraciones que nos interesan, la aproximación así hecha podrá ser considerada como objetivamente válida. En la situación real, in praxis, es esta

misma hipótesis de aproximación la cual avanzamos como una anticipación, por otra parte, a nuestros riesgos y peligros, porque esta vez nos podemos equivocar, y que solamente después de la tirada podremos verificar su validez.

De un punto de vista epistemológico, se puede notar que una hipótesis de aproximación de este tipo (reemplazo del verdadero $\bar{\gamma}(u)$ por un $\gamma(u)$ de tipo más simple) no es solamente legítima sino además, en un cierto sentido, obligatoria. Porque, si se vuelve a la significación física de las magnitudes puestas en juego, nos damos cuenta que más allá de una escala pequeña, la noción misma de V. R. queda vaga y mal definida, de manera que a esta escala el concepto de comportamiento analítico del verdadero $\bar{\gamma}(u)$ cesa de ser operatorio. Pero, si la simplificación o tipificación del variograma es obligatoria por razones físicas, es cierto que el tipo que nosotros elegimos in praxis es mucho más simple que el que podríamos adoptar después de la tirada, de manera que introduciremos realmente una hipótesis (anticipada) de aproximación-

Al lado del problema de “la inferencia estadística”, problema del cual hemos precisado su status epistemológico, la Estadística Matemática considera igualmente los “tests de hipótesis”. Desde el punto de vista muy “positivista” que es aquí el nuestro, nos refutamos a plantear estos problemas al nivel de las generalidades: Pensamos que no hay gran sentido en estimar un parámetro que no ha sido previamente objeto de una definición operatoria precisa, y, análogamente, nos refutamos a testear hipótesis desprovistas de significación objetiva. En el caso que nos ocupa, el variograma a estimar está definido de manera precisa por una integral del espacio. Análogamente, la “hipótesis intrínseca” que habría que testear es la hipótesis de aproximación $\gamma(h, h') \approx \gamma(h - h')$. Esta hipótesis tiene un sentido objetivo, porque podemos siempre, después de la tirada, juzgar si se trata de una aproximación aceptable (en relación con la solución de un problema dado). Pero no es fácil someterla in praxis a un control preciso, utilizando criterios bien definidos: Debido a que, si es posible en general de estimar in praxis el $\bar{\gamma}$ (que solo depende del argumento u), no es lo mismo para el $\gamma(h; h')$ el cual depende de dos argumentos: En general, los datos disponibles no permiten estimar de manera significativamente diferente $\gamma(h; h')$ y su trasladado $\gamma(h+u; h'+u)$.

De hecho, los contratiempos eventuales a la estacionaridad, o al carácter intrínseco, de la representación deslizante son imputables únicamente a la forma que presenta la V. R. en la zona de borde, comprendida entre el dilatado $S_0 \oplus V$ y el erosionado $S_0 \ominus V$: Luego, esta zona contiene, en general, muy pocos puntos experimentales para que sea posible testear con precisión su homogeneidad o su heterogeneidad. En la práctica, sin embargo, un geoestadístico entendido no vacilará mucho. De un lado, en efecto, la información no numérica (cualitativa) que el geoestadístico posee sobre el fenómeno físico, le indica, en general, si es o no razonable admitir que la proximidad de la frontera no ejerce influencia sensible. Enseguida, el aspecto de los “variogramas brutos” (los $\gamma^*(u_i)$) en las diferentes direcciones es en general bastante revelador: Dos tipos de anisotropía incoherentes e inestables, formas violentamente convexas contrastan con el crecimiento más moderado que se puede observar en otras direcciones, constituyen índices muy seguros de no estacionaridad. Por el contrario, variogramas relativamente estables, de forma cóncava o a lo más lineal, anisotropías de tipo simple etc... incitarán a adoptar el modelo intrínseco local.

Anteriormente, hemos adoptado, para simplificar, el criterio fuerte de objetividad (decisibilidad, en lugar de la sola falsificabilidad popperiana) según el cual un enunciado es objetivo si es susceptible de ser declarado unívocamente verdadero o falso después de la tirada, es decir una vez que $z(x)$ es conocido en todo $x \in S$. Pero la pregunta del comportamiento en la vecindad del origen del “verdadero” variograma $\bar{\gamma}$ nos obliga a rectificar esta posición, y a volver al criterio popperiano de la falsificabilidad. De hecho, para un $\gamma(h, h')$ dado (no intrínseco) asociado a la representación deslizante de una V. R. z , existen varias maneras posibles de definir un $\bar{\gamma}$ medio, aceptable con respecto de un problema dado con una aproximación dada. La definición que hemos elegido solo constituye una de las definiciones posibles de este $\bar{\gamma}$, a pesar de ser la más simple posible. En otros términos, el modelo “F. A. localmente intrínseca” no está definido unívocamente, y, entre los diferentes $\bar{\gamma}$ igualmente compatibles con la realidad (después de la tirada), nada nos indica que alguno sea particularmente más “verdadero” que los otros (todo dependerá del criterio elegido). Un modelo dado de variograma $\gamma(h)$ puede ciertamente ser declarado falso (después de la tirada) si conduce a estimaciones groseramente diferentes de aquellas que se formarían en la base del verdadero $\gamma(h, h')$. Pero puede ser declarado verdadero en un sentido relativo y no exclusivo, si conduce a estimaciones poco diferentes. Hemos visto en el capítulo 4 un ejemplo llamativo en que un conjunto de datos numéricos, sometidos a diferentes autores, ha sido interpretado por modelos extremadamente diferentes, pero conduciendo a soluciones prácticas equivalentes del problema propuesto. De estos diferentes modelos, no se puede decir que han sido verificados, porque uno solo de ellos podría ser declarado verdadero, pero solamente se puede decir que han sido corroborados (no refutados): Por consiguiente, es bien el criterio de falsificabilidad el que conviene aplicar aquí.

Por otra parte, a este $\bar{\gamma}$, cualquiera que sea su definición, le hemos, en realidad, sustituido un modelo γ , caracterizado por un tipo de comportamiento en la vecindad del origen (efecto de pepita, término en $|h|^\lambda$, etc...): Esta noción de tipo (analítico) de comportamiento está bien definida matemáticamente, pero debe ser, del punto de vista físico, enteramente reconstruida en términos puramente operatorios. La definición matemática hace, en efecto, intervenir pasos al límite los cuales en nada corresponden a una realidad física. Esta reconstrucción operatoria se hace exactamente de la misma manera que en el caso de un covariograma transitivo, y no es necesario repetirla.

F. A. LOCALMENTE INTRINSECA DE ORDEN k .

Esta vez se trata de una adaptación local del modelo no estacionario encontrado al término del capítulo 7. Se recurre a él cuando el modelo “F. A. localmente intrínseca de orden 0” no conviene decididamente. Queda entonces el recurso de restringir aún más la clase Φ de nuestros estimadores lineales, imponiendo a sus coeficientes “condiciones de universalidad” de un orden k dado. Estas condiciones expresan simplemente que el error de estimación es una combinación lineal autorizada a este orden (es decir filtrando, o anulando, los polinomios de grado inferior o igual a k). Estos estimadores constituyen, para estos polinomios, interpoladores exactos (en el sentido que proporcionan los valores exactos de $z(x)$ cuando la

V. R. es ella misma un polinomio de grado $\leq k$). Se puede decir también que el error de estimación queda invariante cuando se agrega a z un polinomio de grado $\leq k$.

Se vio, al final del capítulo precedente, que una función aleatoria intrínseca de orden k debe más bien ser considerada como una clase de F. A. la cual admite covarianzas de la forma:

$$(6) \quad C(h, h') = K(h-h') + \sum a_l(h) f^l(h') + \sum a_l(h') f^l(h)$$

En que K es una “covarianza generalizada”, característica del modelo, mientras que las funciones a_l dependen de la versión elegida y quedan inaccesibles in praxis. Pero la varianza de una combinación lineal autorizada, y, en particular nuestra varianza de estimación, solo dependen de K , y no de la parte no estacionaria de la covarianza. Esto sugiere la definición del modelo “F. A: localmente intrínseca de orden k ”: Este modelo consiste en admitir que la covarianza $C(h, h')$ de la representación deslizante verifica (aproximadamente) la relación (6) para una covarianza generalizada K dada. Se trata entonces, como en todos los problemas locales, de una hipótesis de aproximación, que se adopta in praxis de manera anticipada y que se puede, en principio, controlar después de la tirada, al verificar que esta hipótesis modifica poco la solución del problema que nos interesa.

Observamos, al pasar, que con esta definición, las condiciones de universalidad, que imponemos a nuestros estimadores, no pueden ser interpretadas como condiciones de “insegamiento”. El insegamiento es, por otra parte, una propiedad definida en el modelo solamente, y solo podría recibir una significación objetiva después de haber soportado la reconstrucción habitual. Nuestras condiciones son, en términos físicos, condiciones de filtrado. Tienen por efecto eliminar la influencia de una “deriva” eventual, es decir una componente suficientemente regular para que localmente (es decir sobre una vecindad V_x de cada punto x) pueda ser asimilada a un polinomio de grado $\leq k$.

Este modelo está especificado por la sola covarianza generalizada $K(h)$, que, por otra parte, basta con definir en la vecindad $2V$ (doble de V) del origen: No tenemos ninguna necesidad de conocer las funciones $a_l(h)$ de la fórmula (6). Es posible después de la tirada, definir las de manera objetiva en condiciones razonables, pero ciertamente no estimarlas in praxis. En lo que respecta a la covarianza generalizada, su significación objetiva es la misma que al de un variograma local, y su reconstrucción operatoria puede ser efectuada de manera análoga. Su estimación in praxis (a partir de combinaciones lineales autorizadas que se pueden formar con la ayuda de los datos experimentales) es, muy a menudo, posible en condiciones aceptables.

Preguntas más complejas no pueden ser abordadas aquí, y el lector deberá referirse a la literatura especializada.

CAPITULO VIII

LA ESPERANZA CONDONAL ¿ES OPERATORIA?

Los modelos locales que acabamos de revisar son todos modelos de orden dos (es decir especificados por el conocimiento de una covarianza, de un variograma o de una covarianza generalizada) y solo permiten abordar problemas de estimación lineales: La clase Φ a la cual decidimos limitar la búsqueda de un estimador óptimo, del hecho mismo que adoptamos uno de estos modelos, es la clase muy pobre de los estimadores lineales autorizados a tal o tal orden. Pero la práctica plantea a menudo problemas en los cuales la solución necesita el recurso a estimadores más potentes, no lineales. Citemos simplemente dos ejemplos:

Cuando se krigea, por ejemplo, un punto x a partir de los puntos experimentales disponibles en la vecindad móvil V_x , se combina esta estimación con una varianza de krigeado que se sabe calcular. Pero, como lo hemos observado, esta varianza es un parámetro global, y no local. La varianza de krigeado no está ligada especialmente, a las particularidades estructurales que presenta la V. R. en esta vecindad V_x , sino que representa simplemente el valor cuadrático medio de los errores que se cometerían al estimar cada uno de los puntos de S con la ayuda de la misma configuración de puntos experimentales. Si se encuentra que en la vecindad de un punto x considerado, la V. R. presenta un comportamiento más errático, o al contrario, más regular que el promedio, el error debería ser más fuerte, o al contrario, más débil en ese punto. Pero nuestra varianza de estimación, solo tiene un sentido global, no puede dar cuenta de este efecto. En el marco de una representación deslizante, no es posible, por construcción, proporcionar una significación local a la varianza de estimación. Pero a falta de poder localizar el error, (es decir expresar la varianza en función del punto x a estimar) podríamos esperar de “condicionarla” (es decir expresarla en función de los valores z_i observados en los puntos experimentales $x_i \in V_x$). Esta varianza condicional constituiría un buen sustituto de la varianza localizada que no podemos alcanzar en el marco de este modelo. En efecto, si la V. R. presenta, en la vecindad del punto x una dispersión más fuerte o más débil que en otras partes, los valores experimentales z_i observados en V_x son ellos mismos más, o menos, dispersos que en promedio, y por consiguiente, si el modelo es bueno, la varianza condicional puede rendir cuenta de este efecto local.

El segundo ejemplo está tomado de la polución (se tendría una formulación análoga, pero más compleja, en el caso de las minas con el problema de la explotación selectiva). Se han medido las leyes z_α de un contaminante en un cierto número de puntos x_α , y estamos inquietos por la probabilidad para que la ley media : $z(v_{x_0}) = (1/v) \int_V z(x_0 + x) dx$ En contaminante en una vecindad v_{x_0} de un punto x_0 dado sobrepase un cierto umbral de alerta z_0 : En representación deslizante (suponiendo $v \subset V$) se trata entonces de evaluar la probabilidad $P(Z(v) \geq z_0)$ condicionada por las observaciones $Z_i = z_i$ disponibles en la vecindad móvil V .

Estos problemas y otros análogos, necesitan el recurso de las leyes condicionales. Como de costumbre, antes de hacer uso de un concepto matemático, debemos plantearnos dos preguntas: ¿Es posible redefinir este concepto de una manera puramente operativa (punto de vista después de la tirada)?, ¿y podemos nosotros, en la base de la información actual, obtener una estimación razonable (punto de vista in praxis)? La respuesta a la primera pregunta será parcialmente positiva; mientras que para la segunda pregunta, será categóricamente negativa a partir de cuando hay uno o dos puntos condicionantes, y nuestra condición será la siguiente: Aún si nosotros decimos y creemos utilizar la esperanza condicional, es decir buscar nuestro estimador óptimo en la clase inmensamente vasta de todas las funciones medibles, lo que hacemos en realidad es muy diferente, y el espacio Φ de las funciones que manipulamos realmente, es siempre más restringido. La esperanza condicional tal como se puede definir después de la tirada en términos operatorios, es siempre inaccesible in praxis (aún si tuviéramos la ilusión de alcanzarla) y siempre le sustituimos (conscientemente o no) expresiones mucho más simples, más o menos groseramente aproximadas.

DESPUES DE LA TIRADA: LA OBJETIVIDAD DE LAS LEYES CONDICIONALES.

Consideremos nuestra representación deslizante, es decir la F. A. definida por $Z(h) = z(\underline{x} + h)$ con $h \in V$, y \underline{x} uniformemente distribuido en S , y preguntémosnos qué figura visten, en este marco estrictamente objetivo, las diversas leyes condicionales a las que podemos interesarnos. Sin entrar en el detalle del formalismo matemático, es claro que, para un $h \in V$ y un número real ζ dados, fijar el valor $Z(h) = \zeta$ de la V. A. $Z(h)$ consiste en obligar al punto genérico \underline{x} a describir el conjunto $\{x: z(x + h) = \zeta\}$. Este conjunto es el trasladado $L_{-h}(\zeta)$ por $-h$ de la línea (en \mathbb{R}^2) o superficie (en \mathbb{R}^3) de nivel $L(\zeta) = \{x: z(x) = \zeta\}$. Después del condicionamiento entonces, el punto genérico \underline{x} ya no está distribuido uniformemente en S , sino que se encuentra afectado de una ley condicional concentrada en esta línea $L_{-h}(\zeta)$. Si ahora f es una V. A. del modelo, es decir una función $f(x)$ medible en S , su esperanza condicional ya no es $(1/S) \int_S f(x) dx$: Está dada por una integración efectuada en la línea $L_{-h}(\zeta)$.

De la misma manera, si nosotros condicionamos en dos puntos h_1 y h_2 , fijar $Z(h_1) = \zeta_1$ y $Z(h_2) = \zeta_2$ equivale a someter al punto genérico a describir la intersección:

$$L_{-h_1}(\zeta_1) \cap L_{-h_2}(\zeta_2)$$

De los dos trasladados por $-h_1$ y por $-h_2$ de las dos líneas de nivel correspondientes. En \mathbb{R}^2 , esta intersección está en general constituida por puntos aislados, en número infinito, si nosotros atribuimos a la V. R. un microcomportamiento muy patológico (análogo, por ejemplo a la de la trayectoria de un movimiento browniano), pero, lo más a menudo, finito (si hacemos una hipótesis físicamente plausible sobre este microcomportamiento. En \mathbb{R}^3 , la misma circunstancia se produce a partir de tres puntos condicionantes, y, de manera general, en \mathbb{R}^n a partir de n puntos.

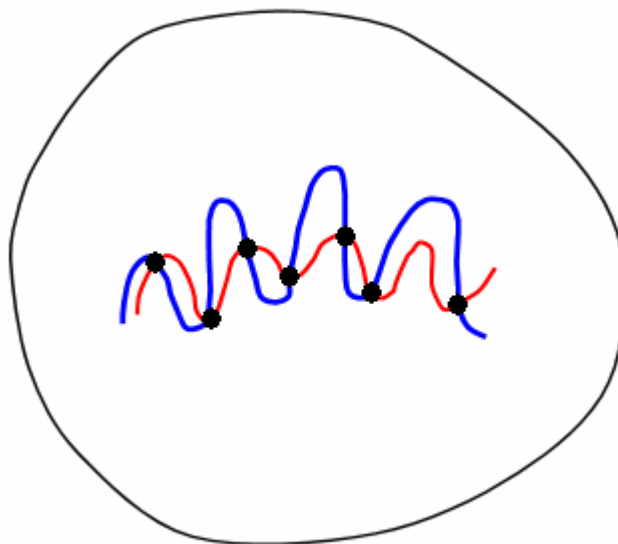


Figura 1.

Si tomamos un número p , no necesariamente muy elevado, pero superior a n (por ejemplo $p = 9$ en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) de puntos condicionantes, debemos esperar que la intersección:

$$L_{-h_1}(\zeta_1) \cap \dots \cap L_{-h_p}(\zeta_p)$$

Esté vacía o reducida a un punto único (salvo quizás para ciertos puntos excepcionales de los valores ζ_1, \dots, ζ_p). Esto quiere decir que hay, en general, a lo más una sola implantación del punto x tal que se tenga $z(x + h_1) = \zeta_1, \dots, z(x + h_p) = \zeta_p$. Dicho de otra manera, las leyes condicionales están degeneradas. Para toda función f , existe una función $F(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ tal que se tiene (salvo quizás en algunos puntos x excepcionales):

$$f(x) = F(z(x + h_1), \dots, z(x + h_p))$$

Porque el conocimiento de los valores numéricos $\zeta_i = z(x + h_i)$, $i = 1, \dots, p$ es suficiente para determinar el punto x (luego también el valor $f(x)$ de la función f en ese punto). Naturalmente, esta función F tendrá una estructura muy complicada, y no tenemos ninguna esperanza de determinarla in praxis.

En efecto, esta ley condicional (degenerada) será muy inestable, y nos podemos interrogar sobre su realidad física. El punto x , en efecto, aparece como una función $x(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ de los valores condicionantes. Pero esta función no está definida en todas partes, porque las configuraciones $z(x + h_i) = \zeta_i$ no existen necesariamente. Además, podemos esperar que variaciones débiles de uno u otro de los valores condicionantes tengan como repercusión con variaciones considerables del punto x , el cual podría pasar, por ejemplo, de una extremidad a la otra del dominio S .

Las características de las leyes condicionales que ponemos así en evidencia están ligadas de la manera más estrecha al microcomportamiento de la V. R. $z(x)$, y existe interés en pensar que en la escala extraordinariamente fina a la cual estamos conducidos a trabajar, hemos sobrepasado hace tiempo el umbral bajo el cual la noción misma de V. R. cesa de ser operatoria. En efecto, las propiedades finas de las líneas de nivel (y de las intersecciones de sus trasladados) no son accesible ni tampoco definibles sobre una base experimental. Exactamente como en el caso del examen crítico de la continuidad o de la derivabilidad, debemos volver al criterio popperiano - y aplicarlo a la misma V. R.

En este marco popperiano, las cosas se simplifican un poco, pero las conclusiones esenciales - la extrema inestabilidad de las leyes y esperanzas condicionales, siguen siendo válidas, como muestra el análisis siguiente. Primero, para tener en cuenta el hecho que los valores numéricos de $z(x)$ solo son conocidos (y aún definidos) experimentalmente con un número pequeño de cifras significativas, debemos discretizar el parámetro ζ , es decir retener un número finito de clases de valores C_i . Las líneas de nivel $L(\zeta)$ se reemplazan así por bandas $L(C_i) = \{x : z(x) \in C_i\}$ las cuales presentan un cierto espesor. Análogamente, debido a que no podemos alcanzar experimentalmente una infinidad de puntos, debemos igualmente discretizar el dominio S mismo. Por ejemplo, S será considerado como la unión de un gran número de cuadrados pequeños o pequeños cubos unidos, y los valores experimentalmente accesibles representarán, no ya valores puntuales, sino más bien medias tomadas en estos cuadrados pequeños o cubos pequeños.

En esta versión discretizada de las cosas, ya no podemos más afirmar que el punto x esté determinado por el conocimiento de los valores discretizados de los ζ_i . Esto dependerá del número de clases retenidas. Una intersección del tipo:

$$L_{-h_1}(C_{i_1}) \cap \dots \cap L_{-h_p}(C_{i_p})$$

Podrá, en efecto, contener eventualmente varios cuadrados pequeños. Pero, en este caso, lo más a menudo, estos pequeños cuadrados serán muy próximos los unos de los otros. A veces, sin embargo, para ciertas elecciones de los valores condicionantes discretizados, se verán aparecer varios paquetes de pequeños cuadrados, implantados en sitios muy diferentes. Además, será necesario a menudo que uno de los ζ_i pase de una clase de valores a la clase vecina para que este o estos paquetes de pequeños cuadrados sufran en S desplazamientos considerables, o que desaparecen, o que aparecen nuevos paquetes en sitios inesperados etc... Esta extrema inestabilidad puede ser visualizada en un analizador de texturas.

Debido a su inestabilidad y a su extrema irregularidad, esta ley o esta esperanza condicional (en principio bien definible) sería - si se la conociera - tan complicada que no sería posible utilizarla en la práctica. Además, es claro que no será nunca posible estimarla in praxis. Este carácter ilusorio se pone en evidencia fácilmente por un examen de los órdenes de magnitud.

ALGUNOS ORDENES DE MAGNITUD.

Para extraer órdenes de magnitud, consideremos el ejemplo siguiente, que esquematiza un caso banal de reconocimiento minero (con dos dimensiones). Los datos disponibles (sondajes) representan leyes medias en un soporte $s = 20 \text{ cm}^2$ y están implantados en una malla de $100\text{m} \times 100\text{m}$. La superficie S que nos interesa representa 200 hectáreas, es decir $S = 10^9 \text{ s}$. La vecindad móvil V es un cuadrado de $300\text{m} \times 300\text{m}$ y contiene entonces 9 sondajes. Su superficie es $V = 4.5 \times 10^7 \text{ s}$. El espacio del yacimiento se discretiza en pequeños cuadrados de 20 cm^2 (y se admite que los sondajes s son identificables a tales cuadrados pequeños). Los valores de la ley se discretizan en C clases (por ejemplo $C = 5, 10$ o 20).

Nuestra vecindad móvil contiene 9 sondajes, buscamos calcular las esperanzas condicionales en Z_1, \dots, Z_9 . Es decir, 9 variables, cada una de ellas toma C valores, lo cual proporciona C^9 configuraciones posibles:

$$C^9, \text{ es decir : } \begin{cases} 5 \cdot 10^{11} = 500 \text{ millares si } C = 20 \\ 10^9 = \text{un millar si } C = 10 \\ 2 \cdot 10^6 = \text{dos millones si } C = 5 \end{cases}$$

El número de configuraciones realmente presentes en el yacimiento es $S/s = \text{un millar}$. Solamente para $C = 5$ (es decir para una discretización extremadamente grosera), podemos esperar un que un número importante de los $C^9 = \text{dos millones}$ de configuraciones posibles estén representadas en el yacimiento de manera suficientemente sustancial para que el razonamiento estadístico tome un sentido físico (esto es después de la tirada: in praxis solo disponemos de 200 configuraciones, y ninguna estimación razonable es posible).

Este número C^9 es también la dimensión del espacio de las funciones medibles de 9 variables que toman C valores cada una. Así, con $C = 10$ clases (lo que en muchos casos es ya grosero) el espacio de trabajo requerido para la determinación de una esperanza condicional es de dimensión $N = \text{un millar}$. ¿Podemos seriamente pretender que trabajamos realmente en un espacio tan rico, y, en particular, imaginar que sea posible in praxis estimar un millar de parámetros a partir de 200 datos experimentales?

En el krigado usual (de orden 0), el espacio de trabajo es de dimensión 8 (6 para el krigado de orden 1). De 8 a un millar falta manifiestamente un intermediario. En el krigado disyuntivo (ver más adelante) la clase Φ de los estimadores está constituida por funciones de la forma:

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + \dots + f_N(z_N)$$

Suma de N funciones de una sola variable (N es el número de datos disponibles en V , aquí $N = 9$). Con C clases de valores, el espacio corresponde a la dimensión CN (en lugar de C^N para la esperanza condicional), es decir aquí, con 9 datos y 10 clases, una dimensión de 90, ya

elevada, pero netamente más razonable que un millar. El krigeado disyuntivo representa bien el intermediario buscado.

IN PRAXIS: LA ESTIMACION DE LAS LEYES CONDICIONALES.

Los órdenes de magnitud precedentes son decisivos. No es la idea estimar realmente in praxis una ley o una esperanza condicional si el número de puntos condicionantes sobrepasa 1 o 2. Se les puede calcular, pero esto supone el empleo de un modelo infinitamente más especificado que lo que permiten realmente los datos disponibles. Por otra parte, los modelos (ilegítimamente) ultra especificados que nosotros podemos utilizar en la práctica conducen todos a expresiones relativamente simples de la esperanza condicional, mucho más simples, en todo caso, que las que se obtendrían, después de la tirada, al aplicar la definición operatoria, y sin gran relación, quizás, con ella. Parece entonces bien que, al efectuar estos cálculos, hemos largamente transgredido todos los umbrales de realismo y de robustez.

Pero felizmente, hay otra manera de presentar las cosas. Renunciando completamente a la idea de determinar una verdadera esperanza condicional, nosotros nos podemos contentar con hacer del modelo ultra especificado, o más bien de su tipo, un uso puramente heurístico. Este modelo, en efecto, nos sugiere una clase Φ de algoritmos, los cuales dependen de un número pequeño de parámetros (los que especifican el tipo de modelo) en los cuales cada uno representa la expresión (en el modelo correspondiente) de nuestra esperanza condicional. Al olvidar esta interpretación, nos fijamos simplemente por tarea elegir en esta clase Φ (tal como está) el algoritmo que conviene mejor a nuestro problema.

Esta manera, muy monoscópica, de proceder implica evidentemente un cierto número de preguntas. Primero, porque el tipo de modelo ultra especificado solo juega un papel heurístico y que nosotros no pretendemos que atribuirle un valor objetivo, ¿quién nos garantiza que otra elección nos hubiera conducido a un mejor estimador? Más generalmente, no existe una razón decisiva que nos lleve a limitarnos a las clases Φ de algoritmos asociados a las esperanzas condicionales de tal o tal tipo de modelo. Podríamos, bien, elegir a priori una clase Φ arbitraria, siempre que solo dependa de un número limitado de parámetros y no conduzca a cálculos demasiado complicados. Es, efectivamente, así que se podría presentar el krigeado disyuntivo (ver más adelante). Pero también otras elecciones serían posible, y esto abre las puertas de la investigación de horizontes bastante vastos.

Dicho esto, es necesario también, tener en cuenta lo que es razonablemente posible in praxis. Y, en primer lugar, debemos preguntarnos hasta qué punto (y mediante cuáles hipótesis de aproximación anticipativas) podemos esperar proceder a una reconstrucción aproximada de la ley espacial de la representación deslizante $Z(h)$. La respuesta, yo cero, es bastante neta; Mediante una hipótesis de aproximación de tipo estacionaridad local, podemos esperar reconstituir bastante bien la ley de una sola variable $Z(h)$, obtener algunas indicaciones sobre las leyes de dos variables $Z(h)$ y $Z(h')$ y nada más: no tendremos, en general, ninguna esperanza de sacar de nuestros datos indicaciones creíbles sobre las leyes de más de dos variables. Esta conclusión me conduce a decir algunas palabras acerca de los estimadores de tipo disyuntivo, ya evocados anteriormente.

LOS ESTIMADORES DISYUNTIVOS.

En muchos casos, se desea disponer de un estimador más potente que los estimadores lineales examinados en los capítulos precedentes, pero que no necesiten el conocimiento de parámetros muy numerosos, ni tampoco poco accesibles in praxis (y quizás también desprovistos de significación objetiva) como la esperanza condicional. Demos un ejemplo, tomado de la contaminación. Supongamos que hemos medido las leyes $z(x_\alpha) = z_\alpha$, en un cierto contaminante, con muestras tomadas en los puntos x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Bajo un cierto umbral, digamos z_0 , se habla de contaminación. Deseamos estimar, en el interior de una superficie S_0 dada, lo que podríamos llamar el porcentaje de contaminación. La definición precisa es la siguiente: Para cada punto x , pongamos $\theta(x) = 1$ si $z(x)$ sobrepasa el umbral de alerta, y $\theta(x) = 0$ en el caso contrario. La superficie contaminada en S_0 tiene por valor:

$$S(z_0) = \int_{S_0} \theta(x) dx$$

Y el porcentaje de contaminación está definido por la razón $S(z_0) / S_0$, expresada en %. Como $\theta(x)$ es una variable regionalizada, asociada a $z(x)$, la superficie contaminada $S(z_0)$ es ella misma una magnitud regional, y es esta regional la que deseamos estimar a partir de algunos datos numéricos. Debido a que no se dispone de un modelo estacionario global razonablemente adaptado a nuestro problema, siempre tendremos el recurso de estimar $\theta(x)$ en cada punto x con la ayuda de un modelo estacionario local y de proceder enseguida a una recolección de estos estimadores locales, de manera de reconstituir un estimador de $S(z_0)$: Si la vecindad de trabajo V (la cual, sin embargo, debe contener un número suficiente de puntos experimentales) es relativamente pequeña con respecto a S_0 , la hipótesis de aproximación anticipada que avanzamos al elegir este modelo tiene chances razonables de revelarse aceptable después de la tirada, y podemos también, ya, controlarla en parte in praxis. Hemos así llegado al problema de la estimación local de una V. R. en “todo o nada” (es decir que solo toma los valores 0 o 1). Ahora, los estimadores lineales están particularmente mal adaptados al caso de las V. R. en todo o nada, como saben todos los que han tenido la ocasión de tratar, en la práctica, este tipo de problemas. De otro lado, la esperanza condicional de $\theta(x)$ es inaccesible, y quizás ilusoria. De donde sale la idea de recurrir al “estimador óptimo de tipo disyuntivo”. Este estimador se elige en la clase Φ de la forma siguiente (en que z_1, \dots, z_n representan los n datos disponibles en la vecindad V_x del punto x):

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N) = f_1(z_1) + f_2(z_2) + \dots + f_N(z_N)$$

(Se trata entonces de funciones que se presentan como la suma de N funciones medibles de una sola variable. Habíamos observado antes que este espacio funcional Φ representaría, del punto de vista de su dimensión, un compromiso razonable entre el espacio verdaderamente muy pobre de las combinaciones lineales y el, infinitamente más rico, de las funciones medibles de N variables. Entre las funciones de la clase Φ , elegiremos, para jugar el papel de estimador, aquella que minimiza (en nuestro modelo localmente estacionario) la varianza de estimación correspondiente. Aparece entonces que esta varianza se expresa con la ayuda de

las solas leyes marginales de orden dos, es decir de las solas leyes de dos variables $(Z(x), Z(x_i))$ o $(Z(x_i), Z(x_j))$ del modelo. Y acabamos de ver que no era poco razonable de buscar la estimación in praxis estas leyes de dos variables: Estamos en presencia de un problema bien planteado. La tabla siguiente muestra la situación intermedia que es la del krigado disyuntivo:

Método	Krigado	Krigado disyuntivo	Esperanza condicional
Estimador óptimo entre las funciones de la forma:	$\sum \lambda_i Z_i$	$f_1(z_1) + \dots + f_n(z_n)$	$f(z_1, \dots, z_n)$
Prerrequisitos	La matriz de las covarianzas	Las leyes marginales de dos variables	La ley de $n + 1$ variables

La teoría muestra entonces que, en la clase Φ definida anteriormente, nuestro estimador óptimo está determinado, de manera unívoca, por un sistema de ecuaciones integrales que no es necesario reproducir aquí. A pesar que estas ecuaciones integrales sean de un tipo relativamente simple, no se sabe, en general, encontrar su solución en una forma explícita. Se puede, evidentemente, considerar un cálculo numérico aproximado, pero sería necesario resolver un sistema lineal de dimensión bastante grande: Esto costará caro, de una parte, y de otra parte, este sistema corre el riesgo de ser bastante inestable, en razón misma de su tamaño. Estamos, en efecto, sin duda, ya muy próximos del umbral de robustez. Quizás también lo hemos ya sobrepasado, y nuestro modelo ha comenzado, a nuestras espaldas, a funcionar de manera perfectamente heurística.

Debido a que se ha dado el paso, estamos tentados de ir un poquito más lejos, y avanzar una hipótesis que, sin gran riesgo suplementario, nos permitirá simplificar considerablemente nuestro sistema de ecuaciones integrales, y nos conducirá a un algoritmo particularmente económico y fácil de implementar. Esta hipótesis consiste en elegir un “modelo isofactorial”, he aquí, en algunas palabras, de qué se trata.

Consideremos primero el caso de $(n + 1)$ variables aleatorias, no independientes, Y_0, Y_1, \dots, Y_n , gaussianas de esperanza nula y con varianza unidad, además, todas las leyes marginales de 2 variables son también gaussianas de 2 variables, caracterizadas por su coeficiente de correlación (se puede también considerar el caso un poquito más general en que estas leyes de dos variables son de tipo “hermítico”). Existe entonces una sucesión de polinomios H_p , llamados “polinomios de Hermite”, la cual posee propiedades notables: Si $p \neq m$, y si Y_i e Y_j son dos cualesquiera de nuestras variables (j puede ser igual a i , y en este caso se trata de la misma variable), las variables aleatorias $H_p(Y_i)$ y $H_m(Y_j)$ son ortogonales (es decir: Admiten una covarianza, o un coeficiente de correlación, igual a 0). Además, si Y es una de nuestras variables y f una función medible cualquiera (tal que solamente su momento de

orden 2 , $E[(f(x))^2]$ sea finito), entonces $f(x)$ admite un desarrollo convergente (en media cuadrática) de la forma:

$$(1) \quad f(Y) = \sum f_p H_p(Y)$$

Con coeficientes f_p que la propiedad de ortogonalidad permite calcular muy fácilmente. Diremos que los polinomios H_p son los “factores” de nuestro modelo.

Se demuestra entonces esto: Para cada índice p , si se desea estimar $H_p(Y_0)$ con la ayuda de las n variables Y_1, \dots, Y_n , el estimador disyuntivo óptimo H_p^* es una combinación lineal de los solos polinomios de igual grado p , $H_p(Y_1), \dots, H_p(Y_n)$, y los coeficientes de esta combinación lineal están dados por un sistema lineal, de rango r (idéntico al sistema habitual del krigeado). Además, el estimador óptimo de la variable $f(Y_0)$ se obtiene al reemplazar, en el desarrollo (1) cada factor H_p por su krigeado disyuntivo H_p^* , es decir:

$$f^* = \sum f_p H_p^*$$

Brevemente, en este modelo, entonces, se krigean separadamente cada uno de los factores. En vez de tener que resolver un solo sistema lineal de rango extraordinariamente elevado (teóricamente infinito porque se trata de ecuaciones integrales), es suficiente resolver separadamente tantos sistemas de rango n (mucho más modesto) como el número de términos que se han retenido en el desarrollo (1) . En la práctica, rara vez, se necesita más de una decena de términos, y el krigeado disyuntivo se reduce a una decena de krigeados ordinarios.

Volvamos ahora a nuestras variables regionalizadas. Las variables $Z(x)$, $Z(x_1) = Z_1, \dots, Z(x_n) = Z_n$ asociadas, en nuestro modelo localmente estacionario, en el punto x a estimar y en los puntos experimentales x_1, \dots, x_n , no son evidentemente gaussianas, salvo el caso particular. Pero se pueden encontrar gaussianas Y_0, Y_1, \dots, Y_n y una transformación creciente, o anamorfosis, tal que $Z(x) = \phi(Y_0)$, $Z_1 = \phi(Y_1), \dots, Z_n = \phi(Y_n)$. Estas variables Y , inversamente, se deducen de las variables Z por la transformación recíproca. Cada una de ellas, tomada separadamente, obedece a una ley de Gauss de una sola variable. Esto no implica que, en general, estas variables obedezcan, tomadas de a dos, leyes de Gauss de dos variables. Sin embargo, nosotros admitiremos que es así. O, dicho más precisamente, elegimos un modelo en el cual esta propiedad (a saber: Que la anamorfosis ϕ restituye las leyes de Gauss de dos variables) se verifica, y que a este modelo genérico lo llamaremos modelo isofactorial. La sucesión de operaciones se desarrolla enseguida como en el caso gaussiano, porque cualquier función de la variable Z llega a ser, por la transformación ϕ , una función de la variable Y correspondiente: De nuevo, el krigeado disyuntivo se reduce a una decena de krigeados simples.

Esta hipótesis suplementaria (la de una “anamorfosis gaussiana de orden 2”) que hemos introducido, tiene el solo fin de reducirnos al caso más simple de un modelo isofactorial, no está desprovista de significación objetiva. Se puede, efectivamente controlar, después de la tirada, y también ya in praxis, si las leyes marginales de las variables transformadas son, o no, aproximadamente leyes de Gauss de dos variables. Pero, si se supone que nuestra hipótesis es,

efectivamente, verificada aproximadamente, hemos transgredido ciertamente el umbral de robustez, y quizás también el umbral de objetividad, al deducir de esta hipótesis que todos los factores son, realmente dos a dos ortogonales. En todo rigor, el modelo isofactorial funciona ya de manera simplemente heurística.

De un punto de vista monoscópico, un modelo heurístico puede ser considerado como un depósito de algoritmos, depósito en el cual vamos a buscar tal o tal elemento que nos parece que conviene a la solución del problema que buscamos resolver. Es, por otra parte claro, que en ausencia de sugerencias de la teoría, nosotros no habríamos nunca pensado en formar justamente este algoritmo: Es en este sentido que se trata de un uso heurístico del modelo. Uso de ninguna manera ilegítimo, salvo con la condición que nosotros acordemos una confianza ciega al modelo, y que procedamos, después de la tirada, y ya, si es posible, in praxis, a un control experimental lo más severo posible. Después de la tirada, tendremos todo el placer de comparar los valores reales con las estimaciones que se han podido formar por krigado disyuntivo, sobre la base de tales y tales puntos experimentales; de confrontar las varianzas de estimación previstas por el modelo con sus valores reales, experimentales; poner en competencia, finalmente, los estimadores sugeridos por diferentes modelos heurísticos: krigado disyuntivo, esperanza condicional, etc... In praxis, las posibilidades de control son más reducidas. Sin embargo, las leyes de dos variables ya pueden ser examinadas, y la hipótesis de anamorfosis gaussiana puede ser objeto de tests. Además, podemos, para cada punto experimental, hacer como si fuera desconocido, y estimarlo, por krigado disyuntivo, a partir de sus vecinos: De donde, de nuevo, la posibilidad de comparar valores verdaderos y estimados, las varianzas experimentales y teóricas etc... Mediante estos controles, nosotros le conferimos a nuestros estimadores una significación objetiva, que no es por otra parte la que les pretendían los modelos heurísticos que nosotros les habíamos sugerido, y nosotros podemos enseguida proceder a la reconstrucción operatoria de los conceptos físicos que ellos ponen, implícitamente, en juego.