N-247

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 116

LES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES

Par

G. MATHERON

Septembre 1971

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 116

LES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES

Table des Matières

0 - INTRODUCTION 1

1 - LES F.A.I. BORNEES 3

1-1 L'équation aux différences $X = (S-I)Y$. 3

Lemme 1-1. 3

1-2 Eléments périodiques. 4

Lemme 1-2. 5

1-3 Les F.A.I. bornées (cas à 1 dimension). 6

Proposition 1-3-1. 6

Proposition 1-3-2. 7

1-4 F.A.I. zonales et F.A.I. bornées dand $\mathbb{R}^n$. 8

Proposition 1-4-1. 9

Proposition 1-4-2. 10

2 - LES F.A.I. REGULIERES 10

2-1 F.A.I. régulières à 1 dimension. 10

Proposition 2-1. 10

2-2 F.A.I. régulières dans $\mathbb{R}^n$. 13

Proposition 2-2. 15

2-3 L'espace de Banach des F.A.I. régulières. 15

2-4 Généralisation. 16

Lemme 2-4. 16

2-5 Diffusion d'une F.A.I. régulière. 18

Propriétés ergodiques de $Z(x,t)$. 20

Proposition 2-5-1. 21

Proposition 2-5-2. 22

3 - COMPLEMENTS DE TYPE ERGODIQUE 24

3-1 Résultats relatifs à la résolvante. 24

3-2 Généralisation. 25

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 116

LES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES

0 - INTRODUCTION

Je me propose dans ce qui suit de donner une meilleure caractérisation des F.A.I. que dans la note N° 102. Je rappelle d'abord les définitions. Si H est un espace de Hilbert, et U_h un groupe continu à n paramètres $h = (h_1, \ldots h_n) \in \mathbb{R}^n$ d'opérateurs unitaires sur H, on appelle F.A.I. une famille Z_h, $h \in \mathbb{R}^n$ d'éléments de H vérifiant :

$$(1) \qquad Z_{h+h'} = U_h \, Z_{h'} + Z_h \qquad (h, h' \in \mathbb{R}^n)$$

d'où résulte aussitôt :

$$(1') \qquad (U_h - I) \, Z_{h'} = (U'_{h'} - I) Z_h$$

La fonction $h \to \|Z_h\|^2$ est le variogramme de la F.A.I. Z_h. De (1) résulte :

$$(2) \qquad \|Z_{h+h'}\| \leq \|Z_h\| + \|Z_{h'}\|$$

On en déduit que $\|Z_h\|$ est bornée sur tout compact si et seulement si elle est bornée sur un voisinage de l'origine, et, lorsqu'il en est ainsi, on dit que la F.A.I. Z_n est <u>régulière</u>. Plus précisément, si l'on pose $\gamma = \sup_{|h| \leq 1} \|Z_h\|$, l'inégalité (2) implique :

(3) $$\|Z_h\| \leq (1+|h|)\gamma$$

et cette relation (3) caractérise les F.A.I. régulières. De même, on dit que la F.A.I. Z_h est <u>bornée en norme</u> ou (plus brièvement), qu'elle est bornée si

$$\sup_{h \in \mathbb{R}^n} \|Z_h\| < \infty$$

Notre premier objectif sera de caractériser les F.A.I. régulières et les F.A.I. bornées . On désignera par $A = (A_1, \ldots A_n)$ les générateurs du groupe U_h, et par $H_o \subset H$ le sous-espace constitué des éléments invariants :

$$X \in H_o \Leftrightarrow (U_h - I)X = 0 \quad , \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A\,X = 0$$

Le projecteur de H_o sera désigné par E. De même, pour $H \in \mathbb{R}^n$ donné, H_h désignera le sous-espace constitué des éléments admettant <u>la période h</u> ($U_h\, X = X$), et E_h son projecteur. Il est clair que l'on a $H_o = \bigcap_{h \in \mathbb{R}^n} H_h$.

Dans le cas à une seule dimension (n=1), on peut généraliser la notion de F.A.I. en remplaçant le groupe U_h par un demi-groupe continu de contractions S_h à un paramètre $h > 0$. C'est ce que nous ferons toujours, sauf mention explicite du contraire. Dans le cas d'un groupe U_h, $h \in \mathbb{R}$, la relation (1) écrite avec $h' = -h$ donne $Z_{-h} = -\, U_{-h}\, Z_h$, de sorte qu'il n'y a aucune difficulté à généraliser à $h \in \mathbb{R}$ les résultats établis pour $h \geq 0$.

1 - LES F.A.I. BORNEES

Je me propose de montrer qu'une F.A.I. est bornée en norme si et seulement si elle est de la forme $(U_h - I)X$ pour un $X \in H$. Pour celà, il convient d'examiner d'abord le cas à une dimension (avec un demi-groupe S_h de contractions).

1-1 - L'équation aux différences $X = (S-I)Y$.

Lemme 1-1 - Soit S un opérateur continu sur H tel que $\|S\| \leq 1$, et X un élément de H. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ Il existe $Y \in H$ tel que $X = (S-I)Y$

b/ Si l'on pose $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} S^k X$, la suite $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n$ converge fortement.

c/ La suite $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n$ est faiblement convergente.

d/ La suite Z_n est bornée en norme.

Lorsque ces conditions sont réalisées, $Y_o = - \lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n$ est l'unique élément invariant par S et vérifiant $X = (S-I)Y_o$.

Nous désignerons par H_s le sous-espace de H constitué des éléments invariants par S, et par E_s son projecteur. Il est clair que a/ implique $E_S X = 0$.

Montrons a/ $\Rightarrow$ b// $\Rightarrow$ c/ $\Rightarrow$ a .

Si a/ est vrai, on en déduit $Z_n = S^n Y - Y$, et le théorème

ergodique montre que $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n$ convege fortement vers $E_S\, Y - Y$, donc b/ est vrai. Il est clair que b/ implique c/. Enfin, si c/ est vrai, la suite :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} S^k X = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} (N-k)\, S^k X$$

admet une limite faible $- Y_o$. Par suite, $S\, Y_o - Y_o$ est limite faible de

$$- \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n=1} (S^{k+1} - S^k)\, X = - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S^n X + X$$

D'après le théorème ergodique, on a donc $X - E_s X = (S-I)Y_o$. D'autre part, on a :

$$\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E_S\, Z_n\| \leq \frac{1}{N}\,\|\sum_{k=0}^{n=1} (N-k)\, E_S X\| = \frac{N-1}{2}\,\|\, E_S X\,\|$$

Or cette expression est bornée, puisque $\frac{1}{N}\sum Z_n$ converge faiblement. Donc $E_S X = 0$ et $X = (S-I)Y_o$: a/ est vérifiée.

Il est clair que a/ implique d/. Il reste donc à établir d $\Rightarrow$ a. Si la suite $\|Z_n\|$ est bornée, il en est de même de la suite $\|\,\frac{1}{N}\sum_1^N Z_n\,\| \leq \|Z_n\|$. On peut donc extraire de $\frac{1}{N}\sum_1^N Z_n$ une suite partielle faiblement convergente, et il suffit de raisonner sur cette suite partielle comme on a fait ci-dessus pour montrer c/ $\Rightarrow$ a/ .

1-2 - Eléments périodiques.

Soit maintenant S_t, $t \geq 0$, un demi-groupe continu de contractions sur H, A son générateur, H_o le sous-espace constitué des éléments invariants par S_t pour tout t (i.e. invariants par A), et

E son projecteur. Pour chaque t, on désigne par H_t l'espace des éléments admettant la période t (invariants par S_t), et par E_t son projecteur.

On a évidemment $H_o = \bigcap_{t>0} H_t$. Si t_n est une suite décroissant vers 0, on a encore $H_o = \bigcap_n H_{t_n}$. En effet, pour $t > 0$ donné, on peut trouver une suite k_n d'entiers ≥ 0, tels que $\sum_n k_n t_n = t$. Si $X \in H_{t_n}$ pour tout n, on a $S_t X = \lim_N \prod_{n=1}^{N} S_{k_n t_n} X = X$, et $X \in H_t$, d'où $\bigcap H_{t_n} \subset H_o$, et l'égalité puisque l'inclusion inverse est évidente.

On en déduit le lemme suivant :

<u>Lemme 1-2</u> - Si $X \in H$ admet deux périodes t_o et t_1 dont le rapport t_1/t_o est irrationnel, on a $X = EX$.

En effet, on peut trouver une suite k_n d'entiers ≥ 0 telle que la suite $s_n = k_n t_o$ modulo t_1 converge vers 0 en décroissant. Comme X admet la période t_1, on a $S_{s_n} X = S_{k_n t_o} X$, donc $S_{s_n} X = X$, puisque X admet aussi la période t_o. Donc $X \in \bigcap H_{s_n} = H_o$.

D'après le théorème ergodique, pour chaque $t > 0$, le projecteur E_t de H_t s'écrit $E_t = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n S_{k_t}$. Par suite, E_t commute avec $S_{t'}$ et avec $E_{t'}$ pour tout $t' > 0$. On en déduit :

<u>Corollaire</u> - Si t_1/t_o est irrationnel, $E_{t_1} E_{t_o} = E_{t_o} E_{t_1} = E$, et, pour tout $X \in H_{t_1}$ et tout $Y \in H_{t_o}$, $\langle X, Y \rangle = \langle EX, EY \rangle$.

En effet, pour tout $X \in H$, $E_{t_o} X$ est dans H_{t_o} et $E_{t_o} E_{t_1} X = E_{t_1} E_{t_o} X$ est dans $H_{t_o} \cap H_{t_1}$, c'est-à-dire dans H_o d'après le lemme 1-2. Pour $X \in H_{t_1}$ et $Y \in H_{t_o}$, de même, on trouve :

$$< X,Y > = < E_{t_1} X, E_{t_o} Y > = < X, E_{t_1} E_{t_o} Y > = < X, EY > = < EX, EY >$$

1-3 - Les F.A.I. bornées (cas à 1 dimension).

Proposition 1-3-1 - S_t désignant un demi-groupe continu à un paramètre de contractions sur h, une F.A.I. Z_t est de la forme $(S_t - I)X$ pour un $X \in H$ si et seulement si elle est bornée en norme.

Cette condition est manifestement nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée, et donnons-nous t_o réel positif. De (1) résulte :

$$Z_{n_{t_o}} = \sum_o^{n-1} S_{k_{t_o}} Z_{t_o}$$

Comme $\| Z_{n_{t_o}} \|$ est bornée par hypothèse, le lemme 1-1 montre qu'il existe $Y \in H$ tel que l'on ait

$$Z_{t_o} = (S_{t_o} - I)Y$$

donc aussi

$$Z_{n_{t_o}} = (S_{n_{t_o}} - I)Y$$

et l'on peut même supposer $E_{t_o} Y = 0$. En utilisant la relation (1'), on en déduit :

$$(S_{n_{t_o}} - I)Z_t = (S_t - I)Z_{n_{t_o}} = (S_{n_{t_o}} - I)(S_t - I)Y$$

En sommant en n et en appliquant le théorème ergodique, on obtient la relation $E_{t_o} Z_t - Z_t = (S_t - I)E_{t_o} Y - (S_t - I)Y$, c'est-à-dire, puisque $E_{t_o} Y = 0$:

$$Z_t = E_{t_o} Z_t + (S_t - I)Y$$

Soit alors t_1 un autre réel > 0, tel que t_1/t_o ne soit pas rationnel. Le raisonnement précédent, appliqué à la F.A.I. $Z'_t = E_{t_o} Z_t$ (qui est manifestement encore bornée en norme) montre qu'il existe $Y' \in H$ tel que

$$E_{t_o} Z_t = E_{t_1} E_{t_o} Z_t + (S_t - I)Y$$

D'après le corollaire du lemme 1-2, on a $E_{t_1} E_{t_o} Z_t = EZ_t$. La F.A.I. EZ_t est bornée en norme et vérifie la relation $EZ_{t+t'} = EZ_t + EZ_{t'}$. On en déduit $EZ_t = t\, EZ_1$, ce qui entraine $EZ_t = 0$ puisque $\|EZ_t\| = t\, \|EZ_1\|$ est borné. Il reste donc $E_{t_o} Z_t = (S_t - I)Y'$ et par suite $Z_t = (S_t - I)(Y+Y')$.

<u>Convergence simple</u>.- Une suite $Z_n(.)$ d'application d'un espace F dans H converge simplement vers $Z(.)$ si, pour tout $x \in F$, $Z_n(x)$ converge fortement vers $Z(x)$. Il est clair que toute limite simple de F.A.I. est encore une F.A.I.

<u>Proposition 1-3-2</u> - L'ensemble des F.A.I. bornées est dense, pour la topologie de la convergence simple, dans l'espace des F.A.I. sans dérive (c'est-à-dire telles que $E\, Z_h = 0$).

En effet, soit Z_h une F.A.I. sans dérive. Soit t_o un réel > 0. On a :

$$Z_{n_{t_o}} = \Sigma_o^{n-1} S_{k_{t_o}} Z_{t_o}$$

et, pour tout t > 0

(a) $$(S_{n_{t_o}} - I) Z_t = (S_t - I) Z_{n_{t_o}}$$

Posons alors :

$$X_N = -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_{n_{t_o}}$$

La relation (a) s'écrit :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (S_{n_{t_o}}-I)Z_t = -(S_t-I)X_N$$

D'après le théorème ergodique, le premier membre converge fortement vers $E_{t_o} Z_t - Z_t$. Ainsi, on a :

$$Z_t = E_{t_o} Z_t + \lim_{N \to \infty} (S_t-I)X_N$$

Soit alors t_1 un autre réel > 0 tel que t_1/t_o ne soit pas rationnel. D'après le raisonnement précédent, on peut trouver une suite X'_N telle que la F.A.I. $Z'_t = E_{t_o} Z_t$ soit de la forme :

$$E_{t_o} Z_t = E_{t_1} E_{t_o} Z_t + \lim_{N \to \infty} (S_t-I)X'_N$$

Mais $E_{t_o} E_{t_o} Z_t = E\, Z_t = 0$, d'après le corollaire du lemme 1-2, et par suite $(S_t-I)(X_N + X'_N)$ converge vers Z_t pour tout t.

1-4 - F.A.I. zonales et F.A.I. bornées dans $\mathbb{R}^n$.

Nous dirons qu'une F.A.I. Z_h dans $\mathbb{R}^n$ admet une zonalité dans une direction α si Z_h est la somme d'une F.A.I. de la forme $(U_h-I)X$ et d'une F.A.I. constante sur les droites parallèles à la direction α.

<u>Proposition 1-4-1</u> - Une F.A.I. Z_h admet une zonalité dans la direction définie par un vecteur unitaire α de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\sup_{t\geq 0} \|Z_{t\alpha}\| < \infty$$

Cette condition est manifestement nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée. D'après la proposition 1-3-1, la F.A.I. $Z_{t\alpha}$, $t \in \mathbb{R}$ est de la forme

$$Z_{t\alpha} = (U_{t\alpha}-I)X$$

pour un $X \in H$. D'après le théorème ergodique, on peut prendre :

$$\text{(a)} \qquad X = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z_{t\alpha}\, dt$$

Soit alors $h = x + t\alpha$ un point de $\mathbb{R}^n$, x sa projection sur l'orthogonal du vecteur α, et $t\alpha$ sa projection sur la droite de direction α passant par l'origine. Posons :

$$Y_h = (U_h-I)X$$

D'après (a), on a :

$$Y_h = -\lim \frac{1}{T}\int_0^T (U_h-I)Z_{\tau\alpha}\, d\tau = -\lim \frac{1}{T}\int_0^T (U_{\tau\alpha}-I)Z_h\, d\tau$$

D'après le théorème ergodique, on en déduit :

$$Y_h = Z_h - E_\alpha Z_h$$

E_α désignant le projecteur de l'espace des invariants de $U_{t\alpha}$. Mais $Z_h = Z_{x+t\alpha} = U_x Z_{t\alpha} + Z_x$ entraine $E_\alpha Z_h = E_\alpha Z_x$, puisque $E_\alpha Z_{t\alpha} = 0$.

Ainsi, on a bien :

$$Z_h = (U_h - I)X + E_\alpha Z_x$$

Corollaire - Pour qu'une F.A.I. Z_h soit de la forme $(U_h-I)X$, il faut et il suffit que l'on ait $\sup_t \|Z_{t\alpha_i}\| < \infty$ pour n vecteurs α_i, $i = 1,2,\ldots n$ linéairement indépendants. En particulier, cette condition entraine $\sup_{h\in\mathbb{R}^n} \|Z_h\| < \infty$.

Proposition 1-4-2 - L'ensemble des F.A.I. bornées est dense, pour la convergence simple, dans l'espace des F.A.I. sans dérive.

La démonstration est analogue à celle du cas unidimensionnel.

2 - LES F.A.I. REGULIERES

Nous traiterons d'abord le cas à une dimension, et des F.A.I. définies à l'aide d'un demi-groupe continu de contractions S_t, puis celui de n dimensions (avec cette fois un groupe continu d'opérateurs unitaires U_h).

2-1 - F.A.I. régulières à une dimension.

Proposition 2-1 - Toute F.A.I. régulière Z_t est fortement continue en t. Si l'on pose $\zeta_\mu = \int_0^\infty e^{-\mu t} Z_t \, dt$, Z_t admet la représentation :

$$Z_t = \mu^2 \int_0^t S_\tau \, \zeta_\mu \, d\tau - \mu \, (S_t - I)\zeta_\mu$$

En effet, soit Z_t une F.A.I. régulière. Supposons d'abord $E\,Z_t = 0$. Désignons par R_μ la résolvante du demi-groupe S_t, et calculons $R_\mu\, Z_t$:

$$R_\mu\, Z_t = \int_0^\infty (S_\tau\, Z_t)\, e^{-\mu\tau} d\tau$$

En utilisant la relation $S_\tau\, Z_t = S_t\, Z_\tau + Z_t - Z_\tau$, on voit que $(S_t - I)\, e^{-\mu\tau} Z_\tau$ est intégrable en τ et vérifie :

$$R_\mu\, Z_t = \frac{1}{\mu}\, Z_t + \int_0^\infty (S_t - I)\, e^{-\mu\tau}\, Z_\tau\, d\tau$$

Compte tenu de l'identité $A\, R_\mu = \mu\, R_\mu - I$, ceci s'écrira encore :

$$A\, R_\mu\, Z_t = (\mu\, R_\mu - I) Z_t = \mu \int_0^\infty (S_t - I)\, e^{-\mu\tau}\, Z_\tau\, d\tau$$

Mais Z_t est régulière, et vérifie donc une inégalité de la forme :

$$\|Z_\tau\| \leq a + b\tau$$

Par suite :

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\mu\tau} (S_t - I) Z_\tau\, d\tau \right\| \leq 2 \int_0^\infty (a + b\tau)\, e^{-\mu\tau}\, d\tau = 2\,(a + \frac{b}{\mu})$$

Ainsi la F.A.I. $A\, R_\mu\, Z_t$ est bornée en norme. D'après la Proposition 1-3-1, il existe donc $\zeta_\mu \in H$ tel que :

$$A\, R_\mu\, Z_t = \mu (S_t - I) \zeta_\mu = \mu\, A \int_0^t S_\tau\, \zeta_\mu\, d\tau$$

Comme $E\, Z_t$ est supposé nul et que l'on peut prendre ζ_μ telle que $E\, \zeta_\mu = 0$, il en résulte également :

$$R_\mu Z_t = \mu \int_0^t S_\tau \zeta_\mu \, d\tau$$

La relation $Z_t = \mu R_\mu Z_t - A R_\mu Z_t$ donne alors :

$$Z_t = \mu^2 \int_0^t S_\tau \zeta_\mu \, d\tau - \mu (S_t - I)\zeta_\mu$$

En particulier, Z_t est fortement continu en t, donc intégrable. Il vient alors :

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} Z_t \, dt = \mu^2 \times \frac{1}{\mu} R_\mu \zeta_\mu - \mu R_\mu \zeta_\mu + \zeta_\mu = \zeta_\mu$$

ce qui achève la démonstrationpour les F.A.I. sans dérive ($E Z_t = 0$). Si $E Z_t$ n'est pas nulle, on a $E Z_t = t E Z_1$, puisque Z_t est régulière, et on vérifie immédiatement que la F.A.I. $t E Z_1$ remplit les conditions de la proposition.

<u>Corollaire</u> - Si Z_t est une F.A.I. régulière, $\frac{1}{t} Z_t$ converge fortement vers $E Z_1$ lorsque t tend vers l'infini.

On a, en effet, $E Z_t = t E Z_1$, puisque Z_t est régulière, et le terme ζ_μ qui figure dans la représentation de Z_t vérifie $\mu^2 E \zeta_\mu = E Z_1$. Le corollaire découle alors immédiatement du théorème ergodique.

<u>Remarque</u> - Il n'est pas nécessaire, dans l'énoncé de cette proposition, de supposer Z_t régulière. Il suffit de supposer qu'il existe une fonction g(t) intégrable telle que :

$$\|Z_t\| \leq g(t) \quad , \quad \int_0^\infty g(t) e^{-\mu t} \, dt < \infty$$

pour un $\mu > 0$ (celà suffit pour que la F.A.I. $A\,R_\mu\,Z_t$ soit bornée). Cette condition moins forte en apparence entraine donc la régularité de Z_t.

Il existe sans aucun doute des F.A.I. non régulières. Par exemple, si $m(t)$ est une solution "pathologique" (non mesurable) de l'équation $m(t+t') = m(t) + m(t')$ et $X \in H_o$ un élément invariant, la F.A.I. $Z_t = m(t)X$ n'est pas régulière. Par contre, j'ignore s'il existe des F.A.I. sans dérive non régulières.

2-2 - F.A.I. régulières dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $(e_1,\ldots e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, Z_h une F.A.I., $h = \sum h_i\, e_i$ un point de $\mathbb{R}^n$. La relation (1) permet de mettre Z_h sous la forme

$$(2\text{-}2) \qquad Z_h = Z_{h_1 e_1} + U_{h_1 e_1}\, Z_{h_2 e_2} + \ldots + U_{\sum_1^{n-1} e_i h_i}\, Z_{h_n e_n}$$

Il en résulte que Z_h est régulière dans $\mathbb{R}^n$ dès que chacune des F.A.I. à une dimension $Z_{h_i e_i}$ est régulière dans $\mathbb{R}$, et, d'après la proposition 2-1, Z_h est alors fortement continu en h, donc intégrable.

Désignons par $R_i(\mu_i) = \int_0^\infty e^{-\mu_i t}\, U_{te_i}$ la résolvante du groupe U_{te_i}, et par $R_\mu = \Pi_i\, R_i(\mu_i)$ celle du groupe U à n paramètres. Ici, $\mu = (\mu_1,\ldots\mu_n)$ désigne un point de $\mathbb{R}^n_+$. Posons :

$$(a) \quad \begin{cases} \zeta_\mu = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\sum \mu_i h_i}\, Z_{\sum h_i e_i}\, dh \\[2ex] \zeta_{\mu_i} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu_i h_i}\, Z_{h_i e_i}\, d\,h_i \end{cases}$$

D'après la proposition 2-1, on a pour chaque $i = 1,2,\ldots n$

$$R_i(\mu_i)\ Z_{h_i e_i} = \mu_i \int_0^{h_i} U_{te_i}\ \zeta_{\mu_i}\ dt$$

Cette expression est fortement dérivable en h_i, et on a :

(b) $$\frac{d}{dh_i} R_i(\mu_i)\ Z_{h_i e_i} = \mu_i\ \zeta_{\mu_i}$$

Considérons alors la F.A.I. définie par :

$$R_\mu\ Z_h = \int_{R_+^n} e^{-\sum \mu_i h'_i}\ U_{\sum h'_i e_i}\ Z_h\ dh'$$

Cette F.A.I. a un gradient, car $R_\mu\ Z_h = \prod R_i(\mu_i)\ Z_{\sum h_i e_i}$ admet d'après (b) des dérivées partielles qui prennent en $h = 0$ les valeurs :

$$Y'_i = \prod_{j \neq i} R_j(\mu_j)\ \mu_i\ \zeta_{\mu_i}$$

D'autre part, $U_{h'}\ Z_h = U_h\ Z_{h'} + Z_h - Z_{h'}$ donne :

$$R_\mu\ Z_h = \int_{R_+^n} e^{-\sum \mu_i h_i}\ (U_h\ Z_{h'} - Z_{h'})dh' + \frac{1}{\mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_n}\ Z_h$$

$$= (U_h - I)\zeta_\mu + \frac{1}{\mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_n}\ Z_h$$

On en tire

$$Z_h = \mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_n\ [R_\mu\ Z_h - (U_h - I)\zeta_\mu]$$

D'où le résultat :

Proposition 2-2 - Toute F.A.I. régulière dans $\mathbb{R}^n$ est fortement continue et se décompose en somme d'une F.A.I. dérivable et d'une F.A.I. bornée.

2-3 - L'espace de Banach des F.A.I. régulières.

Si l'on pose $\|Z(\cdot)\|_r = \sup_{|h|\leq 1} \|Z(h)\|$, $\| \ \|_r$ est une norme pour laquelle l'ensemble des F.A.I. régulières est un espace de Banach. Examinons d'abord le cas des F.A.I. à une seule dimension (et d'un demi-groupe continu S_t de contractions).

Pour tout $t \geq 0$, l'inégalité (3) donne :

$$\|Z_t\| \leq (1+t) \|Z\cdot\|_r$$

Z. désignant une F.A.I. Le terme $\zeta_\mu = \int_0^\infty Z_t \, e^{-\mu t} \, dt$ qui figure dans la proposition 2-1 vérifie donc :

$$\|\zeta_\mu\| \leq \|Z\cdot\|_r \int_0^\infty (1+t) \, e^{-\mu t} \, dt = \|Z\cdot\|_r \ \frac{1+\mu}{\mu^2}$$

Inversement, la représentation :

$$Z_t = \mu^2 \int_0^t S_\tau \ \zeta_\mu \, d\tau - \mu(S_t - I)\zeta_\mu$$

entraine

$$\|Z_t\| \leq (\mu^2 t + 2\mu) \ \|\zeta_\mu\|$$

d'où :

$$\|Z\cdot\|_r \leq (\mu^2 + 2\mu) \ \|\zeta_\mu\|$$

Autrement dit, pour chaque $\mu > 0$, $\|\zeta_\mu\|$ définit sur l'espace des F.A.I. régulières une norme équivalente à $\|Z.\|_r$. En particulier, si $Z_n(.)$ est une suite de F.A.I. régulières et $\zeta_n(.)$ leurs transformées de Laplace, la suite $Z_n(.)$ converge pour $\| \ \|_r$, c'est-à-dire uniformément sur tout intervalle fini (ou, ce qui revient au même, sur un intervalle fini contenant 0).si et seulement si la suite $\zeta_n(.)$ converge simplement vers une limite $\zeta(.)$ (ou, ce qui revient au même, s'il existe un $\mu > 0$ tel que la suite $\zeta_n(\mu)$ soit convergente). $\zeta(.)$ est alors la transformée de Laplace de la F.A.I. limite.

2-4 - Généralisation.

La démonstration des propositions 2-1 et 2-2 utilise les propriétés de la résolvante R_μ. Il est intéressant de reprendre cette démonstration dans un cadre un peu plus général. Posons d'abord un lemme.

Lemme 2-4 - Z_h désignant une F.A.I. sur $\mathbb{R}^n$ (ou sur $\mathbb{R}$) pour le groupe (demi-groupe) continu d'opérateurs unitaires (contractants) U_h , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1/ Z_h admet un gradient X.

2/ Z_h est dans le domaine $\mathcal{D}_A$ du générateur A de U_h, et $\|AZ_h\|$ est borné.

3/ Il existe une constante C telle que $\|Z_h\| \leq C\ |h|$.

Compte tenu de la relation (2-2), on voit facilement qu'il suffit de traiter le cas à une dimension. U_h désigne donc dans ce qui suit un demi-groupe continu à un paramètre d'opérateurs contractants.

1/ $\Rightarrow$ 2/ : Si 1/ est vrai, on a $Z_h = \int_0^h U_t X\, dt$, d'où $Z_h \in \mathcal{D}_A$ et $A\, Z_h = (U_t - I)X$, puis $\|A\, Z_h\| \leq 2\, \|X\|$.

2/ $\Rightarrow$ 1/ - $\|A\, Z_h\|$ étant bornée, la F.A.I. $A\, Z_h$ est de la forme $A\, Z_h = (U_h - I)X$ (Prop. 1-3-1), et on peut supposer $EX = 0$. Posons $Y_h = \int_0^h U_t X\, dt$. Cette F.A.I. vérifie $E\, Y_h = 0$ et $A\, Z_h = A\, Y_h$, d'où $Z_h = E\, Z_h + Y_h$. Comme Z_h et Y_h sont dans $\mathcal{D}_A$, on a aussi $E\, Z_h \in \mathcal{D}_A$, donc $E\, Z_h = h\, E\, Z_1$, puis $Z_h = \int_0^h U_t (X + E\, Z_1)dt$.

1/ $\Rightarrow$ 3/, car $Z_h = \int_0^h U_t X\, dt$ donne $\|Z_h\| \leq h\, \|X\|$. Inversement, supposons $\|Z_h\| \leq C|h|$ et montrons que 2/ est vrai. Soit $h_n \downarrow 0$ une suite telle que $\frac{1}{h_n} Z_{h_n}$ converge faiblement vers une limite X_o. L'égalité :

$$\frac{U_t\, Z_{h_n} - Z_{h_n}}{h_n} = \frac{U_{h_n}\, Z_t - Z_t}{h_n}$$

montre que pour tout $t > 0$, $\frac{U_{h_n} - I}{h_n} Z_t$ converge faiblement vers $(U_t - I)X_o$. Pour $Y \in \mathcal{D}_{A^*}$, on a alors :

$$< (U_t - I)X_o, Y > = \lim < Z_t\, , \frac{U^*_{h_n} - I}{h_n} Y > = < Z_t\, , A^* Y >$$

Donc $Z_t \in \mathcal{D}_{A^{**}} = \mathcal{D}_A$ et $A\, Z_t = (U_t - I)X_o$. Par suite 2/ est vérifié.

Ceci étant, soit $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ une fonction suffisamment régulière et à décroissance suffisamment rapide à l'infini pour que l'on ait :

$$\int |f(x)|\, |x|\, dx < \infty \quad , \quad \int f(x)dx = 1 \quad , \quad \int |f(x)|\, dx < \infty$$

et $\int |x|\, |\text{grad } f(x)|\, dx < \infty$, $\forall\, X \in H$, $\int f(x)\, U_x X\, dx \in \mathcal{D}_A$

Par exemple, on peut prendre pour f la densité d'une loi de Gauss. Soit alors Z_h une F.A.I. régulière. Posons :

$$Y_h = \int f(x)\ U_x\ Z_h\ dx$$

Cette F.A.I. Y_h vérifie $Y_h \in \mathcal{D}_A$, et $A\ Y_h = -\int \text{grad}\ f(x)\ U_x\ Z_h\ dx$ est bornée en norme. D'après le lemme, donc, Y_h admet un gradient. Calculons alors l'expression :

$$Y_h - Z_h = \int f(x)\ (U_x - I) Z_h\ dx = \int f(x)\ (U_h - I) Z_x\ dx$$

Cette F.A.I. est bornée en norme, car :

$$\|Y_h - Z_h\| \leq 2 \int f(x)\ \|\ Z_x\| dx < \infty$$

Donc, il existe $\zeta \in H$ tel que $Y_h - Z_h = (U_h - I)\zeta$, et l'on a :

$$Z_h = Y_h - (U_h - I)\zeta$$

comme dans la proposition 2-2. En particulier, Z_h est intégrable, et on a :

$$(U_h - I)\zeta = Y_h - Z_h = \int f(x)(U_h - I)\ Z_x\ dx = (U_h - I) \int f(x)\ Z_x\ dx$$

Si l'on convient de prendre $E\ \zeta = \int f(x)\ E\ Z_x\ dx$, il en résulte :

$$\zeta = \int f(x)\ Z_x\ dx$$

2-5 - Diffusion d'une F.A.I. régulière.

Soit f_t la densité du noyau de convolution associé au

mouvement brownien de $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{C}{2} \Delta f_t$$

Pour $X \in H$, posons :

$$S_t X = \int f_t(x) \; U_x X \, dx \qquad (t > 0)$$

On obtient un demi-groupe continu de contractions S_t, $t > 0$, dont le générateur est l'opérateur $-\frac{C}{2} A^* A$ (opérateur laplacien).

Soit maintenant Z_x une F.A.I. régulière. Pour chaque $t > 0$, d'après ce qui précède, on peut poser :

$$\begin{cases} \zeta_t = \int f_t(x) \; Z_x \, dx \\ Y_t(x) = \int f_t(y) \; U_y \; Z(x) \, dy = S_t \; Z_x \end{cases}$$

et on a :

$$Z_x = Y_t(x) - (U_x - I)\zeta_t$$

c'est-à-dire :

$$(S_t - I) Z_x = (U_x - I)\zeta_t$$

On en déduit que ζ_t est une F.A.I. pour le demi-groupe S_t, d'ailleurs sans dérive (en effet, S_t et U_x ont mêmes invariants, et $E(\zeta_t) = \int f_t(x) \; E \; Z_x \, dx = 0$).

Posons maintenant :

$$Z(t,x) = \int f_t(x-y) \; Z_y \, dy = \int f_t(y) \; Z_{x+y} \, dy$$

D'après la relation $Z_{x+y} = U_x \; Z_y + Z_x = U_y \; Z_x + Z_y$, on trouve

$$Z_t(x) = U_x\ \zeta_t + Z_x = S_t\ Z_x + \zeta_t$$

Ainsi, si nous munissons l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ du demi-groupe $V_{t,x} = S_t\ U_x = U_x\ S_t$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$), nous voyons que $Z_t(x)$ est une F.A.I. sur cet espace. Ainsi, <u>la diffusion</u> d'une F.A.I. de $\mathbb{R}^n$ engendre une F.A.I. sur l'espace-temps $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

<u>Propriétés ergodiques de $Z(x,t)$</u> - D'après un théorème ergodique général, pour tout $x \in H$, $S_t X$ converge fortement vers EX lorsque t tend vers l'infini. La relation $(S_t - I)Z_x = (U_x - I)\zeta_t$ montre donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(I-U_x)\zeta_t$ converge fortement vers $Z_x - E\ Z_x$ lorsque $t \to \infty$. En fait, cette convergence est même uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^n$. Pour le voir, on peut se limiter au cas d'une F.A.I. sans dérive ($E\ Z_x = 1$), et supposer $n = 1$ (le cas général s'en déduit sans peine). Soit donc Z_x, $x \in R$ une F.A.I. régulière à une dimension. Il existe donc un $X \in H$ tel que $EX = 0$ et que :

$$Z_x = \int_0^x U_\xi\ X\ d\xi - (U_\xi - I)X$$

Par suite :

$$\|S_t\ Z_x\| \leq |x|\ \|S_t X\| + 2\ \|S_t X\|$$

Comme $\|S_t X\| \to 0$, la convergence $\|S_t\ Z_x\| \to 0$ est bien uniforme sur $|x| < C^{ste}$.

Inversement, soit ζ_t une F.A.I. régulière et sans dérive telle que $\|(U_x - I)\zeta_t\|$ admette sur $|x| \leq 1$ une borne B indépendante de t :

(a) $$\sup_{|x| \leq 1} \|(U_x - I)\zeta_t\| \leq B < \infty$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ donné, la F.A.I. $(U_x - I)\zeta_t$ est bornée en norme. Il existe donc un élément Z_x unique tel que $E\, Z_x = 0$ et que pour tout $t \geq 0$:

(b) $$(S_t - I) Z_x = (U_x - I)\zeta_t$$

Z_x constitue manifestement une F.A.I. sur $\mathbb{R}^n$, et, de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

(c) $$Z_x = - \lim_{t \to \infty} (U_x - I)\zeta_t$$

L'inégalité (a) passe à la limite et donne $\sup_{|x| \leq 1} \|Z_x\| \leq B$. Donc Z_x est une F.A.I. régulière. Si l'on pose alors $\zeta'_t = \int f_t(x) Z_x \, dx$, on obtient $(S_t - I) Z_x = (U_x - I)\zeta'_t$. En comparant à b/ , et compte tenu de $E\, \zeta_t = E\, \zeta'_t = 0$, on en déduit $\zeta'_t = \zeta_t$. D'après la première partie de la démonstration, il en résulte que la convergence (c) est uniforme sur tout compact.

Enonçons ces résultats :

<u>Proposition 2-5-1</u> - Les relations :

$$\zeta_t = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) Z_x \, dx \quad ; \quad Z_x = \lim_{t \to \infty} (I - U_x)\zeta_t$$

établissent une correspondance biunivoque entre les F.A.I. régulières et sans dérive sur $(\mathbb{R}^n\ U_x)$ et les F.A.I. ζ_t sur $(\mathbb{R}_+ , S_t)$ régulières sans dérive vérifiant de plus la condition :

$$\sup \{ \|(I - U_x)\zeta_t\| , \ t \geq 0 , \ |x| \leq 1 \} < \infty$$

De plus, la convergence de $(I - U_x)\zeta_t$ vers Z_x est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

On peut renforcer ce théorème d'unicité. Soit Z_x une F.A.I. régulière et sans dérive sur $\mathbb{R}^n$ et t_o un réel positif donné. Posons :

$$\zeta_o = \int Z_x \, f_{t_o}(x) \, dx$$

La donnée du seul élément ζ_o suffit à déterminer la F.A.I. Z_x. En effet, on a $\zeta_{t_o} = \zeta_o$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(S_{n_{t_o}} - I) Z_x = (U_x - I) \zeta_{n_{t_o}} = (U_x - I) \sum_o^{n-1} S_{kt_o} \zeta_o$$

D'après la proposition ci-dessus, on trouve :

$$Z_x = \lim_{n \to \infty} (I - U_x) \sum_o^{n-1} S_{kt_o} \zeta_o$$

et, de plus, cette limite est uniforme pour $|x| < 1$.

Inversement, soit ζ_o un élément de H tel que les $\zeta_{n_{t_o}} = \sum_o^{n-1} S_{kt_o} \zeta_o$ vérifient $\operatorname{Sup} \|(U_x - I)\zeta_{n_{t_o}}\| \leq B < \infty$ uniformément en $n > 0$ et $|x| \leq 1$. L'équation $(S_{t_o} - I) Z_x = (U_x - I)\zeta_o$ admet une solution Z_x , et on trouve sans peine $(S_{n_{t_o}} - I) Z_x = (U_x - I)\zeta_{n_{t_o}}$, puis $Z_x = \lim_{t \to \infty} (I - U_x)\zeta_{n_{t_o}}$ et $\operatorname{Sup}_{|x|<1} \|Z_x\| \leq B$. Donc Z_x est une F.A.I. régulière, et on vérifie de plus $\zeta_o = \int f_{t_o}(x) \, Z_x \, dx$. Ainsi :

<u>Proposition 2-5-2</u> - Pour $t_o > 0$ donné, les relations :

$$\zeta_o = \int_{\mathbb{R}^n} f_{t_o}(x) Z_x \, dx \quad ; \quad Z_x = \lim_{n \to \infty} (I - U_x) \sum_o^{n-1} S_{kt_o} \zeta_o$$

définissent une correspondance biunivoque entre les F.A.I. régulières et sans dérive sur $\mathbb{R}^n$ et les éléments $\zeta_o \in H$ tels que

$E\,\zeta_o = 0$ et que $\|(I-U_x)\sum_o^{n-1} S_{kt_o}\,\zeta_o\|$ soit borné uniformément en n et en $|x| < 1$.

En général, ζ_t lui-même n'admet pas de limite pour $t \to \infty$. La relation $(U_x-I)\zeta_t = (S_t-I)Z_x$ montre que $\zeta_t = (S_t-I)X$ entraine $\zeta_t \to -X$ et $Z_x = (U_x-I)X$. Inversement, pour $Z_x = (U_x-I)X$, on trouve $\zeta_t = (S_t-I)X$ et $\zeta_t \to -X$. Enfin, si $\zeta_t \to -X$, on obtient à nouveau $Z_x = (U_x-I)X$.

Ainsi, pour tout $X \in H$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a/ $\zeta_t \to -X$.

b/ $\zeta_t = (S_t-I)X$.

c/ $Z_x = (U_x-I)X$.

Lorsque les conditions sont vérifiées, la F.A.I. $Z(x,t)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ est de la forme :

$$Z(x,t) = (S_t\,U_x-I)X$$

3 - COMPLEMENTS DE TYPE ERGODIQUE

3-1 - Résultats relatifs à la résolvante d'un demi-groupe.

S_t désigne un demi-groupe continu à un paramètre de contractions sur H, R_μ sa résolvante et E le projecteur du sous-espace des éléments invariants pour S_t . On sait que, pour tout $X \in H$, $\mu R_\mu X$ converge fortement vers X si $\mu \to \infty$. De même :

Proposition 3-1-1 - Pour tout $X \in H$, $\mu R_\mu X$ converge fortement vers EX pour $\mu \to 0$.

Le théorème est vrai pour X = EX, et il suffit de l'établir dans le cas EX = 0.

a/ Supposons d'abord X = AY pour un $Y \in H$. On a alors

$$\mu R_\mu X = \mu R_\mu AY = \mu (\mu R_\mu - I)Y$$

d'où $\|\mu R_\mu X\| \leq 2 \mu \|Y\|$ et $\mu R_\mu X \to 0$.

b/ Soit X quelconque tel que EX = 0. Somme $A(\mathcal{D}_A)$ est dense dans l'orthogonal de E(H), on peut trouver une suite Y_n telle que $A Y_n \to X$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, choisissons n tel que $\|X - AY_n\| \leq \varepsilon/2$. De

$$\mu R_\mu X = \mu R_\mu (X - A Y_n) + \mu R_\mu A Y_n$$

résulte alors

$$\|\mu R_\mu X\| \leq \|X - A Y_n\| + 2 \mu \|Y_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \mu \cdot \|Y_n\|$$

Pour μ assez petit, il en résulte $\|\mu R_\mu X\| \leq \varepsilon$.

Proposition 3-1-2 - Pour $\mu > 0$ donné et $X \in H$, $\mu^n R_\mu^n X$ converge fortement vers EX lorsque n tend vers l'infini.

On a $\mu^n R_\mu^n X = \int_0^\infty \frac{\mu^n}{n!} t^{n-1} e^{-\mu t} S_t X \, dt$. Si $X = EX$, le théorème est vrai. Supposons donc $EX = 0$ et montrons $\mu^n R_\mu^n X \to 0$.

a/ Supposons d'abord X de la forme $X = AY$. On trouve :

$$\mu^n R_\mu^n AY = \mu^n R_\mu^{n-1} (\mu R_\mu - I)Y$$

Soit $\mu^n R^{n-1} Y = \mu^{n+1} R^n Y - \mu^n R^n AY$, les deux éléments figurant au second membre étant orthogonaux. Donc :

$$\mu^{2n}\|R^{n-1} Y\|^2 = \mu^{2(n-1)}\|R^n Y\|^2 + \mu^{2n}\|R^n AY\|^2$$

En particulier, la suite $\mu^{n+1}\|R^n Y\|$ décroit vers une limite γ, et $\mu^n\|R^n AY\| = \|\mu^n R^n X\|$ converge vers $\gamma - \gamma = 0$.

b/ Si $X \in H$ vérifie $EX = 0$, on prendra une suite Y_k telle que $A Y_k \to X$, et on achèvera la démonstration comme pour la Proposition 3-1-1.

Corollaire - Pour tout $X \in H$, on a au sens fort $X - EX =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A R_\mu (\mu^n R_\mu^n) X .$$

3-2 - Généralisation.

Soit maintenant U_x un groupe continu d'opérateurs unitaires sur H, $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $F(dx)$ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, F_k le produit de convolution de k facteurs égaux à F. On suppose que F n'est pas arithmétique, en ce sens que cette loi n'est pas

concentrée sur un ensemble de points de la forme $x = (k_1 a_1, \ldots, k_n a_n)$, $k_1, \ldots k_n$ entiers, $a = (a_1, \ldots a_n)$ vecteur fixe de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout $x \in H$, posons alors

$$SX = \int F(dx)\ U_x X$$

Cet opérateur S vérifie $\|S\| \leq 1$. On note aussi que $SX = X$ équivaut à $X = EX$, autrement dit <u>E est le projecteur du sous-espace des éléments invariants pour S</u>. Pour le voir, on note que $SX = X$ entraine :

$$\|X\|^2 = < X,\ SX > = \int F(dx) < U_x X,\ X >$$

Quitte à remplacer X par $X + C\ \|X\|$, $C \in E(H)$, on peut toujours supposer $< U_x X,\ X > \geq 0$, et la relation

$$\int F(dx)\ (\|X\|^2 - < U_x X,\ X >) = 0$$

entraine $\|X\|^2 = < U_x X,\ X >$ sur le support de F, donc $X = U_x X$ sur ce support. Comme F n'est pas arithmétique, on déduit facilement du lemme 1-2 que l'on a $X = EX$. Inversement, $X = EX$ entraine $X = SX$.

Si F_n désigne la n puissance convolutive de F, on a :

$$S^n X = \int F_n(dx)\ U_x X$$

Montrons que <u>$S^n X$ converge fortement</u> vers EX pour $n \to \infty$.

En effet, la suite $\|S^n X\|^2$ converge en décroissant vers une limite α. Supposons d'abord la loi F symétrique. S est alors hermitien, $(S = S^*)$, et on a, pour n et m entiers ≥ 0

$$< S^{2n}X \ , \ S^{2m}X > = \|S^{n+m}X\|^2$$

D'après le critère de Cauchy, donc, la suite $S^{2n}X$ converge fortement vers une limite X_o invariante pour SS. Cet opérateur est associé à la loi $F * F$ non arithmétique, donc $X_o = EX_o$ et par suite $X_o = EX$. La suite $S^{2n+1}X$ converge alors vers $SX_o = EX$, donc la suite S^nX admet elle-même cette limite.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où F n'est pas symétrique, et considérons la relation :

$$< S^nX, \ S^{n+m}X > = < (S * S)^nX, \ S^mX >$$

Si $n \to \infty$, $(S * S)^nX$ converge fortement vers EX (car $S * S$ est associé à la loi symétrique $F * F$). Comme $\|S^mX\| \leq \|X\|$, on peut trouver une suite partielle m_k telle que $S^{m_k}X$ converge faiblement vers une limite Y. On trouve alors

$$\lim_{n,m_k} < S^nX, \ S^{n+m_k}X > \ = \ < EX, \ Y > \ = \ < EX, \ EY >$$

Mais $EY = \lim E \, S^{m_k}X = EX$. La limite ci-dessus est donc $\|EX\|^2$ quelle que soit la suite partielle m_k . Par suite

$$\lim_{n,m} < S^nX, \ S^{n+m}X > \ = \ \|EX\|^2$$

et le critère de Cauchy est vérifié. Donc $S^nX \to EX$.

De la même manière, si F_t est un demi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^n$ et si l'on pose

$$S_tX = \int F_t(dx) \ U_xX$$

S_tX converge fortement vers EX pour t infini.