Fontainebleau/CG N-617

COMMENT TRANSLATER LES CATASTROPHES
ou
LA STRUCTURE DES F.A.I GENERALES

G. MATHERON Octobre 1979

COMMENT TRANSLATER LES CATASTROPHES
ou
LA STRUCTURE DES F.A.I GENERALES

Par

G. MATHERON

Table des Matières

0 - INTRODUCTION 1

1 - CARACTERISATION DES ESPACES FONCTIONNELS, DE DIMENSION FINIE, INVARIANTS PAR TRANSLATION. 4

1.1 - Différentiabilité 4

1.2 - $\mathcal{F}$ est un espace de polynomes exponentiels 6

1.3 - Remarque sur le cas $n > 1$ 10

2 - STRUCTURE DES F.A.I. DANS LE CAS $n = 1$. 12

Bijection bicontinue de $\mathcal{F}^{\perp}$ sur $\mathcal{G}^{\perp}$ 15

Bijection entre F.A.I.-$\mathcal{F}$ et F.A.I.-$\mathcal{G}$ 17

Représentation spectrale des covariances generalisées 21

Exemple : translater les catastrophes 25

Autre exemple 28

3 - COUP D'OEIL SUR LE CAS $n > 1$ 29

Cas où $\mathcal{F}$ est engendré par 1 et y 30

Cas où $\mathcal{F}$ est engendré par 1, x, y, et xy 32

Cas où $\mathcal{F}$ est engendré par 1, x, y et x^2 y^2 32

F.A.I. $\mathcal{F}$ complexes 32

F.A.I. $\mathcal{F}$ réelles 35

COMMENT TRANSLATER LES CATASTROPHES
ou
LA STRUCTURE DES F.A.I GENERALES

0 - INTRODUCTION

Dans ce qui suit, je me propose de caractériser une classe de fonctions aléatoires intrinsèques plus générales que les F.A.I.-k, seules utilisées jusqu'ici. Rappelons d'abord quelques définitions.

Soit Λ un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_c$ des mesures à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Les mesures $\lambda \in \Lambda$ seront appelées mesures "autorisées" ou "admissibles". (Dans les applications, les mesures $\lambda \in \Lambda$ sont le plus souvent des mesures à support fini, i.e. de la forme $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_{x_i}$. Comme $\int \lambda f = \sum_i \lambda_i f(x_i)$ pour toute fonction continue f, il s'agit, en somme, simplement de combinaisons linéaires finies).

H désignant un espace de Hilbert de variables aléatoires, on on appelle F.A. généralisée (sur Λ) une application <u>linéaire</u> Z de Λ dans H. Pour définir la continuité d'une F.A.G., nous devons munit Λ d'une topologie. Nous utiliserons exclusivement la topologie induite sur Λ par la topologie faible de $\mathcal{M}_c$ (dans cette topologie, une suite λ_n tend vers 0 dans Λ si et seulement si $\int \lambda_n f \to 0$ pour toute f appartenant à l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues.)

Dans tout ce qui suit, nous considèrerons uniquement des F.A.G. continues sur Λ. Il est immédiat que si Λ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_c$ toute F.A.G. Z <u>continue</u> sur Λ. Il est immédiat que si Λ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_c$, toute F.A.G. Z <u>continue</u> sur Λ admet un prolongement unique sur l'adhérence $\bar{\Lambda}$ de Λ dans $\mathcal{M}_c$ par une F.A.G. continue que nous désignerons encore par Z. Ceci revient à dire que l'on peut, sans inconvénient, supposer que l'espace Λ des mesures autorisées est <u>fermé</u> dans $\mathcal{M}_c$ (pour la topologie faible). Or $\mathcal{M}_c$ est le dual topologique de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.) En désignant par $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ l'orthogonal de Λ dans $\mathcal{C}$, on voit que les

mesures autorisées λ sont caractérisées par la condition :

$$\lambda \in \Lambda \text{ si et seulement si } \int \lambda\, f = 0 \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{F}$$

Cet espace $\mathcal{F}$ de fonctions continues joue le rôle d'un espace de "<u>dérives</u>" .

A toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_c$, on peut associer la mesure $\tau_h\, \mu$ translatée de μ par le $h \in \mathbb{R}^n$. Elle est définie par :

$$\int (\tau_h\, \mu) f = \int f(x+h)\, \mu(dx) \qquad (f \in \mathcal{C})$$

Si $\tau_h\, \lambda \in \Lambda$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on dit que l'espace Λ est <u>invariant par translation</u>. Dans tout ce qui suit, nous supposerons Λ invariant par translation. Z désignant une F.A.G. sur Λ, posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \Lambda$:

$$Z_\lambda(x) = Z(\tau_x\, \lambda)$$

Si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la F.A. $x \to Z_\lambda(x)$ est stationnaire d'ordre 2, on dit que Z est une fonction aléatoire <u>intrinsèque</u> (F.A.I.) sur Λ.

Cette définition n'a, évidemment, de sens que si l'espace Λ est invariant par translation. Le premier problème à résoudre, pour étudier la notion de F.A.I., va donc consister à caractériser la classe des espaces Λ invariants par translation. Notons d'abord ceci : si $f \in \mathcal{C}$, désignons par $\tau_h\, f$ la fonction $x \to f(x-h)$, translatée de f par h, et écrivons $< \mu, f >$ au lieu de $\int \mu f$ ($f \in \mathcal{C}$, $\mu \in \mathcal{M}_c$). D'après la définition de $\tau_h\, \mu$, on a :

$$< \tau_h\, \mu,\ f > = < \mu,\ \tau_{-h}\, f >$$

Si donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ est l'orthogonal de $\Lambda \subset \mathcal{M}_c$, les espaces $\tau_h\, \Lambda$ et $\tau_h\, \mathcal{F}$ sont orthogonaux pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Par suite, l'espace de mesures Λ est invariant par translation si et seulement si son orthogonal, c'est-à-dire l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$, est lui-même invariant par translation.

Dans les applications, le cas le plus utile est celui où l'espace $\mathfrak{F}$ des "dérives" est de dimension finie. C'est à l'étude de ce cas que nous allons nous attacher ci-dessous. Dans un premier paragraphe, nous montrons que tout espace fonctionnel de dimension finie invariant par translation est nécessairement constitué de polynomes exponentiels. Nous en déduisons dans le paragraphe suivant, mais seulement dans le cas de l'espace $\mathbb{R}$ à une seule dimension, la caractérisation des F.A.I. associées, ainsi que la représentation spectrale de leurs covariances généralisées. Le cas de l'espace à $n > 1$ dimensions, moins simple, sera ensuite examiné.

1 - CARACTERISATION DES ESPACES FONCTIONNELS DE DIMENSION FINIE, INVARIANTS PAR TRANSLATION.

1.0 - Soit $\mathfrak{F}$ un espace vectoriel de dimension finie k constitué de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, espace fonctionnel supposé invariant par translations. Je désigne par f^ℓ, $\ell = 1, 2, .., k$ une base de $\mathfrak{F}$. Par hypothèse, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, il existe une matrice $B_s^\ell(h)$ telle que

$$f^\ell(x+h) = B_s^\ell(h)\ f^s(x) \tag{1-1}$$

Les translations formant un groupe commutatif, on a :

$$B(h)\ B(h') = B(h')\ B(h) = B(h+h')$$

En particulier $B(-h)$ est l'inverse de $B(h)$, qui est donc régulier pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

Les $B_s^\ell(h)$, en tant que fonctions de h, sont d'ailleurs des éléments de $\mathfrak{F}$, soit

$$B_s^\ell(h) = T_{ss'}^\ell\ f^{s'}(h) \tag{1-2}$$

avec des constantes $T_{ss'}^\ell$ convenables.

Pour le voir, utilisons le résultat élémentaire suivant : les f^ℓ étant linéairement indépendantes, on peut trouver k points x_t, $t = 1,2,\ldots,k$ tels que la matrice des $f_t^\ell = f^\ell(x_t)$ soit régulière. Partant alors de :

$$f^\ell(x+x_t) = B_s^\ell(x)\ f_t^s = B_r^\ell(x_t)\ f^r(x)$$

on voit que $B_s^\ell(x)$ se met sous la forme d'une combinaison linéaire des $f^r(x)$.

1.1 - Différentiabilité. Nous allons maintenant montrer que les fonctions $f \in \mathfrak{F}$ sont nécessairement différentiables. Compte tenu de (1-1) et (1-2), ce résultat impliquera aussitôt que les

$f \in \mathcal{F}$ sont <u>indéfiniment différentiables</u> et que <u>toutes leurs dérivées appartiennent à $\mathcal{F}$</u>.

Pour le voir, considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$(indéfiniment dérivable à support compact) de sorte que pour tout $f \in \mathcal{F}$, la <u>régularisée</u>

$$f_\varphi(x) = \int \varphi(\xi)\ f(x+\xi)\ d\xi$$

(qui existe, puisque f est mesurable) est indéfiniment différentiable. Je dis que <u>cette régularisée f_φ est elle-même une fonction de $\mathcal{F}$</u>. En effet, il suffit de le vérifier dans le cas des fonctions de base. Or, d'après (1-1), on trouve :

$$(1\text{-}3) \qquad f_\varphi^\ell(x) = \left(\int \varphi(\xi)\ B_s^\ell(\xi)\ d\xi\right)\ f^s(x)$$

Donc $f_\varphi^\ell \in \mathcal{F}$.

Désignons par $\mathcal{F}_d$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ constitué des f indéfiniment différentiables dans $\mathcal{F}$. Soit $k_d \leq k$ sa dimension. Il faut montrer $k_d = k$. Supposons donc $k_d < k$. Nous pouvons toujours choisir les fonctions de base f^ℓ de $\mathcal{F}$ de manière à ce que $(f^1, f^2, \ldots, f^{k_d})$ constitue une base de $\mathcal{F}_d$, les f^ℓ, $\ell > k_d$ engendrent un espace supplémentaire de $\mathcal{F}_d$ dans $\mathcal{F}$ ne contenant aucune fonction différentiable.

Or, pour tout $\ell = 1,2,\ldots,k$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la régularisée f_φ^ℓ est dans $\mathcal{F}_d$, d'après (1-3). On a donc :

$$\int \varphi(\xi)\ B_i^\ell(\xi)\ d\xi = 0 \qquad (i = 1 + k_d, \ldots, k)$$

Comme ceci a lieu pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on déduit que pour tout $i > k_d$ et tout $\ell = 1,2,\ldots,k$ le terme $B_i^\ell(\xi)$ est nul presque partout dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, le <u>déterminant</u> de la matrice B(h) est nul pour presque tout h. Mais on a vu que la matrice B(h) est toujours régulière, de sorte que son déterminant ne peut pas s'annuler. Par suite $k_d = k$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}$ ∎

1.2 - Pour fixer la terminologie, nous dirons qu'une fonction f sur R^n est un monome exponentiel si elle est de la forme

$$f(x) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \exp(\Sigma \lambda_i x_i)$$

($k_1,\dots,k_n$ entiers ≥ 0, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ complexes quelconques). De même, on dira que f est un polynome exponentiel simple si

$$f(x) = P(x) \exp (\Sigma \lambda_i x_i)$$

où P(x) est un polynome en $x = (x_1,\dots,x_n)$. Enfin, on dira que f est un polynome exponentiel si elle est somme finie de polynomes exponentiels simples.

Dans ces conditions, nous allons établir le résultat suivant : Tout espace $\mathfrak{F}$ invariant par translation et de dimension finie est constitué de polynomes exponentiels.

a) Considérons d'abord le cas n = 1 (fonctions f(x) d'une seule variable x). D'après le premier paragraphe, les $f \in \mathfrak{F}$ sont dérivables, et les termes de la matrice B(h) de la relation (1-1) sont dans $\mathfrak{F}$, donc sont dérivables en h. Dérivant (1-1) en h et faisant h = 0, on voit que les f^ℓ vérifient un système d'équations différentielles linéaires et homogènes du type

$$\frac{df^\ell}{dx} = A_s^\ell f^s \tag{1-4}$$

la matrice A = B'(o) étant indépendante de x. On en déduit, d'après la théorie classique, que les f^ℓ (et par suite tous les éléments de $\mathfrak{F}$) sont des polynomes exponentiels.

b) Toujours avec n = 1, nous allons établir un résultat plus fort, qui constitue une caractérisation complète de nos espaces $\mathfrak{F}$:

> Tout espace $\mathfrak{F}$ de dimension k, invariant par translation, constitué de fonctions sur $\mathbb{R}$ s'identifie à l'espace des solutions d'une équation différentielle d'ordre k, linéaire homogène et à coefficients constants - et réciproquement.

Pour montrer cela, il suffit de démontrer que $\mathfrak{F}$ est engendré par un nombre fini de systèmes complets de monomes exponentiels du type :

$$e^{\lambda_p x} \quad , \quad x\, e^{\lambda_p x}, \ldots, \quad x^{k_p - 1}\, e^{\lambda_p x}$$

(avec $\sum_p k_p = k$). Car alors, en posant

$$L(s) = \prod_p (s-\lambda_p)^{k_p}$$

et en désignant par $L(D)$ l'opérateur obtenu en remplaçant s par $\frac{d}{dx}$, il y aura bien identité entre $\mathfrak{F}$ et l'espace des solutions de l'équation

$$L(D)f = 0 \tag{1-5}$$

Tout se ramène à montrer que si $f \in \mathfrak{F}$ est de la forme

$$f(x) = \sum_p P_p(x)\, e^{\lambda_p x} \tag{1-6}$$

avec des complexes λ_p distincts, chaque P_p désignant un polynome de degré k_p^{-1}, alors, pour chaque p, <u>tous</u> les monomes

$$x^i\, e^{\lambda_p x} \quad , \quad i = 0, 1, \ldots (k_p - 1)$$

sont dans $\mathfrak{F}$.

~ Considérons d'abord le cas où il y a un seul terme dans (6), soit

$$f(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$$

et raisonnons par récurrence sur le degré de P : le résultat est vrai si $P(x)$ est une constante. Supposons-le établi pour tous les polynomes de degré $\leq n$, et soit P un polynome de degré $n+1$. On a vu que $f \in \mathfrak{F}$ entraine $f' \in \mathfrak{F}$. Donc :

$$f'(x) - \lambda\, f(x) = P'(x)\, e^{\lambda x}$$

est dans $\mathfrak{F}$. Mais P' est de degré n. Donc, tous les monomes $x^i\, e^{\lambda x}$ $i = 0, 1, \ldots, n$ sont dans $\mathfrak{F}$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Comme $f(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$ est une combinaison linéaire de tels monomes plus un terme (non identiquement nul) proportionnel à $x^{n+1}\, e^{\lambda x}$, ce dernier monome est lui aussi dans $\mathfrak{F}$.

~ Supposons le résultat établi si la somme (1-6) contient n termes ($p = 1,2,\ldots,n$). Soit λ différent des $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, et supposons que

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} P_p(x)\, e^{\lambda_p x} + e^{\lambda x}$$

soit dans $\mathfrak{F}$. Alors

$$f'(x) - \lambda\, f(x) = \sum_{p=1}^{n} [P_p'(x) + (\lambda_p - \lambda)\, P_p(x)]\, e^{\lambda_p x}$$

est dans $\mathfrak{F}$. Comme $\lambda \neq \lambda_p$, le polynome $(\lambda_p - \lambda)\, P_p + P_p'$ a le même degré $k_p - 1$ que P_p. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, pour chaque $p = 1,\ldots,n$, les monomes $x^i\, e^{\lambda_p x}$, $i = 0,1,\ldots,k_p - 1$ sont dans $\mathfrak{F}$. Comme $f \in \mathfrak{F}$, $e^{\lambda x}$ est elle-même dans $\mathfrak{F}$.

~ Si maintenant $\mathfrak{F}$ est de la forme :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} P_p(x)\, e^{\lambda_p x} + Q(x)\, e^{\lambda x}$$

on achève la démonstration par une récurrence sur le degré du polynome Q.

Notons encore que les λ_p et les k_p sont <u>univoquement définis par la donnée de la matrice A_s^ℓ</u> qui figure dans le système différentiel (1-4).

En effet, les monomes exponentiels $x^i\, e^{\lambda_p x}$ forment une base de l'espace $\mathfrak{F}$ et se déduisent des f^ℓ par une transformation linéaire régulière. Il est facile de voir que cette transformation met la matrice A sous forme triangulaire : autrement dit les λ_p et les k_p sont les valeurs propres et les ordres de multiplicité correspondants de la matrice A.

c) Abordons maintenant le cas général d'un espace $\mathbb{R}^n$ <u>à $n > 1$ dimensions</u>.

Les fonctions $f \in \mathcal{F}$ étant différentiables, d'après le premier paragraphe, on voit, en utilisant (1-1) et (1-2), que les fonctions de base f^{ℓ} vérifient un système d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial f^{\ell}(x)}{\partial x_i} = A^{\ell}_{is} \quad f^{s}(x) \tag{1-7}$$

Les constantes A^{ℓ}_{is} $(i = 1,2,\ldots,n \; ; \; \ell,s = 1,2,\ldots,k)$ représentent les valeurs en $x = 0$ des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i} B^{\ell}_{s}(x)$.

Fixons les n variables x_i à l'exception de l'une d'entre elles, par exemple la dernière x_n, soit :

$$x_i = a_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

les fonctions à 1 seule variable $x_n \to f\,(a_1,\ldots,a_{n-1}\,,x_n)$, $f \in \mathcal{F}$ constituent un espace invariant par translation auquel s'appliquent les résultats a) et b) ci-dessus. Ce sont donc les solutions d'une équation différentielle du type $L(D)f = 0$. Comme la matrice A^{ℓ}_{ns} de l'équation (1-7) ne dépend pas des valeurs $a_1,\ldots$;;,a_{n-1} , ses valeurs propres λ_p et leurs ordres de multiplicité k_p n'en dépendent pas non plus (d'après la remarque faite à la fin du paragraphe b). Par conséquent l'espace défini par $L(D)f = 0$ est indépendant des valeurs $a_1,\ldots,a_{n-1}$. Autrement dit, si l'on désigne par $\varphi^{\ell}(x_n)$ les <u>monomes exponentiels</u> solution de $L(D)f = 0$, on voit que toute fonction $f \in \mathcal{F}$ est de la forme :

$$f(x) = C_{\ell}(x_1,\ldots,x_{n-1})\;\varphi^{\ell}(x_n)$$

On achève la démonstration par récurrence sur la dimension n, en utilisant le lemme suivant :

Soit $f(x,y)$ une fonction sur $\mathbb{R}^{p+p'} = \mathbb{R}^{p} \times \mathbb{R}^{p'}$, avec $x \in \mathbb{R}^{p}$, $y \in \mathbb{R}^{p'}$. Si f est de la forme

$$f(x,y) = C_{\ell}(x)\;f^{\ell}(y)$$

les f^{ℓ} désignant des monomes exponentiels en y, et si, à y fixé, $f(x,y)$ est un polynome exponentiel en x, alors $f(x,y)$ est un

polynome exponentiel par rapport à l'ensemble des variables. On le voit en choisissant des points y_s tels que la matrice $f_s^\ell = f^\ell(y_s)$ soit régulière (ce qui est possible, puisque les monomes exponentiels $f^\ell(y)$ sont linéairement indépendants). De

$$f(x, y_s) = C_\ell(x)\, f_s^\ell$$

on déduit alors que les $C_\ell(x)$ sont de la forme :

$$C_\ell(x) = \sum_s D_\ell^s\, f(x\ ;\ y_s)$$

Ce sont donc des polynomes exponentiels en x. Comme le produit d'un polynome exponentiel en x par un polynome exponentiel en y est un polynome exponentiel en (x,y), le lemme en résulte.

<u>1.3</u> - <u>REMARQUE</u> - Contrairement à ce qui se passe pour n = 1, dans le cas n > 1, l'espace $\mathfrak{F}$ n'est pas forcément engendré par des monomes exponentiels.

Exemple : soit n = 2. L'espace engendré par les fonctions

$$1\ ;\ x\ ;\ y\ ;\ x^2 + y^2$$

est invarient par translation. Mais il ne contient pas les monomes x^2 et y^2 (ni xy).

La remarque ci-dessus laisse prévoir que l'on rencontrera certaines difficultés pour étendre au cas général n > 1 les résultats obtenus dans l'espace à une dimension. Toutefois, lorsque n est plus grand que 1, l'espace $\mathfrak{F}$, sans être obligatoirement engendré par des monomes, est toujours engendré par des polynomes exponentiels <u>simples</u>. Plus précisément :

Si l'espace $\mathfrak{F}$ contient une fonction f de la forme :

$$(1\text{-}8) \qquad f(x) = \sum_{p=1}^{q} P_p(x) \exp(\lambda_p x)$$

où les P_p sont des polynomes en x et les $(\lambda_p x) = \sum_i \lambda_p^i x_i$ des formes linéaires (réelles ou complexes) en x <u>toutes distinctes</u> alors <u>chacun des termes</u> $P_p(x) \exp(\lambda_p x)$ appartient à $\mathfrak{F}$.

On le voit en faisant un raisonnement par récurrence sur le nombre de termes simples figurant en (1-8). Le résultat est vrai pour $q = 1$. Supposons-le établi pour toute somme d'au plus q polynomes exponentiels simples, et montrons que le résultat subsiste pour toute somme de $q + 1$ termes simples.

a) Soit, d'abord $f \in \mathfrak{F}$ de la forme :

$$(1\text{-}9) \qquad f(x) = \sum_{p=1}^{q} P_p(x) \exp(\lambda_p x) + \exp(\lambda x)$$

avec des vecteurs λ_p, λ tous distincts. On choisit un vecteur a tel que les nombres $(\lambda_p a)$, (λa) soient tous distincts, et on définit l'opérateur D_a de dérivations par :

$$D_a \varphi = \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

en particulier $D_a \exp(bx) = (ab) \exp(bx)$. Soit k_1-1 le degré du polynome P_1 figurant dans le premier terme de (1-9). Appliquons à f l'opérateur $(D_a - (a\,\lambda_1))^{k_1}$ qui <u>annule le premier terme</u> de la somme (1-9), et transforme les autres termes en polynomes exponentiels simples de même degré : comme $(D_a - (a\,\lambda_1)^{k_1} f \in \mathfrak{F}$ et que cette fonction est de la forme :

$$\sum_{p=2}^{q} Q_p(x) \exp(\lambda_p x) + (a, \lambda-\lambda_1)^{k_1} \exp(\lambda x)$$

l'hypothèse de récurrence montre que l'on a $\exp(\lambda x) \in \mathfrak{F}$ (puisque $(a, \lambda-\lambda_1) \neq 0$).

b) Supposons maintenant $f \in \mathfrak{F}$, avec cette fois :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{q} P_p(x) \exp(\lambda_p x) + Q(x) \exp(\lambda x)$$

On a vu que $Q(x) \exp(\lambda x) \in \mathfrak{F}$ si le degré du polynome Q est 0. supposons établi que $Q(x) \exp(\lambda x) \in \mathfrak{F}$ lorsque le degré de Q est $\leq k$, et soit $k+1$ le degré de Q. Comme

$$(D_a - (a\lambda))f = \sum_{p=1}^{q} [D_a P_p + (a, \lambda_p-\lambda) P_p] \exp(\lambda_p x) + (D_a Q) \exp(\lambda x)$$

l'hypothèse de récurrence montre que les fonctions :

$$(D_a\ Q)\ \exp\ (\lambda x), \ldots,\ \ (D_a^{k+1}\ Q)\ \exp\ (\lambda x)$$

sont dans $\mathfrak{F}$.

D'un autre côté, $(D_a - (a\lambda_1))^{k_1}$ f est dans $\mathfrak{F}$ et ne comporte que q termes simples. Chacun de ces termes est donc dans $\mathfrak{F}$ d'après l'hypothèse de récurrence. En particulier :

$$(D_a - a\ \lambda_1)^{k_1}\ (Q\ \exp\ (\lambda x)) \in \mathfrak{F}$$

Or ce terme est de la forme

$$[(a, \lambda - \lambda_1)^{k_1}\ Q + \Sigma_1^{k+1}\ B_i\ D_a^i\ Q]\ \ \exp\ (\lambda x)$$

Comme $(a, (\lambda - \lambda_1)) \neq 0$, et que les $(D_a^i\ Q)\ \exp\ (\lambda x)$ sont dans $\mathfrak{F}$, il en résulte que $Q\ \exp\ (\lambda x) \in \mathfrak{F}$.

Comme $f \in \mathfrak{F}$, on a aussi $\sum_{p=1}^{q}\ P_p\ \exp\ (\lambda_p x) \in \mathfrak{F}$, et donc (d'après l'hypothèse de récurrence), chacun des termes $P_p\ \exp\ (\lambda_p x)$ est dans $\mathfrak{F}$. : ce qui achève la démonstration.

2 - STRUCTURE DES F.A.I. DANS LE CAS n = 1.

Soit $\mathfrak{F}$ un espace fonctionnel de dimension k, invariant par translation. Comme n = 1, nous savons qu'il existe un opérateur différentiel de la forme

$$L(D) = \prod_{i=1}^{p}\ (D - \lambda_i)^{k_i}$$

(avec $\sum k_i = k$) tel que $f \in \mathfrak{F}$ si et seulement si $L(D)\ f = 0$. Au développement formel :

$$\frac{1}{L(D)} \equiv \prod \frac{1}{(D-\lambda_i)^{k_i}} = \sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{k_i}\ \frac{B_{i,j}}{(D-\lambda_j)^i}$$

est associée la fonction

$$R(x) = \sum_i \sum_{j=1}^{k_i} B_{ij} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_j x)$$

Cette fonction R est évidemment dans $\mathfrak{F}$ et, du fait que les B_i, k_i ne sont pas nuls, $\mathfrak{F}$ est engendré par les translatés de R : autrement dit, une mesure μ à support compact est orthogonale $\mathfrak{F}$ si et seulement si

$$\int \mu(dx)\, R(x+h) = 0 \qquad (\forall\, h \in \mathbb{R})$$

On sait que l'équation

$$L(D)\, f = \varphi \tag{2-1}$$

admet la solution particulière définie par

$$f(x) = \int_0^x R(x-\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{2-2}$$

(la solution générale s'en déduisant en ajoutant un $h \in \mathfrak{F}$ quelconque). Cette solution (2-2) est la seule qui s'annule en $x = 0$ ainsi que ses $k-1$ premières dérivées. Lorsque φ parcourt l'espace $\mathcal{C}$, la formule (2-2) définit un opérateur R sur $\mathcal{C}$, soit $f = R\,\varphi$. Par construction, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$, $R\,\varphi$ est dans le domaine de l'opérateur de dérivation $L = L(D)$, et $L\,R\,\varphi = \varphi$, soit $L\,R = I$ (identité). Mais on n'a pas $R\,L = I$. Plus précisément, si φ admet des dérivées jusqu'à l'ordre k, on trouve $R\,L\,\varphi = \varphi + h$ avec un $h \in \mathfrak{F}$ (en effet : $L(R\,L\,\varphi) = (LR)\,L\,\varphi = L\,\varphi$). Un calcul simple d'intégration par parties montre cependant que l'on a

$$R\,L\,\varphi = \varphi$$

<u>pourvu que φ et ses $k-1$ premières dérivées s'annulent en $x = 0$.</u>

Il est facile de voir que R opère continuement sur $\mathcal{C}$. A cet opérateur R sur $\mathcal{C}$ est associé l'opérateur transposé R^* sur $\mathcal{M}_c$: à toute mesure μ à support compact, R^* fait correspondre la mesure $R^*\,\mu$ définie par :

$$< R^* \mu, f > = < \mu, R f > \qquad (f \in \mathcal{C})$$

Explicitons cette expression, en tenant compte de la définition (2-2) de la fonction R f. On trouve :

$$< R^* \mu, f > = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(dx) \int_0^x R(x-\xi)\ f(\xi) d\xi$$

Nous allons échanger l'ordre des intégrations, en traitant séparément les demi-droites $x > 0$ et $x \leq 0$:

$$\int_0^{\infty} \mu(dx) \int_0^x R(x-\xi)\ f(\xi)\ d\xi = \int_0^{\infty} f(\xi)\ d\xi \int_{\xi}^{\infty} R(x-\xi)\ \mu(dx)$$

$$\int_{-\infty}^{0} \mu(dx) \int_0^x R(x-\xi)\ f(\xi)\ d\xi = - \int_{-\infty}^{0} f(\xi)\ d\xi \int_{-\infty}^{\xi} R(x-\xi)\ \mu(d\xi)$$

On a donc

$$< R^* \mu, f > = \int f(\xi)\ g(\xi)\ d\xi$$

avec la fonction g définie (presque partout) par :

$$g(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi}^{\infty} R(x-\xi)\ \mu(dx) & \text{si } \xi > 0 \\ \displaystyle - \int_{-\infty}^{\xi} R(x-\xi)\ \mu(dx) & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, sous forme plus synthétique :

$$(2\text{-}3) \qquad g(\xi) = - \int_{\infty}^{\xi} R(x-\xi)\ \mu(dx) + 1_{\xi>0} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-\xi)\ \mu(dx)$$

$R^* \mu$ est la <u>mesure</u> admettant la densité $g(\xi)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Si le support de μ est contenu dans l'intervalle fermé (a,b), avec $a \leq 0 \leq b$, on a $g(\xi) = 0$ pour $\xi < a$ et pour $\xi > b$: la mesure $R^* \mu$ est bien à support compact.

Si μ est une <u>mesure autorisée</u> (orthogonale à $\mathfrak{F}$), l'intégrale $\int R(x-\xi)\ \mu(dx)$ est nulle (puisque R et toutes ses translatées sont dans $\mathfrak{F}$) et on a dans ce cas :

$$(2\text{-}4) \qquad g(\xi) = -\int_{\infty}^{x} R(x-\xi)\ \mu(dx) \qquad (\mu \in \Lambda = \mathfrak{F}^{\perp})$$

La réciproque est d'ailleurs immédiate. Autrement dit : <u>la mesure μ est dans $\mathfrak{F}^{\perp}$ si et seulement si la fonction g, définie en (2-4), est à support compact.</u>

Notons en passant ceci : si $L^*(D) = L(-D)$ désigne l'opérateur différentiel adjoint, la fonction $g(\xi)$ définie en (2-4) est solution de l'équation

$$(2\text{-}5) \qquad L^*(D)\ g = \mu$$

Plus précisément, g est la seule solution de cette équation qui s'annule à l'infini ainsi que ses (k-1) premières dérivées (en fait, μ étant à support compact, g(x) est identiquement nul pour x inférieur à un nombre a fini). On peut donc encore énoncer :

> Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_c$ est orthogonale à $\mathfrak{F}$ si et seulement si l'équation (2-5) admet une solution à support compact. Cette solution, nécessairement unique, est alors donnée par (2-4).

<u>Bijection bicontinue de $\mathfrak{F}^{\perp}$ sur $\mathcal{G}^{\perp}$.</u>

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de fonctions sur $\mathbb{R}$, de même dimension $k < \infty$, invariants par translation. Nous allons établir l'existence d'une correspondance biunivoque entre F.A.I. continues sur $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$. A cette fin, nous allons tout d'abord examiner les rapports existant entre les espaces fonctionnels $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$, puis entre leurs orthogonaux $\mathfrak{F}^{\perp}$ et $\mathcal{G}^{\perp}$, qui sont les espaces correspondants de mesures autorisées.

Je désigne par L(D) et M(D) les opérateurs différentiels associés à $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement. Explicitement

$$L(D) = \prod_{p=1}^{q} (D-\lambda_p)^{k_p}$$

$$M(D) = \prod_{p'=1}^{q'} (D-\mu_{p'})^{k'_{p'}}$$

(avec $\sum k_p = \sum k'_{p'} = k$). Désignons de même par R (respectivement S) l'opérateur sur $\mathcal{C}$ défini comme en (2-2) : $f = R\,\varphi$ (resp. $f = S\,\varphi$) est la solution de l'équation $L\,f = \varphi$ (resp. $M\,f = \varphi$) nulle en $x = 0$ ainsi que ses k-1 premières dérivées.

Considérons <u>l'opérateur produit M R</u> (se produit a un sens : car, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}$, $R\,\varphi$ est k fois dérivable, donc tombe dans le domaine de M), et, de même, l'opérateur L S : <u>ces deux opérateurs sont inverses</u> l'un de l'autre :

$$M\,R\,L\,S = L\,S\,R\,M = I$$

Il suffit, évidemment, de montrer l'une de ces deux relations, par exemple $M\,R\,L\,S = I$. Si φ est dans $\mathcal{C}$, $S\,\varphi$ est nulle en $x = 0$ ainsi que ses (k-1) premières dérivées. On a alors le droit, comme on l'a vu ci-dessus, d'écrire $R\,L\,(S\varphi) = L\,R\,(S\varphi)$. Comme $M\,S = L\,R = I$, on trouve ainsi : $M\,R\,L\,S\,\varphi = M\,L\,R\,S\,\varphi = M\,S\,\varphi = \varphi$, donc $M\,R\,L\,S = I$.

De plus : <u>L S applique $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$ et M R applique $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$</u>. De fait, pour $f \in \mathcal{C}$, on trouve

$$M\,L\,S\,f = L\,M\,S\,f = L\,f$$

puisque les opérateurs différentiels L et M commutent. Ainsi, $f \in \mathcal{F}$ si et seulement si $L\,S\,f \in \mathcal{G}$. En particulier, L S applique $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ et M R applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$. Ces opérateurs étant inverses l'un de l'autre, il s'agit bien d'une bijection de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$.

Ces opérateurs L S et M R <u>sont continus</u> sur $\mathcal{C}$ (pour la topologie de la convergence compacte).

Pour le voir, on remarque que le développement formel de L(D)/M(D) est de la forme

$$\frac{\Pi\ (D-\lambda_p)^{k_p}}{\Pi\ (D-\mu_{p'})^{k_{p'}}} = 1 + \sum_{p'} \sum_{i=1}^{k_{p'}} b_{p'i} \frac{1}{(D-\mu_{p'})^i}$$

et que, par suite en posant :

$$G(x) = \sum_{p'} \sum_{i=1}^{k_{p'}} b_{p'i} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{\mu_{p'}x}$$

on a :

$$(L\ S\ \varphi)(x) = \varphi(x) + \int_0^x G(x-\xi)\ \varphi(\xi)\ d\xi$$

La continuité de LS sur $\mathcal{C}$ s'en déduit sans difficulté.

A ces opérateurs LS et MR continus sur $\mathcal{C}$ sont associées leurs transposées (LS)* et (MR)*, opérateurs <u>continus</u> sur $\mathcal{M}_c$ et <u>inverses</u> l'un de l'autre. <u>De plus (LS)* applique $\mathcal{G}^\perp$ sur $\mathcal{F}^\perp$ et définit donc une bijection bicontinue</u> de $\mathcal{G}^\perp$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

De fait, on a pour $f \in \mathcal{C}$ et $\mu \in \mathcal{M}_c$:

$$<(LS)^*\ \mu,\ f> = <\mu,\ (LS)\ f>$$

Comme $f \in \mathcal{F}$ équivaut à (LS) $f \in \mathcal{G}$, cette formule indique que $\mu \in \mathcal{G}^\perp$ équivaut à $(LS)^*\ \mu \in \mathcal{F}^\perp$.

<u>Bijection entre F.A.I.-$\mathcal{F}$ et F.A.I.-$\mathcal{G}$.</u>

Pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}_c$ quelconque, la relation $(LS)^*\ \tau_h\ \mu = \tau_h((LS)^*\mu)$ est fausse en général. Mais elle est vraie si μ est orthogonale à $\mathcal{G}$. Autrement dit :

(2-6) $\quad (LS)^*\ \tau_h\ \mu = \tau_h\ (LS)^*\ \mu \qquad (h \in \mathbb{R}\ ,\ \mu \in \mathcal{G}^\perp)$

Pour le voir, partons de la définition

$$<(LS)^*\ (\tau_h\ \mu),\ f> = <\tau_h\ \mu,\ L\ S\ f> \qquad (f \in \mathcal{C})$$

Or, explicitement, la fonction L S f est, comme on l'a vu, de

la forme :

$$(LS\ f)(x) = f(x) + \int_0^x G(x-\xi)\ f(\xi)\ d\xi$$

avec une fonction G qui appartient à l'espace $\mathcal{G}$. Remplaçons f par τ_{-h} f, c'est-à-dire f(x) par f(x+h). Il vient :

$$(L\ S\ \tau_h\ f)(x) = f(x+h) + \int_0^{x+h} G(x+h-\xi)\ f(\xi)\ d\xi$$

$$= f(x+h) + \int_{-h}^{x} G(x-\xi)\ f(\xi+h)\ d\xi$$

$$= f(x+h) + \int_0^{x} G(x-\xi)\ f(\xi+h)\ d\xi - \int_0^{-h} G(x-\xi)\ f(\xi+h)\ d$$

Comme $G \in \mathcal{G}$, la fonction

$$x \to \int_0^{-h} G(x-\xi)\ f(\xi+h)\ d\xi$$

est elle-même dans $\mathcal{G}$. Par conséquent, la relation ci-dessus nous indique que la différence $L\ S\ \tau_h\ f - \tau_{-h}\ L\ S\ f$ est une fonction de $\mathcal{G}$ quelle que soit $f \in \mathcal{C}$. Par conséquent, pour <u>toute $\mu \in \mathcal{G}^{\perp}$</u> on aura :

$$< \mu,\ L\ S\ \tau_{-h}\ f > = < \mu,\ \tau_{-h}\ L\ S\ f > \quad (f \in \mathcal{C})$$

Comme ceci équivaut à

$$< \tau_h (L\ S)^*\ \mu,\ f > = < (L\ S)^*\ \tau_h\ \mu,\ f >$$

il en résulte bien que (2-6) est vraie pour toute mesure $\mu \in \mathcal{G}^{\perp}$.

Soit alors Z une F.A.I. continue sur $\mathcal{F}^{\perp}$. Pour tout $\mu \in \mathcal{G}^{\perp}$ posons :

$$Y(\mu) = Z((L\ S)^*\ \mu)$$

Come $(L\ S)^*$ est une application continue de $\mathcal{G}^{\perp}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$, $Y(\mu)$ est une F.A.G. continue sur $\mathcal{G}^{\perp}$. D'autre part, d'après (2-6), on a :

$$Y(\tau_h\ \mu) = Z(\tau_h(LS)^*\ \mu)$$

de sorte que $h \to Y(\tau_h\ \mu)$ est une F.A.S.T. pour tout $\mu \in \mathcal{G}^\perp$. Autrement dit $Y(\mu)$ est une F.A.I.- $\mathcal{G}^\perp$. De la même manière, l'opérateur $(MR)^*$ permet de transformer une F.A.I.- $\mathcal{G}$ en F.A.I.- $\mathcal{F}$. On voit ainsi que les formules réciproques

$$(2\text{-}6') \qquad \begin{cases} Z(\mu) = Y((MR)^*\ \mu) & (\mu \in \mathcal{F}^\perp) \\ Y(\mu) = Z((LS)^*\ \mu) & (\mu \in \mathcal{G}^\perp) \end{cases}$$

établissent une bijection entre les F.A.I. Y continues sur $\mathcal{G}^\perp$ et les F.A.I. Z continues sur $\mathcal{F}^\perp$.

On peut obtenir une écriture plus explicite de cette correspondance entre les F.A.I.- $\mathcal{F}$ et les F.A.I.- $\mathcal{G}$ en utilisant la notion de <u>représentation</u> : si la F.A. $\tilde{Y}(x)$ est une représentation de la F.A.I.- $\mathcal{G}$ Y, on a, par définition

$$Y(\nu) = \int \tilde{Y}(x)\ \nu(dx) \qquad (\nu \in \mathcal{G}^\perp)$$

D'après (2-6), on a donc pour tout $\mu \in \mathcal{F}^\perp$

$$Z(\mu) = \int \tilde{Y}(x)\ (MR)^*\ \mu$$

Il est facile de voir que la formule de dualité $< \mu, MR\ f > = < (MR)^*\ \mu, f >$ subsiste pour ces intégrales stochastiques de ce type, de sorte que l'on peut écrire :

$$Z(\mu) = \int (MR\ \tilde{Y})(x)\ \mu(dx) \qquad (\mu \in \mathcal{F}^\perp)$$

Mais cela signifie, par définition, que la F.A. :

$$\tilde{Z}(x) = (MR\ \tilde{Y})(x)$$

<u>est une représentation de la F.A.I.- $\mathcal{F}$ Z</u>. Ainsi, les formules réciproques :

$$(2\text{-}7) \qquad \tilde{Z}(x) = (\mathbb{M}\mathbb{R}\ \tilde{Y})(x) \quad ; \quad \tilde{Y}(x) = (\mathbb{L}\mathbb{S}\ \tilde{Z})(x)$$

échangent les représentations des F.A.I. sur $\mathcal{F}^{\perp}$ et sur $\mathcal{G}^{\perp}$.

Lorsque $\mathcal{G}$ est l'espace des <u>polynomes de degré $\leq$ k-1</u>, on connaît parfaitement la structure des F.A.I. correspondantes, qui sont les F.AI.-(k-1). L'opérateur M est la dérivation d'ordre k, et l'opérateur S est l'opérateur d'intégration I_k, défini par :

$$(I_k\ f)(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}\ f(\xi)\ d\xi$$

Les formules (2-7) se mettent alors sous la forme :

$$(2\text{-}8) \qquad \begin{aligned} \tilde{Z}(x) &= \frac{d^k}{d\ x^k} \int_0^x R(x-\xi)\ \tilde{Y}(\xi)\ d\xi \\ \tilde{Y}(x) &= L(D) \int_0^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}\ \tilde{Z}(\xi)\ d\xi \end{aligned}$$

qui établit une bijection entre les représentations des F.A.I.- $\mathcal{F}$ $\tilde{Z}(x)$ et celles des F.A.I.-(k-1) $\tilde{Y}(x)$.

On peut d'ailleurs mettre cette bijection sous une forme où ne figurent plus que des opérateurs intégraux. De fait, partant du développement formel :

$$D^k\ R = \prod \left(\frac{D}{D-\lambda_p}\right)^{k_p} = 1 + \sum_{i=1}^{k_p} \frac{C_{ip}}{(D-\lambda_p)^i}$$

nous pouvons introduire la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_p \sum_{i=1}^{k_p} C_{i,p}\ \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\ \exp\ (\lambda_p\ x)$$

et la première relation (2-8) s'écrit alors :

$$(2\text{-}9) \qquad \tilde{Z}(x) = \tilde{Y}(x) + \int_0^x F(x-\xi)\ \tilde{Y}(\xi)\ d\xi$$

Représentation spectrale des covariances généralisées.

On sait que toute F.A.I.-(k-1) Y (sans dérive) admet une covariance généralisée K(h) telle que

$$\|Y(\mu)\|^2 = \int\int \mu(dx)\ K(x-y)\ \mu(dy)$$

pour toute mesure μ annulant les polynomes de degré (k-1). A cette C.G. K(h) est biunivoquement associée une "mesure spectrale" sur $\mathbb{R}\setminus\{o\}$ de la forme $\chi(du)/(4\pi^2\ u^2)^k$, ou $\chi(du)$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$, sans atome à l'origine et telle que

$$\int \frac{\chi(du)}{(1+\ 4\pi^2\ u^2)^k} < \infty$$

En désignant par $\tilde{\mu}(u) = \int \exp(-\ 2\ i\ \pi\ ux)\ \mu(dx)$ la transformée de Fourier d'une mesure μ à support compact annulant les polynomes de degré $\leq$ k-1, on a alors :

$$\|Y(\mu)\|^2 = \int \frac{(\tilde{\mu}(u))^2}{(4\ \pi^2\ u^2)^k}\ \chi(du)$$

(comme la mesure μ est à support compact, la fonction $\tilde{\mu}(u)$ est indéfiniment dérivable. De plus, μ étant autorisée à l'ordre k-1, $\tilde{\mu}$ s'annule en u = 0 ainsi que ses k-1 premières dérivées, de sorte que $|\tilde{\mu}(u)|^2/(4\ \pi^2\ u^2)^k$ reste bornée).

On en déduit la représentation spectrale de la covariance généralisée associée à la F.A.I.-$\mathfrak{F}$ Z qui se déduit de la F.A.I.-(k-1) Y selon la formule (2-8). De fait, la transformée de Fourier de la mesure $(\mathbb{M}R)^*\ \mu$ ($\mu \in \mathfrak{F}$) est ici la fonction

$$\frac{(2\ i\ \pi\ u)^k}{L(2\ i\ \pi\ u)}\ \tilde{\mu}(u)$$

de sorte que l'on a :

$$\text{(2-10)} \qquad \|Z(\mu)\|^2 = \int \frac{|\tilde{\mu}(u)|^2}{|L(2\ i\ \pi\ u)|^2}\ \chi(du)$$

La "mesure spectrale" correspondante est donc $\chi(du)/|L(2\ i\ \pi\ u)|^2$ (c'est une mesure sur la droite réelle privée des points où le polynome $L(2\ i\ \pi\ u)$ s'annule).

On peut également former une représentation explicite de cette C.G., c'est-à-dire une fonction $K_Z(h)$ telle que :

$$\|Z(\mu)\|^2 = \int \mu(dx)\ K_Z(x-y)\ \mu(dy) \qquad (\mu \in \mathcal{F}^{\perp})$$

à savoir

$$K_Z = (-1)^k\ D^{2k}\ R\ R'\ K$$

(où R' désigne le pseudo inverse de l'opérateur différentiel $L(D') = L(-D)$).

L'examen de la formule spectrale (2-10) montre que les racines du polynome $L(2\ i\ \pi\ u)$, qui sont les nombres (en général complexes)

$$u_p = \frac{\lambda_p}{2\ i\ \pi}$$

jouent un rôle très différent selon qu'elles sont, ou non, réelles, c'est-à-dire selon que les valeurs propres correspondantes λ_p sont ou non imaginaires pures.

Considérons, en effet, une valeur propre λ admettant une partie réelle non nulle, soit

$$\lambda = \alpha + i\ \beta \quad , \quad \alpha \neq 0$$

Comme nous nous limitons au cas des F.A.I. réelles, le polynome $L(s)$ est à coefficients réels. Si donc $\beta \neq 0$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\ \beta$ est également valeur propre. Alors $L(s)$ contient le facteur $[(s-\lambda)(s-\overline{\lambda})]^{k_o}$ (k_o est l'ordre de multiplicité de la racine λ). Par suite, $|L(2\ i\ \pi\ u)|^2$ contiendra le facteur :

$$[(2\ i\ \pi\ u - \lambda)(2\ i\ \pi\ u - \overline{\lambda})(-2\ i\ \pi\ u - \lambda)(-\ 2\ i\ \pi\ u - \overline{\lambda})]^{k_o} =$$

$$|2\ i\ \pi\ u - \lambda|^{2k_o} \times |2\ i\ \pi\ u - \overline{\lambda}|^{2k_o} = [(\alpha^2+(2\pi u-\ \beta)^2]^{k_o}[\alpha^2+(2\pi u\ +\beta)^2]^{k_o}$$

Prenant alors

$$\chi'(du) = \frac{\chi(du)}{([\alpha^2 + (2\pi u - \beta)^2][\alpha^2 + (2\pi u + \beta)^2])^{k_o}}$$

et

$$L'(s) = \frac{L(s)}{[(s-\lambda)(s-\bar{\lambda})]^{k_o}}$$

la formule (2-10) s'écrit

$$\|Z(\mu)\|^2 = \int \frac{|\tilde{\mu}(u)|^2}{|L'(2\,i\,\pi\,u)|^2}\ \chi'(du)$$

Mais L' est un polynome de degré $k - 2\,k_o$, et χ' une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int \frac{\chi(du)}{(1 + 4\,\pi^2\,u^2)^{k-2\,k_o}} < \infty$$

Autrement dit : la covariance généralisée K_Z admet la même représentation spectrale qu'une C.G. K_Z' associée à une F.A.I.-$\mathcal{F}'$ construite sur l'espace $\mathcal{F}'$ associée à l'opérateur L', espace dont la dimension est $k - 2\,k_o$.

Si $\beta = 0$ (i.e. λ réelle), un raisonnement analogue conduit à la même conclusion, avec un espace $\mathcal{F}'$ de dimension $k - k_o$.

Ainsi, les valeurs propres à partie réelle non nulle font, en un certain sens, illusion. Plus précisément, on parvient sans peine à la conclusion suivante :

Décomposons l'espace $\mathcal{F}$ des dérives en somme directe :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$$

où $\mathcal{F}''$ regroupe les monomes exponentiels associés aux valeurs propres λ_p admettant une partie réelle non nulle, tandis que $\mathcal{F}'$ contient les termes associés aux λ_p nulles ou imaginaires pures : ($\mathcal{F}'$ est donc engendré par des <u>polynomes trigonométriques</u> du type $P(x)\cos\beta x$,

$Q(x)$ sin βx et, eventuellement, des polynomes purs $P(x)$).

Alors toute F.A.I. Z sur $\mathcal{F}$ s'identifie à une F.A.I. Z' sur l'espace $\mathcal{F}'$ (de dimension $k' < k$) à une dérive près f, qui est un polynome exponentiel (à coefficients éventuellement aléatoires) appartenant à l'espace $\mathcal{F}''$.

Cette circonstance se comprend, intuitivement, assez bien : si une valeur propre λ a, par exemple, une partie réelle strictement positive, toute fonction de la forme $P(x) \exp(\lambda x)$ devient négligeable lorsque $x \to -\infty$. L'indétermination correspondante qui affecte la définition de la F.A.I. associée peut donc être levée si l'on se place suffisamment loin vers la gauche sur la droite réelle. Cette remarque conduit à un calcul explicite. Traitons seulement, pour éviter des notations trop lourdes, le cas où l'opérateur L est de la forme

$$L(D) = (D-\lambda)^k \qquad (\lambda \text{ réel} > 0)$$

de sorte que $\mathcal{F}$ est l'espace des fonctions $f = P(x) \exp(\lambda x)$, où P est un polynome de degré $\leq k-1$. La fonction R qui figure dans la première relation (2-8) est alors :

$$R(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \; e^{\lambda x}$$

Comme λ est strictement positif, la formule

$$Y_1(x) = -\int_x^\infty R(x-\xi)\, \tilde{Y}(\xi)\, d\xi = -\int_0^\infty R(-\xi)\, \tilde{Y}(x+\xi)\, d\xi$$

définit une F.A., qui est la régularisée de $\tilde{Y}$ par la fonction $-R_-$ ($R_-(x) = 1_{x<0}\, R(x)$), soit $Y_1 = -\tilde{Y} * R_-$. Autrement dit : $Y_1(x)$ est elle-même une F.A.I.-$(k-1)$, de même ordre $(k-1)$ que $\tilde{Y}(x)$ elle-même.

D'autre part, comme la fonction R appartient à $\mathcal{F}_1$ les fonctions :

$$\int_0^x R(x-\xi)\, \tilde{Y}(\xi)\, d\xi \; ; \; -\int_x^\infty R(x-\xi)\, \tilde{Y}(\xi)\, d\xi$$

sont égales, à une fonction près appartenant à $\mathfrak{F}$. Par conséquent, en dérivant k fois, selon la formule (2-8), nous voyons que la F.A. :

$$Z_1(x) = - \frac{d^k}{d\,x^k} \int_x^\infty R(x-\xi)\, \tilde{Y}(\xi)\, d\xi = \frac{d^k}{d\,x^k}\, Y_1(x)$$

est encore une représentation de la F.A.I.-Z. Or, $Y_1(x)$ étant une F.A.I.-(k-1), sa dérivée d'ordre k est une F.A. <u>stationnaire</u>. Par suite, la F.A.I.-Z admet une <u>représentation stationnaire</u> $Z_1(x)$, dont les autres représentations se déduisent en ajoutant une dérive de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=o}^{k-1} A_i\, x^i \exp(\lambda x)$$

(avec des coefficients A_i aléatoires ou non) : les F.A.I.-$\mathfrak{F}$ s'identifient dans ce cas au modèle F.A. stationnaire + dérive dans $\mathfrak{F}$.

<u>Exemple : translater les catastrophes</u>.

Prenons, à titre d'exemple simple de F.A.I.-$\mathfrak{F}$ non triviale, k = 2 et $\mathfrak{F}$ engendrée par exp ($\pm$ 2 i π α x), c'est-à-dire par les deux fonctions trigonométriques cos 2 π α x et sin 2 π α x. Dans un langage imagé, la "catastrophe" qui affecte l'infra-rouge dans le cas des F.A.I.-k, va se trouver maintenant localisée sur la fréquence particulière α.

L'opérateur est ici

$$L(D) = D^2 + 4\,\pi^2\,\alpha^2$$

On a formellement

$$\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{4\,\pi\,i\,\alpha} \left[\frac{1}{D-2\,i\,\pi\,\alpha} - \frac{1}{D+2\,i\,\pi\,\alpha} \right]$$

et donc

$$R(x) = \frac{1}{2\,\pi\,\alpha} \sin 2\,\pi\,\alpha\,x$$

D'après (2-8), on obtient la représentation $\tilde{Z}(x)$ de ces F.A.I.-3 en prenant

$$\tilde{Z}(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \sin 2\pi\alpha(x-\xi)\, \tilde{Y}(\xi)\, d\xi$$

où $\tilde{Y}(x)$ est une représentation d'une F.A.I.-1. Ceci peut aussi bien s'écrire :

$$\tilde{Z}(x) = \tilde{Y}(x) - 2\pi\alpha \int_0^x \sin 2\pi\alpha(x-\xi)\, \tilde{Y}(\xi)\, d\xi$$

En ce qui concerne les covariances généralisées, partant du développement formel

$$\frac{1}{(D^2-\lambda^2)^2} = \frac{1}{4\lambda^2}\left[\frac{1}{(D-\lambda)^2} + \frac{1}{(D+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda(D-\lambda)} + \frac{1}{\lambda(D+\lambda)}\right]$$

auquel est associée la fonction

$$\frac{1}{2\lambda^2}\ \mathrm{ch}\,\lambda x - \frac{1}{2\lambda^3}\ \mathrm{sh}\,\lambda x$$

et remplaçant λ par $2 i \pi \alpha$, nous introduisons la fonction :

$$F(x) = \frac{1}{8\pi^2\alpha^2}\left(\frac{\sin 2\pi\alpha x}{2\pi\alpha} - x\cos 2\pi\alpha x\right)$$

Alors, si $K_Y(h)$ est une C.G. pour la F.A.I.-1 Y, on obtient une C.G. pour la F.A.I.-Z en prenant

$$K_Z(h) = \frac{d^4}{dh^4} \int_0^h F(h-\xi)\, K_Y(\xi)\, d\xi$$

Cette fonction F est nulle en h = 0 ainsi que ses 2 premières dérivées . Par contre $F'''(o) = 1$. On a donc encore, aussi bien :

$$\begin{cases} K_Z(h) = \dfrac{d^2}{dh^2} \displaystyle\int_0^h F''(h-\xi)\, K_Y(\xi)\, d\xi \\[2ex] K_Z(h) = K_Y(h) + \displaystyle\int_0^h F^{IV}(h-\xi)\, K_Y(\xi)\, d\xi \end{cases}$$

avec

$$F''(x) = \frac{1}{2}\left(x \cos 2\pi\alpha x + \frac{\sin 2\pi\alpha x}{2\pi\alpha}\right)$$

$$F^{IV}(x) = -2\pi^2\alpha^2\left(x \cos 2\pi\alpha x + \frac{3 \sin 2\pi\alpha x}{2\pi\alpha}\right)$$

Par exemple, en écrivant h au lieu de $|h|$, si

$$K_Y(h) = -a|h| + b\frac{|h|^3}{6}$$

on trouvera

$$K_Z(h) = -a F''(h) + b F(h)$$

<u>Variogramme discret</u> : on note que la mesure $\delta_{x+\frac{n}{\alpha}} - \delta_x$ est autorisée pour tout entier n. On peut donc définir un <u>variogramme discrétisé</u> en posant

$$\gamma(\tfrac{n}{\alpha}) = \frac{1}{2}\,\|Z(\delta_{x+\frac{n}{\alpha}} - \delta_x)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|\tilde{Z}(x + \tfrac{n}{\alpha}) - \tilde{Z}(x)\|^2$$

On trouve

$$\gamma(\tfrac{n}{\alpha}) = K_Z(o) - K_Z(\tfrac{n}{\alpha})$$

Dans le cas de l'exemple ci-dessus ($K_Y(h) = -a h + b\frac{h^3}{6}$), il vient :

$$\gamma(\tfrac{n}{\alpha}) = a\frac{n}{2\alpha} + b\frac{n}{8\pi^2\alpha^3}$$

Pour les mailles n/α, ce variogramme discret se comporte comme un variogramme linéaire.

<u>Remarque</u> : La représentation $\tilde{Z}$ admet deux autres expressions :

$$\tilde{Z}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \cos 2\pi\alpha(x-\xi)\,\tilde{Y}(\xi)\,d\xi$$

$$= \tilde{Y}(x) - 2\pi\alpha\int_0^x \sin 2\pi\alpha(x-\xi)\,\tilde{Y}(\xi)\,d\xi$$

Pour les simulations éventuelles, notons ceci : si $\tilde{Y}(x)$ est un

mouvement brownien de variogramme $|h|$, soit :

$$\tilde{Y}(x) = \int_0^x W(d\xi)$$

avec une mesure aléatoire dont la covariance est $2\,\delta$, on trouve

$$\begin{cases} \tilde{Z}(x) = \int_0^x \cos 2\pi\,\alpha(x-\xi)\; W(d\xi) \\ K_Z(h) = -\frac{1}{2}\left(|h| \cos 2\pi\,\alpha\, h + \frac{\sin 2\pi\,\alpha\,|h|}{2\pi\,\alpha}\right) \end{cases}$$

Si $\tilde{Y}(x)$ est l'intégrale d'un mouvement brownien de variogramme $|h|$, soit

$$\tilde{Y}(x) = \int_0^x (x-\xi)\; W(d\xi)$$

avec $K_Y(h) = h^3/6$, on trouve cette fois

$$\begin{cases} \tilde{Z}(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^x \sin 2\pi\,\alpha(x-\xi)\; W(d\xi) \\ K_Z(h) = \frac{1}{8\pi\alpha^2} \left[\frac{\sin 2\pi\,\alpha\,|h|}{2\pi\,\alpha} - |h| \cos 2\pi\,\alpha\, h\right] \end{cases}$$

<u>Autre exemple</u>.

Considérons le cas où l'espace $\mathfrak{F}$, de dimension $k = 1$, est engendré par la fonction $\exp(\lambda x)$, $\lambda > 0$. A une dérive exponentielle près, les F.A.I.-$\mathfrak{F}$ sont, en fait, des F.A.S.T. Le formalisme précédent établit donc une correspondence biunivoque entre F.A.S.T. et F.A.I.-0, donc aussi entre covariances stationnaires et variogrammes.

Entre la représentation stationnaire $Z(x)$ de la F.A.I.-$\mathfrak{F}$ et la représentation $Y(x)$ nulle en $x = 0$ de la F.A.I.-0, les formules d'échange sont les suivantes:

$$\begin{cases} Y(x) = Z(x) - Z(o) - \lambda \int_o^x Z(\xi)\, d\xi \\ Z(x) = Y(x) - \lambda \int_o^\infty e^{-\lambda\xi}\, Y(x-\xi)\, d\xi \end{cases}$$

Sous forme spectrale, le variogramme γ de $Y(x)$ et la covariance $C(h)$ de $Z(x)$ sont associés à une même mesure χ selon la relation

$$\gamma(h) = \int \frac{1 - \cos 2\pi u h}{4\pi^2 u^2}\, \chi(du)$$

$$C(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h}{\lambda^2 + 4\pi^2 u^2}\, \chi(du)$$

Ils s'expriment directement en fonction l'un de l'autre selon les formules réciproques :

$$\begin{cases} \gamma(h) = C(o) - C(h) + \lambda^2 \int_o^h (h-x)\, C(x)\, dx \\ C(h) = -\gamma(h) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\, e^{-\lambda|h-x|}\, dx \end{cases}$$

3 - COUP D'OEIL SUR LE CAS $n > 1$.

Lorsque n est plus grand que 1, la situation est moins simple, du fait qu'il n'y a plus correspondance bijective entre F.A.I.-$\mathcal{F}$ et F.A.I.-k. Des anomalies apparaissent déjà dans le cas de ce que l'on peut appeler des F.A.I.-k <u>incomplètes</u> (i.e. : $\mathcal{F}$ est un espace de polynomes de degré $\leq$ k mais ne contient pas tous les monomes correspondants). Le mieux est d'examiner quelques exemples, en se limitant au cas $n = 2$. Dans ce qui suit, l'espace $\mathbb{R}^2$ est rapporté à deux axes ox et oy, et les lettres x et y désignent les coordonnées correspondantes.

Notons d'abord un résultat qui n'est pas destiné à être généralisé.

Soit $Z(x,y)$ une (représentation d'une) F.A.I.-0 telle qu'à $y = y_o$ fixé la F.A. $x \to Z(x, y_o)$ ne diffère d'une F.A.S.T. en x que par une constante (aléatoire) $X(y_o)$. Alors $Z(x,y)$ est de la forme :

$$Z(x,y) = Y(x,y) + X(y)$$

où $Y(x,y)$ est stationnaire en(x,y) et $X(y)$ est une F.A.I.-0 ne dépendant que de y.

De fait, par hypothèse, il existe une V.A. Y_o telle que

$$Z(x,o) - Z(o,o) = (U_{x,o} - I)\, Y_o$$

D'autre part, pour tout y, on a

$$Z(x,y) - Z(o,y) = U_{o,y}\, (Z(x,o) - Z(o,o))$$

puisque Z est une F.A.I.-0, c'est-à-dire

$$Z(x,yy) - Z(o,y) = (U_{x,y} - U_{o,y})\, Y_o$$

Par suite :

$$Z(x,y) = U_{x,y}\, Y_o + X(y)$$

avec $X(y) = Z(o,y) - U_{o,y}\, Y_o$, ce qui établit le résultat.

<u>Cas où $\mathcal{F}$ est engendrée par les fonctions 1 et y.</u>

Dans ce cas, on a affaire à une F.A.I.-1 $Z(x,y)$ telle que, pour chaque y fixé, $x \to Z(x,y)$ soit une F.A.I.-0 en x. On pourrait croire, par analogie avec le résultat préliminaire ci-dessus, que Z est alors nécessqirement de la forme $Y(x,y) + X(y)$ où Y est une F.A.I.-0 en (x,y) et $X(y)$ une F.A.I.-1 de y seul. Mais <u>il n'en est rien</u>.

De fait, quitte à régulariser, on peut supposer que la F.A.I.-1 $Z(x,y)$ est plusieurs fois différentiable m.q. En tant que F.A.I.-1,

elle admet une covariance généralisée du type :

$$(3\text{-}1) \qquad K(h) = \iint \frac{\cos 2\pi(u\,h_1 + v\,h_2) - 1 + \frac{4\pi^2}{2}(u\,h_1 + v\,h_2)^2}{(4\,\pi^2(u^2 + v^2))^2}\,\chi(du,dv)$$

D'autre part, la dérivée partielle $\frac{\partial Z}{\partial x}$ doit être stationnaire en (x,y), ce qui implique :

$$\iint \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2}\,\chi(du,\,dv) < \infty$$

Inversement, on peut vérifier que cette condition suffit pour qu'une F.A.I.-1 $Z(x,y)$ soit en fait (à une dérive linéaire près) une F.A.I. sur l'espace engendré par les fonctions 1 et y.

Or, prenons par exemple comme mesure χ dans (3-1), la mesure admettant la densité

$$e^{-\rho^2}\,(1 - e^{-\frac{\rho^4}{u^2}}) \qquad (\rho^2 = u^2 + v^2)$$

Utilisant les inégalités

$$0 \le 1 - e^{-\rho^4/u^2} \le \frac{\rho^4}{u^2}$$

on trouve :

$$\iint \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2}\,\chi(du,dv) \le \iint e^{-\rho^2}\,du\,dv < \infty$$

Il s'agit donc bien d'une F.A.I.-1 : mais Z n'est nullement de la forme $Y(x,y) + X(y)$ où Y serait une F.A.I.-0, car la condition :

$$\iint 1_{\{v \neq o\}}\,\frac{\chi(du,dv)}{\rho^2} < \infty$$

n'est certainement pas vérifiée.

Voici un autre exemple.

Cas où $\mathcal{F}$ est engendrée par (1, x, y et xy).

Supposons toujours la F.A.I.-$\mathcal{F}$ Z(x,y) différentiable. Les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

doivent être stationnaires, donc aussi le Laplacien ΔZ. Mais ΔZ est stationnaire si et seulement si Z est une F.A.I.-1.

Ainsi, dans ce second exemple, le fait d'avoir ajouté la fonction xy à l'espace des dérivées linéaires n'a pas fait apparaître de F.A.I. nouvelle. Dans le premier exemple, au contraire, le fait d'ajouter la fonction y à l'espace des dérives constantes introduit des éléments nouveaux et conduit à un espace de F.A.I.-$\mathcal{F}$ strictement compris entre celui des F.A.I.-0 et celui des F.A.I.-1.

Cas où $\mathcal{F}$ est engendrée par (1, x, y et $x^2 + y^2$).

Ici, Z doit être une F.A.I.-2 telle que $\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y}$ soit stationnaire. La mesure spectrale χ doit vérifier la condition

$$\iint \frac{u^2 v^2}{\rho^6} \chi(du, dv) < \infty$$

On obtient une solution non triviale en prenant pour χ la mesure de densité

$$e^{-\rho^2}(1 - e^{-\frac{\rho^6}{u^2 v^2}})$$

L'espace des F.A.I.-$\mathcal{F}$ est donc cette fois strictement compris entre F.A.I.-1 et F.A.I.-2.

F.A.I.-$\mathcal{F}$ complexes.

Ainsi, la structure des F.A.I. polynomiales incomplètes est loin d'être simple. Si l'on ajoute à cela le fait qu'il semble difficile, en général, lorsque $\mathcal{F}$ est un espace de polynomes trigonométriques, de trouver une bijection simple entre F.A.I.-$\mathcal{F}$ et

et F.A.I. polynomiales (sauf dans le cas $n = 1$), on conçoit qu'une théorie générale soit à peu près inaccessible.

A dire vrai, ces difficultés sont liées au fait que nous cherchons des F.A.I. réelles. Dans le cas des F.A.I. complexes, la théorie générale est beaucoup plus facile à construire.

De fait, si $\mathfrak{F}$ est un espace de polynomes (à coefficients éventuellement complexes) invariant par translation, on peut, pour tout vecteur α réel, lui associer biunivoquement un espace $\mathfrak{F}_\alpha$ dont les éléments sont les fonctions f_α définies par

$$f_\alpha(x) = f(x)\, e^{2i\pi <\alpha x>} \qquad (f \in \mathfrak{F})$$

L'espace $\mathfrak{F}_\alpha$ est invariant par translation en même temps que $\mathfrak{F}$ et ses élements sont des polynomes monochromatiques.

Il est clair, également, que l'orthogonal $\mathfrak{F}_\alpha^\perp$ de $\mathfrak{F}_\alpha$ est constitué des mesures μ_α de la forme

$$\mu_\alpha(dx) = e^{-2i\pi <\alpha x>}\, \mu(dx) \qquad (\mu \in \mathfrak{F}^\perp)$$

La relation $\tau_h\, \mu_\alpha = (\tau_h\, \mu)_\alpha$ est fausse, puisque l'on trouve

$$(\tau_h\, \mu_\alpha)(dx) = e^{-2i\pi <\alpha h>}\, (\tau_h\, \mu)_\alpha(dx)$$

Cependant, si Z est une F.A.I.-$\mathfrak{F}$, la F.A.G. définie sur $\mathfrak{F}_\alpha$ en posant

$$Z_\alpha(\mu_\alpha) = Z(\mu) \qquad (\mu \in \mathfrak{F}^\perp)$$

est en fait une F.A.I.-$\mathfrak{F}_\alpha$. Car on trouve :

$$Z_\alpha(\tau_h\, \mu_\alpha) = e^{2i\pi <\alpha h>}\, Z_\alpha((\tau_h\, \mu)_\alpha) = e^{2i\pi <\alpha h>}\, Z(\tau_h\, \mu)$$

D'où résulte, en utilisant le produit scalaire sur l'espace de Hilbert complexe :

$$< Z_\alpha (\tau_h \mu_\alpha) , Z_\alpha(\tau_{h'} \mu_\alpha) > = < Z(\tau_h \mu), Z(\tau_{h'} \mu) >$$

$$= < Z(\mu), Z(\tau_{h'-h} \mu) >$$

La F.A. complexe $h \to Z_\alpha(\tau_h \mu_\alpha)$ est donc bien stationnaire d'ordre 2.

(On remarquera que $Z \to Z_\alpha$ est un isomorphisme de l'espace H muni du groupe d'opérateurs U_h sur H muni du groupe d'opérateurs unitaires V_h définis par $V_h = \exp (2 i \pi <\alpha h>) U_h$ différent du groupe U_h).

A toute représentation $\tilde{Z}(x)$ de la F.A.I.-$\mathfrak{F}$ Z, ce procédé associe manifestement la représentation $\tilde{Z}_\alpha(x)$ de la F.A.I.-$\mathfrak{F}_\alpha$ Z_α défini par :

$$\tilde{Z}_\alpha(x) = e^{2i\pi <\alpha x>} \tilde{Z}(x) \tag{3-2}$$

De même, si K(h) est une C.G. (complexe) pour Z, on obtient une C.G. K_α pour Z_α en posant simplement

$$K_\alpha(h) = e^{2i\pi <\alpha h>} K(h)$$

Plus généralement, si l'espace $\mathcal{G}$ est une somme d'espaces de polynomes monochromatiques $\mathfrak{F}_{\alpha_p}$ (α_p vecteurs réels distincts), soit :

$$\mathcal{G} = \sum_{p=1}^{N} \mathfrak{F}_{\alpha_p}$$

On peut montrer, à l'aide de considérations simples d'analyse spectrale, que toute F.A.I.-$\mathcal{G}$ Z est somme de F.A.I.-$\mathfrak{F}_{\alpha_p}$ du type précédent orthogonales deux à deux. Autrement dit : toute représentation $\tilde{Z}(x)$ de Z est du type :

$$\tilde{Z}(x) = \sum_p e^{2i\pi <\alpha_p x>} \tilde{Z}_p x \tag{3-3}$$

où les $\tilde{Z}_p(x)$ sont des représentations de F.A.I. polynomiales orthogonales.

Notons bien que si les F.A. complexes définies par (3-2) ou (3-3) sont effectivement des F.A.I., cela n'implique (malheureusement) en aucune façon que leurs parties réelle et imaginaire soient, séparément, des F.A.I. réelles.

Voici, pourtant, un procédé simple permettant de construire certaines classes de F.A.I.-$\mathfrak{F}$ réelles :

F.A.I.-$\mathfrak{F}$ réelles.

Soit, d'abord, $Y(x)$ la représentation nulle en $x = 0$ d'une F.A.I.-0 réelle. Au lieu de définir une F.A.I. complexe par la formule (3-2) prenons :

$$(3\text{-}4) \qquad Y_\alpha(x) = \cos\,(2\pi < \alpha x > + \varphi)\; Y(x)$$

où φ est une phase aléatoire, uniformément distribuée sur $(0,2\pi)$ et indépendante de $Y(x)$. Comme on a :

$$\cos\,(2\pi < \alpha x > + \varphi) = A \cos 2\pi < \alpha x > + B \sin 2\pi < \alpha x >$$

(avec $< AB > = 0$, $\|A\|^2 = \|B\|^2 = \frac{1}{2}$, A et B indépendantes de $Y(x)$) on vérifie immédiatement que $Y_\alpha(x)$ est une représentation d'une F.A.I. sur l'espace $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\alpha + \mathfrak{F}_{-\alpha}$ engendré par les deux fonctions $\cos\,(2\pi < \alpha x >)$ et $\sin\,(2\pi < \alpha x >)$. De plus, si $-\gamma(h)$ est une C.G. pour la F.A.I.-0 Y, on obtient une C.G. K_α pour Y_α en prenant

$$(3\text{-}5) \qquad K_\alpha(h) = -\frac{1}{2} \cos\,(2\pi < \alpha h >)\; \gamma(h)$$

Pour construire des simulations, il sera préférable (pour atténuer les dégénérescences) de superposer plusieurs composantes indépendantes et isomorphes du type (3-4), soit :

$$(3\text{-}4') \qquad Y_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \cos\,(2\,\pi < \alpha x > + \varphi_i)\; Y_i(x)$$

Bien que ces formules (3-4) ou (3-4') ne donnent pas la forme générale des F.A.I. monochromatiques réelles, elles donnent cependant une idée assez claire du type de comportement très aberrant que l'on peut attendre de celles-ci.

Si maintenant nous considérons plusieurs fréquences, on peut envisager différents procédés. Limitons-nous au cas de deux fréquences (vectorielles) α et β seulement. On peut, à partir d'une seule F.A.I.-0 $Y(x)$, poser

$$Y_{\alpha\beta}(x) = \cos\,(2\pi < \alpha x > + \varphi_1)\,\cos\,(2\pi < \beta x > + \varphi_2)\,Y(x)$$

avec deux phases indépendentes φ_1 et φ_2. La C.G. correspondante est

$$K_{\alpha\beta}(h) = -\cos\,(2\pi < \alpha h >)\,\cos\,(2\pi < \beta h >)\,\gamma(h)$$

On peut aussi superposer deux composantes $Y_\alpha(x)$ et $Y_\beta(x)$ indépendantes du type (3-2). On trouve alors une C.G. de la forme :

$$K_{\alpha\beta}(h) = -\cos\,(2\pi < \alpha h >)\,\gamma_1(h) - \cos\,(2\pi < \beta h >)\,\gamma_2(h)$$

On peut, enfin, évidemment, superposer des F.A.I. obtenues par ces différents procédés.