FONTAINEBLEAU CG N-174

DEMI-GROUPES D'ISOMETRIES SUR UN ESPACE DE HILBERT H

-=-=-=-

(Note Géostatistique N° 103)

G. MATHERON Février 1970

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 103

DEMI-GROUPES D'ISOMETRIES SUR UN ESPACE DE HILBERT H

G. MATHERON

Février 1970

ECOLE DES MINES DE PARIS
CENTRE de MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE FONTAINEBLEAU

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 103

DEMI-GROUPES D'ISOMETRIES SUR UN ESPACE DE HILBERT H

Lemme 1 - Si A est un opérateur autoadjoint ($A = A^*$) positif sur H, - A est le générateur d'un demi-groupe continu d'opérateurs autoadjoints P_t, $t \geq 0$ vérifiant $\|P_t\| \leq 1$.

Montrons que -A vérifie les conditions du théorème de Hille-Yosida. C'est un opérateur dense et fermé, puisque $A = A^*$. Soit $\lambda > 0$. L'espace image $(\lambda I + A)(H)$ est dense dans H : en effet, soit $X \in H$ tel que $\lambda X + A^*X = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + AX = 0$. On a :

$$0 = \|\lambda X + AX\|^2 =$$

$$= \lambda^2\|X\|^2 + 2\lambda < X, AX > + \|AX\|^2 \geq \lambda^2\|X\|^2 + \|AX\|^2$$

puisque $< X, AX > \geq 0$, d'où $\|X\|^2 = 0$ et $X = 0$.

L'opérateur $\lambda I + A$ admet un inverse R_λ défini sur cet espace image, puisque $\lambda X + AX = 0$ entraîne $X = 0$. Cet inverse est borné, puisque $\|\lambda X + AX\|^2 \geq \lambda^2\|X\|^2$ équivaut à $\|R_\lambda Y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Y\|$, et fermé, comme on le vérifie à partir des mêmes inégalités, donc défini sur H entier et continu. Sa norme vérifie bien $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ de sorte que les conditions du théorème de Hille-Yosida sont bien vérifiées.

<u>Lemme 2</u> - <u>Soient H et H' deux espaces de Hilbert, A un opérateur dense et fermé, défini dans A, à valeurs dans H! Alors, les opérateurs A* A et AA* sont autoadjoints et positifs (et -A*A et -AA* engendrent des demi-groupes continus sur H et H' respectivement)</u>.

Soit Γ_A le graphe de A, fermé dans $H \oplus H'$, et $\Gamma_A^{\perp}$ son orthogonal dans $H \oplus H'$. Pour $X \in H$, $Y' \in H'$, on a $(X,Y') \in \Gamma_A^{\perp}$ si et seulement si :

$$\forall\ Z \in \mathcal{D}_A\ ,\quad < X,Z > + < Y',AZ > = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\text{(a)} \qquad Y' \in \mathcal{D}_{A^*}\ ,\quad A^*\ Y' = -\ X$$

Si maintenant (X,Y') est un élément quelconque de $H \oplus H' = \Gamma_A \oplus \Gamma_A^{\perp}$, soient (X_1, Y'_1) et $X_2, Y'_2)$ ses projections dans Γ_A et $\Gamma_A^{\perp}$. D'après (a), les éléments $X_1 \in \mathcal{D}_{A^*}$ et $Y'_2 \in \mathcal{D}_{A^*}$ vérifient

$$\text{(b)} \qquad X = X_1 - A^*Y'_2\ ,\quad Y = AX_1 + Y'_2$$

et constituent l'unique solution des équations (b). Pour Y = 0, en particulier, les équations

$$X = X_1 + A^*\ Z'\ ,\quad Z' = AX_1 \qquad (X_1 \in \mathcal{D}_A\ ,\ Z' \in \mathcal{D}_{A^*})$$

ou l'équation équivalente :

$$\text{(c)} \qquad X = X_1 + A^*\ AX_1 \qquad (X_1 \in \mathcal{D}_{A^*A})$$

admettent une solution et une seule. L'opérateur $I + A^*A$ applique donc $\mathcal{D}_{A^*A}$ sur H et admet un inverse. D'autre part $< A^*AX, X >$ $= \|AX\|^2 \geq 0$ montre que A^*A est un opérateur <u>positif</u>, et entraîne :

$$< (I + A^*A)\ X, X > = \|X\|^2 + \|AX\|^2 \geq \|X\|^2$$

L'inverse $(I + A^*A)^{-1}$ est donc borné et de norme ≤ 1. Etant continu et symétrique, $(I + A^*A)^{-1}$ est hermitien, et son inverse $(I + A^*A)$ est autoadjoint. Par suite A^*A est lui-même <u>autoadjoint</u> et d'après le lemme 1, $-A^*A$ engendre un demi-groupe.

Nous dirons qu'un opérateur A sur H est <u>symétrique</u> (<u>antisymétrique</u>) si $< AX, Y > = < X, AY >$ ($<AX, Y > = - < X, AY >$) pour X et Y dans $\mathcal{D}_A$.

<u>Lemme 3</u> - <u>Un opérateur A sur H est antisymétrique si et seulement si $< X, AX > = 0$ pour tout $X \in \mathcal{D}_A$.</u>

Si A est antisymétrique, on a pour $X \in \mathcal{D}_A$:

$$< X,\ AX > = - < AX,\ X > = 0$$

Inversement, si cette relation est vérifiée pour X, Y dans $\mathcal{D}_A$, on en tire :

$$0 = < X + Y,\ AX + AY > = < X, AY > + < Y, AX >$$

et A est antisymétrique.

<u>Lemme 4</u> - <u>Un opérateur A sur H est le générateur infinitésimal d'un groupe continu d'opérateurs unitaires si et seulement si A est antiautoadjoint</u> (<u>c'est-à-dire vérifie $A = -A^*$</u>).

a/ Soit U_t, $t \in R$ un groupe continu d'opérateurs unitaires sur H, et A son générateur. L'adjoint A^* est le générateur du groupe transposé $U_t^* = U_{-t}$, d'où $A^* = -A$.

b/ Inversement, supposons $A = -A^*$, et montrons que A vérifie les conditions du théorème de Hille-Yosida. A est dense, puisqu'il est anti-autoadjoint. Pour $\lambda \neq 0$ et $X \in \mathcal{D}_A$, on a, d'après le lemme 3 :

$$\text{(a)} \qquad \|\lambda X + AX\|^2 = \lambda^2 \|X\|^2 + \|AX\|^2$$

de sorte que $\lambda X + AX = \lambda X - A^*X = 0$ entraîne $\|X\| = 0$, et $X = 0$. L'espace image $(\lambda I - A)(H)$ est donc dense dans H. En remplaçant λ par $-\lambda$ dans (a), on obtient :

$$\|\lambda X - AX\|^2 \geq \lambda^2 \|X\|^2$$

et on en déduit que l'espace image $(\lambda I - A)(H)$ est fermé, donc coïncide avec H, et que la solution X de $\lambda X - AX = Y$ vérifie $\|X\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Y\|$ - Les conditions du théorème de Hille-Yosida sont donc vérifiées -

Soient alors U_t et U_t^* ; $t \geq 0$, les demi-groupes admettant les générateurs A et A^*. Les opérateurs U et U_t^* sont isométriques, puisque, pour $X \in \mathcal{D}_A$, on a d'après le lemme 3 :

$$\frac{d}{dt} < U_t X, U_t X > = 2 < AU_t X, U_t X > = 0$$

Enfin, on a $U_t U_t^* = U_t^* U_t = I$. En effet, pour X et $Y \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$, on a :

$$\frac{d}{dt} < U_t U_t^* X, Y > = \frac{d}{dt} < U_t^* X, U_t^* Y > = < A^* U_t^* X, U_t^* Y > +$$

$$+ < U_t^* X, A^* U_t^* Y > = < (A^* + A) U_t^* X, U_t^* Y > = 0$$

D'où $< U_t U_t^* X, Y > = < X, Y >$ et $U_t U_t^* = I$, et de même $U_t^* U_t = I$. En posant $U_{-t} = U_t^*$, $t \geq 0$, on obtient bien un groupe continu d'opérateurs unitaires, dont le générateur est A.

<u>Lemme 5</u> - <u>Un opérateur A dense, fermé et antisymétrique ($A \subset -A^*$) n'admet pas de prolongement antisymétrique autre que lui-même.</u>

Soit B un prolongement antisymétrique de A, que l'on peut toujours supposer fermé, puisque l'on a alors $A \subset B \subset -B^* \subset -A^*$; B est la restriction de $-A^*$ à $\mathcal{D}_B$.

Le graphe Γ_B se met sous la forme :

$$\Gamma_B = \Gamma_A \oplus \Gamma_C \quad , \quad \Gamma_C \subset \Gamma_A^{\perp}$$

et Γ_C, orthogonal à Γ_A dans $H \oplus H$, est le graphe d'un opérateur fermé C. On a $X \in \mathcal{D}_C$ si et seulement si :

$$X \in \mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_{A^*} \ , \ < X, Z > - < A^* X, AZ > = 0 \qquad (Z \in \mathcal{D}_A)$$

Donc si et seulement si :

$$X \in \mathcal{D}_B \ , \ X \in \mathcal{D}_{A^*A^*} \ , \ X = A^*A^*X$$

De plus, X vérifie alors $< X, BX > = - < X, A^*X > = 0$, puisque B est anti-symétrique.

Inversement, considérons l'ensemble $\mathcal{D}_{\tilde{C}}$ défini par :

(a) $$\mathcal{D}_{\tilde{C}} = \{X, \ X \in \mathcal{D}_{A^*A^*} \ , \ X = A^*A^*X \ , \ < X, A^*X > = 0\}$$

et pour $X \in \mathcal{D}_{\tilde{C}}$, posons $\tilde{C}\, X = -A^*X$. L'opérateur $\tilde{C}$ ainsi défini est <u>fermé</u> : Si $X_n \in \mathcal{D}_{\tilde{C}}$ converge vers X_o et si $\tilde{C}\, X_n = -A^*X_n$ converge vers Y_o, on a $X_o \in \mathcal{D}_{A^*}$ et $Y_o = -A^*X_o$, puisque A^* est fermé. D'autre part $A^*(A^*X_n) = X_n$ converge vers X_o, et A^*X_n vers A^*X_o, donc $A^*X_o \in \mathcal{D}_{A^*}$ et $A^*A^*X_o = X_o$. Enfin, la relation $< X_n, A^*X_n > = 0$ passe elle aussi à la limite. Il en résulte bien $X_o \in \mathcal{D}_{\tilde{C}}$, et $\tilde{C}\, X_o = -A^*X_o = Y_o$, et $\tilde{C}$ est fermé.

Le graphe $\Gamma_{\tilde{C}}$ de $\tilde{C}$ est orthogonal à Γ_A dans $H \oplus H$. En effet, si $X \in \mathcal{D}_{\tilde{C}}$ et $Z \in \mathcal{D}_A$, on déduit de (a) :

$$< X, Z > = < A^*A^*X, \ Z > = < A^*X, \ AZ > = - < \tilde{C}\, X, \ AZ >$$

On peut alors définir un opérateur $\tilde{A}$ par son graphe :

$$\Gamma_{\tilde{A}} = \Gamma_A \oplus \Gamma_{\tilde{C}}$$

et, d'après ce qui précède, $\tilde{A}$ prolonge toute extension anti-symétrique de A. Il suffit donc de montrer $\mathcal{D}_{\tilde{C}} = \{0\}$ pour établir le lemme.

D'après (a), $\mathcal{D}_{\tilde{C}}$ est stable pour $\tilde{C} \subset -A^*$, et sur l'espace $\overline{\mathcal{D}}_{\tilde{C}}$, l'opérateur $\tilde{C}$ est dense, fermé et anti-symétrique. Soit C' l'adjoint de $\tilde{C}$ (considéré comme un opérateur de $\overline{\mathcal{D}}_{\tilde{C}}$). On a $\tilde{C} \subset -C'$, d'où aussi $C'\tilde{C} \supset -\tilde{C}\tilde{C}$. Pour tout $X \in \mathcal{D}_{\tilde{C}}$, il en résulte :

$$\|\tilde{C}X\|^2 = \langle C'\tilde{C}X, X \rangle = - \langle \tilde{C}\tilde{C}X, X \rangle = - \|X\|^2$$

D'où $X = 0$, et par suite $\mathcal{D}_{\tilde{C}} = \{0\}$

<u>Lemme 6</u> - <u>Soit A un opérateur dense, fermé et antisymétrique sur H. Pour que A soit anti-autoadjoint, il faut et il suffit qu'aucune des équations</u>

(a) $\qquad X = -A^*X \quad , \qquad$ (a') $\qquad X' = A^*X'$

<u>n'admette de solution différente de 0. Si l'équation (a) (resp. (a')) admet des solutions non nulles, l'équation (a') (resp. (a)) n'en admet pas et A (resp. -A) est le générateur infinitésimal d'un demi-groupe continu d'opérateurs isométriques S_t, $t \geq 0$.</u>

Par hypothèse, on a $A \subset -A^*$, et le graphe Γ_{-A^*} de $-A^*$ se met sous la forme

$$\Gamma_{-A^*} = \Gamma_A \oplus \Gamma_B$$

Γ_B, orthogonal à Γ_A dans $H \oplus H$, est le graphe d'un opérateur fermé B. On voit, comme dans la démonstration du lemme 5, que $X \in \mathcal{D}_B$ équivaut à :

(b) $$X \in \mathcal{D}_{A^*A^*} \ , \quad X = A^*A^*X$$

D'après la démonstration du lemme 5, $< X, A^*X > = 0$ entraîne $X = 0$ si $X \in \mathcal{D}_B$ (puisque $\mathcal{D}_{\tilde{c}} = \{0\}$). Ainsi, pour X et Y non nuls dans $\mathcal{D}_B$, le trinome

(b') $$< X + \lambda Y, \ A^*X + \lambda A^*Y > = < X, A^*X > + \lambda(< X, A^*Y > + < A^*X, Y >) + \lambda^2 < X, \ A^*Y >$$

ne peut pas avoir deux racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (car dans ce cas $X + \lambda_1 Y = X + \lambda_2 Y = 0$, d'où $X = Y = 0$). Il en résulte que la forme quadratique $< X, \ A^*X >$ est strictement positive ou strictement négative sur $\mathcal{D}_B$. Quitte à remplacer A par -A, supposons-là <u>strictement négative</u> sur $\mathcal{D}_B$.

Soient alors $\lambda > 0$ et $X \in \mathcal{D}_B$. On a alors $X = A^*A^*X$, et le trinome (b') écrit avec $Y = A^*X$, soit :

$$< X + \lambda A^*X, \ A^*X + \lambda X > = (1 + \lambda^2) < X, A^*X > + \lambda \ (\|X\|^2 + \|A^*X\|^2)$$

n'a pas de racines distinctes. Comme $< X, \ A^*X > \leq 0$, il en résulte :

$$\|X\|^2 + \|A^*X\|^2 \leq - 2 < X, \ A^*X >$$

c'est-à-dire $\|X + A^*X\|^2 \leq 0$, et par suite :

(a) $$X + A^*X = 0$$

Ainsi tout $X \in \mathcal{D}_B$ vérifie l'équation (a). Inversement,

(a) entraîne manifestement (b), de sorte que $\mathcal{D}_B$ coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation (a). Par contre, si X' vérifie (a'), on a aussi $X' = A^*A^*X'$, soit $X' \in \mathcal{D}_B$, et :

$$\|X'\|^2 = < X', A^*X' > \leq 0$$

d'où $X' = 0$. Ainsi (a') n'admet pas de solution non nulle. Enfin, A est anti-autoadjoint si et seulement si $\mathcal{D}_B = \{0\}$, donc si et seulement si aucune des deux équations (a) et (a') n'admet de solution non nulle.

Il reste à montrer que A engendre un demi-groupe lorsque (a') n'a pas de solution non nulle. La forme quadratique $< X, A^*X >$, nulle sur $\mathcal{D}_A$ et négative sur $\mathcal{D}_B$ est ≤ 0 sur $\mathcal{D}_{A^*}$. Soit alors $\lambda > 0$. On a, pour tout $X \in \mathcal{D}_{A^*}$:

$$\text{(c)} \quad \|\lambda X - A^*X\|^2 = \lambda^2 \|X\|^2 - 2\lambda < X, A^*X > + \|A^*X\|^2 \geq \lambda^2 \|X\|^2 + \|A^*X\|^2$$

Donc $\lambda X - A^*X = 0$ entraîne $X = 0$, et l'espace image $(\lambda I - A)(H)$ est dense. De l'inégalité :

$$\|X\| \leq \frac{1}{\lambda} \|\lambda X - AX\|$$

qui s'obtient de la même manière que (c), on déduit ensuite que cet espace image est fermé, donc coïncide avec H, et que les conditions du théorème de Hille-Yosida sont remplies.

Soit alors S_t le demi-groupe continu dont le générateur est A. Pour $X \in \mathcal{D}_A$, on a :

$$\frac{d}{dt} < S_tX, S_tX > = 2 < A\, S_tX, S_tX > = 0$$

puisque A est antisymétrique (lemme 3), et S_t est une isométrie. Par contre, le groupe adjoint S_t^* , dont le générateur est A, n' est isométrique que si $A = - A^*$.

<u>Corollaire</u> : <u>Soit A un opérateur dense et fermé. Pour que l'un des opérateurs A ou -A soit le générateur d'un demi-groupe d'isométries, il faut et il suffit que A soit antisymétrique. Pour que ce demi-groupe se prolonge en un groupe continu d'opérateurs unitaires, il faut et il suffit que A soit anti-autoadjoint.</u>

Plaçons-nous toujours dans le cas où la forme quadratique $< X, A^*X >$ est négative, et où $\mathcal{D}_B = \{X : X + A^*X = 0\}$. Si $X \in \mathcal{D}_B$, S_t^*X vérifie $S_t^*X + A^*S_t^*X = S_t^* (X + A^*X) = 0$, donc $S_t^*X \in \mathcal{D}_B$. La relation

$$\frac{d}{dt} \; S_t^*X = A^* \; S_t^*X = - \; S_t^*X$$

donne alors

$$S_t^*X = e^{-t} \; X \qquad (X \in \mathcal{D}_B)$$

Les éléments de $\mathcal{D}_B$ s'amortissent exponentiellement sous l'action du demi-groupe S_t^* . Plus généralement, désignons par $\mathcal{D}_\lambda$ le sous-espace (fermé) constitué des $X \in \mathcal{D}_{A^*}$ vérifiant

$$\lambda X + A^*X = 0$$

ce qui entraîne $S_t^*X = e^{-\lambda t} \; X$.

<u>Lemme 7</u> - <u>Pour $\lambda > 0$, l'espace $\mathcal{D}_\lambda$ des $X \in \mathcal{D}_{A^*}$ vérifiant $\lambda X + A^*X = 0$ est homéomorphe à $\mathcal{D}_B$.</u>

Désignons par R_λ la résolvante du demi-groupe S_t. Tout $X \in H$ admet la représentation $X = (I-A)Y$ avec $Y = R_1 X \in \mathcal{D}_A$, et cet Y à son tour se met sous la forme $Y = R_\lambda Z$ pour $Z = \lambda Y - AY$. On a ainsi les relations réciproques :

$$\text{(a)} \qquad X = (I-A)R_\lambda Z \quad , \quad Z = (\lambda I-A)R_1 X$$

De (a) résulte :

$$(\lambda I+A^*)X = (\lambda I+A^*)(I+A^*)\ R_\lambda Z = (I+A^*)(\lambda I-A)\ R_\lambda Z = (I+A^*)Z$$

de sorte que $X \in \mathcal{D}_\lambda$ équivaut à $Z \in \mathcal{D}_B$, et les relations (a) définissent une bijection de $\mathcal{D}_B$ sur $\mathcal{D}_\lambda$.

Comme $(I-A) = (\lambda I-A) + (1-\lambda)I$, la relation (a) s'écrit aussi :

$$\text{(a')} \qquad X = Z + (1-\lambda)\ R_\lambda Z$$

et cette bijection est continue, donc constitue un homéomorphisme de $\mathcal{D}_B$ sur $\mathcal{D}_\lambda$.

<u>Lemme 8</u> - <u>Soit H_1 le sous vectoriel engendré par les $\mathcal{D}_\lambda$, $\lambda > 0$. $\overline{H}_1$ et son orthogonal $H_o = H_1^\perp$ sont stables par S_t et par S_t^*. La restriction A_o de A à H_o est le générateur d'un groupe continu d'opérateurs unitaires S_t', avec $S_t' \subset S_t$ pour $t \geq 0$ et $S_t' \subset S_t^*$ pour $t \leq 0$.</u>

En effet, si $X \in \mathcal{D}_\lambda$, $S_t^* X = e^{-\lambda t} X$ et chaque $\mathcal{D}_\lambda$ est stable par S_t^*, donc H_o est stable par S_t. D'après (a'), un élément $Y \in H$ est dans H_o si et seulement si il est orthogonal à Z et à $R_\lambda Z$ pour tout $Z \in \mathcal{D}_B$ et tout $\lambda > 0$ différent de 1. Mais

$$< X, R_\lambda Z > = 0 \quad (\lambda \neq 1, \lambda > 0)$$

équivaut à $< X, S_t Z > = 0$ pour tout $t > 0$. Ainsi H_o est l'orthogonal de l'espace engendré par les $S_t(\mathcal{D}_B)$, $t \geq 0$. Cet espace étant stable par S_t, H_o est stable par S_t^*.

Sur H_o, S_t et S_t^* induisent donc deux demi-groupes transposés l'un de l'autre, dont les générateurs sont les restrictions A_o et A_o^* de A et A^* à H_o. On a donc $A_o \subset -A_o^*$. Mais, par construction, l'équation $\lambda X + A_o^* X = 0$ $(\lambda > 0)$ n'a pas de solution non nulle dans H_o. Il résulte alors du lemme 6 que A_o est anti-autoadjoint et que l'on a $S_t^* S_t = S_t S_t^* = I$ sur H_o.

<u>Corollaire</u> : <u>H_o est l'orthogonal de l'espace engendré par les S_t $(\mathcal{D}_B)$, $t \geq 0$.</u>

<u>Lemme 9</u> - <u>H_o est l'intersection $\bigcap_{t \geq 0} S_t(H)$ des espaces images $S_t(H)$.</u>

D'après le lemme 9, on a $X = S_t S_t^* X$ pour $X \in H_o$, d'où $H_o \subset H_o' = \bigcap_{t \geq 0} S_t(H)$. Inversement, soit $X \in H_o' = \bigcap_{t \geq 0} S_t(H)$, et montrons $X \in H_o$. Remarquons d'abord que H_o', stable par S_t, l'est aussi par S_t^*. En effet, S_t étant isométrique, on a $S_t^* S_t = I$ (tandis que $S_t S_t^*$ est le projecteur de $S_t(H)$). Si pour tout $\tau > 0$ on peut

trouver Y_τ tel que $X = S_\tau Y_\tau$, on a donc $S_t^* X = S_{\tau-t} Y_\tau$ pour $\tau \geq t$, donc $S_t^* X \in S_{\tau-t}(H)$ et $S_t^* X \in H_o'$. Soit alors $X \in H_o'$ et $Y \in \mathcal{D}_\lambda$. De $\lambda Y + A^* Y = 0$ résulte $S_t^* Y = e^{-\lambda t}\, Y$, et :

$$< X,Y > = < S_t S_t^* X,\ Y > = e^{-\lambda t} < S_t^* X,\ Y >$$

donc $\quad < S_t^* X,\ Y > = e^{-\lambda t} < X,Y >$ et :

$$\frac{1}{T} \int_0^T < S_t^* X,\ Y > = \frac{e^{\lambda T} - 1}{T} < X,Y >$$

D'après le théorème ergodique, le premier membre a une limite finie pour T tendant vers l'infini, et celà entraîne $< X,Y > = 0$. Donc X est orthogonal à $\mathcal{D}_\lambda$ pour $\lambda > 0$, et celà entraîne $X \in H_o$, d'où $H_o' \subset H_o$ et l'égalité.

<u>Lemme 10</u> - <u>H_o coïncide avec l'ensemble des $X \in H$ tels que</u> :

$$< S_t^* X\ ,\ S_t^* X > = \|X\|^2 \quad , \quad t \geq 0$$

Désignons par H_o'' l'espace des X dont la norme est invariante par S_t^*. D'après le lemme 8, S_t^* induit une isométrie sur H_o, d'où $H_o \subset H_o''$. Inversement, soit $X \in H_o''$. Comme $S_t S_t^*$ est le projecteur de l'espace image $S_t(H)$, la relation $< S_t^* X,\ S_t^* X > = < S_t S_t^* X,\ X > = \|X\|^2$ entraîne $X \in S_t(H)$ pour tout $t \geq 0$, donc $X \in H_o$ d'après le lemme 9, d'où $H_o'' \subset H_o$ et l'égalité.