M. Matheron

N° 8 bis

B.R.M.A.
Cinq Maisons
MAISON-CARREE

/GM/CC/

MAISON-CARREE, le 20 AVRIL 1955

Remarques sur la loi théorique de distribution des teneurs dans un gisement

Par G. MATHERON, Ingénieur au Corps des Mines

Le problème théorique de la forme mathématique de la loi de répartition des teneurs dans un gisement a été étudié, jusqu'à présent, de deux points de vue bien distincts. Si la loi lognormale, introduite principalement par KRIGE et SICHEL, et la loi log-binomiale, défendue par de WIJS, conduisent à des résultats pratiquement identiques, les points de départ de ces deux groupes d'auteurs sont sensiblement différents. Leurs thèses sont trop connues pour qu'il soit nécessaire de les exposer à nouveau ici (ref. 3, 4, 5, 6, 7 ...). Les partisans de la loi log-normale se réfèrent à la notion, peut-être un peu métaphysique, de l'effet proportionnel. De même qu'il est aussi facile à un homme d'affaires possédant un milliard de réaliser un bénéfice de 100 millions, qu'à un autre homme d'affaires possédant un million de gagner 100.000 francs, de même on doit considérer comme équivalents le passage d'une teneur de 10 % à 11 %, et celui de 1 % à 1,1 %. C'est pourquoi la répartition des fortunes dans un pays et celle des teneurs dans un gisement, suivent toutes deux la loi log-normale et non pas la loi normale. L'échelle dont se sert la nature, dit KRIGE, est logarithmique, et non pas linéaire. Il est remarquable en effet que des phénomènes aussi différents que la granulométrie des matériaux naturels (sables, graviers, etc...), ou la répartition des terres énergées suivant leur altitude, obéissent à la loi log-normale. Cette loi a pour elle une certaine universalité, et l'on serait tenté d'en faire une loi générale de la nature. Dans le cas des gisements, M. ALLAIS précise la façon dont l'effet proportionnel a pu jouer, en remarquant que la loi d'Action de Masse, loi physico-chimique ayant nécessairement présidé à la formation du gisement, s'exprime par une relation linéaire entre les différentielles logarithmiques des concentrations des différents corps en présence: toute modification d'une concentration se répercute donc sur les autres suivant la loi de l'effet proportionnel. De plus l'on se souvient que l'affinité, ou énergie libre d'une réaction est fonction linéaire des logarithmes des concentrations, on voit qu'adopter la loi log-normale revient à admettre une répartition normale des énergies libres, et l'on sait qu'une énergie se distribue volontiers suivant la loi de Gauss.

En fait, quelle que soit la valeur théorique de ces considérations, la loi log-normale apparait surtout comme un fait expérimental, solidement établi sur l'analyse statistique des données du Witwatersrand, et son utilisation se justifie par la simplicité des calculs auxquels elle conduit. Mais sur le plan théorique subsiste une énigme, qui est l'invariance de cette loi. En effet, l'expérience montre que, si les teneurs des échantillons de volume v prélevés dans une portion de gisement de volume V suivent une loi de répartition log-normale, il en est de même des teneurs d'échantillons de volume v' prélevés dans une portion de volume V', et celà

.../...

quels que soient v' et V'. Autrement dit, la loi reste log-normale pour toutes les valeurs de v et V, seuls sont modifiés les paramètres de cette loi. Or la teneur x d'un échantillon de volume 2v est la moyenne arithmétique des teneurs x_1 et x_2 de deux échantillons contigus de volume v. Si x_1 et x_2 variables log-normales, sont stochastiquement indépendantes, on démontre que leur moyenne x ne peut pas suivre la loi log-normale. On en conclut que x_1 et x_2 ne sont pas indépendants. L'expérience du mineur et du géologue montre bien qu'il existe toujours une correlation positive entre x_1 et x_2, ce qui signifie que les zones voisines d'une zone riche ont plus de chances que d'autres d'être riches également. On doit admettre que c'est en raison de cette correlation que la moyenne arithmétique de deux variables lognormales est elle même une variance log-normale. Mais par quel mécanisme analytique ces correlations assurent-elles la permanence, par rapport à v et à V, de la log-normalité, celà, ces auteurs ne nous l'apprennent pas. La loi log-normale, métaphysiquement postulée, tout en représentant parfaitement les répartitions globales réelles, est impuissante à saisir les correlations: elle ne permet pas, connaissant la répartition des volumes v dans la portion V du gisement, d'en déduire analytiquement celle des échantillons v' dans le volume V'.

Au contraire le schéma log-binomial de de WIJS (ref. 6 et 7), de par sa construction même, assure l'invariance analytique de la forme de la loi et fait directement connaître les correlations. Rappelons brièvement le raisonnement de de WIJS. (6) Etant donné un bloc de minerai de teneur x, divisons le par la pensée en deux blocs de volumes égaux, de teneur x_1 et x_2. On peut poser:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1+d')\,x \\ x_2 &= (1-d')\,x \end{aligned}\right\} \quad (x_1 > x_2)$$

Le paramètre d' n'est autre chose que l'écart relatif

$$d' = \frac{(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$$

Il existe une infinité de façons de diviser un bloc en deux parties égales, à chacune desquelles correspond une valeur de l'écart relatif d'. d' est donc une variable aléatoire. Soit d sa valeur moyenne. De WIJS suppose alors que d est le même pour tous les blocs, quelle que soit leur taille, ce qui revient à admettre que la dispersion des deux valeurs x_1 et x_2 est la même, que le bloc initial fasse 1 kilo ou une tonne. Cette hypothèse, remarquablement féconde, n'est pas autre chose que l'énoncé du principe de similitude, ou principe de de WIJS, sur lequel nous reviendrons dans un instant.

Pour aller plus loin, et engendrer la loi log-binomiale, de de WIJS admet que la distribution est la même que si d' était toujours égal à sa valeur moyenne d. Après avoir k fois réitéré l'opération de division des blocs en deux parties égales, on trouve naturellement:

.../...

1 bloc à la teneur $(1+d)^k x$

$c_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ blocs à la teneur $(1+d)^{k-r}(1-d)^r x$

---

1 bloc à la teneur $(1-d)^k x$

Il suffit donc de diviser c_k^r par 2^k pour avoir la probabilité de la teneur $(1+d)^{k-r}(1-d)^r x$. Le logarithme de cette teneur étant une fonction linéaire de r, et la loi de répartition de r, loi binomiale, convergeant rapidement vers une loi normale, il est clair que la loi log-binomiale ainsi obtenue sera aussi peu différente que l'on veut d'une loi log-normale, pourvu que le nombre $N = 2^k$ des échantillons soit pris assez grand. Du point de vue pratique, les deux lois ne diffèreront pas sensiblement. Mais, le paramètre d exprimant directement les corrélations, il est possible d'expliquer l'invariance de la loi. Deux échantillons voisins ayant, par exemple, les teneurs $(1+d)^{k-r}(1-d)^r x$ et $(1+d)^{k+1-r}(1-d)^{r-1} x$, la moyenne arithmétique, c'est à dire la teneur de l'échantillon résultant de la juxtaposition des deux précédents, a pour valeur:

$$(1+d)^{k-r}(1-d)^{r-1} x$$

et les échantillons de volume 2v suivent la loi log-binomiale obtenue en remplaçant k par k-1.

Il est possible de préciser analytiquement la relation entre la dispersion et les volumes v et V. En effet, la variance du logarithme de x, dans le schéma log-binomiale, est donnée par:

$$\sigma^2 = \frac{k}{4} \left[L \frac{1+d}{1-d} \right]^2$$

Or, par définition de k, le volume V est constitué par la juxtaposition de 2^k volumes v, d'où

$$k = \frac{L\, V/v}{L2}$$

et

$$\boxed{\sigma^2 = \alpha L \frac{V}{v}}$$

Le paramètre α ne dépend que de d: c'est un coefficient caractéristique du gisement.

.../...

Sans développer ici les importantes conséquences de la formule de de WIJS (2,8), notons que le schéma log-binomial explique l'invariance analytique de la loi, et permet de déduire la répartition de v' dans V', connaissant celle de v dans V. Ce résultat n'a été obtenu qu'en assimilant la variable aléatoire d' à sa valeur moyenne d, procédé simplificateur, qui ne peut, naturellement, conduire qu'à une approximation. Il est clair, cependant, que cette approximation sera d'autant plus justifiée que la dispersion de d' sera plus faible vis à vis de la dispersion de la teneur elle même, c'est à dire que le rapport $\frac{V}{v}$, ou k lui même sera plus grand. Or, précisement, plus k est grand et moins la loi discontinue log-binomiale diffère d'une loi continue log-normale. On est bien tenté d'admettre que la loi véritable est la loi log-normale, et que la formule de de WIJS, démontrée dans le cas du schéma approché discontinu, est valable également pour la loi réelle.

En fait, il est possible de se passer de l'intermédiaire du schéma discontinu. L'hypothèse de base de de WIJS était que d, valeur moyenne de d', était indépendant du volume v de l'échantillon. Généralisant ce postulat, on peut admettre un principe de similitude géométrique (8), qui peut s'énoncer ainsi: les teneurs d'échantillons de volume v prélevés dans un volume V ont la même dispersion que celles d'échantillons de volume λv prélevés dans un volume λV du même gisement. Tout paramètre caractérisant cette dispersion, et en particulier la variance logarithmique, doit être la forme $g\ (V/v)$. Or KRIGE (3) montre que, dans l'hypothèse log-normale, la variance σ^2 d'échantillons v dans un gisement de volume V est égale à la somme de la variance σ_i^2 des échantillons v dans une portion Vi de V et de la variance σ_μ^2 dans V des teneurs des panneaux de volume Vi, soit

$$\sigma^2 = \sigma_i^2 + \sigma_\mu^2$$

On en déduit immédiatement que σ^2 est une fonction de la forme $f\ (V) - f\ (v)$. Or Il n'y a que la fonction logarithmique qui puisse se mettre à la fois sous la forme $g\ (V/v)$ et $f\ (V) - f\ (v)$. On en déduit donc:

$$\sigma^2 = \alpha\ L\ \frac{V}{v}$$

La formule de de WIJS découle donc directement du principe de similitude, appliqué dans le cadre de l'hypothèse log-normale, et l'approximation log-binomiale discontinue, reposant sur l'assimilation discutable d'une variable aléatoire à sa valeur moyenne, n'est plus indispensable. Mais cette approximation conserve le grand avantage théorique d'expliquer l'invariance de la loi.

Remarque I - Enoncé précis du principe de similitude, ou principe de de WIJS (8). La théorie précédente suppose implicitement que la dispersion ne dépend que de v et de V. En vérité, elle dépend sans doute aussi de facteurs géométriques, tels que la forme de l'échantillon et de la portion V du gisement, et de l'orientation relative de ces deux volumes. Des carottes très longues ne donneront pas la même

.../...

dispersion suivant qu'elles seront prises parallèlement ou perpendiculairement aux épontes; un échantillon de même volume, mais de forme ramassée, conduira à une troisième valeur de la variance. Enfin la dispersion sera différente si le volume V correspond à un filon mince et ramifié, ou à un enrichissement local en forme d'amas.

C'est pourquoi je propose l'énoncé suivant du principe de similitude: "si les fi-"-gures formées par l'échantillon v et le panneau V d'une part, l'échantillon v' "et le panneau V' du même gisement d'autre part, sont géométriquement semblables, "à une translation près de v ou de v', les lois de répartition de v dans V et de "v' dans V' ont la même variance logarithmique".

Dans ces conditions, si l'on modifie v et V par des similitudes de modules dif-"-férents, c'est à dire sans altérer leurs formes et leur position relative, la variance est donnée par la formule de de WIJS.

Remarque II - Conditions pratiques de validité de la formule de de WIJS - Dans ce qui précède on a considéré la population comme constituée des teneurs de volumes join-"-tifs v tous égaux entre eux. Ce point de vue est adapté à une reconnaissance par galeries et recoupes. Dans une campagne de sondages on considère souvent des poids métal au mètre carré. La population est alors constituée des poids métal m^2 de sur-faces s jointives et toutes égales entre elles. La théorie précédente reste va-"-lable, à condition de remplacer les volumes v et V par les surfaces set S.

Ceci dit, la formule de de WIJS semble être vérifiée, pratiquement, lorsque l'échantillon a une forme assez ramassée, et si toutes ses dimensions sont négli-"-geables vis à vis de celles du gisement. La reconnaissance par galeries et recou-"-pes d'un gisement en forme d'amas, la prospection par sondages d'un gisement cou-"-vrant une superficie étendue dans les deux dimensions, remplissent ces conditions, en terme de volumes et de surfaces respectivement.

Remarque III - Intérêt pratique de la formule de de WIJS - Deux paramètres intéressent le mineur: la teneur moyenne du gisement d'une part, de l'autre sa dispersion, dans la mesure où cette dispersion donne une idée de la variation de la teneur moyenne d'une zone à l'autre. La zone, naturellement, doit être prise à l'échelle du mode d'exploitation adopté. Suivant les cas, l'unité d'exploitation peut va-"-rier de quelques tonnes à quelques centaines de tonnes. Or, après une campagne de sondages, la dispersion que l'on connait n'est pas celle de semblables unités, mais celle de carottes de quelques kilo. Elle est toujours trop forte. La formule de de WIJS permet de passer de cette dispersion à celle qu'intéresse l'exploitant.

Remarque IV - Limites théoriques de la formule de de WIJS - Si le volume v de l'échan-"-tillon est pris infiniment petit, la formule de de WIJS conduit à une variance infinie. En fait, on peut démontrer (8) qu'elle reste inférieure à une limite finie.

.../...

Du reste, de WIJS (6) précise que sa théorie log-binomiale n'est vraie que si v est grand vis à vis des grains élémentaires. D'ailleurs, lorsque v est très petit, la loi théorique n'est plus ni log-normale, ni log-binomiale. La courbe des fréquences prend une forme en U, et, lorsque v est très inférieur au volume des grains, chaque v est constitué de minerai pur ou de stérile pur. Deux teneurs seulement sont alors possibles, 0 et x_0 (teneur du minerai pur) avec des probabilités respectives de $\frac{x_0 - m}{x_0}$ et $\frac{m}{x_0}$, m étant la teneur moyenne. En pratique, v est assez grand pour que cet effet "de noyau métallique" ne se manifeste pas.

ALGER, le 20 AVRIL 1955

G. MATHERON

- Références -

1 - E. ALLAIS — Notes de travail - Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris - 1953/1955 (non publiées) -

2 - Bureau de Recherches Minières de l'Algérie - Notes statistiques 1954/1955 (non publiées) -

3 - D.G. KRIGE — A statistical approach to some Mine valuation and allied problems on the Wit-waters-rand - Thèse présentée à l'Université du Wit-waters-rand, Johannes-burg - 1951 -

4 - " — A statistical analysis of some of the boreholes values in the Orange Free State Goldfield - Journal of the chemical, metallurgical and Mining Society of South Africa - Vol.53, n°3, Septembre 1952 -

5 - H.S. SICHEL — Mine valuation and maximum like li hood - Thèse présentée à l'Université du Wit-waters-rand - Johannes-burg - 1949-

6 - H.J. DE WIJS — Statics of ore distribution - Part I - Géologie in Mijn bouw Novembre 1951 -

7 - " — Statistics of ore distribution. Part II, id. Janvier 1952 -

8 - G. MATHERON — Utilité des Méthodes Statistiques dans la Recherche Minière - A paraître dans les comptes rendus du Congrès du Centenaire de l'Industrie Minérale - PARIS Juin 1955 -