D-794

UN THÉORÈME D'UNICITÉ POUR LES HYPERPLANS POISSONIENS

BY

G. MATHERON

Reprinted from

JOURNAL OF APPLIED PROBABILITY

Vol. 11, No. 1, pp. 184–189

March 1974

J. Appl. Prob. **11**, 184–189 (1974)
Printed in Israel
© *Applied Probability Trust* 1974

UN THÉORÈME D'UNICITÉ POUR LES HYPERPLANS POISSONIENS

G. MATHERON, *Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau*

Abstract

A stationary Poisson process of hyperplanes in $\boldsymbol{R}^n$ is characterized (up to an equivalence) by the function θ such that $\theta(s)$ is the density of the Poisson point process induced on the straight lines with direction s. The set of these functions θ is a convex cone $\mathscr{R}_1$, a basis of which is a simplex Θ, and a given function θ belongs to $\mathscr{R}_1$ if and only if it is the supporting function of a symmetrical compact convex set which is a finite Minkowski sum of line segments or the limit of such finite sums. Another application is given concerning the tangential cone at $h = 0$ of a coveriance function.

POISSON FLATS; SIMPLEX; NON ISOTROPIC COVARIANCE; COMPACT CONVEX SETS

0. Introduction

On sait qu'un réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens dans l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$ est défini par la donnée d'une mesure positive *symétrique* G sur la sphère unité S_n possédant la propriété suivante (voir [6] et les articles de Miles cité dans cette publication). Pour tout compact $K \subset \boldsymbol{R}^n$, la probabilité pour que K ne soit rencontré par aucun des hyperplans du réseau est $\exp\{-\psi(K)\}$ avec

$$\psi(K) = \int_{S_n} \mu(\Pi_s K)\, G(ds),$$

μ désignant la mesure de Lebesgue sur la droite réelle, et $\Pi_s K$ la projection de K sur la droite de direction $s \in S_n$. En particulier, les hyperplans du réseau induisent sur toute droite de direction $s_0 \in S_n$ un processus de Poisson ponctuel stationnaire dont la densité $\theta(s_0)$ est

$$\theta(s_0) = \int_{S_n} |\langle s_0, s\rangle|\, G(ds) \qquad (s_0 \in S_n) \tag{1}$$

($\langle\ \rangle$ désigne le produit scalaire dans l'espace euclidien). On voit ainsi se poser deux questions, auxquelles nous allons tenter de répondre dans cette étude.

1. À quelle condition une fonction symétrique θ sur la sphère unité S_n admet-elle une représentation de la forme (1), c'est-à-dire à quelle condition représente-t-elle les densités induites sur les droites de $\boldsymbol{R}^n$ par un réseau d'hyperplans stationnaires?

Article revisé reçu le 10 avril 1973.

2. Cette condition étant vérifiée, la représentation intégrale (1) est-elle unique, autrement dit un réseau poissonien d'hyperplans stationnaires est-il déterminé par la donnée des densités qu'il induit sur les droites de l'espace?

Il est facile de vérifier que l'ensemble $\mathscr{R}_1$ des fonctions θ admettant une représentation intégrale de la forme (1) constitue un cône convexe fermé dans l'espace $\mathscr{C}(S_n)$ des fonctions continues sur la sphère unité (muni de la convergence uniforme). Ce cône convexe $\mathscr{R}_1$ admet une base compacte Θ, à savoir l'ensemble des fonctions θ pour lesquelles la mesure G de la relation (1) est une probabilité symétrique sur S_n. En utilisant la terminologie de Choquet (voir par example [2], [1]), la question 2 ci-dessus est équivalente à la suivante: Θ est-elle un *simplexe*?

Nous allons voir que la réponse à cette question est positive. Pour établir ce théorème d'unicité, nous utiliserons des résultats classiques d'analyse harmonique (paragraphe 1) qui nous donneront comme sous-produit des résultats intéressants par eux-mêmes concernant le cône des tangentes à l'origine d'une fonction de covariance sur $\boldsymbol{R}^n$ (paragraphe 2). Nous appliquerons enfin ces résultats aux hyperplans poissoniens, et poserons le problème de leur généralisation aux variétés linéaires poissoniennes de dimension différente de $n-1$.

1. Le théorème d'unicité

Rappelons d'abord une définition. On dit qu'une fonction réelle K sur $\boldsymbol{R}^n$ est de *type positif conditionnel d'ordre* 0 si l'on a $\int\int \mu(dx)K(x-y)\mu(dy) \geqq 0$ pour toute mesure réelle μ à support fini dans $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant la condition $\int \mu(dx) = 0$. D'après des résultats classiques (voir par exemple [3], [4] ou [5]), une fonction réelle *continue* K est de type positif conditionnel d'ordre 0 si et seulement si elle admet une représentation de la forme

$$(2) \qquad K(h) = \int \frac{\cos(2\pi\langle u, h\rangle) - 1}{4\pi^2|u|^2}\,\chi(du) + Q(h) + a_0 \qquad (h \in \boldsymbol{R}^n),$$

où Q est une forme quadratique positive, a_0 une constante, et χ une mesure positive symétrique sur $\boldsymbol{R}^n$, *nécessairement unique*, sans atome à l'origine et vérifiant la condition $\int [1 + 4\pi^2|u|^2]^{-1}\chi(du) < \infty$.

Soit maintenant C une *covariance* continue (c'est-à-dire une fonction réelle continue de type positif sur $\boldsymbol{R}^n$) dont le comportement au voisinage de l'origine vérifie la condition suivante. Il existe un nombre réel α (avec nécessairement $0 \leqq \alpha \leqq 2$ comme on sait) tel que pour tout $h \in \boldsymbol{R}^n$, $h \neq 0$, la limite

$$C_0(h) = \lim([C(o) - C(\lambda h)]/\lambda^\alpha)$$

existe pour $\lambda \downarrow 0$. Pour tout $t > 0$, on a alors $C_0(th) = t^\alpha C_0(h)$, de sorte qu'il existe une fonction θ symétrique sur la sphère unité telle que $C_0(h) = |h|^\alpha \theta(h/|h|)$. Nous nous limiterons au cas où la fonction C_0 est continue sur $\boldsymbol{R}^n$ (où, ce qui revient au même, θ continue sur S_n). Pour $\alpha = 2$, on sait que C_0 est une forme

quadratique $\geqq 0$. Si $\alpha = 0$, C_0 est identiquement nulle. Le cas intéressant est donc $0 < \alpha < 2$. Le théorème suivant détermine alors les types de comportement possibles au voisinage de $h = 0$ pour la covariance C d'une fonction aléatoire stationnaire non dérivable en moyenne quadratique, mais présentant une anisotropie suffisamment régulière autour de $h = 0$.

Théorème 1. *Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$, et θ une fonction continue symétrique sur la sphère unité S_n de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Il existe une covariance C sur $\boldsymbol{R}^n$ telle que pour tout $h \in \boldsymbol{R}^n$ $(h \neq 0)$ on ait* $\lim ([C(0) - C(\lambda h)]/\lambda^\alpha) = |h|^\alpha \theta(h/|h|)$ *pour* $\lambda \downarrow 0$.

b) *La fonction K définie par $K(0) = 0$ et $K(h) = -|h|^\alpha \theta(h/|h|)$, $h \neq 0$ est de type positif conditionnel d'ordre* 0 *sur $\boldsymbol{R}^n$.*

c) *Il existe une mesure symétrique G nécessairement unique telle que θ admette la représentation*

$$\theta(s) = \int_{S_n} |\langle s, s' \rangle|^\alpha G(ds') \qquad (s \in S_n). \tag{3}$$

Il est immédiat que a) entraîne b). Car, pour $\lambda > 0$, la fonction

$$K_\lambda : h \to [C(\lambda h) - C(0)]/\lambda^\alpha$$

vérifie $\int \mu(dx)\, K_\lambda(x - y)\, \mu(dy) \geqq 0$ pour toute mesure μ à support fini telle que $\int \mu(dx) = 0$, d'où b) en faisant $\lambda \downarrow 0$. (L'intégrale $\int \mu\, K_\lambda \mu$ est en réalité une somme finie, puisque μ est à support fini, de sorte que ce passage à la limite est toujours légitime.)

Montrons maintenant que b) entraîne c). Si la fonction K est de type positif conditionnel, elle admet la représentation

$$K(h) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{\cos(2\pi\langle u, h\rangle) - 1}{4\pi^2 |u|^2}\, \chi(du) \tag{4}$$

pour une mesure symétrique positive χ, nécessairement unique, sans atome à l'origine et vérifiant $\int [1 + 4\pi^2 |u|^2]^{-1} \chi(du) < \infty$. Cela résulte de (3) et des conditions $K(0) = 0$ et $\lim (K(h)/|h|^2) = 0$ pour $|h| \to \infty$.

D'autre part, la relation $K(\lambda h) = \lambda^\alpha K(h)$ $(\lambda > 0)$ entraîne que la mesure χ vérifie $\chi(\lambda\, du) = \lambda^{2-\alpha} \chi(du)$, à cause de l'unicité de la représentation spectrale des fonctions de type positif conditionnel. Pour tout borélien B de S_n, posons $\tilde{B} = \bigcup \{\lambda B, 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$ et $\nu(B) = \chi(\tilde{B})/\chi(\tilde{S}_n)$, de sorte que ν est une probabilité symétrique sur S_n. De la relation $\chi(\lambda \tilde{B})/\chi(\tilde{S}_n) = \lambda^{2-\alpha} \nu(B)$, on déduit sans peine

$$\int f(u)\, \chi(du) = A \int_{S_n} \nu(d\sigma) \int_0^\infty f(\rho\sigma)\, \rho^{1-\alpha} d\rho$$

pour toute fonction f mesurable positive sur $\boldsymbol{R}^n$ (A est une constante, explicitement

$A = (2-\alpha)\,\chi(\tilde{S}_n)$), et cette relation entraîne l'unicité de la probabilité symétrique ν ainsi définie. Compte tenu de (4), on en déduit la représentation

$$r^\alpha \theta(s) = A \int_{S_n} \nu(d\sigma) \int_0^\infty \frac{1-\cos(2\pi\rho r\langle\sigma,s\rangle)}{4\pi^2\rho^2}\,\rho^{1-\alpha}d\rho. \tag{5}$$

Mais la fonction $x \to -|x|^\alpha$ est elle-même de type positif conditionnel sur $\boldsymbol{R}^1$ et admet la représentation

$$|x|^\alpha = 2^{1-\alpha}\pi^{-1-\alpha}\sin(\alpha\pi/2)\,\Gamma(1+\alpha)\int_0^\infty \frac{1-\cos 2\pi x\rho}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho.$$

En remplaçant x par $r\langle\sigma,s\rangle$ et en substituant dans (5), on obtient donc la relation

$$\theta(s) = A' \int_{S_n} |\langle\sigma,s\rangle|^\alpha \nu(d\sigma) \tag{6}$$

avec une constante A' qu'il est inutile d'expliciter, et cette relation (6) est équivalente à (5). Ainsi, la relation (3) est vérifiée pour la mesure $G = A'\,\nu$, et l'unicité de G résulte de l'unicité de la probabilité symétrique ν (c'est-à-dire, en définitive, de l'unicité de la représentation spectrale (4). Par suite, c) est vérifiée.

En sens inverse, c) implique b) à cause de l'équivalence des relations (5) et (6). Enfin, d'après les théorèmes classiques sur les lois indéfiniment divisibles (voir aussi [4] et [5]), la fonction $|h| \to \exp(K(h))$ est une covariance dès que la fonction continue K est de type positif conditionnel. On voit donc que b) entraîne a) en prenant $C = \exp(K)$.

Le résultat le plus important (à savoir l'unicité de la représentation intégrale (3)) peut s'énoncer sous la forme suivante. L'ensemble des fonctions ϕ de la forme $\phi(s) = \int |\langle s,s'\rangle|^\alpha \nu(ds')$, où ν est une probabilité symétrique sur S_n, est un *simplexe* dans $\mathscr{C}(S_n)$ muni de la convergence uniforme (cf. [1]). Il en résulte en particulier que l'application $G \to \theta$ définie par la relation (3) est un *homéomorphisme* de l'espace des mesures positives sur S_n (muni de la topologie vague) sur l'espace image dans $\mathscr{C}(S_n)$. Notons aussi le corollaire simple suivant.

Corollaire. L'espace vectoriel engendré par les fonctions $s \to |\langle s,s'\rangle|^\alpha$, $s' \in S_n$, est dense pour la convergence uniforme dans l'espace des fonctions continues symétriques sur S_n.

En effet, soit μ une mesure symétrique orthogonale à cet espace, et $\mu = \mu_+ - \mu_-$ sa décomposition de Jordan. On a alors

$$\int |\langle s,s'\rangle|^\alpha \mu_+(ds') = \int |\langle s,s'\rangle|^\alpha \mu_-(ds'),$$

donc $\mu_+ = \mu_-$ d'après le théorème d'unicité. D'où le corollaire.

Le cas le plus intéressant pour les applications est le cas $\alpha = 1$, c'est-à-dire le cas d'une fonction de covariance C dont le graphe dans $\boldsymbol{R}^{n+1}$ admet un cône des

tangentes à l'origine. Donnons un exemple avant de revenir à notre problème initial concernant les hyperplans poissoniens.

2. Interprétation géométrique

Désignons par $C_0(\mathscr{K})$ l'espace des compacts convexes de $\boldsymbol{R}^n$ contenant l'origine 0, muni de sa topologie usuelle. Tout $A \in C_0(\mathscr{K})$ est défini par sa *fonction d'appui* (ou podaire) r_A, et l'ensemble $\mathscr{R} = \{r_A, A \in C_0(\mathscr{K})\}$ est un cône convexe à base compacte dans $\mathscr{C}(S_n)$. De plus, l'application $A \to r_A$ est un homéomorphisme de $C_0(\mathscr{K})$ sur $\mathscr{R}$, et aussi un isomorphisme de $C_0(\mathscr{K})$ muni de l'addition de Minkowski et des homothéties positives sur $\mathscr{R}$ muni de l'addition ordinaire, et de la multiplication par les constantes positives, de sorte que $C_0(\mathscr{K})$ est lui-même un cône convexe à base compacte (voir par exemple [6]). Mais $\mathscr{R}$ et $C_0(\mathscr{K})$ ne sont pas réticulés pour leur ordre propre, et ne peuvent donc pas être associés à des simplexes ([2], [1]). Par contre, le cône $\mathscr{R}_1$ (i.e., l'espace des fonctions de la forme (1)) admet la base Θ qui est un simplexe dans $\mathscr{C}(S_n)$, d'après le théorème d'unicité. Ainsi, $\mathscr{R}_1$ est réticulé pour son ordre propre.

En fait, on a $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$, car pour $s_0 \in S_n$ la fonction $s \to |\langle s, s_0\rangle|$ est la fonction d'appui du segment de droite $\{\lambda s_0, |\lambda| \leqq 1\}$, $\mathscr{R}$ est fermé dans $\mathscr{C}(S_n)$ et l'application $G \to \theta$ définie par la relation (1) est continue pour la topologie vague. Autrement dit, les éléments de $\mathscr{R}_1$, c'est-à-dire les fonctions de la forme (1), sont *les fonctions d'appui des compacts convexes qui sont somme de Minkowski finie de segments de droite symétriques ou limite de telles sommes finies.* Dans le cas du *plan euclidien* $\boldsymbol{R}^2$, *le cône* $\mathscr{R}_1$ *est identique à l'ensemble des podaires des compacts convexes symétriques par rapport à l'origine* (car tout polygone symétrique est somme de Minkowski finie de segments symétriques). Mais ce dernier résultat ne subsiste pas pour $n \geqq 3$.

D'autre part, on sait qu'une fonction ϕ sur S_n est la fonction d'appui d'un élément de $C_0(\mathscr{K})$, soit $\phi \in \mathscr{R}_1$, si et seulement si l'ensemble $F = \{x : |x| \phi(x/|x|) \leqq 1\}$ est un voisinage convexe et fermé de 0 dans $\boldsymbol{R}^n$. Soit alors C une covariance réelle continue vérifiant la condition a) du Théorème 1 avec $\alpha = 1$. Le *cône des tangentes* du graphe de C en $h = 0$ admet donc comme *base* la frontière de l'ensemble $F = \{x : |x| \theta(x/|x|) \leqq C(0)\}$. D'après le théorème, on a $\theta \in \mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$, de sorte que F est nécessairement un *voisinage convexe symétrique et fermé de* 0 *dans* $\boldsymbol{R}^n$. Dans le cas $n = 2$, la réciproque est vraie, puisque $\mathscr{R}_1$ est identique à l'ensemble des fonctions d'appui symétriques. Autrement dit:

Pour tout voisinage convexe symétrique et fermé F de 0 *dans* $\boldsymbol{R}^2$, *il existe une covariance C continue sur* $\boldsymbol{R}^2$ *dont le cône des tangentes admet comme base la frontière de F.*

Explicitement, si r_F et la podaire de F et r_{F^*} celle de l'ensemble dual

$$F^* = \{x : |x| r_F(x/|x|) \leqq 1\},$$

la fonction $C: h \to \exp\{-|h| r_{F^*}(h/|h|)\}$ est une covariance et vérifie la condition voulue, d'après le Théorème 1 et la discussion qui le suit.

Appliquons maintenant le Théorème 1 au cas des hyperplans poissoniens.

3. Charactérisation des hyperplans poissoniens

D'après ce qui précède, le théorème suivant est un simple corollaire du Théorème 1.

Théorème 2. *Soit θ une fonction symétrique sur la sphere unité S_n. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Il existe un réseau stationnaire (unique à une équivalence près) d'hyperplans poissoniens dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que, pour tout $s \in S_n$, $\theta(s)$ soit la densité du processus ponctuel induit sur les droites de direction s.*

b) *$\theta \in \mathscr{R}_1$, autrement dit il existe une mesure positive symétrique G sur S_n nécessairement unique telle que*

$$\theta(s) = \int |\langle s, s' \rangle| \, G(ds') \qquad s \in S_n.$$

c) *La fonction $K: h \to -|h| \theta(h/|h|)$ est continue et de type positif conditionnel d'ordre* 0 *sur $\boldsymbol{R}^n$.*

d) *La fonction $C = \exp(K)$ est une covariance continue sur $\boldsymbol{R}^n$.*

On notera de plus (cf. [6]) que si l'une de ces conditions est remplie, pour x et $y \in \boldsymbol{R}^n$, $C(x-y)$ est la probabilité pour que les deux points x et y ne soient séparés par aucun hyperplan du réseau.

Remarque terminale. Désignons par $\mathscr{S}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k dans $\boldsymbol{R}^n$ ($k = 1, 2, \cdots n-1$) muni de sa topologie habituelle pour laquelle $S \to S^{\perp}$est un homéomorphisme de $\mathscr{S}_k$ sur $\mathscr{S}_{n-k}$ ($S^{\perp}$est l'orthogonal de S). Compte tenu de cet homéomorphisme et du Théoréme 2, il est facile de voir qu'un réseau stationnaire de *droites* poissoniennes est déterminé par la donnée de la fonction θ sur $\mathscr{S}_{n-1}$ telle que $\theta(S)$ représente la densité du processus ponctuel induit sur les hyperplans de direction $S \in \mathscr{S}_{n-1}$. J'ignore si ce résultat d'unicité subsiste pour $n \geqq 4$ et les variétés linéaires poissoniennes de dimension k, $1 < k < n$. On peut conjecturer qu'il en est bien ainsi.

Bibliographie

[1] Alfsen, E. M. (1971) *Compact Convex Sets and Boundary Integrals*. Springer, Berlin.

[2] Choquet, G. (1960) Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts. *Ann. Inst. Fourier* **10**, 333–444.

[3] Guelfand, I. M. et Villenkin, Y. (1961) *Nekotorye Primenienia Garmonitcheskovo Analisa*. Gos. Iz . Phys. Mat. Lit., Moscou.

[4] Guelfand, I. M. et Villenkin, Y. (1967) *Les Distributions*, Tome 4. Dunod, Paris,

[5] Landkof, N. S. (1966) *Osnovy Sovermennoï Teorrii Potentziala*. Izd. Nauka, Moscou.

[6] Matheron, G. Ensembles aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens. *Adv. Appl. Prob.* **4**, 508–541.