Fontainebleau N-271

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 120

QUELQUES ASPECTS DE LA MONTEE

G. MATHERON Janvier 1972

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 120

QUELQUES ASPECTS DE LA MONTEE

Table des Matières

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 120

QUELQUES ASPECTS DE LA MONTEE

L'opération de montée intervient, sous forme directe ou non, dans un grand nombre de problèmes, assez variés en apparence, mais qui présentent en général cette circonstance commune que l'on cherche à reconstituer une propriété définie dans $\mathbb{R}^n$ à partir d'une propriété induite observée dans un sous-espace $\mathbb{R}^{n-k}$. Il s'agit donc de problèmes de nature stéréologique. Outre la montée proprement dite, et l'opération réciproque qui est la descente, il y a lieu d'étudier les opérations transposées, et aussi d'examiner les liens de ces opérations avec les transformations de Fourier et de Hankel. Ceci oblige à préciser les domaines de définition. Au départ, la montée s'introduit de la manière la plus naturelle comme une opération sur les mesures bornées isotropes, qu'il suffit d'ailleurs d'étudier sur les lois de probabilité isotropes : la montée réalise alors le passage aux lois marginales. Sous cette forme, la montée $M_{n,n-k}$ dépend séparément des dimensions n et n-k des espaces de départ et d'arrivée. Si l'on se limite aux lois absolument continues, on déduit de $M_{n,n-k}$ on opérateur M_k agissant sur les densités (qui sont des fonctions isotropes), opérateur dont l'expression explicite ne fait plus intervenir la dimension n, mais seulement l'ordre k de la montée. Comme la transformation de Fourier échange les mesures positives bornées et les fonctions continues de type positif pouvant jouer le rôle de fonctions de covariance, certains résultats déduits de l'étude de la montée donnent des indications sur les conditions moyennant lesquelles une fonction isotrope de type positif dans $\mathbb{R}^{n-k}$ reste de type positif

dans un espace $\mathbb{R}^n$ de dimension supérieure. De ce principe découlent d'intéressants procédés de simulation permettant de construire des réalisations de F.A. dans $\mathbb{R}^3$ par exemple admettant une covariance donnée. Pour terminer, nous donnerons plusieurs exemples d'applications.

1 - LA MONTEE SUR LES LOIS ISOTROPES

Soient n et k deux entiers avec $0 < k < n$, et $P_n(dx)$ une loi de probabilité isotrope dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire invariante par rotation). Nous désignerons par

$$r_n = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

le rayon vecteur dans $\mathbb{R}^n$, et par s_n le point de la sphère unité S_n de $\mathbb{R}^n$ associé à $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ (pour $x_1, \ldots x_n$ non tous nuls). Si $P_n(\{0\}) = 0$, c'est-à-dire si la loi P_n est sans atome à l'origine, la loi P_n est isotrope si et seulement si la V.A. s_n représentant la direction de $(x_1, \ldots x_n)$ est indépendante du rayon vecteur r_n et uniformément distribuée sur la sphère unité S_n. Si donc nous désignons par $G_n(dr)$ <u>la loi du rayon vecteur r_n</u> (mesure positive de somme unité sur $R_+ \setminus \{0\}$) et par $ds/n\,\omega_n$ avec

$$n\,\omega_n = 2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

la loi uniforme sur S_n, nous pouvons écrire :

$$P_n(dx) = G_n(dr) \times \frac{ds}{n\,\omega_n} \tag{1-1}$$

Inversement, à toute loi G_n sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ la formule (1-1) associe une loi P_n isotrope dans $\mathbb{R}^n$ et sans atome à l'origine. D'autre part, si la loi P_n est la mesure de Dirac dans $\mathbb{R}^n$, le rayon vecteur r_n est p.s. nul et sa loi est la mesure de Dirac de $\mathbb{R}_+$. Il y a donc correspondance bijective entre les lois isotropes sur $\mathbb{R}^n$ et les lois G_n sur $\mathbb{R}_+$ des rayons vecteurs associés, et cette correspondance est bicontinue pour

la convergence étroite (il est facile de prolonger cette correspondance à l'espace des mesures bornées isotropes sur $\mathbb{R}^n$ et celui des mesures bornées sur $\mathbb{R}^+$. Elle est alors bijective et bicontinue pour les normes $|\mu|$ et $\int_0^\infty |G|$).

Compte tenu de l'isotropie de P_n, <u>la loi marginale</u> définie comme la projection de P_n sur un sous-espace à n-k dimensions ne dépend pas du choix de ce sous-espace, et peut être identifiée à une loi P_{n-k} isotrope sur R^{n-k} (P_{n-k} est par exemple la loi de la V.A. vectorielle constituée des n-k premières coordonnées $x_1, \ldots x_{n-k}$). Nous dirons que P_{n-k} se déduit de P_n par montée d'ordre k, et nous définirons l'opérateur $\overline{M}_{n,n-k}$ (où l'indice n représente la dimension de l'espace de départ et $n-k < n$ celle de l'espace d'arrivée) par la formule :

$$P_{n-k} = \overline{M}_{n,n-k}\, P_n$$

Si P_n présente un atome $P_n(\{0\})$ à l'origine, P_{n-k} présente le même atome en 0, soit $P_{n-k}(\{0\}) = P_n(\{0\})$. Autrement dit, la mesure de Dirac est invariante par montée. Cette remarque montre que l'on peut se limiter à l'étude des lois sans atomes en 0.

<u>Montée sur la loi radiale.</u>

A la loi P_{n-k} est associée la loi G_{n-k} du rayon vecteur r_{n-k}, selon la relation (1-1) complétée par la règle relative aux atomes. Cette correspondance étant bijective, l'étude de $\overline{M}_{n,n-k}$ équivaut à celle de l'opérateur $M_{n,n-k}$ défini par :

$$G_{n-k} = M_{n,n-k}\, G_n$$

qui applique dans lui-même l'espace $\mathcal{M}(R_+)$ des mesures bornées sur $\mathbb{R}_+$ (et laisse invariante la mesure de Dirac).

La loi P_{n-k} isotrope dans $\mathbb{R}^{n-k}$ est, par exemple, la loi de la projection $(x_1,\ldots x_{n-k}, 0,\ldots 0)$ du point $(x_1,\ldots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sur le sous-espace engendrée par les n-k premiers axes de coordonnées. Entre rayons vecteurs, on a donc $r_{n-k} = v\, r_n$ (et $r_{n-k} = 0$ si $r_n = 0$), v désignant la projection sur le même sous-espace du vecteur unitaire $s_n \in S_n$ du point $(x_1,\ldots x_n)$. Or s_n est une V.A. indépendante de r_n et uniformément distribuée sur S_n. La V.A. v est donc distribuée sur (0,1) avec la densité :

$$(1\text{-}2)\quad \begin{cases} B_{n,n-k}(v) = A_{n,n-k}\; v^{n-k-1}(1-v^2)^{\frac{k}{2}-1} & (0 \le v \le 1) \\ A_{n,n-k} = \dfrac{k\,\omega_k(n-k)\;\omega_{n-k}}{n\;\omega_n} \end{cases}$$

Ainsi, la montée sur la loi G_n du rayon vecteur se symbolise par l'équivalence en loi :

$$(1\text{-}2')\qquad r_{n-k} \equiv v\, r_n$$

où v et r_n sont deux V.A. indépendantes admettant respectivement les lois $B_{n,n-k}$ et G_n. Si nous désignons par $1 - G_n(r)$ et $1 - G_{n-k}(r)$ respectivement les probabilités de $\{r_n > r\}$ et $\{r_{n-k} > r\}$, on en déduit les expressions explicites suivantes de la montée :

$$1 - G_{n-k}(r) = \int_r^\infty G_n(du) \int_{r/u}^1 B_{n,n-k}(v)\, dv$$

$$= \int_0^1 B_{n,n-k}(v)\, [1 - G_n(\tfrac{r}{v})]\, dv$$

La première relation s'explicite ainsi :

$$(1\text{-}3) \qquad 1 - G_{n-k}(r) = A_{n,n-k} \int_r^\infty G_n(du) \int_{r/u}^1 u^{n-k-1} \, (1-u^2)^{\frac{k}{2}-1} du$$

et la seconde (en posant $u = r/v$) :

$$(1\text{-}4) \qquad 1 - G_{n-k}(r) = A_{n,n-k} \, r^{n-k} \int_r^\infty \frac{1-G_n(u)}{u^n} \, (u^2 - r^2)^{\frac{k}{2}-1} \, u \, du$$

En comparant la relation (1-4) avec l'expression (1-8) ci-dessous de la montée M_k sur <u>les fonctions</u>, on voit que la fonction $(1 - G_{n-k})/r^{n-k}$ coïncide à un facteur près avec la montée d'ordre k de la fonction $(1 - G_n)/r^n$. Compte tenu de l'expression (1-2) de la constante $A_{n,n-k}$, on trouve exactement :

$$(1\text{-}5) \qquad \frac{1}{(n-k)\,\omega_{n-k}} \, \frac{1 - G_{n-k}(r)}{r^{n-k}} = \frac{1}{n\,\omega_n} \, M_k \, \frac{1 - G_n(r)}{r^n}$$

Ainsi, la montée sur la <u>loi</u> G_n se ramène à une montée sur <u>la fonction</u> $(1 - G_n)/r^n$.

En l'absence d'atome à l'origine (et on a vu que l'on pouvait toujours se ramener à ce cas) la loi montée G_{n-k} est toujours absolument continue pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ (et <u>admet une densité</u> g_{n-k} définie presque partout sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$(1\text{-}6) \qquad g_{n-k}(r) = A_{n,k} \, r^{n-k-1} \int_r^\infty G_n(du) \, u^{2-n} \, (u^2 - r^2)^{\frac{k}{2}-1}$$

(on suppose naturellement $0 < k < n$). Celà résulte du calcul suivant, qui fait apparaître l'expression (1-3) : pour $r > 0$, on trouve :

$$\int_r^\infty g_{n-k}(r)\,dr = A_{n,k} \int_r^\infty \rho^{n-k-1}\,d\rho \int_\rho^\infty u^{2-n}\,(u^2-\rho^2)^{\frac{k}{2}-1}\,G_n(du) =$$

$$= A_{n,k} \int_r^\infty u^{2-n}\,G_n(du) \int_r^u \rho^{n-k-1}\,(u^2-\rho^2)^{\frac{k}{2}-1}\,d\rho =$$

$$= A_{n,k} \int_r^\infty G_n(du) \int_{r/u}^1 v^{n-k-1}\,(1-v^2)^{\frac{k}{2}-1}\,dv = 1 - G_{n-k}(r)$$

Montée sur les fonctions.

En particulier, si la loi P_n admet une densité, qui est nécessairement une fonction isotrope de la forme $f_n\,(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$, il en est de même de la loi du rayon vecteur G_n, dont la densité g_n est alors (d'après (1-1) et la relation $dx = r^{n-1}\,dr \times ds$) :

$$(1\text{-}7) \qquad g_n(r) = n\,\omega_n\,r^{n-1}\,f_n(r)$$

Comme la loi G_{n-k} admet la densité g_{n-k} définie par (1-6), on voit que la loi marginale P_{n-k} admet elle aussi une densité isotrope f_{n-k}, définie par

$$f_{n-k}(r) = \frac{1}{(n-k)\,\omega_{n-k}}\,\frac{g_n(r)}{r^{n-k-1}}$$

Compte tenu de (1-6) et de (1-7), on voit alors que f_n et f_{n-k} sont liées par la relation intégrale suivante :

$$(1\text{-}8) \qquad f_{n-k}(r) = k\,\omega_k \int_r^\infty f_n(u)\,(u^2-r^2)^{\frac{k}{2}-1}\,u\,du$$

Ainsi, il existe un opérateur M_k (indépendant de la dimension n de l'espace de départ) agissant sur un espace de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et tel que l'on ait

$$(1\text{-}8') \qquad f_{n-k} = M_k\, f_n$$

Nous dirons que cet opérateur intégral M_k constitue la montée d'ordre k sur les fonctions. Son domaine de définition $\mathcal{D}_{M_k}$ est clairement l'espace des fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\int_0^\infty r^k |f(r)|\, dr < \infty$. Sa restriction à $\mathcal{D}_{M_{n-1}}$ exprime le résultat de la montée $M_{n,n-k}$ en termes de densité de probabilité.

2 - POINT DE VUE DE L'ANALYSE HARMONIQUE

Dans ce qui suit, nous désignerons par $\mathcal{F}_n$ la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^n$. Si P_n est une loi isotrope dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_n\, P_n$ est une fonction continue de type positif isotrope dans $\mathbb{R}^n$, donc de la forme $\gamma_n(\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2})$ pour une fonction γ_n sur $\mathbb{R}^+$.

Cette fonction γ_n s'explicite comme suit à l'aide de la loi G_n du rayon vecteur :

$$(2\text{-}1) \qquad \gamma_n(\rho) = 2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\tfrac{n}{2}) \int_0^\infty (2\,\pi\,\rho\, r)^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(2\,\pi\,\rho\, r)\, G_n(dr)$$

Nous dirons que $\gamma_n(\rho)$ est la transformée de Hankel d'ordre n de la mesure G_n sur $\mathbb{R}_+$, et nous écrirons :

$$\gamma_n = \mathcal{H}_n\, G_n$$

Par abus de langage, nous écrirons souvent aussi $\gamma_n = \mathfrak{F}_n P_n$, bien que ce soit $\gamma_n(\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2})$ à strictement parler la transformée de Fourier de P_n. Si la loi isotrope P_n admet une <u>densité</u> $f_n(r) = f_n(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$, on a $G_n(dr) = n\,\omega_n\, r^{n-1}\, f_n(r)$, et (2-1) se réécrit comme suit :

$$(2\text{-}2) \qquad \gamma_n(\rho) = 2\,\pi\,\rho^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(2\,\pi\,\rho\, r)\, f_n(r)\, dr$$

Nous dirons que la relation (2-2) représente la transformation de Hankel pour <u>les fonctions</u> de $\mathbb{R}_+$. Par abus d'écriture, nous noterons en général :

$$\gamma_n = \mathfrak{F}_n f_n$$

Soit alors $G_{n-k} = M_{n,n-k}\, G_n$ et $\gamma_{n-k} = \mathcal{H}_{n-k}\, G_{n-k}$. Comme $\gamma_{n-k}(\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_{n-k}^2})$ est $\mathfrak{F}_{n-k} P_{n-k}$, donc vérifie $\mathfrak{F}_{n-k} P_{n-k}(u_1, \ldots u_{n-k}) = \mathfrak{F}_n P_n(u_1, \ldots u_{n-k}, 0, \ldots 0)$, on a : $\gamma_{n-k} = \gamma_n$, soit :

$$(2\text{-}3) \qquad \mathcal{H}_{n-k}\, G_{n-k} = \mathcal{H}_n\, G_n$$

Inversement, puisque $\mathcal{H}_{n-k}\, G_{n-k}$ définit G_{n-k}, cette relation est équivalente à $G_{n-k} = M_{n,n-k}\, G_n$.

On déduit aussitôt de (2-3) que la montée est un <u>opérateur injectif et continu pour la convergence étroite</u>. (En fait on peut vérifier que l'extension de la montée à l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}_+$ est injective et aussi continue en norme).

D'après le théorème de Bochner, une fonction continue isotrope sur $\mathbb{R}^n$ est <u>de type positif</u> si et seulement si elle est transformée

de Fourier d'une mesure positive bornée. Si une fonction est de type positif dans $\mathbb{R}^n$, sa restriction à un sous-espace $\mathbb{R}^{n-k}$ est de type positif dans $\mathbb{R}^{n-k}$. Mais, inversement, si l'on se donne une fonction γ sur $\mathbb{R}^+$ et si $\gamma(\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_{n-k}^2})$ est de type positif dans $\mathbb{R}^{n-k}$, il n'en résulte pas en général que $\gamma(\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2})$ soit de type positif dans $\mathbb{R}^n$.

Cherchons donc <u>à quelle condition une fonction isotrope $\gamma(\rho)$ de type ≥ 0 dans $\mathbb{R}^{n-k}$ est encore de type positif dans $\mathbb{R}^n$</u> .

Soit G_{n-k} la mesure positive sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\gamma = \mathcal{H}_{n-k}\, G_{n-k}$. D'après le théorème de Bochner, γ sera encore de type positif dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe une mesure positive bornée G_n telle que $\gamma = \mathcal{H}_n\, G_n$, donc, d'après (2-3) si et seulement si l'équation :

$$G_{n-k} = M_{n,n-k}\, G_n$$

admet une solution G_n qui soit une mesure positive bornée, autrement dit si et seulement si le problème de la descente d'ordre k est soluble pour G_{n-k}.

3 - LA DESCENTE

Cherchons à quelle condition le problème de la descente admet une solution. En examinant la relation (1-6), on voit que le problème est simple lorsque k est un <u>entier pair</u>. Pour la montée d'ordre 2 (et $n > 2$), en particulier, on trouve :

$$(3\text{-}1) \qquad g_{n-2} = \frac{(n-2)\ r^{n-3}}{} \int_r^\infty \frac{G_n(du)}{u^{n-2}}$$

Ainsi, la condition suivante est nécessaire pour que le problème de la descente soit soluble et admette comme solution une mesure positive: La mesure G_{n-2} doit admettre une densité g_{n-2} telle que $g_{n-2}(r)/r^{n-3}$ soit non croissante sur $R_+\setminus\{0\}$. Cette condition est d'ailleurs suffisante. En effet, si elle est vérifiée, on peut définir une mesure G_n sur $R_+\setminus\{0\}$ en posant :

$$G_n(dr) = -\ (n-2)\ r^{n-2}\ d\left(\frac{g_{n-2}(r)}{r^{n-3}}\right) \qquad (r > 0)$$

Cette mesure est ≥ 0, et il suffit de vérifier que sa somme est bornée. Mais celà résulte de :

$$1 = \int_0^\infty g_{n-2}(r)\ dr = (n-2) \int_0^\infty r^{n-3}\ dr \int_r^\infty \frac{G_n(du)}{u^{n-2}} =$$

$$= (n-2) \int_0^\infty \frac{G_n(du)}{u^{n-2}} \int_0^u r^{n-3} = \int_0^\infty G_n(du)$$

D'après la relation (évidente si l'on se reporte aux définitions)

$$M_{n-k,n-k'}\ M_{n,n-k} = M_{n,n-k'} \qquad (0 < n-k' < n-k < n)$$

on voit qu'il est facile de traiter le cas k=1 pourvu que $n > 2$. De $M_{n,n-2} = M_{n-1,n-2}\ M_{n,n-1}$ résulte que $G_{n-1} = M_{n,n-1}\ G_n$ entraîne $G_{n-2} = M_{n,n-2}\ G_n$ avec $G_{n-2} = M_{n-1,n-2}\ G_{n-1}$. Donc, si G_n existe, G_{n-2} doit vérifier la condition relative à la descente d'ordre deux. Inversement, si $G_{n-2} = M_{n-1,n-2}\ G_{n-1}$ vérifie cette condition, il existe une mesure ≥ 0 bornée G_n vérifiant $G_{n-2} = M_{n,n-2}\ G_n$, donc

$M_{n-1,n-2}\, G_{n-1} = M_{n-1,n-2}\, M_{n,n-1}\, G_n$ et, puisque la montée est injective, $G_{n-1} = M_{n,n-1}\, G_n$.

Ainsi, pour $n > 2$, G_{n-1} étant une mesure ≥ 0 bornée sur $\mathbb{R}_+$, pour qu'il existe une mesure ≥ 0 bornée G_n vérifiant :

$$G_{n-1} = M_{n,n-1}\, G_n$$

il faut et il suffit qu'en posant

$$(3\text{-}2) \qquad g_{n-2}(r) = A_{n-1,1}\, r^{n-2} \int_r^\infty G_{n-1}(du)\, u^{2-n}\, (u^2 - r^2)^{-1/2}$$

la fonction $g_{n-2}(r)/r^{n-2}$ soit non croissante sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. On a alors $G_n(dr) = -\,(n-2)\, r^{n-2}\, d(g_{n-2}\,(r)/r^{n-2})$

Dans le cas $n=2$, le critère précédent est en défaut, puisque $M_{2,0}$ n'est pas défini, et il faut procéder à un examen direct.

Soit donc G_1 une mesure ≥ 0 de somme unité sur $\mathbb{R}_+$, et cherchons à quelle condition il existe une mesure G_2 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$G_1 = M_{2,1}\, G_2$$

On peut se limiter au cas où G_1 est sans atome à l'origine. D'après (1-6), G_1 doit admettre une densité g_1 vérifiant presque partout sur $\mathbb{R}^+$

$$(3\text{-}3) \qquad g_1(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^\infty \frac{G_2(du)}{\sqrt{u^2-r^2}}$$

Effectuons alors sur cette fonction g_1 l'opération (1-8) avec k=1 (les intégrales existent, finies ou non, puisqu'il s'agit de fonctions positives). On trouve :

$$\int_r^\infty g_1(\rho) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}} = \frac{2}{\pi} \int_r^\infty G_2(du) \int_r^u \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2-r^2)(u^2-\rho^2)}}$$

De :

$$\int_r^u \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2-r^2)(u^2-\rho^2)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2}$$

résulte alors :

$$(3\text{-}4) \qquad \int_r^\infty G_2(du) = \int_r^\infty g_1(\rho) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}$$

Cette relation entraîne en particulier $\int_0^\infty G_2(du) = 1$. Inversement, si la fonction définie par

$$\int_r^\infty g_1(\rho) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}$$

est non croissante, il existe une mesure positive G_2 de somme unité vérifiant (3-4). Il reste à vérifier que l'on a bien $G_1 = M_{2,1}\, G_2$, soit, d'après (1-4) :

$$(3\text{-}5) \qquad 1 - G_1(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^\infty \frac{1- G_2(u)}{u} \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}$$

Evaluons donc le second membre, en tenant compte de (3-4) :

$$\frac{2\,r}{\pi}\int_r^\infty \frac{1-G_2(u)}{u}\,\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} = \frac{2\,r}{\pi}\int_r^\infty \frac{du}{u\sqrt{u^2-r^2}}\int_u^\infty \frac{g_1(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-u^2}} =$$

$$= \frac{2\,r}{\pi}\int_r^\infty g_1(\rho)\,\rho d\rho \int_r^\rho \frac{du}{u\sqrt{(u^2-r^2)(\rho^2-u^2)}}$$

En effectuant le changement de variables $t = \dfrac{r^2(\rho^2-u^2)}{u^2(\rho^2-r^2)}$, on trouve

$$\int_r^\rho \frac{du}{u\sqrt{(u^2-r^2)(\rho^2-u^2)}} = \frac{1}{2\,\rho r}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{\pi}{2\,\rho r}$$

Il en résulte :

$$\frac{2\,r}{\pi}\int_r^\infty \frac{1-G_2(u)}{u}\,\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} = \int_r^\infty g_1(\rho)\,d\rho = 1 - G_1(r)$$

de sorte que (3-5) est bien vérifiée.

Par conséquent, l'équation $G_1 = M_{2,1}\,G_2$ admet une solution $G_2 \geq 0$ si et seulement si G_1 admet une densité g_1 telle que la fonction $\int_r^\infty g_1(\rho)\,\dfrac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}$ soit non croissante, et la mesure G_2 est alors donnée par (3-4).

4 - LES CLAVIERS INFINIS

Soit $G(dr)$ une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$, et $C(h)$ la fonction de type positif sur $\mathbb{R}$ dont G est la mesure spectrale, soit

$$C(h) = 2\int_0^\infty \cos 2\,\pi\,u\,h\,G(du)$$

En désignant encore par C la restriction de C à $\mathbb{R}^+$, on voit que $C(\rho)$ est la transformée de Hankel $\mathcal{H}_1 G$. D'après ce qui précède, on voit que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - Pour tout entier n positif, il existe une mesure positive G_n sur $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$G = M_{n,1}\, G_n \tag{4-1}$$

2 - $\forall\, n > 0$, la fonction isotrope $C(\rho)$ [ou, plus précisément la fonction $C(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$] est de type positif dans $\mathbb{R}^n$.

Lorsque ces conditions sont remplies, on dit que les mesures positives G_n constituent un <u>clavier infini</u>. Pour $n > m > 1$, on a alors évidemment :

$$G_m = M_{nm}\, G_n$$

Cherchons donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure G engendre un clavier infini. La mesure de Dirac sur $\mathbb{R}_+$, invariante par montée, engendre le clavier $G_n = \delta$. Supposons donc G sans atome à l'origine. D'après (1-6), G et toutes les mesures G_n sont absolument continues. Désignons par g_n leurs densités et par $f_n(r)$ les densités isotropes des lois associées.

$$f_n(r) = \frac{1}{n\,\omega_n}\,\frac{g_n(r)}{r^{n-1}}$$

Ces fonctions f_n vérifient la relation (1-8). Pour k=2, on trouve

$$f_n(r) = 2\pi \int_r^\infty f_{n+2}(u)\, u\, du$$

Par conséquent, ces fonctions f_n sont positives, décroissantes et dérivables, et vérifient :

$$f_{n+2}(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dr} f_n(r)$$

En posant $h_n(x) = f_n(\sqrt{x})$, on trouve $h_{n+2} = -h_n'/\pi$. Ainsi, les dérivées successives de $h(x) = f_1(\sqrt{x})$ présentent des signes constants alternés. Il en résulte que $h(x)$ est la <u>transformée de Laplace</u> d'une mesure μ positive sur $\mathbb{R}_+$:

$$h(x) = \int_0^\infty e^{-xu}\,\mu(du) \qquad (x > 0)$$

donc aussi bien

$$f_1(r) = \frac{1}{2} g_1(r) = \int_0^\infty e^{-ur^2}\,\mu(du)$$

D'autre part, G étant sommable, on peut supposer par exemple $\int_0^\infty G(dr) = 2\int_0^\infty f_1(r)\,dr = 1$, de sorte que la mesure μ vérifie la condition :

$$\int_0^\infty \frac{\mu(du)}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}$$

En changeant les notations, on voit que $f_1(r)$ se met sous la forme :

$$f_1(r) = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2t}}\,\frac{\mu(dt)}{\sqrt{2\pi t}} \tag{4-1}$$

Inversement, supposons que G admette une densité $g_1 = 2 f_1$ de cette forme. On en déduit aussitôt :

$$C(\rho) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}\rho^2}\,\mu(dt) \tag{4-3}$$

et les fonctions f_n si elles existent doivent être de la forme :

$$(4\text{-}4) \qquad f_n(r) = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2t}} \frac{\mu(dt)}{(2\pi t)^{n/2}}$$

à cause des propriétés bien connues de la loi de Gauss. Mais l'intégrale (4-3) existe toujours, sauf peut-être en $r = 0$, à cause de la décroissance rapide pour $t \downarrow 0$ de la fonction $e^{-r^2/2t}$. Autrement dit :

Pour qu'une fonction isotrope $C(\rho)$ de type positif dans $\mathbb{R}$ soit de type positif dans $\mathbb{R}^n$ pour tout entier n, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme (4-3) pour une mesure $\mu \geq 0$ sommable sur $\mathbb{R}_+$. De même, pour qu'une mesure ≥ 0 G sur $\mathbb{R}_+$ engendre un clavier infini sur $\mathbb{R}^+$ il faut et il suffit qu'elle admette une densité g de la forme :

$$g(r) = 2 \int_0^\infty e^{-r^2/2t} \frac{\mu(dt)}{\sqrt{2\pi t}}$$

pour une mesure $\mu \geq 0$ sommable sur $\mathbb{R}_+$. Les mesures G_n admettent alors les densités :

$$g_n(r) = n\,\omega_n\, r^{n-1} \int_0^\infty e^{-r^2/2t} \frac{\mu(dt)}{(2\pi t)^{n/2}}$$

<u>Exemples</u> - $C(\rho) = e^{-a\rho^\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 2)$ est de type positif dans $\mathbb{R}^n$ quel que soit n, les fonctions f_n associées étant les densités des <u>lois stables isotropes</u>. De même, pour $\mu > 0$, la <u>fonction de Bessel</u> $C(\rho) = (b\rho)^\mu K_{-\mu}(b\rho)$ est de type ≥ 0 dans $\mathbb{R}^n$ pour tout n. Celà résulte de la relation de Sonine-Schläffli :

$$(b\rho)^\mu K_{-\mu}(b\rho) = b^{2\mu}\, 2^{-1-\mu} \int_0^\infty \exp\left\{-u\rho^2 - \frac{b^2}{4u}\right\} \frac{du}{u^{\mu+1}}$$

En particulier, l'exponentielle $e^{-b\rho}$ vérifie cette condition.

5 - LA MONTEE TRANSPOSEE

Le montée $M_{n,n-k}$ est une application (continue en norme) de l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même. $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}_+$ dont le dual est l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ nulles à l'infini. L'opérateur transposé $M^*_{n,n-k}$ va donc appliquer $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même. De même, $\overline{M}_{n,n-k}$ applique l'espace des mesures bornées isotropes sur $\mathbb{R}^n$ dans l'espace des mesures bornées isotropes sur $\mathbb{R}^{n-k}$. Le transposé $\overline{M}^*_{n,n-k}$ applique donc l'espace des fonctions continues isotropes nulles à l'infini dans $\mathbb{R}^{n-k}$ dans l'espace fonctionnel analogue construit sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, les relations

$$< P_n \ ,\varphi> = \int_0^\infty G_n(dr)\ \varphi(r) = E[\varphi(r_n)]$$

$$< P_{n-k},\ \varphi > = \int_0^\infty G_{n-k}(dr)\ \varphi(r) = E[\varphi(r_{n-k})]$$

expriment le produit scalaire $< P_n \ ,\varphi >$ comme l'espérance de $\varphi(r_n)$, r_n désignant le rayon vecteur. Compte tenu des relations (1-2) et (1-2') on trouve donc

$$< G_n \ ,\ M^*_{n,n-k}\ \varphi > = < G_{n-k} \ ,\varphi > =$$

$$= \int_0^\infty G_n(dr) \int_0^1 \varphi(vr)\ B_{n,n-k}(v)\ dv$$

Par conséquent, la montée transposée admet l'expression :

$$(5\text{-}1) \qquad M^*_{n,n-k}\,\varphi(r) = A_{n,k} \int_0^1 v^{n-k-1}\,(1-v^2)^{\frac{k}{2}-1}\,\varphi(vr)\,dv$$

Point de vue de l'Analyse Harmonique.

Si $\varphi(r)$ est (en tant que fonction isotrope) de type positif dans $\mathbb{R}^{n-k}$, alors $M^*_{n,n-k}\,\varphi$ est de type positif dans $\mathbb{R}^n$.

En effet, soit $\chi_{n-k}(dr)$ la mesure positive sommable sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'on ait $\varphi = \mathcal{H}_{n-k}\,\chi_{n-k}$, et soit G_n une mesure positive bornée quelconque sur $\mathbb{R}^+$, $\gamma_n = \mathcal{H}_n\,G_n$ sa transformée de Hankel d'ordre n. En appliquant la formule de Parseval, on trouve :

$$< G_n\,,\ M^*_{n,n-k}\,\varphi > = < M_{n,n-k}\,G_n\,,\varphi > = < M_{n,n-k}\,G_n\,,\mathcal{H}_{n-k}\,\chi_{n-k} >$$

$$= < \mathcal{H}_{n-k}\,M_{n,n-k}\,G_n\,,\ \chi_{n-k} >$$

D'après (2-3), on en déduit :

$$< G_n\,,\ M^*_{n,n-k}\,\varphi > = < \mathcal{H}_n\,G_n\,,\ \chi_{n-k} > = < G_n\,,\ \mathcal{H}_n\,\chi_{n-k} >$$

et par suite :

$$(5\text{-}2) \qquad M^*_{n,n-k}\,\varphi = \mathcal{H}_n\,\chi_{n-k}$$

Ainsi la loi du rayon vecteur associée à la mesure spectrale de φ reste invariante dans la montée transposée, et, en particulier, $M^*_{n,n-k}\,\varphi$ est de type positif dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, si la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^{n-k}$ de $\varphi(r)$ est une fonction $\Phi_{n-k}(\rho)$ (c'est-à-dire si la mesure spectrale admet la densité Φ) on a $\chi_{n-k}(d\rho) = (n-k)\,\omega_{n-k}\,\rho^{n-k}\,\Phi_{n-k}(\rho)\,d\rho$. La transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^n$ de

$M^*_{n,n-k}\,\varphi$ est alors la fonction :

$$\Phi_n(\rho) = \frac{(n-k)\ \omega_{n-k}}{n\ \omega_n}\ \frac{\Phi_{n-k}(\rho)}{\rho^k} \tag{5-3}$$

Opération Inverse.

Comme ces résultats servent de point de départ au procédé de simulation connu sous le nom de méthode des bandes tournantes, il est intéressant de chercher à quelle condition l'opération inverse est possible.

φ_n étant une fonction donnée sur R_+ , nulle à l'infini, on cherche donc une fonction $\varphi_{n-k} \in \mathscr{C}_0(R^+)$ telle que :

$$\varphi_n = M^*_{n,n-k}\ \varphi_{n-k} \tag{5-4}$$

Notons d'abord que si $\varphi_n(r)$ est de type ≥ 0 dans $\mathbb{R}^n$ il existe toujours une et une seule solution $\varphi_{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$ qui est alors nécessairement de type ≥ 0 dans $\mathbb{R}^{n-k}$. En effet, soit χ_n la mesure ≥ 0 bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\varphi_n = \mathscr{H}_n\ \chi_n$. D'après (5-2) $\varphi_{n-k} = \mathscr{H}_{n-k}\ \chi_n$ est l'unique solution, et d'ailleurs de type ≥ 0 dans $\mathbb{R}^{n-k}$. Explicitons (5-4). Il vient :

$$\varphi_n(r) = A_{n,k} \int_0^1 v^{n-k-1}\ (1-v^2)^{\frac{k}{2}-1}\ \varphi_{n-k}(rv)\ dv \tag{5-4'}$$

ou encore

$$\varphi_n(r) = A_{n,k}\ r^{2-n} \int_0^r u^{n-k-1}\ (r^2-u^2)^{\frac{k}{2}-1}\ \varphi_{n-k}(u)\ du \tag{5-4''}$$

Lorsque k est pair, le problème est facile à résoudre. D'après la relation $M^*_{n,n'}\ M^*_{n',n''} = M^*_{n,n''}$ $(0 < n'' < n' < n)$, il suffit d'examiner le cas k=2 pour lequel on a (avec $n > 2$) :

$$\varphi_n = (n-2)\ r^{2-n} \int_0^r u^{n-3}\ \varphi_{n-2}(u)\ du$$

On voit que $r^{n-2}\ \varphi_n(r)$ est dérivable et que l'on a alors en $r > 0$:

$$\varphi_{n-2}(r) = \frac{r^{3-n}}{n-2}\ \frac{d}{dr}\ [r^{n-2}\ \varphi_n(r)]$$

Pour k = 1, on utilisera la relation

$$M^*_{n+1,n}\ \varphi_n = M^*_{n+1,n-1}\ \varphi_{n-1}$$

qui donnera en $r > 0$

$$\varphi_{n-1}(r) = \frac{r^{2-n}}{n-1}\ \frac{d}{dr}\ \left(A_{n+1,1} \int_0^r \frac{u^{n-1}}{\sqrt{r^2-u^2}}\ \varphi_n(u)\ du\right)$$

<u>Exemple : Méthode des bandes tournantes.</u>

Soit $Y(x_1)$ une F.A. stationnaire d'ordre 2 sur la droite réelle, d'espérance nulle et de covariance $C_1(h)$. Dans $\mathbb{R}^3$, la F.A. $Z(x_1\ x_2\ x_3) = Y(x_1)$ est encore stationnaire, d'espérance nulle et admet la covariance $C(h_1,h_2,h_3) = C_1(h_1)$. Désignons par Z_s la F.A. déduite de Z par la rotation amenant le vecteur unitaire de l'axe des x_1 à coïncider avec le vecteur unitaire s. La covariance de Z_s est $C_s(h) = C_1(< h,s >)$. On choisit ensuite n directions $s_1, s_2, \ldots s_n$ uniformément réparties sur la sphère unité (sommets ou faces d'un polyèdre régulier).

Pour chaque i, on se donne une F.A. Z_{s_i}, les Z_{s_i} étant mutuellement indépendantes, et on prend $Z = \sum Z_{s_i}$. Z a la covariance

$$C(h) = \sum_i C_1(< h, s_i >)$$

peu différente de la covariance isotrope $\frac{n}{4\pi} \int_S C_1(< h, s >)$. En remplaçant Z par $Z/\sqrt{n}$, on obtient la covariance isotrope :

$$C_3(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S C_1(< h, s >)\, ds = \int_0^1 C_1(rv)\, B_{3,1}(v)\, dv$$

c'est-à-dire

$$C_3(r) = \frac{1}{r} \int_0^r C_1(u)\, du \tag{5-5}$$

Plus généralement, le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ par la méthode des bandes tournantes conduit à la covariance $C_n = M^*_{n,1}\, C_1$ dans $\mathbb{R}^n$, soit explicitement

$$C_n(r) = \frac{2\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{r^{n-2}} \int_0^r (r^2-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\, C_1(u)\, du \tag{5-5'}$$

L'équation (5-5) s'inverse sans difficulté : pour $r > 0$, on a

$$C_1(r) = \frac{d}{dr}\,[r\, C_3(r)] \tag{5-6}$$

L'équation (5-5') s'inverse aussi, quoique moins facilement si n est pair. D'après ce qui précède, on sait d'avance que si $C_n(r)$ est de type positif dans $\mathbb{R}^n$, la solution $C_1(r)$ obtenue en inversant (5-5') est de type positif dans $\mathbb{R}^1$. La méthode des bandes tournantes permet donc de construire dans $\mathbb{R}^n$ une réalisation d'une F.A. admettant une

<u>covariance donnée C_n dès que l'on est capable de construire sur la droite réelle des réalisations de F.A. admettant la covariance C_1, solution de (5-5')</u>.

Donnons quelques exemples relatifs à n = 3.

a/ <u>Covariance exponentielle dans $\mathbb{R}^3$</u> - Pour $C_3(r) = e^{-ar}$, la relation (5-6) montre que l'on doit prendre :

$$C_1(r) = (1 - ar)\, e^{-ar}$$

Cette covariance se laisse factoriser par la convolution. Posons en effet :

$$C_+(x) = \begin{cases} (1 - ax)\, e^{-ax} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

et $C_- = \check{C}_+$. La fonction $C_1(x) = C_1(|x|)$ est égale à un facteur près au produit de convolution $C_+ * C_-$, comme on le voit par la transforma- de Fourier. Explicitement, on trouve :

$$C_1(r) = 4\, a(C_+ * C_-)$$

Ainsi, partant d'une mesure aléatoire $\mu(dx)$ dont la mesure-covariance est $\theta\delta$ (par exemple, $\mu(dx)$ sera un processus de Poisson ponctuel, ou bien on partira d'un mouvement brownien $Y(x)$ et on prendra $\mu(dx) = d\,Y(x)$), on posera $Z = \mu * C_-$, soit :

$$Z(x) = \int_x^{\infty} \mu(dy)\, [1 - a(y-x)]\, e^{-a(y-x)}$$

Cette F.A. admet la covariance $\frac{\theta}{4a}\, C_1(r)$, et la méthode des bandes tournantes permet de construire dans $\mathbb{R}^3$ une réalisation d'une F.A.

dont la covariance est $\frac{\theta}{4a} e^{-ar}$.

b/ Supposons que C_3 soit de la forme $C_3 = f_3 * \check{f}_3$, c'est-à-dire égale au covariogramme transitif dans $\mathbb{R}^3$ d'une fonction isotrope f_3 $f_3(r) = f_3(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$ de support compact ou à décroissance suffisamment rapide pour que $f_1 = M_2 f_3$ existe. Explicitement, cette montée s'écrit :

$$f_1(r) = 2\pi \int_r^{\infty} f_3(u)\, u\, du$$

La relation $M_2 C_3 = f_1 * \check{f}_1$, où l'on a :

$$M_2 C_3(r) = 2\pi \int_r^{\infty} u\, C_3(u)\, du$$

donc :

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{d r^2} M_2 C_3(r) = C_1(r)$$

montre que $C_1(r)$ est à un facteur près le produit de convolution de $f_1'(r) = -2\pi r f_3(r)$, soit explicitement

$$\begin{cases} C_1 = 2\pi C * \check{C} \\ C(x) = x f_3(|x|) \end{cases}$$

On partira donc d'une mesure aléatoire μ d'espérance nulle et admettant une covariance $\theta\delta$, et on prendra :

$$Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y) f_3(|x-y|)\, \mu(dy)$$

Cette F.A. admet la covariance $\theta * C * C = \theta C_1/2\pi$, et la méthode des bandes tournantes donne une réalisation d'une F.A. de covariance

$\theta\ C_3 | 2\pi$, dans $\mathbb{R}^3$.

Par exemple, pour construire une réalisation du <u>schéma sphérique</u>

$$C_3(r) = \begin{cases} \pi \dfrac{a^3}{6} \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{r}{a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{r^3}{a^3}\right) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

on partira de l'indicatrice de la sphère de diamètre a :

$$f_3(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{si } r > \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

donc de la F.A. :

$$Z(x) = \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} (x-y)\ \mu(dy)$$

et la méthode des bandes tournantes aboutira à la covariance $\dfrac{\theta\ a^3}{12} \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{r}{a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{r^3}{a^3}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

<u>La montée transposée sur les fonctions</u>.

A l'opérateur M_k défini sur les fonctions f de $\mathbb{R}^+$ on peut associer son transposé M_k^* défini par :

$$< M_k\ f,\ \varphi > = < f,\ M_k^*\ \varphi >$$

Explicitement, on trouve :

$$< M_k f, \varphi > = \int_0^\infty \varphi(r)\, dr \int_r^\infty k\, \omega_k\, f(u)\, (u^2-r^2)^{\frac{k}{2}-1}\, u\, du =$$

$$= k\, \omega_k \int_0^\infty u\, f(u)\, du \int_0^u \varphi(r)\, (u^2-r^2)^{\frac{k}{2}-1}\, dr$$

Par conséquent, l'opérateur M_k^* s'explicite ainsi :

$$(5\text{-}7) \qquad M_k^* \varphi(x) = k\, \omega_k\, x \int_0^x \varphi(r)\, (x^2-r^2)^{\frac{k}{2}-1}\, dr$$

Il reste à préciser les domaines de définition. Pour M_k il est commode de se restreindre à l'espace des fonctions f sur $\mathbb{R}_+$ telles que f(r) soit pour tout entier $n > 0$ la densité d'une mesure bornée sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire les fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $n > 0$ la condition $\int_0^\infty r^{n-1}\, |f(r)|\, dr < \infty$.

On peut alors prendre pour φ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et à croissance lente (c'est-à-dire vérifiant une majoration de type $|\varphi(r)| \leq a + b\, r^n$ pour un entier n). Il est alors possible de préciser les relations existant entre M_k^* et $M_{n,n-k}^*$ pour $n > k$. Si une fonction $f = f_n$ est considérée comme une densité dans $\mathbb{R}^n$, elle est associée à la mesure radiale $G_n(dr) = n\, \omega_n\, r^{n-1}\, f_n(r)\, dr$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors $G_{n-k} = M_{n,n-k}\, G_n$ est la mesure radiale associée à la mesure de densité $f_{n-k} = M_k\, f_n$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$. On peut donc écrire :

$$M_k f = \frac{n\, \omega_n}{(n-k)\, \omega_{n-k}} \quad \frac{1}{r^{n-k-1}} \quad M_{n,n-k}\, (r^{n-1}\, f(r)\, dr)$$

Par suite, on peut écrire symboliquement :

$$< f, M_k^* \varphi > = < M_k f, \varphi > = \frac{n\, \omega_n}{(n-k)\, \omega_{n-k}} < M_{n,n-k}(r^{n-1}\, f(r)\, dr), \frac{\varphi}{r^{n-k-1}} >$$

$$= \frac{n\, \omega_n}{(n-k)\, \omega_{n-k}} < f, r^{n-1}\, M_{n,n-k}^* \frac{\varphi}{r^{n-k-1}} >$$

d'où

$$M_k^* \varphi = \frac{n\,\omega_n}{(n-k)\,\omega_{n-k}} \; r^{n-1} \; M_{n,n-k}^* \; \frac{\varphi}{r^{n-k-1}}$$

Compte tenu de (5-1), on retrouve bien (5-7). Mais il faut s'assurer que φ/r^{n-k-1} est bien dans le domaine de $M_{n,n-k}^*$.

Etudions maintenant le problème inverse : une fonction ψ étant donnée, existe-t-il une fonction φ telle que :

$$\psi = M_k^* \varphi \tag{5-8}$$

Pour k=2, le problème est facile à résoudre, car (5-8) se réduit à :

$$\psi(x) = 2\,\pi\,x \int_0^x \varphi(u)\,du$$

Donc $\psi(x)/x$ doit admettre une dérivée continue à croissance lente, et on a alors :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \frac{\psi(x)}{x}$$

Pour k=1, s'il existe φ continue à croissance lente telle que $\psi = M_1^* \varphi$, la relation $M_{k+k'}^* = M_k^* M_{k'}^*$ entraîne $M_1^* \psi = M_2^* \varphi$. On en déduit :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \frac{M_1^* \psi}{x} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \psi(u) \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

Inversement, supposons que la fonction $\int_0^x \psi(u) \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}}$ admette une dérivée continue à croissance lente. Alors, la fonction φ définie par :

$$(5\text{-}9) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \psi(u)\,\frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

vérifie $M_1^* \varphi = \psi$. En effet, il suffit de montrer que l'on a $< g, \psi >$ $= < M_1 g, \varphi >$ pour une classe g suffisamment riche. D'après les propriétés de la transformation de Laplace, ψ est déterminée par la fonction $\tilde{\psi}(a) = \int_0^\infty e^{-ar^2}\,\psi(r)\,dr$. Pour $g = e^{-ar^2}$, on a $M_1 g = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-ar^2}$. Il suffit donc d'établir la relation :

$$\tilde{\psi}(a) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-ar^2}\,\varphi(r)\,dr$$

Or on trouve :

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_0^\infty e^{-ax^2}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,d\left(\int_0^x \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{x^2-u^2}}\right) =$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{\pi a}}\int_0^\infty x\,e^{-ax^2}\,dx\int_0^x \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{x^2-u^2}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^\infty \psi(u)\,du\int_u^\infty e^{-ax^2}\,\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^\infty \psi(u)\,M_1\,g(u)\,du = \int_0^\infty \psi(u)\,e^{-au^2}\,du = \tilde{\psi}(a)$$

On a donc bien $M_1^* \varphi = \psi$.

6 - APPLICATIONS

Nous avons déjà rencontré une application de la montée transposée à la simulation d'une F.A. dans $\mathbb{R}^n$ par la <u>méthode des bandes tournantes</u>. Voici d'autres exemples.

6-1 Les Doublets de Ph. Cauwe.

Donnons-nous dans $\mathbb{R}^n$ deux hyperplans parallèles. Nous supposons que le vecteur unitaire de la normale à ces hyperplans est uniformément distribué sur la sphère unité, et que la distance r_n de ces deux hyperplans est indépendante de cette direction et admet la loi $F_n(dr)$. Dans un sous-espace à n-k dimensions (que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^{n-k}$) nos deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$ induisent deux hyperplans de $\mathbb{R}^{n-k}$ dont la normale est uniformément distribuée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{n-k}$, et dont la distance r_{n-k} est indépendante de cette direction et admet la loi induite $F_{n-k}(dr)$. Comme on a $r_{n-k} = \frac{r_n}{v}$; v désignant la projection sur $\mathbb{R}^{n-k}$ du vecteur normal unitaire des hyperplans de $\mathbb{R}^n$, on trouve immédiatement :

$$1 - F_{n-k}(r) = \int_0^1 \left(1 - F_n(vr)\right) B_{n,n-k}(v)\, dv$$

Autrement, la loi induite se déduit de la loi F_n par la relation :

$$(6\text{-}1) \qquad 1 - F_{n-k} = M^*_{n,n-k}\,(1 - F_n)$$

Celà s'écrit sous forme équivalente :

$$(6\text{-}1') \qquad 1 - F_{n-k} = \frac{(n-k)\ \omega_{n-k}}{n\ \omega_n}\ \frac{1}{r^{n-1}}\ M^*_k\ [r^{n-k-1}(1-F_n)]$$

Les résultats du paragraphe 5 permettent, inversement, de reconstituer $1 - F_n$ à partir de $1 - F_{n-k}$.

6-2 Un exemple de Filtre Morphologique.

Cet exemple, rencontré par F. Conrad, concerne un fermé aléatoire de $\mathbb{R}^2$ comprenant d'une part un réseau isotrope de droites poissoniennes et de l'autre les restrictions à chacun des polygones poissoniens associés à ce réseau d'autant de schémas booléens stationnaires mutuellement indépendants dont les grains primaires sont des segments de droite. En désignant respectivement par $Q(C_r)$ et $Q(B_r)$ les probabilités pour que le cercle C_r et le disque B_r de diamètre r soient disjoints de ce fermé aléatoire, on vérifie que le rapport $Q(C_r)/Q(B_r)$ ne dépend que des caractéristiques du schéma booléen, d'où possibilité de filtrage. Explicitement, on trouve :

$$(6\text{-}2) \quad \varphi(r) = \log \frac{Q(C_r)}{Q(B_r)} = \theta \frac{\pi r^2}{4} - \theta \int_0^r [1 - F(x)] \sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

(θ est la densité, inconnue, du schéma booléen, et F la loi de la longueur du segment de droite constituant le grain primaire, loi également inconnue). Le problème consiste à déterminer θ et la loi F connaissant $\varphi(r)$. En comparant avec (5-7), on voit que cette équation s'écrit :

$$\varphi(r) = \theta \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\theta}{4\pi r} M_3^* (1-F)$$

On en déduit :

$$\frac{\theta}{4\pi} M_4^* (1-F) = M_1^* \left[\theta \frac{\pi r^3}{4} - r\, \varphi(r)\right]$$

Soit explicitement :

$$(6\text{-}2') \quad \frac{\pi \theta}{4} \int_0^x [1 - F(u)](x^2-u^2)\, du = \int_0^x \left[\frac{\pi \theta}{4} u^3 - u\, \varphi(u)\right] \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

D'après (6-2), la fonction φ est dérivable. Le second membre de notre équation s'écrit donc :

$$\int_0^x \left[\frac{\pi\ \theta\ u^2}{4} - \varphi(u) \right] \frac{u\ du}{\sqrt{x^2-u^2}} = -\ x\ \varphi(o) + \int_0^x \left[\frac{\pi\theta}{2} u^2 - \varphi'(u) \right] \sqrt{x^2-u^2}\ du$$

avec d'ailleurs $\varphi(o) = 0$ d'après (6-2). On peut donc dériver (6-2') en x, ce qui donne

$$(6\text{-}2'') \qquad \frac{\pi\ \theta}{2} \int_0^x [1 - F(u)]\ du = \int_0^x \left[\frac{\pi\ \theta}{2} u - \varphi'(u) \right] \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

et une nouvelle dérivation permet d'en déduire F(u).

6-3 Granulométries de Boules (cas des lames minces)

Donnons-nous N_n boules dans $\mathbb{R}^n$, et désignons par F_n leur granulométrie ($N_n\ [1 - F_n(x)]$ est donc le nombre des boules de diamètre $\geq x$). Soit E_{n-k} un sous-espace à n-k dimensions de $\mathbb{R}^n$, E_k son orthogonal (identifiable à $\mathbb{R}^k$) et $E_{n-k}(z)$ la (n-k)-variété linéaire parallèle à E_{n-k} et passant par $z \in E_k$. Dans chaque $E_{n-k}(z)$, nos boules induisent un nombre $N_{n-k}(z)$ de (n-k)-boules, dont $N_{n-k}(z;x)$ ont un diamètre $\geq x$. Posons

$$(6\text{-}3) \qquad \begin{cases} N_{n-k} = \displaystyle\int_{E_k} N_{n-k}\ (z)\ dz \\ N_{n-k}\ [1 - F_{n-k}(x)] = \displaystyle\int_{E_k} N_{n-k}(z;x)\ dz \end{cases}$$

On note que N_{n-k} a la dimension d'un k-volume. Nous dirons que $1 - F_{n-k}$ est la granulométrie des boules induites dans $\mathbb{R}^{n-k}$. N_{n-k} et F_{n-k} sont

connues expérimentalement dès que l'on a pu faire des observations sur un nombre assez grand de "sections" $E_{n-k}(z_i)$. On se propose de reconstituer N_n et F_n à partir de N_{n-k} , F_{n-k}.

Considérons une boule de diamètre x_o dans $\mathbb{R}^n$, et calculons sa contribution à N_{n-k} et F_{n-k}. Pour $x_o < x$, cette boule n'induit de $(n-k)$ - boules de diamètre $\geq x$ sur aucune section $E_{n-k}(z)$. Pour $x_o \geq x$, elle induit une $(n-k)$- boule de diamètre $\geq x$ sur $E_{n-k}(z)$ dès que $z \in E_k$ appartient à la k- boule de diamètre $\sqrt{x_o^2 - x^2}$ centrée au point de E_k où se projette le centre de notre boule de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, la contribution à $N_{n-k}\,[1- F_{n-k}(x)]$ de notre boule de diamètre x_o est :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x_o < x \\ 2^{-k}\,\omega_k (x_o^2 - x^2)^{\frac{k}{2}} & \text{si } x_o \geq x \end{cases}$$

On en déduit aussitôt :

$$N_{n-k}\,[1- F_{n-k}(x)] = N_n\,\omega_k\,2^{-k}\int_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{k}{2}}\,F_n(dy)$$

et, en effectuant une intégration par partie :

$$N_{n-k}[1- F_{n-k}(x)] = N_n\,\frac{k\,\omega_k}{2^k}\int_x^\infty [1- F_n(y)]\,(y^2-x^2)^{\frac{k}{2}-1}\,y\,dy$$

Autrement dit :

$$(6\text{-}3) \qquad N_{n-k}\,(1- F_{n-k}) = N_n\,2^{-k}\,M_k\,(1- F_n)$$

Les résultats relatifs à l'inversion de la montée d'ordre k permettent

donc de reconstituer N_n et F_n à partir de N_{n-k} et F_{n-k}.

6-4 Granulométrie de boules (cas des lames épaisses)

Donnons-nous des boules comme dans (6-3) dans l'espace $\mathbb{R}^n$, et prenons k=1. Au lieu d'hyperplans $E_{n-1}(z)$, $z \in E_1$, nous disposons pour faire nos observations de bandes $E_{n-1}(z) \times [h]$, où $[h]$ est la boule de diamètre h dans E_1 centrée en 0 (bandes d'épaisseur $h > 0$). Quand une boule B de $\mathbb{R}^n$ rencontre une telle bande, la (n-k)-boule observée est la projection sur E_{n-1} de $\left([h] \times E_{n-1}(z)\right) \cap B$. Désignons encore par $N_{n-1}(z)$ le nombre de ces boules ainsi observées et par $N_{n-1}(z;x)$ le nombre de celles dont le diamètre apparent est $\geq x$. Les relations (6-3) définissent ensuite N_{n-1} et F_{n-1}, quantités observables dont il s'agit de déduire N_n et F_n.

Considérons à nouveau une boule B de diamètre x_o dans $\mathbb{R}^n$. Pour $x_o < x$, B n'apporte aucune contribution à $N_{n-1}\,[1- F_{n-1}(x)]$. Pour $x_o \geq x$, la projection sur E_{n-1} de $B \cap (E_{n-1}(z) \times [h])$ a un diamètre $\geq x$ dès que $z \in E_1$ tombe dans un segment de longueur $h + \sqrt{x_o^2 - x^2}$. Ainsi la contribution de B à $N_{n-1}\,[1- F_{n-1}(x)]$ est :

$$\begin{cases} 0 & \text{pour } x_o < x \\ h + \sqrt{x_o^2 - x^2} & \text{pour } x_o \geq x \end{cases}$$

On en déduit :

$$N_{n-1}\,[1- F_{n-1}(x)] = \int_x^\infty (h + \sqrt{y^2 - x^2})\, F_n(dy)$$

Soit :

$$(6\text{-}4) \qquad N_{n-1}\,[1-F_{n-1}(x)] = N_n\,h\,[1-F_n(x)] + N_n \int_x^{\infty} [1-F_n(y)]\,\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

ou encore

$$(6\text{-}4') \qquad N_{n-1}\,(1-F_{n-1}) = h\,N_n\,(1-F_n) + \frac{N_n}{2}\,M_1\,(1-F_n)$$

Pour résoudre cette équation, considérons plus généralement l'équation :

$$(6\text{-}5) \qquad g = \lambda\,f + M_1\,f$$

Pour étudier l'unicité de la solution f (si elle existe), examinons le noyau de l'opérateur $\lambda I + M_1$. Si une fonction φ vérifie $\lambda\varphi + M_1\,\varphi = 0$, on a aussi $\lambda\,M_1\,\varphi + M_2\,\varphi = 0$, c'est-à-dire :

$$M_2\,\varphi = \lambda^2\,\varphi$$

Soit, explicitement :

$$2\,\pi \int_r^{\infty} \varphi(u)\,u\,du = \lambda^2\,\varphi(r)$$

φ est donc dérivable, et vérifie l'équation différentielle :

$$2\,\pi\,x\,\varphi(x) + \lambda^2\,\varphi'(x) = 0$$

Donc φ est de la forme :

$$\varphi(r) = C\,e^{-\frac{\pi\,r^2}{\lambda^2}}$$

Inversement, d'ailleurs, les fonctions de cette forme vérifient bien $M_2\,\varphi = \lambda^2\,\varphi$. D'après les propriétés de l'exponentielle de Gauss, la montée d'ordre 1 donne :

$$M_1 \varphi = |\lambda| \varphi$$

Ainsi, la montée d'ordre 1 n'admet que des valeurs propres ≥ 0. En particulier, pour $\lambda \geq 0$, l'équation $\lambda f + M_1 f = 0$ n'a pas d'autre solution que $f = 0$ et la solution de l'équation (6-5) - si elle existe - est unique.

Pour établir l'existence de cette solution unique, considérons d'abord l'équation

$$(6\text{-}6) \qquad M_2 h - \lambda^2 h = g$$

En posant $H = M_2 h$, cette équation s'explicite :

$$H(x) + \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{H'(x)}{x} = g(x)$$

et admet la solution générale :

$$H(x) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \int_0^x g(y)\, e^{\frac{\pi}{\lambda^2}(y^2-x^2)}\, y\, dy + C\, e^{-\frac{\pi x^2}{\lambda^2}}$$

$H(x)$ est donc dérivable, et $H = M_2 h$ entraîne :

$$h(x) = \frac{-1}{2\pi} \frac{H'(x)}{x} = \frac{1}{\lambda^2} [H(x) - g(x)]$$

Ainsi, la solution générale de (6-6) est :

$$(6\text{-}7) \quad h(x) = \frac{2\pi}{\lambda^4} \int_0^x g(y)\, e^{\frac{\pi}{\lambda^2}(y^2-x^2)}\, y\, dy - \frac{1}{\lambda^2} g(x) + C\, e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}}$$

Mais l'équation (6-6) s'écrit aussi :

$$(M_1 + \lambda I)(M_1 - \lambda I)h = g$$

Par conséquent la fonction :

$$f = (M_1 - \lambda I)h \tag{6-8}$$

est effectivement solution de (6-6). Comme $M_1 \, e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}} = \lambda \, e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}}$, le terme $C \, e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}}$ n'influe pas sur l'expression de f. Explicitement, on trouve :

$$f(x) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_x^\infty g(z) \, e^{\frac{\pi}{\lambda^2} z^2} \, z \, dz \int_z^\infty \frac{y \, dy}{\sqrt{y^2 - x^2}} \, e^{-\frac{\pi}{\lambda^2} y^2} - \frac{1}{\lambda^2} M_1 \, g(x) + \frac{1}{\lambda} g(x)$$