Extrait de la Revue « *La Chronique des Mines d'Outre-Mer* », Décembre 1959.

ÉTUDE

REMARQUES SUR LA LOI DE LASKY [a]

par G. MATHERON

S. G. LASKY, étudiant le problème de la relation entre les teneurs et les tonnages des gisements de cuivre porphyrique, a constaté que, pour chaque gisement, la teneur moyenne du tonnage minéralisé à une teneur supérieure à une certaine valeur limite était une fonction linéaire du logarithme du tonnage, soit :

(1) $$m = a - b \log T$$

T tonnage minéralisé au-dessus de la teneur limite choisie x;

m teneur moyenne de ce tonnage.

M. BLONDEL indique à ce sujet : « Dans l'échantillonnage, c'est le logarithme de la *teneur* qui « suit la loi de Gauss-Laplace, tandis que dans « l'étude de S. G. LASKY il y a une relation linéaire entre la teneur et le logarithme du *tonnage*. « On se rend compte, néanmoins, en dépit de « ces différences qu'il doit exister quelque relation entre ces deux problèmes; et la recherche « de cette relation — qui reste à faire — est intéressante, car la formule de S. G. LASKY ne résulte pas d'une vue théorique a priori, mais de « l'utilisation de données statistiques ».

Nous nous proposons de montrer que la loi lognormale, pour les valeurs usuelles des paramètres et pour les domaines d'utilisation courants, équivaut pratiquement à la loi de LASKY. En dehors de ces domaines, par contre, ou pour des valeurs différentes des paramètres, la relation lognormale entre teneur moyenne et logarithme du tonnage ne peut plus être considérée comme linéaire. Pour trancher le débat, nous montrerons que la loi de LASKY, extrapole hors de son domaine de validité, conduit à des contradictions. Pour terminer, nous examinerons la thèse, légèrement différente, de F.W.J. Ross qui constate une relation linéaire entre la teneur moyenne m et la teneur limite choisie, désignée ci-dessus par x.

1°) *La loi de Lasky comme conséquence pratique de lognormalité.*

Dans l'hypothèse lognormale, la teneur moyenne m du tonnage minéralisé au-dessus de la teneur limite x est :

(2) $$m = m_0 \frac{G(z - \sigma)}{G(z)}$$

m_0 teneur moyenne du gisement total

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^{1/2}} dz$$

$$z = \frac{1}{\sigma} L \frac{x}{\gamma}$$

γ et σ médiane et écart type de la loi lognormale des teneurs. Le tonnage, de son côté est :

(3) $$T = T_0 G(z)$$

T_0 tonnage total.

Introduisons les variables réduites :

$$y = \frac{m}{m_0} t = \frac{T}{T_0}$$

On a :

(4) $$\begin{cases} y = \dfrac{G(z - \sigma)}{G(z)} \\ t = G(z) \end{cases}$$

L'élimination de z conduit à une loi $y = f(t)$ qui ne peut en aucune façon se réduire à la forme simple de la loi de LASKY. Cependant, cette loi ne dépend que du seul paramètre σ et la courbe correspondante peut être construite pour différentes valeurs du paramètre. Le tableau suivant donne les valeurs numériques pour :

$$\sigma = 0.5 \text{ et } \sigma = 1.$$

z	$G(z)$	$\log [G(z)]$	$\frac{G(z-0,5)}{G(z)}$	$\frac{G(z-1)}{G(z)}$
4	0.0000317	5 50506	7.270	
3.5	0.0002326	4 36661	5.804	
3	0.00135	3 13033	4.600	
2.5	0.00621	3 79309	3.663	
2	0.02275	2 35698	2.937	6.974
1.5	0.06681	2 82484	2.375	4.617
1	0.15866	1 20046	1.945	3.151
0.5	0.30854	1 48931	1.620	2.241
0	0.50000	1 69897	1.383	1.683
— 0.5	0.69146	1 83977	1.217	1.350
— 1	0.84134	1 92497	1.109	1.1615
— 1.5	0.93319	1 96997	1.0472	1.065
— 2	0.97725	1 99000	1.0170	1.022
— ∞	1.0000	0	1	1

Si l'on porte en ordonnée y et en abscisse $\log t$, on constate, pour $\sigma = 0.5$ et entre les valeurs $+ 2$ et $- \infty$ de z, un remarquable alignement des points. Pour $\sigma = 1$, au contraire, une courbure sensible se manifeste déjà. Pour $\sigma = 0.5$ et les valeurs de z supérieures à 2, une certaine courbure apparaît. Cependant, $z = 2$ correspond déjà

(a) S. G. LASKY a énoncé cette loi dans un article intitulé : « How Tonnage and Grade Relations Help predict Ore Reserves » publié dans l'*Engineering and Mining Journal* d'avril 1950. Cet article a été traduit en français et la traduction a été publiée dans la *Chronique des Mines coloniales* du 15 mars 1951, pp. 58-65.

à un gisement dont seulement 2 % du tonnage sont exploitables, et les valeurs de z supérieures à 2 ne correspondent plus à aucun cas concret.

Ainsi pour un écart type de l'ordre de 0.5 (ou inférieur) la loi de LASKY est vérifiée pratiquement avec une très bonne précision dans tout le domaine d'utilisation usuel. Cette valeur de 0.5 correspond à une variance de 0.25, certainement faible pour des échantillons de quelques kilos. Mais, s'agissant d'étudier l'évolution des réserves en fonction de la teneur limite, le volume de référence n'est certes pas celui de l'échantillon usuel, mais doit être pris à l'échelle de l'exploitation, c'est-à-dire de l'ordre de quelques milliers ou dizaines de milliers de tonnes. Une variance de 0.25 est alors très vraisemblable.

Il est donc établi que la loi de Lasky n'est pas incompatible, pratiquement, avec la lognormalité. Montrons maintenant qu'au delà de certaines limites — celles-là même au delà desquelles, dans l'hypothèse lognormale, les droites commencent à s'incurver, — cette loi entraîne des conséquences inacceptables.

2° *Etude de la loi de Lasky*

Nous supposons maintenant la formule (1) valable dans l'absolu et nous allons établir la loi de distribution des teneurs qui en découle logiquement.

Soit $F(x)\,dx$ le tonnage minéralisé entre les teneurs x et $x + dx$. La formule (1) s'écrit :

(5)

$$\frac{\int_x^\infty x\,F(x)\,dx}{\int_x^\infty F(x)\,dx} = a - b\,L\left[\int_x^\infty F(x)\,dx\right]$$

Par dérivation :

$$-x\,F(x) = -a\,F(x) + b\,F(x)\,L\left[\int_x^\infty F(x)\,dx\right] + b\,F(x)$$

D'où :

(6)

$$\int_x^\infty F(x)\,dx = e^{\frac{a-b-x}{b}}$$

Le tonnage total T_0 est donc fini et sa valeur est :

(7)

$$T_0 = \int_0^\infty F(x)\,dx = e^{\frac{a-b}{b}}$$

La fonction $F(x)$ elle-même est :

(8)

$$F(x) = \frac{1}{b}\,T_0\,e^{-\frac{x}{b}}$$

La loi de distribution ne dépend donc que du seul paramètre b. La valeur moyenne de la teneur m_0 est égale à b et la variance à $b^2 = m_0^2$. Prise ainsi dans l'absolu, la loi de LASKY entraîne donc que la variance est toujours égale au carré de la moyenne, quel que soit le volume de l'échantillon de référence. Cette conséquence, contraire à l'expérience, montre bien que la loi de LASKY ne peut être qu'une approximation valable dans un domaine limité.

Compte tenu de (8), la formule (5) s'écrit :

(9) $$m = m_0\left[1 - L\frac{T}{T_0}\right]$$

Ou, avec les variables réduites du paragraphe précédent :

$$y = 1 - Lt$$

A un pourcentage donné du tonnage total correspond, pour tous les gisements, un même multiple de la teneur moyenne globale. Il est clair qu'il manque ici un paramètre.

Il est également intéressant d'écrire la loi de la teneur moyenne en fonction de la teneur limite :

(10) $$m = \frac{\int_x^\infty x\,F(x)\,dx}{\int_x^\infty F(x)\,dx} = x + m_0$$

Cette loi se représente par une droite de pente égale à l'unité. Ici encore on a le sentiment qu'il manque un paramètre.

Cette analyse théorique montre que la loi de Lasky ne peut pas représenter la réalité pour toutes les valeurs possibles du tonnage. Le fait qu'elle soit cependant vérifiée pratiquement pour les valeur usuelles des variables s'explique très bien, nous l'avons vu, dans l'hypothèse lognormale.

LASKY donne d'ailleurs les valeurs numériques des paramètres a et b pour un porphyry copper « moyen » :

$$m = 12{,}9 - 1{,}4 \log T$$

log décimaux, T en millions de tonnes, m en ‰; soit, en logarithmes népériens :

$$m = 12{,}9 - 0{,}61\ L\,T$$

En comparant avec l'équation (9) on obtient, pour ce gisement moyen :

$m_0 = 0{,}61$ ‰ $= 610$ ppm
$T_0 = 6{,}4 \cdot 10^8 = 6{,}4 \cdot 10^{14}$ tonnes

Cet énorme tonnage représenterait un cube de 60 kilomètres de côté minéralisé à 610 ppm de cuivre, donnant en surface une anomalie géochimique de 3 600 km², dont le dixième seulement aurait une teneur inférieure à 60 ppm. La prospection géochimique obtiendrait bien facilement des succès spectaculaires.

3° *Thèse de F. W. J. Ross.*

La relation (10), déduite de la loi de LASKY, indique que la teneur moyenne est la somme de la moyenne globale m_0 et de la teneur limite de coupure x. Cette relation n'est pas satisfaisante, car il manque un degré de liberté. On peut songer à la généraliser en posant a priori m comme fonction linéaire de x

(11) $$m = ax + b$$

L'intérêt de cette relation réside dans le fait que, comme la loi de LASKY, elle est souvent vérifiée avec une bonne approximation et pour les

valeurs usuelles des variables dans l'hypothèse lognormale, comme F. W. J. Ross l'a montré dans sa thèse [1] sur les gisements du Witwatersrand.

Désignant par $f(x)$ la fonction densité de probabilité de la teneur x, (11) s'écrit :

$$\int_x^\infty x f(x)\, dx = (ax + b) \int_x^\infty f(x)\, dx$$

En dérivant :

(12)

$$\int_x^\infty f(x)\, dx = \frac{(a-1)\, x + b}{a} f(x)$$

Une deuxième dérivation donne l'équation différentielle :

$$(2a - 1)\, f(x) + [(a-1) + b]\, f'(x) = 0$$

d'où

$$f(x) = \frac{A}{[(a-1)\, x + b]^{\frac{2a-1}{a-1}}}$$

La condition

$\int_x^\infty f(x)\, dx = 1$, soit, d'après (12)

$f(o) = \frac{a}{b}$ permet de déterminer A

$$(13) \qquad f(x) = \frac{a}{b} \frac{1}{\left(1 + \frac{a-1}{b} x\right)^{\frac{2a-1}{a-1}}}$$

Pour a = 1, *on retombe sur la loi exponentielle de Lasky qui apparaît comme un cas très particulier de la loi de Ross.*

La convergence des intégrales à l'infini est assurée si $\frac{2a-1}{a-1} > 1$, c'est-à-dire, a étant positif, $a > 1$. On remarque qu'alors $\frac{2a-1}{a-1} = 1 + \frac{a}{a-1}$ est plus grand que 2, et la convergence de l'intégrale de $x f(x)$ est également assurée. On vérifiera facilement que la moyenne m_0 est bien égale à b. La variance, par contre, n'existe que si l'exposant est supérieur à 3, c'est-à-dire si a est inférieur à 2. Elle est alors égale à

$$\sigma^2 = \frac{a\, b^2}{2 - a}$$

a étant compris entre 1 et 2, la variance est toujours supérieure au carré b^2 de la moyenne. Dans la réalité, il ne peut pas en être ainsi, car la variance tend vers 0 lorsque le volume de l'échantillon augmente. Bien que renfermant deux paramètres, la loi (13) ne peut décrire convenablement la répartition des teneurs.

Conclusion

La loi de LASKY, ni la relation plus générale de ROSS, ne peuvent avoir de valeur absolue, car elles conduisent à des lois de distribution des teneurs incompatibles avec la réalité. Dans le domaine d'utilisation usuelle, où l'expérience montre qu'elles se vérifient très bien, ces deux lois sont en fait une conséquence de la lognormalité.

(1) Development and some practical applications of a statistical value. Distribution theory for the Witwatersrand auriferous deposits. University of Witwatersrand, 1950.